МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

«Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева»

Панюшкин С.В.

Делимость чисел

Орел – 2018

Рецензент: доктор педагогических наук, профессор кафедры геометрии и методики преподавания математики О.В. Тарасова
Технический редактор: кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии и методики преподавания математики Т.Л. Овсянникова

Панюшкин С.В.

Делимость чисел. Методическая разработка.- Орел: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2018. – 14с.

Данная методическая разработка адресована учащимся общеобразовательных организаций, слушателям Подготовительного отделения. В разработке содержатся основные теоретические сведения школьного курса математики, набор задач по этому разделу, советы и рекомендации по методике решения задач.

Цель представленных в разработке материалов – помочь слушателям Подготовительного отделения ФГБОУ ВО ОГУ имени И.С.Тургенева при подготовке к экзамену по математике.

ФГБОУ ВО ОГУ им. И.С. Тургенева, 2018 г.

Содержание

Введение

Говорят, что целое число a делится на целое число b, если существует такое целое число m, что выполняется равенство: $a=b\cdot m$.

Число a при этом называется *делимым*, число b – *делителем*, число m – *частным*. В этом случае говорят также, что число a *кратно* числу b.

1. Четные и нечетные числа

Целое число называется *четным*, если оно делится на 2, и *нечетным*, если оно не делится на 2.

Любое четное число можно представить в виде $2n$, а любое нечетное − в виде $2n$-1 или $2n$+1, где число n - целое.

Два целых числа называются числами *одинаковой четности*, если оба они четные или оба нечетные. Два целых числа называются числами *разной четности*, если одно из них четное, а другое нечетное.

Рассмотрим свойства четных и нечетных чисел, важные для решения задач.

1. Если хотя бы один множитель произведения двух (или нескольких) чисел четен, то и все произведение четно.

2. Если каждый множитель произведения двух (или нескольких) чисел нечетен, то и все произведение нечетно.

3. Сумма любого количества четных чисел – число четное.

4. Сумма четного и нечетного чисел – число нечетное.

5. Сумма любого количества нечетных чисел – число четное, если число слагаемых четно, и нечетное, если число слагаемых нечетно.

Пример 1. Произведение трех целых чисел нечетно. Четна или нечетна их сумма?
Решение. Произведение трех целых чисел может быть нечетным только тогда, когда все они нечетны (иначе оно было бы четным по свойству 1). Значит, по свойству 5, сумма этих чисел должна быть нечетна.

Пример 2. Четна или нечетна сумма всех натуральных чисел от 1 до 17?
Решение. Из первых 17 натуральных чисел 8 четных: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, остальные 9 нечетны. Сумма всех четных чисел четна (свойство 3), сумма нечетных чисел нечетна (свойство 5). Тогда сумма всех 17 чисел нечетна как сумма четного и нечетного чисел (свойство 4).

Пример 3. В пятиэтажном доме с четырьмя подъездами посчитали количество жителей на каждом этаже и в каждом подъезде. Могут ли все 9 полученных чисел быть нечетными?
Решение. Обозначим число жителей на этажах соответственно a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, а число

жителей в подъездах соответственно b_1, b_2, b_3, b_4. Тогда общее число жителей в доме можно подсчитать двумя способами – по этажам и по подъездам:

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=b_1+b_2+b_3+b_4.$$

Если бы все эти 9 чисел были нечетными, то сумма слева была бы нечетной, а справа – четной (свойство 5), но это невозможно. Следовательно, все эти 9 чисел не могут быть нечетными.

Пример 4. Четно или нечетно произведение $(7a+b-2c+1)(3a-5b+4c+10)$?

Решение. Можно перебирать случаи, связанные с четностью или нечетностью чисел a, b и c (8 случаев!), но мы поступим иначе. Сложим множители:

$(7a+b-2c+1)+(3a-5b+4c+10)=10a-4b-2c+11$.

Так как полученная сумма нечетна, то один из множителей данного произведения четен, а второй нечетен. Следовательно, само произведение четно.

Свойства четности и нечетности целых чисел можно эффективно применять и в тех случаях, когда условие задачи не содержит упоминания о них. Такой метод называется *проверкой на четность*.

Пример 5. Разменный автомат меняет одну монету на 5 других. Можно ли разменять металлический рубль на 20 монет?

Решение. При каждом размене общее число монет увеличивается на 4, а значит, не меняет свою четность. Так как вначале была одна монета, то число монет всегда будет нечетным и не может равняться 20.

Пример 6. Можно ли расставить знаки «+» и «–» между числами 1, 2, …, 9 так, чтобы полученная сумма равнялась нулю?

Решение. При любой расстановке знаков сумма содержит 5 нечетных чисел (1, 3, 5, 7, 9), значит, всегда будет нечетной (свойство 5) и никогда не может равняться 0.

Пример 7. Перед каждым из чисел 4, 5, …, 8 и 14, 15, …, 20 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение. Если все числа взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна: 74+…+8+514+…+20=805.

Так как она нечетна, то число нечетных слагаемых в ней нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел: 74-5-6+7+8+5-14-15+16-17+18-19+20=7·8-5·11=1.

2. **Признаки делимости**

Делимость одного числа на другое можно установить, и не прибегая к непосредственному делению. Для этой цели существует ряд признаков:

Признак делимости на 2: число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра четна.

Признак делимости на 5: число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра – 0 или 5.

Признак делимости на 4: число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное его двумя последними цифрами, делится на 4.

Признак делимости на 8: число делится на 8 тогда и только тогда, когда число, образованное его тремя последними цифрами, делится на 8.

Признак делимости на 3: число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Признак делимости на 9: число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Признак делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда знакочередующаяся сумма его цифр (разность суммы цифр, стоящих на четных местах, и суммы цифр, стоящих на нечетных местах) делится на 11.

Пример 1. Найдите все значения цифры a, если число $875a$ делится на 6.

Решение. Если число делится на 6, тогда оно делится на 2 и на 3. По признаку делимости на 3 сумма $8+7+5+a=20+a$ также должна делиться на 3. Учитывая, что a – цифра, получаем, что $a=1$, $a=4$ или $a=7$. Но так как данное число делится и на 2, то цифра a должна быть четной. Подходит только $a=4$.

Пример 2. Использовав все цифры от 0 до 9 по одному разу, составьте какое-либо число, делящееся на 11.

Решение. Обозначим сумму цифр числа, стоящих на нечётных местах S_1, а сумму цифр числа, стоящих на четных местах – S_2. Очевидно, $S_1+S_2=45$. По признаку делимости на 11 S_1-S_2 делится на 11, кроме того, она нечетна, поскольку S_1+S_2 нечетна. Следовательно, S_1-S_2 может принимать значения 11, -11, 33, -33. Заметим, что в каждую из сумм S_1 и S_2 входит по пять цифр. Рассмотрим, например, случай, когда $S_1-S_2 =11$. Зная, что $S_1+S_2 =45$, можно найти $S_1=28$, $S_2=17$. Тогда, например, можно получить $S_1= 9+8+3+6+2=28$, а $S_2=7+5+4+1+0=17$. Само число можно записать так: 9785346120.

3. **Свойства делимости**

Натуральные числа a и b называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, кроме единицы.

Рассмотрим некоторые свойства делимости целых чисел, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1. Если целые числа a и b делятся на целое число c, то их сумма и разность делятся на c.

Это свойство можно обобщить на сумму любого количества целых чисел, причем допускается, что в сумме перед некоторыми числами вместо знака плюс стоит знак минус.

2. Если в сумме нескольких чисел все слагаемые, кроме одного, делятся на целое число a, а это слагаемое не делится на a, то вся сумма не делится на a.
3. Если целое число a делится на целое число b, а b делится на целое число c, то a делится на c.
4. Если целое число a делится на целое число b, то при любом целом k произведение ka делится на b.
5. Если целое число a делится на целое число k, целое число b делится на целое число n, то произведение ab делится на произведение kn.
6. Если целое число a делится на каждое из двух взаимно простых натуральных чисел b и c, то a делится и на произведение bc.
7. Если произведение целых чисел ab делится на c, и a взаимно просто с c, то b делится на c.

<u>Пример 1.</u> Докажите, что число a^3-a, где a – целое, делится на 6.

Решение. Разложим данное выражение на множители: $a^3-a=a(a^2-1)=a(a-1)(a+1)$. Из трёх последовательных целых чисел a, a-1, a+1 одно (и только одно) делится на 3, поэтому и всё произведение делится на 3 (по свойству 4).

Из трёх последовательных целых чисел a, a-1, a+1 хотя бы одно делится на 2, поэтому и всё произведение делится на 2 (по свойству 4).

Поскольку данное выражение делится на 2 и на 3, а эти числа взаимно просты, то оно делится и на 6 (по свойству 6).

<u>Пример 2.</u> Верно ли, что любое шестизначное число вида *ababab* делится на 13?

Решение. Очевидно, оно делится на число *ab*: $ababab=ab\cdot 10101$,

а число 10101 делится на 13. Значит, и число *ababab* делится на 13 (по свойству 3).

<u>Пример 3.</u> Даны два трехзначных числа, сумма которых делится на 37. Эти числа записаны друг за другом. Верно ли, что полученное шестизначное число делится на 37?

Решение. Обозначим данные трехзначные числа через a и b. Тогда их сумма $a + b$ делится на 37.

Шестизначное число принимает вид $1000a + b$. Преобразуем его, выделяя слагаемое $a + b$: $1000a + b = 999a + (a + b)$.

У полученной суммы не только второе, но и первое слагаемое делится на 37, так как $999a$ делится на 111, а 111 делится на 37. Поэтому и вся сумма делится на 37.

Пример 4. Докажите, что из любых десяти последовательных натуральных чисел можно выбрать три числа a, b и c так, что произведение $a(b + c)$ делится на 100.

Решение. В качестве a возьмем то из десяти последовательных чисел, которое делится на 10; такое a существует и единственно. В качестве b и c выберем любые числа, у которых сумма последних цифр равна 10 (например, у одного последняя цифра равна 3, а у другого – 7). Тогда произведение $a(b + c)$ делится на 100.

4. **Простые и составные числа**

Натуральное число, большее 1, называется простым, если оно делится только на 1 и на само себя. Натуральное число называется составным, если оно имеет больше двух различных делителей.

Принято считать, что 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Теорема 1. Любое натуральное число, большее 1, можно, и притом единственным образом, представить в виде произведения простых чисел.

Это утверждение называется основной теоремой арифметики натуральных чисел.

Среди простых делителей натурального числа могут быть равные, и их произведение можно записать в виде степени. Тогда разложение натурального числа a на простые множители можно представить в следующем виде: $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – различные простые числа, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – натуральные.

Теорема 2. Если натуральное число a разложено на простые множители $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$, то оно имеет ровно $(k_1+1)(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_n+1)$ различных делителей.

Пример 1. Докажите, что множество всех простых чисел бесконечно.

Это теорема Евклида (IV в. до н. э.) из его знаменитого труда «Начала». Она играет важную роль в теории чисел.

Решение. Допустим противное: множество простых чисел конечно и состоит из чисел 2, 3, 5, 7, ..., p, где p – самое большое простое число.

Рассмотрим число $a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot\ldots\cdot p + 1$. Обозначим через q любой простой делитель числа a.

Тогда $q \neq 2$, так как если $q = 2$, то из делимости на 2 числа a и первого слагаемого в правой части равенства следует, что 1 делится на 2, а это неверно. Аналогично доказывается, что $q \neq 3$, $q \neq 5$, $q \neq 7$, … , $q \neq p$.

Получилось, что q – новое простое число, которое не содержится среди исходных чисел. Мы пришли к противоречию.

Остается принять, что множество простых чисел бесконечно.

Пример 2. Числа p и $p + 15$ простые. Найдите p.

Решение. При $p = 2$ получаем $p + 15 = 17$ – простое. При нечётном p число $p + 15$ – чётное, большее 2, значит, оно не может быть простым.

Пример 3. Натуральные числа a и b таковы, что $3a=7b$. Докажите, что число $a+b$ составное.

Решение. Так как $3a$ делится на 7, и 3 и 7 – взаимно простые, то a делится на 7, то есть $a=7c$. Тогда $21c=7b$, значит, $b=3c$. Тогда $a+b=7c+3c=10c$, таким образом, оно всегда делится на 10.

Пример 4. Найдите все натуральные a, при которых число $a^2 - 10a + 21$ простое.

Решение. Разложим квадратный трехчлен на множители: $a^2 - 10a + 21 = (a - 3)(a - 7)$.

Полученное число будет простым, когда один из множителей равен 1, а другой – простому числу или когда один из них равен -1, а другой равен $-p$, где число p – простое. Переберем все случаи.

1. Пусть $a - 3 = 1$. Тогда $a = 4$, откуда $a - 7 = -3$. Получилось, что число $a^2-10a+21$ отрицательно. Значит, этот случай невозможен.
2. Пусть $a - 7 = 1$. Тогда $a = 8$, $a - 3 = 5$, где 5 – число простое. Следовательно, значение $a = 8$ удовлетворяет требованию задачи.
3. Положим $a - 3 = -1$. В этом случае $a = 2$, $a - 7 = -5$. Так как число 5 – простое, то значение $a = 2$ также подходит.
4. Пусть $a - 7 = -1$. Тогда $a = 6$, $a - 3 = 3$. Поскольку здесь $(a - 3)(a - 7) < 0$, то этот случай невозможен.

Пример 5. Определите, сколько делителей у числа 5000.

Решение. $5000=2^3 \cdot 5^4$. По теореме 2 это число имеет ровно $(3+1)(4+1)=20$ делителей. В самом деле, все делители этого числа можно получить в клетках таблицы размером 5×4, перемножая числа соответствующего столбца и строки.

	5^0	5^1	5^2	5^3	5^4
2^0	1	5	25	125	625
2^1	2	10	50	250	1250
2^2	4	20	100	500	2500
2^3	8	40	200	1000	5000

5. **Деление с остатком. Сравнения**

Пусть a – произвольное целое число, b – натуральное. Разделить a на b с остатком – это значит найти такие целые числа q и r, $0 \le r < b$, что выполняется равенство $a = bq + r$ (a – делимое, b – делитель, q – частное или неполное частное, r – остаток). Такое представление для заданных a и b единственно.

Если два целых числа a и b при делении на m имеют равные остатки, то они называются *сравнимыми по модулю m*. Будем записывать это в виде $a \equiv b \pmod{m}$, такая запись называется *сравнением*. Поскольку 0 делится на любое натуральное число, то запись $a \equiv 0 \pmod{m}$ означает, что a делится на m.

Имеют место следующие свойства: если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то

1. $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
2. $ac \equiv bd \pmod{m}$
3. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ при всех натуральных k.

Сравнения позволяют в компактной форме записывать результат деления с остатком, а их свойства эффективно применяются к решению многих задач.

Пример 1. Докажите, что квадрат натурального числа при делении на 3 не может давать в остатке 2.

Решение. Так как в условии задачи речь идёт о делении квадрата на 3 с остатком, целесообразно рассмотреть всевозможные случаи, возникающие при делении на 3 исходного натурального числа. Обозначим его a. Рассмотрим следующие варианты:

1) a даёт при делении на 3 остаток 0 (делится нацело), $a \equiv 0 \pmod{3}$. Нам необходимо знать остаток от деления a^2 на 3, для этого применим свойство 3: $a^2 \equiv 0^2 \pmod{3}$, $a^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Значит, в этом случае остаток всегда равен 0.

2) a даёт при делении на 3 остаток 1, то есть, $a \equiv 1 \pmod{3}$. Тогда $a^2 \equiv 1^2 \pmod{3}$, $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Значит, в этом случае остаток всегда равен 1.

3) a даёт при делении на 3 остаток 2, то есть, $a \equiv 2 \pmod{3}$. Тогда $a^2 \equiv 2^2 \pmod{3}$, $a^2 \equiv 4 \pmod{3}$, $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$. (Так как 4 и 1 дают при делении на 3 один и тот же остаток 1). И в этом случае остаток всегда равен 1.

Мы рассмотрели все возможные случаи, и ни в одном из них остаток не может равняться 2.

Пример 2. Найти остаток от деления на 17 числа 2010^{2011}.

Решение. Далее будем пользоваться записью вида $a \equiv b \equiv c \equiv \ldots \equiv d \pmod{m}$ означающей, что при делении на m число a дает тот же остаток, что и b, b – такой же остаток, что и c, то есть все числа $a, b, c, \ldots, d$ дают одинаковые остатки при делении на m.

Разделив 2010 на 17 с остатком, найдём небольшое число, с которым сравнимо 2010 по модулю 17. $2010 = 17\cdot 118 + 4$, значит, $2010 \equiv 4 \pmod{17}$.

Применяя свойство 3, получаем: $2010^2 \equiv 4^2 \equiv -1 \pmod{17}$. $2010^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{17}$. Следовательно, при любом натуральном k будет $2010^{4k} \equiv 1 \pmod{17}$. Но $2011 = 4\cdot 502 + 3$. Значит, $2010^{2011} \equiv 2010^{4\cdot 502+3} \equiv 2010^{4\cdot 502}\cdot 2010^3 \equiv 2010^3 \equiv 2010^2\cdot 2010 \equiv (-1)\cdot 4 \equiv 13 \pmod{17}$.

Итак, искомый остаток равен 13.

6. НОД и НОК целых чисел

Целое число d называется общим делителем чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, если каждое из этих чисел делится на d. В дальнейшем мы будем говорить о натуральных делителях.

Наибольший из общих делителей чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ называется их наибольшим общим делителем и обозначается НОД($a_1, a_2, \dots, a_k$).

Если НОД(a, b) = 1, то числа a и b являются взаимно простыми. Аналогично если НОД($a_1, a_2, \dots, a_k$) = 1, то $a_1, a_2, \dots, a_k$ взаимно просты.

Если при этом НОД любой пары из них равен 1, то числа $a_1, a_2, \dots, a_k$ называются попарно взаимно простыми. Например, числа 12, 15, 28 взаимно просты, но не попарно взаимно просты.

Полезно знать следующие свойства НОД:

1. НОД(ka,kb) = $k\cdot$НОД(a,b)
2. Если d – НОД(a,b), то числа $\frac{a}{d}$ и $\frac{b}{d}$ взаимно просты.
3. Если d – наибольший общий делитель чисел a и b, то существуют такие целые числа x и y, что $ax + by = d$. Это равенство называется линейным представлением НОД чисел a и b.
4. НОД(a,b,c) = НОД (НОД(a,b), c).

Введем теперь понятие наименьшего общего кратного. Целое число m называется общим кратным чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, если m делится на каждое из этих чисел. В дальнейшем мы будем говорить о натуральных общих кратных. Наименьшее из общих кратных чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ называется их наименьшим общим кратным и обозначается НОК($a_1, a_2, \dots, a_k$). Полезны будут следующие свойства НОК:

1. НОК(ka,kb) = $k\cdot$НОК(a,b)
2. НОК(a,b) $\cdot$ НОД(a,b) = ab. В частности, НОК взаимно простых чисел будет равно их произведению.
3. НОК (a,b,c) = НОК (НОК(a,b), c).

В школе изучаются методы нахождения НОД и НОК, основанные на разложении натуральных чисел на простые множители. Пусть нам надо найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел a и b – НОД(a,b) и НОК(a,b). Разложим каждое из данных чисел на простые множители. Если простое число p входит в одно разложение k раз (в степени k), а в другое – m раз и $k \le m$, то p входит в разложение на простые множители НОД(a,b) в степени k, а в разложении на простые множители НОК(a,b) – в степени m.

Так, например, если $a = 252 = 2^2{\cdot}3^2{\cdot}7$, $b = 528 = 2^4{\cdot}3{\cdot}11$, то НОД($a,b$) $= 2^2{\cdot}3 = 12$, НОК(a,b) $= 2^4{\cdot}3^2{\cdot}7{\cdot}11 = 11088$.

Рассмотренные методы обобщаются на произвольное число натуральных чисел. Простое число p входит в разложение на простые множители НОД($a,b,c,$ ...) в степени, равной наименьшей из степеней, в которых оно входит в разложение на простые множители чисел $a,b,c,$... а в НОК($a,b,c,$ ...) это p входит соответственно в наибольшей степени.

Пример 1. В магазин привезли меньше 600, но больше 500 тарелок. Когда стали раскладывать их десятками, то не хватило 3 тарелок до полного числа десятков, а когда стали раскладывать дюжинами (по 12 тарелок), то осталось 7 тарелок. Сколько тарелок привезли в магазин?

Решение. Тарелок $10n+7$ или $12m+7$. Значит, убирая 7 тарелок, получаем число, делящееся на НОК(10,12) = 60. т.е. число тарелок записывается как $60k+7$. В пределах от 500 до 600 находится одно такое число – 547.

Пример 2. Найдите все пары натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 78, а наибольший общий делитель равен 13.

Решение. Искомые числа можно записать 13a и 13b, тогда $169ab = 13{\cdot}78$ (по свойству 2 НОК), откуда $ab = 6$. Так как a и b – натуральные, то либо $a = 1$, $b = 6$, либо $a = 2$, $b = 3$, или наоборот. Отсюда получаем пары чисел 78 и 13 или 39 и 26.

7. **Уравнения в целых числах**

Уравнениями в целых числах называются уравнения (с одной или несколькими переменными) для которых требуется найти только целочисленные решения или доказать, что таких решений нет. При решении таких уравнений часто используются различные свойства делимости.

Пример 1. Решите в целых числах уравнение: $x^2 - y^2 = 17$.

Решение. Запишем уравнение в виде $(x–y)(x+y)=17$. Множители здесь – целые числа, поэтому они могут быть только делителями 17. Переберём все возможные варианты:

1. $x–y=1$, $x+y = 17$, тогда $x=9$, $y=8$.
2. $x–y=17$, $x+y=1$, тогда $x=9$, $y=-8$.
3. $x–y=-1$, $x+y=-17$, тогда $x=-9$, $y=-8$.
4. $x–y=-17$, $x+y=-1$, тогда $x=-9$, $y=8$.

Пример 2. Решите в целых числах уравнение: $x^2 + y^2 = 17$.

Решение. Здесь левую часть невозможно разложить на множители, но можно заметить, что x и y могут принимать лишь ограниченный набор значений, а именно, если x или y превосходит 4, то левая часть всегда больше правой. Перебирая значения $-4 \le x \le 4$, $-4 \le y \le 4$, находим решения: $x = 4, y = 1$; $x = -4, y = 1$; $x = 4, y = -1$; $x = -4, y = -1$; $x = 1, y = 4$; $x = -1, y = 4$; $x = 1, y = -4$; $x = -1, y = -4$.

Пример 3. Решите в целых числах уравнение: $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.

Решение. Выразим y через x: $y=\frac{2x^2+9x-2}{2x-1}$ и преобразуем полученную дробь:

$y=\frac{2x^2-x+10x-5+3}{2x-1}=x+5+\frac{3}{2x-1}$. Поскольку x и y – целые, $\frac{3}{2x-1}$ тоже должно быть целым числом. Имеем четыре возможности:

1. $2x - 1 = 1$, тогда $x = 1, y = 9$.
2. $2x - 1 = -1$, тогда $x = 0, y = 2$.
3. $2x - 1 = 3$, тогда $x = 2, y = 8$.
4. $2x - 1 = -3$, тогда $x = -1, y = 3$.

Пример 4. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} x+yz=8, \\ y+xz=7. \end{cases}$

Решение. Вычтем из первого уравнения второе: $x-y+yz-xz=1$, $(x-y)(1-z)=1$. Имеем два случая: 1) $\begin{cases} x-y=1, \\ 1-z=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=y+1, \\ z=0. \end{cases}$ Подставляя $z=0$ в исходную систему, находим $x=8$, $y=7$. 2) $\begin{cases} x-y=-1, \\ 1-z=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=y-1, \\ z=2. \end{cases}$ Подставляя в первое уравнение исходной системы полученные результаты, находим $y-1+2y=8$, откуда $y=3$, $x=2$, $z=2$.

Заметим, что уравнения данной системы можно было и складывать. Но тогда мы получили бы уравнение $(x+y)(1+z)=15$, для решения которого пришлось бы рассматривать 8 случаев.

Задачи

1. Четна или нечетна сумма всех нечетных чисел от 1 до 2010?

2. Может ли разность квадратов двух натуральных чисел равняться 2010?

3. 109 яблок разложены по пакетам. В некоторых пакетах лежит по x яблок, в других по 3 яблока. Найдите все возможные значения x, если всего пакетов 20.

4. Докажите, что число $1000^{2002} + 1001^{2001}$ составное.

5. Найдите все простые числа, каждое из которых равно разности кубов двух простых чисел.

6. Найдите все натуральные n, при которых число n^4+4 – простое.

7. Найти наименьшее натуральное число, большее 1 и дающее при делении на 2, 3, 4, 5, 6 остаток, равный 1.

8. Докажите, что если a не делится на 3, то число $5a^2 + 1$ делится на 3.

9. Два рыбака поймали 80 рыб, причем 5/9 улова первого составляли караси, а 7/11 улова второго – окуни. Сколько рыб поймал каждый из них?

10. Найдите все пары натуральных чисел (x,y), удовлетворяющие уравнению $xy - x + 4y = 15$.

11. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} x + yz = 19, \\ y + xz = 98. \end{cases}$

12. Найдите все числа, кратные 15, у которых ровно 15 делителей.

Панюшкин Сергей Владимирович

Делимость чисел

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

Технический редактор: Т.Л. Овсянникова

ФГБОУ ВО ОГУ им. И.С. Тургенева, 2018 г.