ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени И.С. ТУРГЕНЕВА»

Панюшкин С.В., Козичева Л.М.

Делимость чисел в курсе алгебры 8-9 классов с углубленным изучением математики

Орел – 2018

Рецензент: доктор педагогических наук, профессор кафедры геометрии и методики преподавания математики О.В. Тарасова
Технический редактор: кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии и методики преподавания математики Т.Л. Овсянникова

Панюшкин С.В., Козичева Л.М.

Делимость чисел в курсе алгебры 8-9 классов с углубленным изучением математики. Методическая разработка.- Орел: ОГУ имени И.С. Тургенева, 2018. – 56с.

Данная методическая разработка адресована учащимся общеобразовательных организаций, слушателям Подготовительного отделения. В разработке содержатся основные теоретические сведения школьного курса математики, набор задач по этому разделу, советы и рекомендации по методике решения задач на данную тему.

Цель представленных в разработке материалов – помочь слушателям Подготовительного отделения ФГБОУ ВО ОГУ имени И.С.Тургенева при подготовке к основному государственному экзамену (ОГЭ).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Тема данной методической разработки – «Делимость чисел в курсе алгебры 8-9 классов с углубленным изучением математики».

В разработке исследуется вопрос о необходимости изучения данной темы, а так же приведены приемы и методы изложения учебного материала.

Может показаться, на первый взгляд, что теория делимости чисел не представляет интереса для восьми- и девятиклассников, так как они уже знают деление с остатком, разложение чисел на простые множители, наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель. Однако, эти сомнения неосновательны. В школьном курсе арифметики, теория делимости излагается, в сущности без доказательств, на примерах, при этом не раскрывается ее логическая структура. Между тем, теория делимости является одной из тех немногих глав математической науки, которую можно без всяких пропусков и сокращений сообщить школьникам.

Обладая логической стройностью и завершенностью, материал разработки разбит на несколько параграфов, включающих самые важные определения, свойства, теоремы. Каждая тема сопровождается примерами, иллюстрирующими применение того или иного свойства при решении задач, подобраны опорные задачи, даны упражнения с ответами, решениями и указаниями.

Данная работа включает теорему Евклида о существовании сколь угодно больших простых чисел, алгоритм Эратосфена построения таблицы простых чисел и алгоритм Евклида для отыскания наибольшего общего делителя с применением к решению линейных уравнений с двумя неизвестными в целых числах. Уже из этого перечня видна исключительная роль, которую играет тема «Делимость чисел» в математическом воспитании подростка. Ведь упомянутые предложения и методы, составляя фундамент теории чисел, в то же время представляют простейшие доступные школьнику примеры теорем существования и единственности и примеры алгоритмов, без чего немыслимо создать верное представление о математической науке.

Учитывая возраст учащихся, уровень их математического развития, в данной методической разработке сложные теоремы предложены без доказательства, а элементарные свойства и утверждения выносятся на самостоятельное рассмотрение.

Исходя из вышесказанного, можно отметить, что данная работа направлена на реализацию следующих задач:

- ✓ обобщение и систематизация знаний, полученных в курсе математики 5- 6 классов;
- ✓ реализация внутрипредметных связей, способствующих лучшему усвоению материала;
- ✓ овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения к решению задач;
- ✓ интеллектуальное развитие учащихся, формирование алгоритмической, логической и эвристической составляющей мышления;
- ✓ формирование базы для продолжения математического образования.

1. Делимость чисел в программе по математике и учебниках для классов с углубленным изучением предмета.

Делимость чисел встречается в программе по математике уже в 6 классе. Рассмотрение этой темы продолжается в курсе алгебры 8 класса.

В настоящее время существует несколько учебников по алгебре, адресованных учащимся с углубленным изучением математики. Программы все чаще требуют особого внимания к вопросам данного раздела, но, как показывает практика, немногие авторы уделяют теории делимости должное внимание. Например, учебник по алгебре для 8 класса С. М. Никольского, М. К. Потапова, Н. Н. Решетникова, А. В. Шевкина (М.: Просвещение, 2000) не содержит раздела «Делимость чисел». И как отмечают сами авторы в предисловии данного учебника, это учебное пособие нового типа, где, видимо, таким «неинтересным вопросам» теории делимости чисел просто не нашлось места.

Разумеется, выбор учебника – это, в конечном счете, дело вкуса учителя. Просмотрев и составив «диагностику» многочисленных пособий по алгебре для 8 класса с углубленным изучением предмета относительно темы «Делимость чисел», можно придти к следующему выводу. К оптимальным вариантам учебников по алгебре для 8 класса, отражающим данный вопрос следует отнести учебник Н. Я. Виленкина (М.: Просвещение, 1995) и учебник Ю. А. Макарычева, Н. Г. Миндюка. Данные пособия удовлетворяют общепринятым критериям оценки учебников: соответствуют утвержденной программе, сочетают научность изложения с ясностью и доступностью для понимания школьника. Теоретический материал и практическая часть по теме «Делимость чисел» хорошо сбалансированы. Также теоретический и практический материал в данных пособиях изложен в разумном объеме, не перегружен тематически и при этом создает у обучающихся законченное и правильное представление о понятии делимости чисел. Глава «Делимость чисел»(впрочем, как и остальные главы) заканчивается подборкой задач для самостоятельного решения, к большинству из них даны ответы и указания. Таким образом, вопросы делимости чисел здесь рассмотрены достаточно полно и интересно.

Проанализировав учебные программы по теме «Делимость чисел», составленные к различным учебным пособиям, необходимо было определить наиболее оптимальное поурочное планирование. При разработке планирования данной темы использован учебно- методический комплект для углубленного изучения математики, в который входит учебник Алгебра – 8 кл. (авт. Ю. А. Макарычев, Н. Г. Миндюк и др.), учебник Алгебра: Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса (Ю. А. Макарычев, Н. Г. Миндюк), а так же Дидактические материалы по алгебре для 8 класса с углубленным изучением математики (Ю. А. Макарычев, Н. Г. Миндюк). Учебная нагрузка в 8 классе составляет 5 часов алгебры в неделю, всего 170 ч. в год.

Глава 2. Делимость чисел.

- свойство делимости (4 ч.)
- признаки делимости (4 ч.)
- частное и остаток (3 ч.)
- контрольная работа (1 ч.)

Так как тема «Делимость чисел» может быть представлена для изучения в различном объеме, то в данной работе теория делимости представлена единым блоком (не разбита на отдельные уроки). Что касается методики отбора и изложения материала, то это право предоставляется учителю. Именно учитель с учетом недельной нагрузки по алгебре, наличия факультативных занятий, специфики класса и других факторов, способен разработать наиболее эффективную методическую модель изучения той или иной темы.

1. Делимость чисел.

Определение. Целое число a делится на не равное нулю целое число b, если существует такое число q, что $a = bq.$ В таком случае число а называется делимым, b- делителем, а q- частным.

Запись $a \vdots b$ обозначает, что число a делится на число b, т.е. b является делителем числа a, а запись $a \, не \vdots c$ - что число a не делится на число c, т.е. c не является делителем a.

Замечание. В литературе наряду с таким обозначением используется запись «$b|a$» означающая, что b делит a, т.е. является делителем числа a, и запись «$b \nmid a$» – b не делит a, т. е. не является делителем числа a.

Так как для любого b имеем $0 \cdot b = 0,$ то для любого b справедливо, что $0 \vdots b.$ Если $a \vdots b, b \neq 0,$ то существует лишь одно число c такое, что $a = bc,$ называемое частным от деления a на b. В самом деле, пусть $a = bc_1, a = bc_2, (c_1 \neq c_2),$ то $0 = bc_1 - bc_2 = b(c_1 - c_2),$ чего не может быть, т. к. $b \neq 0, a \; c_1 \neq c_2$. Получили противоречие.

Из равенства $a = a \cdot 1 \, и \, a = 1 \cdot a$ следует, что для любого a имеем, что $a \vdots a \, и \, a \vdots 1$, причем $\frac{a}{a} = 1$, при $a \neq 0$ и $\frac{a}{1} = a.$

Запись $\frac{0}{0}$ не имеет числового значения, т.к. для всех b справедливо равенство $0 = b \cdot 0 \, и$ поэтому $\frac{0}{0}$ нельзя определить однозначно. Не имеет числового значения и запись $\frac{a}{0}$ при $a \neq 0,$ так как чае нет числа c такого, что $a = c \cdot 0.$

Легко доказываются следующие утверждения о делимости чисел:

1. Если $a \vdots b, a > 0,$ то $a \geq b;$
2. если $a \vdots b, b \vdots a,$ то $a = b;$
3. если $a \vdots b, b \vdots c,$ то $a \vdots c;$
4. если $a \vdots c, b \vdots c, то \; (a+b) \vdots c \; и \; (a-b) \vdots c;$

5. если $a \vdots c, b$ $не \vdots c$, $то$ $(a+b)$ $не \vdots c$;
6. если $a \vdots b, k \neq 0$, то $ka \vdots kb$;
7. если $ka \vdots kb, k \neq 0$, то $a \vdots b$;
8. если $a \vdots bc$, то $\frac{a}{b} \vdots c$, а если $\frac{a}{b} \vdots c$, то $a \vdots bc$.

Докажем утверждения 4 и 5.

Утверждение 4. Если $a \vdots c, b \vdots c$, $то$ $(a+b) \vdots c$ $и$ $(a-b) \vdots c$.

Доказательство. Поскольку $a \vdots c$ $и$ $b \vdots c$, то $a = c \cdot q_1$ и $b = c \cdot q_2$, где q_1, q_2 – целые числа. Следовательно, $a + b = c(q_1 + q_2)$, $a - b = c(q_1 - q_2)$, что означает, что $(a+b) \vdots c$ $и$ $(a-b) \vdots c$. Ч. т. д.

Утверждение 5. Если $a \vdots c, b$ $не \vdots c$, $то$ $(a+b)$ $не \vdots c$.

Доказательство проводится методом «от противного». Допустим, что $(a+b) \vdots c$. Тогда по утверждению 1, $(a+b) - a = b \vdots c$, но по условию, b $не \vdots c$. Тем самым мы пришли к противоречию, следовательно наше предположение, что $(a+b) \vdots c$. неверно, т. е. $(a+b)$ $не \vdots c$.

Ч. т. д.

Аналогично можно доказать более общее утверждение.

Утверждение. Если $a_1 \vdots c$, $a_2 \vdots c, \ldots, a_{n-1} \vdots c$, $но$ a_n $не \vdots c$, $то$ $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n)$ $не \vdots c$.

<u>Методическое указание.</u> При доказательстве теоремы методом «от противного» сначала допускают, что утверждение этой теоремы неверно. Затем посредствам некоторых рассуждений стараются получить либо заведомо неверное утверждение, либо утверждение, противоречащее условию теоремы. При правильных рассуждениях противоречие может получиться только за счет того, что неверным было первоначальное допущение о том , что теорема неверна. Следовательно утверждение теоремы верно.

Задача 1.1. Докажите, что, если $b \vdots c, a \vdots b$, то $a \vdots c$.

Задача 1.2. Какие из следующих утверждений верны, а какие нет? Верные утверждения докажите, а для неверных приведите противоречащие примеры.

a) Если одно из слагаемых делится на 15, а другое не делится на 15, то сумма не делится на 15.

b) Если каждое из слагаемых не делится на 15, то и их сумма не делится на 15.

c) Если каждый из двух сомножителей не делится на 15, то и произведение не делится на 15.

d) Если один из сомножителей не делится на 15, а другой делится на 15, то их произведение не делится на 15.

e) Если число делится на 15 и 21, то оно делится на их произведение.

f) Если один из сомножителей делится на 3, а другой на 5, то их произведение делится на 15.

g) Если произведение двух сомножителей делится на 15, то хотя бы один из сомножителей делится на 15.

Решение (a), (g)

Утверждение a) верно. Оно следует из утверждения 5.

Утверждение g) неверно. Приведем противоречащий пример: число $3 \cdot 10 = 30 \vdots 15$, но $3\ \textit{не} \vdots 15, 10\ \textit{не} \vdots 15$.

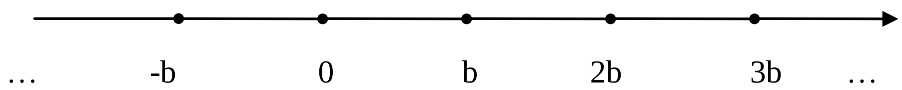
<u>Методическое указание.</u> Подчеркнем, что когда спрашивается: «верна ли какая- то теорема (какое- то математическое утверждение) или нет» - то имеется в виду: «верно ли это <u>при всех</u> значениях букв, <u>во всех</u> возможных случаях?». Поэтому, когда мы доказываем теорему, т. е. доказываем, что она верна, мы должны проводить рассуждения так, чтобы они годились для всех случаев. Если же мы хотим показать, что теорема неверна, то достаточно привести один опровергающий пример (называемый контрпримером): так мы построили ответ на вопрос g) .

Задача 1.3. Докажите, что, если $a^2 \vdots (a+b)$, то $b^2 \vdots (a+b)$.

Задача 1.4. Пусть $ab \vdots c$ и $(a+b) \vdots c$. Докажите, что $(a^2+b^2) \vdots c$.

2. Деление с остатком.

Отметим на числовой оси точки, соответствующие целым числам. Пусть b – некоторое натуральное (целое положительное) число. Выделим на рисунке все целые числа, делящиеся на b.



Они расположены на оси на равном расстоянии (равном b) друг от друга. Эти числа называют кратными числу b.

Пусть теперь какое-то число a не кратно b. Тогда оно попадает между двумя числами, кратными b. Пусть это числа qb и $(q+1)b$.

По этому поводу можно сформулировать следующее утверждение:

Если a и b – целые числа, причем $b>0$, то существует такое целое число q, что $a = bq + r$, где остаток r – целое число, удовлетворяющее равенству $0 \le r < b$. Эти числа q и r определяются по данным a и b единственным образом.

Пусть числа a и b заданы своими записями в десятичной системе. Чтобы найти частное q и остаток r, не нужно, конечно, рисовать отрезок длины a на числовой оси и «укладывать на нем» много раз отрезок, длины b. Для этого существует более рациональный способ. Это – известное всем правило деления одного числа a на другое число b «столбиком». Это деление можно производить до тех пор, пока остаток не станет меньше, чем делитель. Например, если делить 1973 на 31, то при делении получается частное 63 и остаток 20:

$$
\begin{array}{r|l}
-1973 & 31 \\ \cline{2-2}
186 & 63 \\ \cline{1-1}
-113 & \\
93 & \\ \cline{1-1}
20 &
\end{array}
$$

или $1973 = 31 \cdot 63 + 20.$

<u>Методическое указание.</u> В утверждении сказано, что «делитель» b - положительное число, а остаток таков, что $0 \le r < b,$ но про «делимое» a ничего сказано не было. Разберем случай, когда a - отрицательное число.

Пусть, например, $a = -23, b = 7.$ Тогда $-23 = (-4) \cdot 7 + 5, 0 \le 5 < 7,$ т.е. остаток r при делении (-23) на 7 равен 5. Следовательно, условие по-прежнему выполняется.

Задача 2.1. Какой остаток дает число

1. 1005 при делении на 13?
2. (-150) при делении на 19?
3. 1111 при делении на 37?
4. (-54321) при делении на 4?

Решение:

1.

$$
\begin{array}{r|l}
-1005 & 13 \\ \cline{2-2}
91 & 77 \\ \cline{1-1}
-95 & \\
91 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}
$$

т.е. $1005 = 77 \cdot 13 + 4$

Ответ: 4.

2. $-150 = (-8) \cdot 19 + 2$

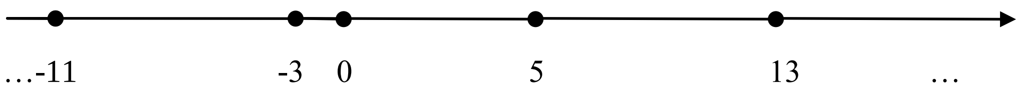
Ответ: 2.

Задача 2.2. Докажите, что числа 10^4 *и* 10^6 дают одинаковые остатки при делении на 11.

Решение: I способ.

Имеем $10^4 = 11 \cdot 909 + 1$, $10^6 = 11 \cdot 90909 + 1$. Следовательно, оба числа при делении на 11 дают один и тот же остаток 1.

Заметим, что условие «x дает при делении на m остаток r (где $0 \le r < m$)» эквивалентно такому: $x = mt + r$, t −целое число. Пусть в этой формуле t пробегает все множество чисел $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$, в то время как m и r фиксированы, не меняются (скажем, $m = 8$, $r = 5$, тогда $x = 8t + 5$). При этом формула дает все возможные целые числа, для которых остаток от деления на m равен r. Если изобразить эти числа на оси, то получится множество точек, отстоящих друг от друга на расстоянии m:



(на нашем рисунке изображено множество чисел $x = 8t + 5$).

Таким образом, если задано m>0, то все множество целых чисел можно разбить на m классов: к одному классу отнести все числа, дающие при делении на m остаток 1, к другому – остаток 2, и так далее. Эти классы можно записать так:

$x = mt + 1,$

$x = mt + 2,$

$\ldots\ldots\ldots\ldots,$

$x = mt + (m-1)$

и, наконец, последний класс (вернее «нулевой») $x = mt.$ В него входят все числа, дающие при делении на m остаток 0, т. е. делящиеся на m.

Например, если m=8, то всего 8 классов, каждое число обязательно попадет в один и только один класс.

$x = 8t,\ x = 8t + 1, \dots, x = 8t + 7.$

Заметим, что если m задано, то два числа x_1, x_2 попадают в один и тот же класс в том и только том случае, если разность $x_1 - x_2$ делится на m.

II способ:

Т.к. $10^6 - 10^4 = 10^4 \cdot (100-1) = 10^4 \cdot 99$ делится на 11, то числа 10^4 *и* 10^6 дают одинаковые остатки при делении на 11.

Задача 2.3. Докажите, что числа

1. 10^5 и -1,
2. -123456789 и 9876543210

дают одинаковые остатки при делении на 11.

Задача 2.4. 1. Каково наименьшее из чисел, больших 1975, которое при делении на 7 дает остаток 3?

2. Каково наименьшее из чисел, меньших 2001, которое при делении на 11 дает остаток 8?

Решение: 1. Разделим 1975 на 7 с остатком: $1975 = 282 \cdot 7 + 1.$ Остаток равен 1. Следовательно, искомое число 1975+2=1977, это число при делении на 7 дает остаток 3.

Ответ: 1977.

Задача 2.5. В одном из подъездов восьмиэтажного дома на первом этаже находятся квартиры от №97 до №102. На каком этаже и в каком (по номеру) подъезде находится квартира №178? (На всех этажах одинаковое число квартир и все подъезды устроены одинаково).

Решение:

1) $8 \cdot 6 = 48 -$квартир в одном подъезде.

2) $178 = 48 \cdot 3 + 34 \Rightarrow$ квартира №178 находится в четвертом подъезде.

3) $34 = 6 \cdot 5 + 4 \Rightarrow$ квартира №178 расположена на 6-м этаже.

Ответ: 4-й подъезд, 6-й этаж.

Задача 2.6. Было 7 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 кусков и так сделали несколько раз. Могло ли в результате получиться 1998 кусков? А 1999 кусков?

Указание. Подумайте, как возрастает число кусков, когда один разрезают на 7 частей.

Решение: Когда один кусок разрезают на 7 частей, то число кусков возрастает на 6 кусков. Значит, число кусков должно удовлетворять равенству: $a = 7 + 6n, n \in N.$

$a) \, 1998 = 7 + 6n,$
$6n = 1991,$

$n = 331\frac{5}{6} \notin \mathrm{N} \Rightarrow$ не может.

$b) 1999 = 7 + 6n,$
$6n = 1992,$

$n = 332 \in \mathrm{N} \Rightarrow$ может.

Ответ: 1998 – не может, 1999 – может.

Задача 2.7. Какой остаток (при каждом натуральном n) даст число

1) $n^2 + 3n + 5$ при делении на число $n + 1$.

2) $n^2 + 1$ при делении на 4.

Решение. 1) Перепишем данное число $n^2 + 3n + 5$ так: $n^2 + 3n + 5 = (n+1)(n+2) + 3.$ Из этой записи видно, что если число $n + 1$ больше 3, то остаток всегда равен 3. Если $n + 1 = 3$ (при n=2), то остаток равен 0. Если $n + 1 = 2$ (при n=1), то остаток равен 1.

2) **Указание.** Рассмотрите два случая: n- четно и n- нечетно.

Задача 2.8. а) Докажите, что из 8 целых чисел всегда можно выбрать два таких, разность которых делится на 7.

б) Верно ли, что из 100 целых чисел всегда можно выбрать два таких, у которых сумма делится на 7.

в) Докажите, что из 5 чисел всегда можно выбрать два таких, у которых разность квадратов делится на 7.

Решение. а) Пусть даны любые 8 целых чисел. Найдем остаток каждого из них от деления на 7. Всего существует 7 возможных остатков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. У нас имеется восемь остатков, значит, хотя бы два из них совпадают. Следовательно, по крайней мере, два из наших восьми чисел дают один и тот же остаток при делении на 7: $a_1 = 7q_1 + r, a_2 = 7q_2 + r.$ Тогда их разность $a_1 - a_2 = 7(q_1 - q_2)$ делится на 7.

б) Утверждение не верно. Например числа 1, 8, 15, 22, 29, …

в) **Указание.** Вместе с каждым остатком r рассмотрите «дополнительный»: (7-r).

Рассмотрим числа $a_1 = 7q_1 + r, \quad a_2 = 7q_1 + (7 - r).$

Оба равенства возведем в квадрат:

$$a_1^2 = 49q_1^2 + 14q_1r + r^2,$$
$$a_2^2 = 49q_2^2 + 49 + r^2 + 98q_2 - 14q_2r - 14r^2.$$

Вычтем:

$$a_1^2 - a_2^2 = 49(q_1^2 - q_2^2) + 14r(q_1 + q_2) - 49 + 98q_2 + 14r^2 =$$
$$= 7(7(q_1^2 - q_2^2) + 2r(q_1 + q_2) - 7 - 14q_2 + 2r^2)$$

Отсюда следует, что $(a_1^2 - a_2^2) \vdots 7$

Используя результаты задачи 2.8.а) можно сформулировать следующий принцип, который называется принципом Дирихле.

Принцип Дирихле: В n клетках нельзя рассадить поодиночке n+1 кроликов, т.е. найдется клетка, где сидит не менее двух кроликов.

Обобщение принципа Дирихле: Даны n клеток, и $(nk+1)$ кроликов размещены в эти клетки. Тогда найдется клетка, где сидит не менее (k+1) кроликов.

Принцип недостаточности: Если разместить менее, чем $\left[0+1+2+\ldots+(n+1)\right]=\frac{n(n-1)}{2}$ кроликов в n клетках, то найдутся хотя бы две клетки, в которых сидят по одинаковому числу кроликов.

Задача 2.9* . На столе лежат книги, которые надо упаковать. Если их связать по 4, по 5 и по 6, то каждый раз остаётся одна лишняя книга, а если по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может лежать на столе?

Указание. Чтобы число делилось на 4, на 5, на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 60.

Решение. Учитывая указание, получаем, что книг должно быть не меньше 60. Т. к. одна книга осталась, то книг могло быть 61, но 61 не делится на 7. Книг могло быть и 121, и 181, и 241, и 301, и т. д.

Из этих чисел 301 удовлетворяет всем условиям:

$301=4\cdot75+1,$

$301=5\cdot75+1,$

$301=6\cdot75+1,$

$301=7\cdot43.$

Ответ: 301 книга.

Задача 2.10*. 14 мальчиков собрали 100 орехов. Докажите, что какие- то два собрали одинаковое число орехов (каждый собрал хотя бы 1 орех).

Указание. Используйте принцип недостаточности.

4. Десятичная запись числа. Признаки делимости.

Вспомним, что означает привычная для нас запись числа в десятичной форме. Рассмотрим число 7053. В этом числе 7 тысяч, 0 сотен, 5 десятков и 3 единицы, т. е.

$7053 = 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3.$

В общем случае, если $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – по порядку следующие цифры в десятичной записи числа М (обозначение $M = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$), то $M = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Задача 3.1. Число a оканчивается на 5. Докажите, что число a^2 оканчивается на 25.

Доказательство. По условию задачи $a = 10m + 5$, m – количество десятков в числе а. Тогда $a^2 = 100m^2 + 100m + 25$.

Число $100m^2 + 100m$ оканчивается на 2 нуля, поэтому a^2 оканчивается на 25.

Ч. т. д.

Справедливо более общее утверждение, позволяющее в некоторых случаях быстро перемножать числа.

Задача 3.2. Докажите следующие теоремы:

Теорема 1. У двух чисел одинаковое количество десятков, а сумма единиц равна 10. Чтобы перемножить эти числа, достаточно число их десятков умножить на число на единицу большее и приписать сзади произведение единиц (в случае, если число единиц этих чисел соответственно 1 и 9, то сзади приписывается 09).

Примеры:

$$72 \cdot 78 = \begin{bmatrix} 7 \cdot (7+1) = 56 \\ 2 \cdot 8 = 16 \end{bmatrix} = 5616,$$

$$101 \cdot 109 = \begin{bmatrix} 10 \cdot (10+1) = 110 \\ 1 \cdot 9 = 09 \end{bmatrix} = 11009.$$

Теорема 2. Для нахождения квадрата числа, оканчивающегося на 5 достаточно перемножить число его десятков на число, большее на 1, и к полученному произведению приписать в конце 25.

Примеры:

$$75^2 = [7 \cdot (7+1) = 56] = 5625,$$

$$755^2 = [75 \cdot (75+1) = 75^2 + 75 = 5625 + 75 = 5700] = 570025.$$

Сформулируем некоторые признаки делимости.

<u>Методическое указание.</u> Если в формулировке теоремы есть слова «тогда и только тогда», «необходимо», «достаточно», «в том и только том случае» и т. п., то фактически теорема содержит два утверждения. Например, для доказательства признака делимости на 2 требуется установить справедливость следующих утверждений:

1) если число делится на 2, то это число оканчивается на четную цифру.

2) если с число оканчивается на четную цифру, то оно делится на 2.

3.1. Признак делимости на 2.

Теорема. На 2 делятся те и только те натуральные числа, которые оканчиваются четной цифрой.

Доказательство. Любое натуральное число N в десятичной системе исчисления можно представить в виде:

$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где каждое из чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ принимает значения 0, 1, 2, … , 9, причем a_0- цифра единиц числа N, a_1 – цифра десятков, a_2 – цифра сотен и т.д. Запишем число T следующим образом:

$N = 10 \cdot \left(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 \ + a_1 \cdot 10\right) + a_0$, т. е. в виде $N = 10A + B,$ где $A = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 \ + a_1 \cdot 10,$ $B = a_0.$

Число 10A, очевидно, делится на 2, т.к. первый сомножитель делится на 2. Далее, если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и их сумма делится на это число. Поэтому, если число $B = a_0$ делится на 2, то и число N так же делится на 2. С другой стороны, если число N делится на 2, то и число *N-10A=B* делится на 2. Действительно, $B = 2M - 10A,\ N = 2M$. Но однозначное число $B = a_0$ делится на 2 только в том случае, если оно равно 0, 2, 4, 6, 8, то есть когда запись числа N оканчивается четной цифрой.

Ч. т. д.

3.2. Признак делимости на 5.

Теорема. На 5 делятся те и только те натуральные числа, запись которых оканчивается нулем или цифрой 5.

Доказательство. Как и в пункте 1.1 произвольное натуральное число N представим в виде: $N = 10A + B,$

где $A = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 \ + a_1 \cdot 10,\ B = a_0.$

Число 10A, очевидно, делится на 5. Поэтому, если число $B = a_0$ делится на 5, то и число *N* так же делится на 5. С другой стороны, если число N делится на 5, то на 5 делится и число $B = N - 10A = 5M - 10A = 5(M - 2A),\ N = 5M$. Но однозначное число $B = a_0$ делится на 5 только в том случае, если оно равно 0 или 5, то есть когда запись числа N оканчивается нулем или цифрой 5.

Ч. т. д.

3.3. Признак делимости на 10.

Теорема. На 10 делятся те и только те натуральные числа, запись которых оканчивается нулем.

Доказательство. Как и в предыдущем пункте произвольное натуральное число N представим в виде: $N = 10A + B,$ где

$A = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 \ + a_1 \cdot 10,\ B = a_0.$

Число 10A, очевидно, делится на 10. Поэтому, если число $B = a_0$ делится на 10, то и число *N,* представленное в виде суммы так же делится на 10. С другой стороны, если число N делится на 10, то и второе слагаемое B делится на 10. Но однозначное число $B = a_0$ делится на 10 только в том случае, если оно равно 0, то есть когда запись числа N.

Ч. т. д.

3.4. Признак делимости на 3.

Теорема. На 3 делятся те и только те натуральные числа, сумма всех цифр которых делится на 3.

Доказательство. Прежде всего заметим, что любая степень числа с натуральным показателем может быть представлена в следующим образом:

$10^1 = 9+1, 10^2 = 99+1, \ldots, 10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n} = \underbrace{99\ldots9}_{n} + 1$. В результате любое натуральное число $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ будет представлено в виде

$$N = a_n(\underbrace{99\ldots9}_{n}+1) + a_{n-1}(\underbrace{99\ldots9}_{n-1}+1) + \ldots + a_2(99+1) + a_1(9+1) + a_0 =$$
$$= a_n \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n} + a_{n-1} \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 99 + a_1 \cdot 9 + (a_n + a_{n-1} + \ldots a_2 + a_1 + a_0),$$

т.е.

$$N = 9A + B,\ A = a_n \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n} + a_{n-1} \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 11 + a_1,\ B = a_n + a_{n-1} + \ldots a_2 + a_1 + a_0.$$

Число $9A$, очевидно, делится на 3. Поэтому, если число B, равное сумме цифр числа N, делится на 3, то и их сумма $9A+B$ делится на 3, т.е N делится на 3. С другой стороны, если число N делится на 3, то делится на 3 и число $B = N - 9A$, поскольку в этом случае $B = 3M - 9A = 3(M - 3A)$, $N = 3M$. Т.о сумма, сумма цифр числа N делится на 3.

Ч. т. д.

3.5. Признак делимости на 9.

Теорема. На 9 делятся те и только те натуральные числа, сумма всех цифр которых делится на 9.

Доказательство. Как показано в пункте 1.4. любое натуральное число можно представить в виде $N = 9A + B$,

$$A = a_n \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n} + a_{n-1} \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 11 + a_1,\ B = a_n + a_{n-1} + \ldots a_2 + a_1 + a_0.$$

Число 9A, очевидно, делится на 9. Поэтому, если число B, равное сумме цифр числа N, делится на 9, то и их сумма 9A+B делится на 9, т.е. N делится на 9. С другой стороны, если число N делится на 9, то делится на 9 и число

$B = N - 9A,$ поскольку в этом случае $B = 9M - 9A = 9(M - A),\ N = 9M$. Т.о. сумма, сумма цифр числа N делится на 9.

Ч. т. д.

3.6. Признак делимости на 4.

Теорема. Число тогда и только тогда делится на 4, когда число, составленное из двух последних его цифр, делится на 4.

Доказательство. Пусть $M = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 =$

$= 10^2 (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_2) + a_1 \cdot 10 + a_0$.

$M = 100A + B,\ B = 10 \cdot a_1 + a_0$.

$100A \vdots 4$ (очевидно), поэтому, если $B \vdots 4,$ то $M \vdots 4$.

С другой стороны, если $M \vdots 4$, то

$B \vdots 4,\ B = M - 100A = 4N - 100A = 4(N - 25A), \quad M = 4N,$ таким образом, число, составленное из двух последних цифр числа M, делится на 4.

Ч. т. д.

3.7. Признак делимости на 8.

Теорема. Число тогда и только тогда делится на 8, когда число, составленное из трех последних его цифр делится на 8.

Доказательство. $M = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Представим M в виде: $M = 10^3 (a_n \cdot 10^{n-3} + a_{n-1} \cdot 10^{n-4} + \ldots + a_3) + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$.

$M = 1000A + B,\ B = 10^2 a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0$.

$1000A \vdots 8$ (очевидно), поэтому, если $B \vdots 8,$ то $M \vdots 8$.

С другой стороны, если $M \vdots 8$, то

$B \vdots 8,\ B = M - 1000A = 8N - 1000A = 8(N - 125A), \quad M = 8N,$ таким образом, число B, составленное из двух последних цифр числа M, делится на 8.

Ч. т. д.

В качестве задачи можно предложить учащимся самостоятельно доказать следующие признаки делимости.

3.8. Признак делимости на 25.

Теорема. На 25 делятся те и только те числа, у которых две последние цифры образуют число, делящееся на 25.

Указание. Теорема доказывается как и признак делимости на 5, с той лишь разницей, что число надо представить в виде суммы числа сотен, содержащихся в данном числе, и числа, образованного двумя последними цифрами.

3.9. Признак делимости на 125.

Теорема. На 125 делятся те и только те числа, у которых три последние цифры образуют число, делящееся на 125.

Указание. Для доказательства достаточно данное число представить в виде суммы числа тысяч, содержащихся в данном числе, и числа, образованного тремя последними цифрами.

3.10. Признак делимости на 6.

Теорема. На 6 делятся те и только те числа, которые делятся и на 2, и на 3

3.11. Признак делимости на 11.

Теорема. Чтобы узнать, делится ли число на 11, надо отдельно сложить цифры его десятичной записи, стоящие на четных местах, и цифры, стоящие на нечетных местах, и из большей суммы вычесть меньшую. Если полученная разность делится на 11, то и само число делится на 11.

Задача 3.3. Найдите все пятизначные числа:

1) $\overline{34x5y}$, которые делятся на 36,

2) $\overline{71x1y}$, которые делятся на 45.

Указание 1). Число тогда и только тогда делится на 36, когда оно одновременно делится на 4 и 9.

Ответ: 34056, 34956, 34452

Указание 2). Число тогда и только тогда делится на 45, если оно одновременно делится на 5 и на 9.

Ответ: 71010, 71910, 71515.

Задача 3.4*. Докажите, что число $M = \overline{a_3a_2a_1a_0}$, тогда и только тогда

1) делится на 99, когда число $\overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0}$ делится на 99;

2) делится на 101, когда число $\overline{a_3a_2} = \overline{a_1a_0}$.

Решение. 1) Представим число М в виде

$M = 100\overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0} = 99\overline{a_3a_2} + (\overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0})$.

а) Пусть число М делится на 99. Тогда по утверждению1 число $\overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0} = M - 99 \cdot \overline{a_3a_2}$ так же делится на 99.

б) Если $99 \mid (\overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0})$, то и число $M = (\overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0}) + 99 \cdot \overline{a_3a_2}$ по утверждению 1 делится на 99.

2) Представим М в виде: $M = 100\overline{a_3a_2} + \overline{a_1a_0} = 101\overline{a_3a_2} + (\overline{a_1a_0} - \overline{a_3a_2})$.

а) Пусть М делится на 101. Тогда по утверждению 1, число $\overline{a_1a_0} - \overline{a_3a_2} = M - 101\overline{a_3a_2}$ делится на 101, а это возможно, если $\overline{a_1a_0} - \overline{a_3a_2} = 0$.

б) Если $101 \mid \overline{a_1a_0} - \overline{a_3a_2} = 0$, то и число $M = 101\overline{a_3a_2} + (\overline{a_1a_0} - \overline{a_3a_2})$ делится на 101.

Значит, $\overline{a_3a_2} = \overline{a_1a_0}$.

Задача 3.6*. Докажите, что число $\overline{a_2a_1a_0}$ тогда и только тогда делится на 8, когда число $\overline{a_2a_1}+\dfrac{a_0}{2}$ делится на 4. Используя эту задачу, сформулируйте еще один признак делимости на 8.

5. Простые и составные числа.

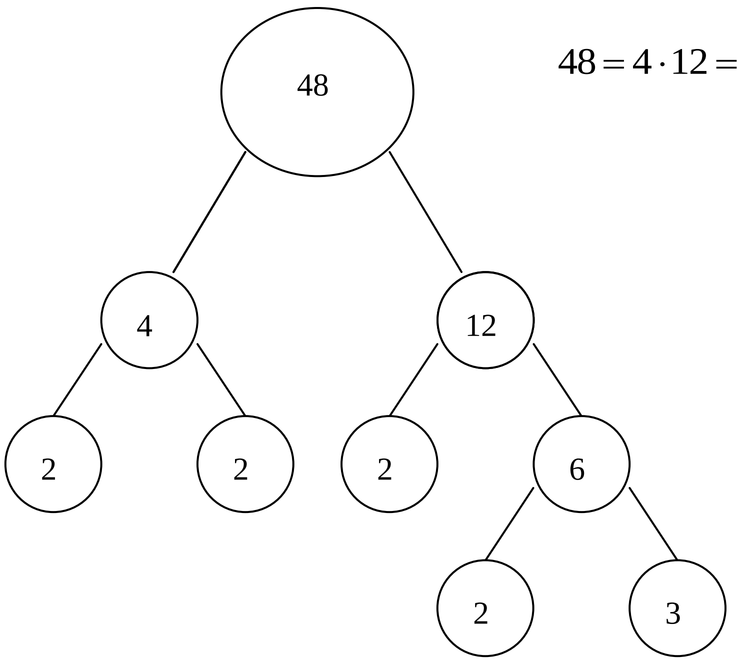
Каждое натуральное число a, большее 1, имеет, по крайней мере, два делителя: 1 и a. Число a называется простым, если у него нет других делителей, и составным, если они есть. Число 1 не является не простым, не составным. Вот первые 10 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Составные числа можно разложить в произведение простых чисел. Простые числа, по определению, не разлагаются в произведение меньших чисел.

Методическое указание о разложении на простые множители.

Пусть нам дано составное число a. Мы можем разложить его в произведение двух множителей, меньших a. Если среди них есть хотя бы один не простой, то мы можем и его разложить в произведение двух множителей. Если среди них опять будут составные, они опять разлагаются на множители и т.д.

Пример 1.



$$48 = 4\cdot 12 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$$

Этот процесс не может продолжаться бесконечно, т. к. каждый сомножитель меньше самого числа. В нашей схеме на каждом «этаже» числа меньше, по крайней мере, вдвое, чем на предыдущем «этаже». В результате мы придем к разложению на простые множители.

А теперь докажем строго теорему о разложении числа на простые множители, которую часто называют основной теоремой арифметики.

Теорема 1. Каждое натуральное число большее 1 можно разложить в произведение простых чисел. Два разложения натурального числа на простые множители могут различаться друг от друга только порядком следования множителей.

Доказательство. Докажем возможность разложения.

Пусть а – составное число. Тогда его наименьший делитель, отличный от единицы, есть число простое. Обозначим его r_1, тогда $a = r_1 a_1$, где $a_1 \in \mathrm{N}$. Если a_1 – простое, то теорема доказана. Если же a_1 – составное, то оно имеет наименьший простой делитель $r_2 : a_1 = r_2 a_2$, и тогда $a = r_1(r_2 a_2) = r_1 r_2 a_2$.

Если a_2 – простое, то теорема доказана. Если же a_2 – составное, то применяем к нему те же рассуждения, что и к числу a_1.

Этот процесс не может быть бесконечным. Действительно, числа $a_1, a_2, \ldots$ убывают, оставаясь целыми положительными. А так как количество этих чисел не больше, чем а, то после повторения наших рассуждений некоторое число раз n ($n \le a$) получим, наконец, разложение $a = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{n-1} r_n$, в котором последний множитель будет простым числом. Таким образом, будет получено разложение числа а на простые множители.

Докажем теперь единственность разложения.

Предположим, что возможно , по крайней мере, два разложения числа а на простые множители:

$a = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n$ и $a = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_k$.

Тогда будем иметь $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_k = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n$.(*)

Из этого равенства следует, что произведение $(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n) \vdots q_1$, а если произведение простых чисел делится на простое число q_1, то, по крайней мере, один из сомножителей равен числу q_1. Пусть, например, $r_1 = q_1$. Сократим равенство (*) на $r_1 = q_1$. Получим такое равенство: $q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_k = r_2 \cdot r_3 \cdot \ldots \cdot r_n$.

Рассуждая аналогично, получим: $r_2 = q_2$, $r_3 = q_3 \ldots$ и т. д. Очевидно, что и число сомножителей в левой и правой частях равенства (*) одинаково, т. е. n=k. В противном случае, после некоторого числа сокращений в одной из частей равенства (*) получили бы один, а в другой части – произведение нескольких простых чисел, чего быть не может.

Ч. т. д.

Методическое указание. Перед доказательством основной теоремы арифметики полезно доказать следующие утверждения.

Утверждение 1. Наименьший делитель составного числа, отличный от единицы, есть число простое.

Утверждение 2. Если произведение *ab,* где a и b – простые числа, делится на *r*, то, по крайней мере, один из сомножителей равен *r*.

Обычно равные простые множители собирают вместе и записывают разложение так: $48 = 2^4 \cdot 3$. Такую запись разложения на простые множители называют канонической. В общем случае каноническое разложение числа на простые множители имеет вид: $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – простые числа.

Чтобы начать процесс разложения данного числа *a* в произведение простых, нужно найти хотя бы один простой множитель. Никакого простого способа для этого не существует: если про *a* заранее ничего не известно, то приходится перебирать простые числа и по очереди испытывать, делятся ли *a* на 2, 3, 5 и т. д.

<u>Пример 2.</u> Разложим число 2004 на простые множители.

Число 2004- четное, следовательно, делится на 2, а так же делится на 4 (по признаку делимости на 4). $2004 = 4 \cdot 501$. По признаку делимости на 3, 501 можно разделить на 3: $501 = 3 \cdot 167$. Пробуя делить 167 на 7, 11, 13, получаем, что 167 на данные числа не делятся. Далее можно не пробовать, т. к. $17^2 = 289 > 167$, т. е. 167 – простое. Итак, $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$.

Ответ: $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$.

Задача 4.1. Доказать, что наименьший из неравных единице делителей составного числа a не больше, чем $\sqrt{a}$.

Решение. Из того, что $a \vdots b$, следует, что $a = bq$, где $a \vdots q$. Так как, по условию, $1 < b < a$, то и $1 < q < a$.(объяснить: почему?). Но b – наименьший из всех таких делителей, поэтому $b \le q$ и $b^2 \le bq = a$, т. е. $b \le \sqrt{a}$.

Следствие. Если число $a \ge 2$ не делится ни на одно простое число, не большее чем $\sqrt{a}$, то оно само является простым числом.

<u>Пример 3.</u> Установим, что 257 – простое число.

Решение. Для этого достаточно проверить, что оно не делится ни на одно простое число, такое, что $p \le \sqrt{257}, \quad p^2 \le 257$.

Из признаков делимости сразу следует, что 257 не делится на 2, 3, 5. Проверяем последовательно, что оно не делится на 7, 11 и 13. Этим можно и ограничиться, т. к. следующее простое число равно 17, а $17^2 = 289 > 257$.

Задача 4.2. Разложите на простые множители числа 1997, 1998, 1999, 2002, $11! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11$.

Задача 4.3. Разложите на простые множители число $2^{24} - 1$.

Указание. Это число делится на $2^{12}-1, 2^{12}+1, 2^6+1, 2^6-1, 2^4-1, 2^4+1$ и т.п.

Задача 4.4*. Доказать, что число k^4+4 составное (натуральное число $k>0$).

Указание. С помощью выделения полного квадрата и разложения по формуле разность квадратов, приходим к произведению двух множителей.

Задача 4.5*. Докажите, что если p – простое число, p>3, то p^2-1 делится на 24.

Доказательство. $p^2-1=(p+1)(p-1)$. Числа $(p+1),(p-1)-$ последовательные простые числа, поэтому одно из них делится на 4, а произведение – на 8. Из трех последовательных чисел $(p-1), p, (p+1)$ одно делится на 3 (но это не p).

Теорема 2. Множество простых чисел бесконечно.

Доказательство проведем методом «от противного». Допустим, что множество простых чисел конечно и что $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ – все простые числа. Рассмотрим число P, н единицу большее произведения всех простых чисел: $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot p_n + 1$.

Это число больше каждого из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$. Поскольку мы предположили, что других простых чисел, кроме $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ нет, то число P – составное. Следовательно, оно делится на некоторое простое число p_k.

Однако и в произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot p_n$ входит и сомножитель p_k. Поэтому $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot p_n \,\vdots\, p_k$, но $1\, не \vdots\, p_k$. Таким образом, $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot p_n + 1\, не \vdots\, p_k$. Итак, одновременно $P \,\vdots\, p_k$ и P $не \vdots\, p_k$, что невозможно.

Следовательно, наше предположение о том, что существует лишь конечное множество простых чисел, было неверным, то есть множество простых чисел бесконечно.

Ч. т. д.

Это доказательство содержалось еще в сочинениях Евклида.

Следующим вопросом, который возникает при изучении простых чисел, является вопрос о том, как из множества натуральных чисел выделить множество простых чисел, т. е. как составить таблицу простых чисел?

Этот вопрос интересовал еще математиков древности. Уже в глубокой древности занимались составлением таблиц простых чисел. Однако, данный вопрос одним из труднейших в теории чисел. Парадокс заключался в том, что в натуральном ряду есть сколь угодно большие промежутки, не содержащие простые числа. С другой стороны, встречаются простые числа, различающиеся на 2. Это - числа- близнецы.

Первая попытка найти все простые числа приписывается выдающемуся астроному и математику Эратосфену, жившему в 276 – 192 г. до нашей эры.

Этот способ состоит в следующем. Пусть, например, требуется составить таблицу простых чисел, не превосходящих 50. Запишем подряд все натуральные числа от 1 до 50. Зачеркнем 1, которая не является простым числом. Следующее число 2 – простое, его не зачеркиваем. Зачеркнем далее каждое второе число, после 2, таким образом, будут зачеркнуты все числа, кратные 2 (4, 6, 8, …, 48, 50). Число 3 оказалось незачеркнутым, оно – простое. Вычеркнем каждое третье число, стоящее правее 3; т. о. будут зачеркнуты все числа, кратные 3 (6, 9, 12, …), не пропуская и те, которые были зачеркнуты. Следующим незачеркнутым числом оказалось число 5. Оно – простое, его оставляем. Далее зачеркиваем все числа, кратные 5 (каждое пятое число). Продолжая так далее, получим незачеркнутыми лишь простые числа, а все составные будут зачеркнуты.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Процесс вычеркивания можно остановить на вычеркивании чисел, кратных 7 (объяснить, почему?).

Этот метод отсеивания чисел известен как «решето Эратосфена». В эпоху жизни и деятельности Эратосфена писали на папирусе, натянутом на рамку, или на восковой дощечке, и не зачеркивали, а прокалывали составные числа. Получалось нечто вроде решета, через которое «просеивались» составные числа. Поэтому таблицу простых чисел, составленную таким образом и назвали «решетом Эратосфена».

Вопрос о простых числах – один из самых интересных вопросов в математике. Поиском рекуррентных формул для нахождения всех простых чисел занимались такие ученые, как Мерсен, П. Ферма, П. Л. Чебышев. Свой вклад в развитие данного вопроса внесли так же Л. Эйлер, Гольдбах, Бертран, И. М. Виноградов, И. М. Первушин, И. К. Андронов и др.

История простых чисел интересна и познавательна. В настоящее время существует много литературы, в которой история простых чисел освещается доступно и увлекательно. Для оживления изложения учителю полезно привлекать сведения исторического характера или предложить учащимся написать доклад по теме.

Рекомендуемая литература:

- Депман И. Я. История арифметики.- М: Просвещение, 1965.
- Маркушевич А. И. Дополнительные вопросы арифметики целых чисел.// Математика в школе, 1967, №4.
- Мурадова Е. Простые числа. Так ли проста их история?// Математика, 2002, №13.
- Муромцева Л. И. Дополнительные вопросы арифметики целых чисел.- Орел: ОГПИ, 1968.
- Серпинский В. Что мы знаем и чего мы не знаем о простых числах. – Физматгиз, 1963
- Шнирельман Л. Г. Простые числа.- М. –Л.: Гостехиздат,1940.

Задача 4.6. Составьте таблицу всех простых чисел, меньших 200 (воспользуйтесь методом Эратосфенова решета). Подсчитайте, сколько всего простых чисел среди чисел первой сотни, среди чисел второй сотни.

6. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух чисел. Взаимно простые числа.

Каждый делитель натурального числа a не может быть больше самого числа a, поэтому число a имеет конечное число делителей, не превосходящих a.

Среди делителей чисел a и b могут быть одинаковые, т. е. общие делители. Очевидно, их число так же является конечным. Например, числа 30 и 70 имеют 4 общих делителя: 1, 2, 5, 10. Среди этих делителей есть наибольший (в нашем случае 10), его называют наибольшим общим делителем и обозначают НОД(a, b) или $D(a,b)$.

Итак, наибольшим общим делителем двух натуральных чисел называется наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из данных чисел.

Понятие общего делителя двух чисел тесно связано с понятием их общего кратного.

Общим кратным двух натуральных чисел a и b называется число, которое делится на каждое из этих чисел.

Ясно, что произведение $a \cdot b$ будет кратным чисел a и b, а значит, и $2ab$, $3ab$, $4ab$, … также будут кратными этих чисел. Т.о., каждые два натуральных числа имеют сколько угодно общих кратных, среди них нет наибольшего, но есть наименьшее. Его называют наименьшим общим кратным и обозначают НОК(a,b) или $K(a,b)$.

Итак, наименьшим общим кратным чисел a и b называется наименьшее целое положительное число, которое делится на каждое из чисел a и b.

Аналогично определяются наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел. При этом справедливы равенства

$$D(a; D(b,c)) = D(D(a,b); c),$$
$$K(a; K(b,c)) = K(K(a,b); c)$$

Доказательство предложенных ниже основных свойств наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного может быть оставлено на самостоятельное рассмотрение учащихся.

1. Наибольший общий делитель двух чисел делится на любой их общий делитель.
2. Если $a, b \in N$ умножить на $k \in N$, то их наибольший общий делитель увеличится в k раз.
3. Множество общих делителей чисел a и b совпадает с множеством делителей их НОД.
4. Если каждое из чисел $a, b \in N$ разделить на их общий натуральный делитель k, то их НОД разделится на k.
5. Любое общее кратное делится на их наименьшее общее кратное.
6. Если числа $a, b \in N$ умножить на $k \in N$, то их наименьшее общее кратное увеличится в k раз.

7. Если каждое из чисел $a, b \in N$ разделить на их общий натуральный делитель *k*, то их НОК разделится на *k*.

Натуральные числа a и b называют взаимно простыми, если наибольший общий делитель этих чисел равен 1, т. е. $D(a,b)=1$.

Например, взаимно просты числа 15 и 77. Всегда взаимно просты два соседних натуральных числа (например, 20 и 21). В самом деле, если бы оба числа делились на одно и то же натуральное число m>1, то их разность тоже делилась на m и потому не могла бы равняться 1.

Рассмотрим теорему, устанавливающую связь между НОД(a, b) и НОК(a, b).

Задача 5.1. Докажите, что если $D(a,b) = d$, $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, то числа a_1, b_1 – взаимно простые.

Теорема 1. Частное от деления произведения $a \cdot b$ натуральных чисел a и b на их набольший общий делитель d есть целое число, являющееся наименьшим общим кратным.

$$K(a,b) = \frac{a \cdot b}{D(a,b)}.$$

Доказательство. Пусть М – произвольное общее кратное. $M \vdots a,\ M \vdots b \Rightarrow M = ak,\ M = bl.$ Используя результаты задачи 5.1, имеем:

$D(a,b) = d, \quad a \vdots d, b \vdots d \Rightarrow a = a_1 \cdot d, b = b_1 \cdot d, (a_1, b_1) = 1.$

Рассмотрим отношение:

$\frac{M}{b} = \frac{ak}{b} = \frac{a_1 k}{b_1}$ – целое число $\Rightarrow a_1 k \vdots b_1$, а т. к. $(a_1, b_1) = 1$, то $k \vdots b_1 \Rightarrow k = bt.$

$$\frac{M}{b} = \frac{a_1 b_1 \cdot t}{b_1} = \frac{a_1 b_1 \cdot d \cdot t}{b},$$

$$M = a_1 b \cdot t = \frac{ab}{d} \cdot t,$$

$$M = \frac{ab}{d} \cdot t.$$

Т.о. каждое общее кратное может быть выражено по последней формуле при соответствующем значении $t \in \mathrm{Z}$.

Очевидно обратное, любое число, выраженное по последней формуле, является общим кратным двух чисел.

Т.о., последняя формула дает общий вид всех общих кратных чисел a и b. Наименьшее положительное из них получается при t=1.

Ч. т. д.

Из свойств наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух чисел вытекают следующие утверждения:

1. Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно их произведению.

В самом деле, из того, что $D(a,b)=1,$ следует $K(a,b)=ab.$

Вообще говоря, из того , что число a делится на b и делится на c, нельзя вывести, что число делится на bc (например, $60 \vdots 4, 60 \vdots 6$, но 60 не делится на $4 \cdot 6 = 24.$ Иначе обстоит дело, если делители взаимно просты.

2. Если числа b и c взаимно просты, причем $a \vdots b, a \vdots c,$ то $a \vdots bc.$

В самом деле, если $a \vdots b, a \vdots c,$ то (объяснить, почему?) $a \vdots K(c,b).$ Но для взаимно простых чисел b и c по 1) имеем $K(c,b)=cb.$ Значит, $a \vdots bc.$

Наконец, докажем следующее утверждение:

3) Если a и b взаимно просты, причем произведение ac делится на b, то c делится на b.

В самом деле, по условию, $D(a,b)=1$ и $ac \vdots b.$ Поскольку $ac \vdots a,$ по утверждению 2) получаем $ac \vdots ab,$ тогда $c \vdots b$ (объяснить, почему?).

Задача 5.2. Пусть p – простое. Докажите, что либо a делится на p, либо $D(a, p) = 1$.

Задача 5.3. а) Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 192 белых и 264 красных георгинов?

б) Каков будет ответ в общем случае, если белых георгинов a штук, а красных – b штук?

Задача 5.4. Пусть $c \vdots a, c \vdots b$ и $D(a,b) = 1$. Докажите, что $c \vdots (ab)$.

Указание. Используйте свойство 3) взаимно простых чисел. Сравните эту задачу с задачей 1.2 е).

Задача 5.5. Сколькими нулями оканчивается число

а) $25! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 25$;

б) $200! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 199 \cdot 200$.

Рассмотрим без доказательства следующую теорему.

Теорема. Пусть a и b – простые числа, $ab \neq 0, d = D(a,b)$. Тогда существуют числа u и v, такие, что $au + bv = d$.

Пример. $D(18,30) = 6, \quad 6 = 18 \cdot 2 + 30 \cdot (-1)$. Здесь u=2, v=-1.

7. Алгоритм Евклида.

Слово «алгоритм» означает «общий метод, применимый к целому классу задач». Обычно в математике подразумевается, что этот метод можно сформулировать в виде совершенно точного описания – настолько точно и определенно, что любой человек, умеющий только читать и считать, может его выполнить (для любой конкретной задачи, т.е. для любых заданных ему значений параметров).

Разложение на простые множители может оказаться делом нелегким, когда это число велико. Попробуйте, например, разложить на простые множители число 869107, наименьший простой множитель которого равен 877 ($869107=877\cdot 991$), где 877 и 991 – простые числа.

Т.к 877 является 151-м по порядку простым числом, то вам придется испытывать в качестве возможных делителей 150 простых делителей, прежде чем обнаружится делитель 877. Вот почему отыскание $D(a,b)$ в случае, когда a и b велики, не следует вести путем разложения a и b на множители. Задачу можно решить и без этого, если воспользоваться способом, который Евклид предложил 2000 лет назад для отыскания общей меры отрезков. Способ этот называется алгоритмом Евклида. Вообще же в математике алгоритмами называют способы решения однотипных задач, в которых указывается какие именно действия и в каком порядке нужно производить, чтобы прийти к решению каждой задачи данного типа.

Разъясним алгоритм Евклида сначала на числовом примере. Пусть нужно найти $D(869107{,}62267)$. Будем делить 869107 на 62267; получим в частном 13 и в остатке 59636; $869107 = 62267\cdot 13 + 59636$. Отсюда видно, что каждый общий делитель чисел 869107 и 62267 должен быть делителем остатка 59636. Поэтому он объявляется общим делителем чисел 62267 и 59636. Обратно, любой общий делитель двух последних чисел будет делителем числа 869107; следовательно, он является общим делителем чисел 869107 и 62267 (такие же, как и для пары чисел 62267 и 59636, то и НОД для обеих пар один и тот же: $D(869107{,}62267) = D(62267{,}59636).$). Но для второй пары искать НОД легче: здесь числа меньше.

Для второй пары делаем то же, что делалось для первой: делим 62267 на 59636. Получим в частном 1 и в остатке 2631; 62267=59636 + 2631. Повторяя прежнее рассуждение, найдем $D(62267{,}59636) = D(59636{,}2631)$. Теперь делим 59636 на 2631. Получим в частном 22 и в остатке 1754,

$59636 = 2631 \cdot 22 + 1754.$ Следовательно, $D(59636{,}2631) = D(2631{,}1754).$ Делим 2631 на 1754, получим $2631 = 1754 \cdot 1 + 877.$ Отсюда выводим, что $D(2631{,}1754) = D(1754{,}877).$ Наконец, деля 1754 на 877, получаем в частном 2, а в остатке $0 : 1754 = 877 \cdot 2.$ Это и означает, что число 877/1754; вместе с тем 877 является $D(1754{,}877).$ Итак, путем последовательного деления ранее полученного остатка на новый получаем, что $D(869107{,}62267) = D(1754{,}877).$ В этом последовательном делении и состоит алгоритм Евклида.

При нахождении НОД с помощью алгоритма Евклида процесс последовательного деления выполняют по более компактной схеме, запись которой начинают с правого края листа. Так процесс нахождения $D(869107{,}62267)$ удобно провести так:

				869107	62267
				62267	13
				246437	
				186801	
			62267	59636	
			59636	1	
		59636	2631		
		5262	22		
		7016			
		5262			
	2631	1754			
	1754	1			
1754	877				
1754	2				
0					

Задача 6.1. Найти наибольший общий делитель чисел 86 и 213 и записать их линейное выражение.

Решение.

213 86

172 2

86 41

82 2

41 4

40 10

4 1

4 4

0

$D(213{,}86) = 1.$

$$1 = 41 - 4 \cdot 10,$$
$$4 = 86 - 41 \cdot 2,$$
$$1 = 41 - (86 - 41 \cdot 2) \cdot 10,$$
$$1 = 21 \cdot 41 - 86 \cdot 10,$$
$$41 = 213 - 86 \cdot 2,$$
$$1 = 21 \cdot \left(213 - 86 \cdot 2\right) - 86 \cdot 10,$$
$$1 = 213 \cdot 21 + (-52) \cdot 86.$$

Ответ: d=1**,** u=21, v=-52.

Задача 6.2. С помощью алгоритма Евклида найти наибольший общий делитель чисел и записать их линейное выражение.

а) 83 и 75;

б) 912 и 74.

Рассмотрим алгоритм Евклида в общем виде. Задача заключается в отыскании НОД двух положительных чисел. Обозначим большее из данных чисел через a, а меньшее через b и разделим a на b. Пусть в частном получится q_1, а в остатке r_1, тогда $a = bq_1 + r_1, 0 \le r_1 < b.$ Если первый остаток $r_1 = 0$, то $a \vdots b$ и, следовательно, $D(a,b)$=b. Если же $r_1 > 0$, то рассуждая так же, как и в предыдущем примере, найдем, что $D(a,b) = D(b, r_1).$ Делим b на r_1; получаем $b = r_1 q_2 + r_2$, $0 \le r_2 < r_1$. Если окажется, что $r_2 = 0$, то $b \vdots r_1$, следовательно, $D(b, r_1) = r_1$. Если же $r_2 > 0$, то заключаем, что $D(b, r_1) = D(r_1, r_2).$ Деля r_1 на r_2, получим: $r_1 = r_2 q_3 + r_3, 0 \le r_3 < r_2$.

Заметим, что остатки при последовательном делении убывают, оставаясь неотрицательными числами:

$$b > r_1 > r_2 > \ldots \ge 0.$$

Т. к. количество всех вообще неотрицательных чисел, меньших чем *b,* равно *b*, то после повторения указанных операций некоторое число раз n ($n \le b$) получим остаток, равный нулю. Это означает, что деление остатка r_{n-2} на r_{n-1} выполняется нацело:

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \, n = 0.$$

Поэтому

$$D(r_{n-1}, r_{n=2}) = r_{n-1}.$$

Т.е. наибольшим общим делителем будет остаток r_{n-1}, непосредственно предшествующий нулевому остатку.

Среди различных применений алгоритма Евклида укажем здесь только решение в целых числах линейного уравнения с двумя неизвестными. Простейшим примером задачи, приводящей к такому уравнению может служить следующая:

Сколько монет 5- и 3- копеечного достоинства нужно дать, чтобы оплатить сумму в 62 копейки? Обозначая число первых копеек через x, а число вторых через y, получаем уравнение: 5*x* + 3*y* = 62. По самому смыслу задачи, в качестве решения в данном случае годятся только пары неотрицательных чисел, например, *x*=10, *y*=4 (одно решение), или *x*=7, *y*=9 (другое решение) и т. д. В общем виде речь идет об отыскании всех пар чисел x и y, удовлетворяющих уравнению: $ax + by = c,$ где a, b, c – целые заданные числа.

Положим $D(a, b) = D$; если уравнение имеет хотя бы одно решение $x = x_0$, $y = y_0$, то $ax_0 + by_0$ есть целое число, делящееся на D. Т. к. оно равно c, то необходимо, чтобы с делилось на D. Иными словами, если D не делится на D, то уравнение $ax + by = c$ не имеет ни одного решения в целых числах. Например, ни одного решения в целых числах не имеет уравнение $6x + 15y = 100,$ т. к. 100 не делится на $3 = D(6, 15).$ Если же c делится на $D(a, b) = D,$ то D является общим делителем всех трех чисел a, b и c. Положим: $a = Da', b = Db', c = Dc', \quad a', b', c' -$ целые числа. Тогда уравнение принимает вид:

$$Da'x + Db'y = Dc' \Leftrightarrow a'x + b'y = c'.$$

Очевидно, что каждое решение исходного уравнения удовлетворяет последнему уравнению и обратно. Поэтому первоначальная задача сводится к отысканию всех целых решений уравнения $a'x + b'y = c'.$

Для его коэффициентов выполняется условие $D(a', b') = 1,$ т. е. $a', b' -$ взаимно простые числа.

Действительно, если допустить, что a', b' имеют общий делитель $d > 1$, то $a' = dp, b' = dq$ и, следовательно, $a = Da' = (Dd)p, b = Db' = (Dd)q,$ т. е. a и b имеют общий делитель Dd, больший, чем D. Но ведь это невозможно, т. к. $D(a, b) = D.$

Начнем с уравнения вида $ax + by = 1$. Необходимое условие для существования целых решений этого уравнения, как мы видели, - это, чтобы $1 \vdots D(a, b) = D,$ т. е. $D(a, b) = 1.$ Если это условие выполнено, то уравнения имеет целые решения и при том бесконечное множество таких решений. Покажем это на примере уравнения: $991x + 71y = 1.$ Проверим, что $D(991, 71) = 1$. Воспользуемся алгоритмом Евклида:

$$
\begin{aligned}
&991 = 71 \cdot 13 + 68,\\
&71 = 68 \cdot 1 + 3,\\
&68 = 3 \cdot 22 + 2,\\
&3 = 2 \cdot 1 + 1,\\
&2 = 1 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда видим, что $D(991,71) = 1$. Конечно, этот факт можно установить и без алгоритма Евклида, но проведенные только что выкладки, как мы покажем, позволят найти одно из решений данного уравнения. Чтобы представить прием отыскания в более ясном виде, заменим в этих равенствах коэффициенты уравнения: 991 и 71, а так же последовательные остатки: 68, 3 и 2 (кроме предпоследнего остатка, равного $D(991,71)$), соответственно буквами a, b, r_1, r_2, r_3. При этом последовательные частные 13, 1, 22, 1 и последний остаток (1) оставим в прежнем виде. Тогда получим равенства:

$$
\begin{aligned}
&a = 13b + r_1,\\
&b = r_1 + r_2,\\
&r_1 = 22r_2 + r_3,\\
&r_2 = r_3 + 1.
\end{aligned}
$$

Из них выводим, начиная с последнего равенства:

$$1 = r_2 - r_3, \tag{1}$$

$$r_3 = r_1 - 22r_2, \tag{2}$$

$$r_2 = b - r_1, \tag{3}$$

$$r_1 = a - 13b. \tag{4}$$

Теперь подставим r_3 из (2) в (1):

$$1 = r_2 - (r_1 - 22r_2) = -r_1 + 23r_2.$$

Сюда подставим выражение для r_2 из (3):

$$1 = -r_1 + 23(b - r_1) = -24r_1 + 23b.$$

Наконец, в последнее равенство подставим выражение для r_1 из (4):

$$1 = -24(a - 13b) + 23b = -24a + 335b.$$

Вспомним теперь, что $a = 991, \quad b = 71.$ Получим:

$$991 \cdot (-24) + 71 \cdot 335 = 1.$$

Сравнивая с данным уравнением:

$$991\,x + 71\,y = 1,$$

видим, что этому уравнению удовлетворяют целые числа:

$$x = x_0 = -24, \quad y = y_0 = 335.$$

Итак, с помощью алгоритма Евклида найдено одно решение в целых числах данного уравнения. Это достаточно, чтобы найти остальные его решения. В самом деле, пусть *x* и *y* – любое решение этого уравнения:

$$991\,x + 71\,y = 1.$$

Вычитая отсюда почленно равенство

$$991\ x_0 + 71\ y_0 = 1,$$

где x_0, y_0 найденные выше числа, найдем:

$$991\ (x - x_0) + 71(y - y_0) = 0,$$

откуда

$$991\ (x - x_0) = 71(y_0 - y).$$

Отсюда видно, что $991\,(x - x_0) \vdots 71;$ но $D(991,71) = 1$. Поэтому

$(x - x_0) \vdots 71 \Leftrightarrow (x - x_0) = 71 \cdot t,$ где t – целое число.

Итак, $x = x_0 + 71 \cdot t$. Подставляя это в полученное выше равенство, получим:

$$991 \cdot 71 \cdot t = 71(y_0 - y),$$

откуда $y = y_0 - 991 \cdot t$. Простая проверка подстановкой показывает, что пара чисел:

$$x = x_0 + 71 \cdot t = -24 + 71 \cdot t,$$
$$y = y_0 - 991 \cdot t = 335 - 991 \cdot t,$$

действительно удовлетворяют уравнению

$$991\,x + 71\,y = 1$$

при любых значениях *t*. Таким образом, это уравнение имеет бесконечное множество различных решений.

Остается рассмотреть уравнение

$ax + by = c,$ где $D(a, b) = 1,$ а c – любое целое число.

Чтобы решить его, находим сначала с помощью алгоритма Евклида одно решение x_0, y_0 вспомогательного уравнения $ax + by = 1$. Если

$$ax_0 + by_0 = 1,$$

то
$$a(cx_0) + b(cy_0) = c,$$

откуда следует, что cx_0, cy_0 есть решения данного уравнения. Отсюда, рассуждая, как и выше, получаем, что общее решение этого уравнения можно записать в виде:

$$x = cx_0 + bt, \quad y = cy_0 - at,$$

где t – любое целое число.

Вернемся к простейшему примеру уравнения $5x + 3y = 62,$ с которого мы начали. Решаем сначала вспомогательное уравнение $5x + 3y = 1.$ Здесь достаточно было найти одно какое- либо решение. Можно, конечно, использовать алгоритм Евклида, но и без этого видно, что можно, например, положить: $x_0 = -1, \quad y_0 = 2$ (или $x_0 = 2, \quad y_0 = -3$ и т. д.). Умножая обе части равенства $5x_0 + 3y_0 = 1$ на 62, получим:

$$5(62x_0) + 3(62y_0) = 62.$$

Итак, одно из решений данного уравнения:

$$x = 62x_0 = -62, \quad y = 62y_0 = 124.$$

Поэтому общее его решение имеет вид: $x = -62 + 3t,\ y = 124 - 5t,\ t$ – любое целое число.

Если нас интересуют только неотрицательные решения, то нужно потребовать, чтобы одновременно выполнялись неравенства:

$$-62 + 3t \ge 0 \quad и \quad 124 - 5t \ge 0,$$

откуда
$$t \ge 20\frac{2}{3} \quad и \quad t \le 24\frac{4}{5}.$$

Т.к. t – целое число, то годятся лишь следующие его значения:

$$t_1 = 21, \quad t_2 = 22, \quad t_3 = 23, \quad t_4 = 24.$$

Каждому из них соответствует свое решение предложенного уравнения:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 19;\quad x_2 = 4,\ y_2 = 14;\quad x_3 = 7,\ y_3 = 9;\quad x_4 = 10,\ y_4 = 4.$$

В теме «Делимость чисел» можно предложить школьникам ознакомиться со следующим параграфом.

8. Уравнение Пифагора*.

В этом параграфе будет идти речь о решении в целых числах уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

Задача. Пусть *a, b, c* – целые числа, составляющие решение уравнения $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что число ab делится на 2.

Решение. Допустим, что число ab не делится на 2. Тогда a и b – нечетные числа: $a = 2m+1,\quad b = 2n+1,$ и

$a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4m^2 + 4m + 4n^2 + 4n + 2,$ откуда следует, что число $a^2 + b^2$ делится на 2, но не делится на 4 (объяснить, почему?). Следовательно, простое число 2 входит в разложение числа $a^2 + b^2$ на простые множители в нечетной степени, равной 1, что невозможно.

Из доказанного утверждения легко следует, что если *a, b* и *c* – взаимно простые целые числа и $a^2 + b^2 = c^2$, то число *c* нечетное, а числа *a* и *b* имеют различную четность.

Теорема 1. 1) Пусть *a, b* и *c* – взаимно простые натуральные числа, являющиеся решением уравнения Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$. Причем a – нечетное число. Тогда существуют взаимно простые натуральные числа u и v (u > v), различной четности, такие, что

$$\begin{cases} a = u^2 - v^2 \\ b = 2uv \\ c = u^2 + v^2 \end{cases}$$

2) Обратно: если u и v (u > v) – взаимно простые натуральные числа различной четности, то числа a, b и c, определенные с помощью системы уравнений $\begin{cases} a = u^2 - v^2 \\ b = 2uv \\ c = u^2 + v^2 \end{cases}$, составляют решение уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ и притом взаимно просты.

Данная теорема позволяет описать множество всех прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами.

Задача 7.1*. Укажите длины сторон всех целочисленных прямоугольников, у которых длина гипотенузы меньше 30.

9. Контроль знаний, умений и навыков по теме «Делимость чисел».

Контроль знаний, умений и навыков является важной составной частью учебного процесса. Изучение характера усвоения учащимися учебного материала, оценка их знаний и умений, выявление умственного развития и развития познавательных особенностей – необходимая сторона процесса обучения, составляющая внутреннее содержание каждого его звена.

Контроль знаний учащихся является очень сложным и крайне тонким процессом как в творческом аспекте, так и в методическом плане его практических разработок, как в психологическом отношении, так и в плане организационном. Это связано с тем, что на контроль возложена задача получения и накопления объективной информации для успешного управления обучением, развитием и воспитанием школьников.

9.1. Разноуровневый контроль качества знаний по математике.

Для выявления уровня сформированности системы качеств знаний у учащихся необходимы специально ориентированные поуровневые проверочные работы, которые должны точно соответствовать цели проверки: выявлять знания и типичные ошибки школьников. Тексты проверочных работ следует составлять исходя из того, что качество знаний характеризуется совокупностью относительно устойчивых свойств: прочности, действенности, системности. Кроме того, каждый ребенок индивидуален, имеет свои способности, склонности и интересы, требовать от всех учащихся усвоения программных знаний на одном уровне бесцельно и негуманно. Важно учитывать индивидуальные особенности и в соответствии с ними осуществлять дифференцированную оценку знаний.

9.2. **Тестовые задания.**

В своей работе учителя математики реализуют различные формы проверки знаний, умений и навыков. В последнее время среди средств контроля в практике обучения активно используются тестовые задания или так называемые задания с выбором ответа (тестирование особенно актуально в связи с введением единого государственного экзамена ЕГЭ).

Использование тестов является одним из рациональных дополнений к методам проверки ЗУН учащихся. Оно оптимально соответствует полной самостоятельности в работе каждого учащегося. Это одно из средств индивидуализации в учебном процессе, так как учитывается психологические особенности ребят, мешающие их успешной деятельности.

Кроме того, тестовый контроль имеет и ряд преимуществ перед другими видами контроля. Он дает возможность проверить значительный объем изученного материала малыми порциями и быстро диагностировать овладение учебным материалом большого числа учащихся. При этом жесткая система проверки знаний учеников весьма объективна.

Каждый тест, как правило, состоит из достаточно большого количества заданий. В практике тестирования наиболее распространены 4 типа тестовых заданий:

- ✓ открытые (заполнение пропусков в истинных утверждениях или в верно сформулированных определениях);
- ✓ закрытые (тесты на выбор ответов, среди которых есть верные и неверные ответы и ответ, предполагающий отказ от выполнения данного задания (например, ответ: нет правильного ответа));
- ✓ задания на установление истинности (ложности) предложенного утверждения и правильности сформулированного определения;
- ✓ логические тесты (решить логические тесты – значит отыскать решение первых задач, по аналогии использовать его при решении последующих. Эти задания – некоторые «математические сюрпризы», которые необходимо в первую очередь проанализировать и только потом решать).

Стоит еще раз отметить, что, несмотря на достоинства тестирования, использование тестов является одним из рациональных **<u>дополнений</u>** к методам проверки ЗУН учащихся. Оно ни в коей мере не заменяет проведения других форм тематических зачетов (например, контрольной работы), так как использование только тестовых заданий не позволяет выявить глубину усвоения теоретического и практического материала. Поэтому тестирование не может служить для учителя средством итогового контроля, а его результаты – основанием для выставления ученику итоговой оценки.

В данной работе не представлены тестовые проверочные работы. Однако, очень хорошая подборка тестовых заданий дана в работе Блинкова «Система тестов» (Математика в школе)

9.3. Примерные варианты контрольной работы по теме «Делимость чисел».

Контрольная работа является широко применяемым в обучении математике средством контроля. С ее помощью можно наиболее полно проверить знание теоретического материала, умение применять его к решению задач, сформированность навыков, в том числе вычислительных, овладение приемами учебной работы и др. В процессе написания контрольной работы следует обеспечить полную самостоятельность ее выполнения каждым учеником и необходимые условия.

Наиболее важной и трудоемкой частью контрольной работы, по сравнению с тестовыми заданиями, является анализирование работы. Тщательно проведенный анализ позволяет глубоко изучить пробелы и достижения отдельных учеников, выделить типичные ошибки и основные затруднения учащихся, изучить причины их появления и наметить пути их решения.

Ниже предлагаются примерные варианты контрольной работы по теме «Делимость чисел».

Вариант 1.

1. Укажите, на какую цифру должно оканчиваться число 367*, чтобы оно делилось на:

   а) 4; б) 5; в) 8; г) 9; д) 11; е) 25.
2. Вычислите:

   $\text{НОК}(52;16)\cdot\text{НОД}(16;52):\text{НОД}(16;24;52)$.
3. Докажите, что число n^4+4n^2+3, где $n\in N-$ составное.
4. Докажите, что при любом n, где $n\in N$, $n(n^2-1)$ делится на 6.
5. При каком значении параметра *a* корень уравнения $ax-8=x$ является натуральным числом?
6. Царь Дадон умеет считать только до пяти. Пересчитывая камни в сокровищнице, он брал каждый раз по пять камней и в ней всегда оставался

один камень. При расчете с Звездочетом он сказал: «Я буду брать каждый раз одинаковое количество камней, а остаток будет твоей наградой». Жадный Дадон рассуждал так: «Если я буду брать каждый раз по 4 камня, то остаток будет меньше и Звездочету не придется платить». Он начал брать по 4 камня и был удивлен, когда осталось 3 камня.

Сколько камней было в сокровищнице, если известно, что камней было больше пяти пятков, но не больше полсотни?

Вариант 2.

1. Укажите, на какую цифру должно оканчиваться число 456*, чтобы оно делилось на:

   а) 4; б) 5; в) 8; г) 9; д) 11; е) 25.
2. Вычислите:

   $\text{НОК}(28;14)\cdot\text{НОД}(56;14):\text{НОД}(14;28;56).$
3. Докажите, что число $n^4+8n^2+12,$ где $n\in N-$ составное.
4. Докажите, что при любом n, где $n\in N$, 7^n-5^n делится на 2.
5. При каком значении параметра *a* корень уравнения $ax-8=2x+3$ является натуральным числом?
6. Двое пиратов Котс и Ботс нашли сундук Флинта с одинаковыми золотыми монетами. Они умели считать только до десяти. «Я, – сказал Котс, - буду брать себе по 10 штук, а тебе буду давать по 10 штук и еще одну монетку. А что останется, - скромно прибавил он, - я возьму себе». Так они и сделали.

   Кто из пиратов получил больше монет и на сколько, если остаток составил 9 монет, а Флинт считал по 26 монет, и остатка не было?

   О сундуке известно, что он вмещает не более двух сотен монет.

10. Олимпиадные задачи по теме «Делимость чисел».

В целях развития у учащихся интереса к математике во многих городах и сельских местностях проводятся математические олимпиады: школьные, районные, городские, областные.

Если разрешить участвовать в этих олимпиадах учащимся, не прошедшим должной подготовки в школе под руководством учителя или самостоятельно, то нередко после неудач они не только не заинтересовываются математикой, но, напротив, часто теряют веру в свои силы и вряд ли скоро возьмутся за решение трудных и даже просто занимательных задач.

Поэтому очень важно организовывать для учащихся, наиболее интересующихся математикой, в школе или в объединении нескольких школ математические кружки, чтение лекций учителями, научными сотрудниками ближайших высших учебных заведений и исследовательских институтов.

На кружковых занятиях основной целью следует считать решение интересных и оригинальных задач, расширяющих и углубляющих знания учащихся, получаемых на уроках. Однако, каждая задача, особенно на первых занятиях кружка, не должна содержать нагромождения многих трудностей логического, смыслового и вычислительного характера. В противном случае у учащихся очень быстро пропадает интерес к математике. Если же умело поддерживать любознательность учеников, предлагая им задачи, соответствующие их знаниям, то это привьет им вкус к самостоятельному мышлению и поможет развитию их математических способностей.

Рассмотренные ниже олимпиадные задания могут служить первым шагом для стимуляции у учеников интереса к математике и перехода к задачам повышенной трудности.

Задача 9.1. Натуральное число y назовем ординарным, если существует натуральное число x, при котором $x^4 + y -$ простое число. Натуральное число у назовем неординарным, если для любого натурального числа х число $x^4 + y -$ составное. Укажите по одному ординарному и неординарному числу. Докажите, что множество таких чисел бесконечно.

Решение. 1) Пусть p – простое число, $y = p - 1, x = 1, x^4 + y = p$. Множество чисел $y = p - 1$ бесконечно. Например, при $p = 5, y = 4 -$ ординарное число.

2) Пусть $y = 4 \cdot k^4$(к – натуральное число, $k > 1$). Тогда $x^4 + y = x^4 + 4k^4 = (x^2 + 2k^2)^2 - (2kx)^2 = (x^2 + 2k^2 - 2kx)(x^2 + 2k^2 + 2kx) -$ составное. Множество неординарных чисел $4 \cdot k^4$ бесконечно. Например, при $k = 2, y = 64$.

▲

Задача 9.2. Найдите такое простое число р, что $p^2 + 7$ тоже постое.

Решение. $p^2 + 7$ нечетно, тогда p^2 и p – четные. Такое число одно: p=2.

▲

Задача 9.3. Докажите, что $43^{1998} - 1$делится на 77.

Решение. $a^{2k} - 1$ делится на $a^2 - 1$, поэтому $43^{1998} - 1$ делится на

$43^2 - 1 = (43 - 1)(43 + 1) = 42 \cdot 44 = 77 \cdot 24$

▲

Задача 9.4. Докажите, что число $2^{2002} + 1$ делится на $2^{1001} + 2^{501} + 1$ без остатка.

Указание. Обозначьте 2^{501} за x. Затем разложите на множители многочлен $4x^4 + 1$.

▲

Задача 9.5. Докажите, что число $13 + 13^2 + \ldots + 13^{2003} + 13^{2004}$ делится на 7.

Указание. Сгруппируйте слагаемые попарно: первое со вторым, третье с четвертым и т. д. Затем из каждой такой суммы вынесите за скобки общий множитель.

▲

Задача 9.6. Первоклассник Петя знает только цифру 1. Докажите, что он может записать число, делящееся на 2003.

Указание. Рассмотрите 2004 различных числа, записанных одними единицами. По принципу Дирихле среди них найдутся два числа, дающие одинаковые остатки при делении на 2003. Их разность (число вида 11…1100…0) делится на 2003. Но тогда на 2003будет делиться и число, полученное отбрасыванием у этой разности всех нулей. (Заметим, что искомое число содержит в своей записи 263 единицы).

▲

Задача 9.7. Докажите, что среди шести человек обязательно найдутся трое попарно знакомых или трое попарно незнакомых (задача Рамсея).

Указание. Представьте каждого человека в виде вершины выпуклого шестиугольника, знакомство двух людей – в виде его стороны или диагонали одного цвета, а незнакомство двух людей – в виде стороны или диагонали другого цвета. Далее на основании принципа Дирихле покажите наличие «одноцветного» треугольника.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современный уровень развития науки и техники требует глубоких и прочных математических знаний. Математические расчеты, основанные на использовании алгоритмов основных математических действий, являются составной частью трудовой деятельности рабочего, инженера, экономиста и др. Умение пользоваться математическим аппаратом является непременным элементом политехнического образования.

О наличие у учащихся вычислительной культуры можно судить по их умению производить устные и письменные вычисления, рационально использовать ход вычислений, убеждаться в правильности полученных результатов.

Качество вычислительных умений определяется знанием правил и алгоритмов вычислений. Поэтому степень овладения вычислительными умениями зависит от четкости сформулированного правила и от понимания принципа его использования. Умение формируется в процессе выполнения целенаправленной системы упражнений. Очень важно некоторые вычислительные умения доводить до навыков.

При обучении вычислениям и совершенствовании техники счета необходимо отчетливо представлять, какие умения и навыки у учащихся необходимо сформировать.

Делимость чисел, правила и алгоритмы делимость позволяют повышать вычислительную культуру школьников. Поэтому основная школа призвана формировать сознательное усвоение законов и свойств арифметических действий.

Данная разработка может быть использована учителем как методическое пособие обучению школьников по теме «Делимость чисел» в классах с углубленным изучением математики и на факультативных занятиях в школе. Однако доступность изложения позволяет использовать данную разработку как пособие и для учителей общеобразовательных школ, а кроме того, позволяет некоторые свойства и упражнения применять и на уроках математики в 5-6 классах.

Основное содержание представлено в 9 параграфах, сопровождающихся задачами. Каждый учитель может вносить свои коррективы в систему упражнений и их дозировку, отбирая тот материал, который он сочтет наиболее целесообразным использовать в конкретных условиях своего класса.

ЛИТЕРАТУРА

1.Виленкин Н. Я. Алгебра для 8 класса. Учебное пособие по математике для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1995.

2.Галочкин А. И. Числа и многочлены (Часть I. «Делимость целых чисел»). Методические разработки по математике для учащихся заочного отделения Малого механико-математического факультета МГУ.– М: МГУ, 1999

3. Галочкин А. И. Числа и многочлены (Часть II. «Целочисленные уравнения»). Методические разработки по математике для учащихся заочного отделения Малого механико-математического факультета МГУ.– М: МГУ, 1999.

4.Кожухов С. К., Галанина Е. А. Элективные курсы по математике в предпрофильной подготовке девятиклассников. Практикум по решению олимпиадных задач. – Орел: ОГУ, 2005

5. Маркушевич А. И. Дополнительные вопросы целых чисел. // Математика в школе, 1967, №4.

6.Мурадова Е. Простые числа. Так ли проста их история? // Математика, 2002, №13.

7.Муромцева Л. И. Дополнительные вопросы целых чисел. Методическое пособие для учителей восьмилетней школы. – Орел: ОГУ, 1968.

8.Программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев: Математика. 5 – 11 кл./ Составители Г.М. Кузнецова, Н.Г. Миндюк.

9.Пронина Е. Б. Примерное тематическое планирование для классов с углубленным изучением математики. // Математика, 2000, №28.

10.Фоминых Ю. Ф. Делимость чисел.// Математика в школе, 1998, №2.

Панюшкин Сергей Владимирович

Козичева Любовь Михайловна

Делимость чисел в курсе алгебры 8-9 классов с углубленным изучением математики

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

Технический редактор: Т.Л. Овсянникова

ФГБОУ ВО ОГУ им. И.С. Тургенева, 2018 г.