23 октября 2025

«Российское Общество Знание»

Российское общество Знание

«Основы современной квантово-релятивистской физики»

Турин Валентин Олегович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной и теоретической физики
Физико-математического факультета
ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева

voturin@mail.ru

Регистрация аудитории

Опрос аудитории

Эпиграф на две страницы:

«Все пятьдесят лет сознательных размышлений не приблизили меня к ответу на вопрос: «Что такое кванты света?» Конечно, сегодня каждый проходимец думает, что знает ответ, но он заблуждается.»
— Альберт Эйнштейн
«Познание атома – детская игра по сравнению с загадками детской игры.»
— Альберт Эйнштейн
«Прочтите её! Хотя и кажется, что её писал сумасшедший, написана она солидно».
— Альберт Эйнштейн (рекомендовал немецкому физику Максу Борну диссертацию де Бройля в таких выражениях)
«Бог не играет в кости!»
— Альберт Эйнштейн
«Эйнштейн, не учите Бога, что ему делать»
— Нильс Бор
«Эта теория недостаточно безумна, чтобы быть верной.»
— Нильс Бор
«Я думаю, что смело могу сказать, что квантовую механику никто не понимает.»
— Ричард Фейнман
«Может быть величайшим триумфом человеческого гения является то, что человек может понять вещи, которые он уже не в силах вообразить.»
— Лев Давидович Ландау
«В силу того, что по самой логике своего развития система научных исследований непрерывно отягощается громоздкими административными структурами, становится более чем когда-либо необходимым охранять свободу научного творчества и свободную инициативу оригинальных исследований, поскольку эти факторы всегда были и останутся самыми плодотворными источниками великого прогресса Науки.»
— Луи де Бройль
«Если бы я знал по этой теме абсолютно всё, я бы не читал по ней лекцию!»
— Арнольд Зоммерфельд
«Если вы хотите стать физиком, вы должны сделать три вещи: во-первых, изучать математику, во-вторых, изучать математику и, в-третьих, делать то же самое.»
— Арнольд Зоммерфельд (номинировался на Нобелевку 81 раз, но так и не получил)
«Заткнись и считай!»
— Дэвид Мермин

«В вопросах науки авторитет тысячи не стоит скромного рассуждения одного человека».
— Галилео Галилей
«Науки делятся на две группы — на физику и коллекционирование марок.»
— Эрнест Резерфорд.
«Физик стремится сделать сложные вещи простыми, а поэт – простые вещи – сложными.»
— Лев Ландау.
«Если тебя квантовая физика не испугала, значит, ты ничего в ней не понял.»
— Нильс Бор
«Тот, кто хочет видеть результаты своего труда немедленно, должен идти в сапожники.»
— Альберт Эйнштейн
«Большинство фундаментальных идей науки по существу просты и, как правило, могут быть выражены на понятном для всех языке.»
— Альберт Эйнштейн
«… все, что допускается воображать в науке, должно согласовываться со всем прочим, что нам известно: что электрические поля и волны, о которых мы говорим, это не просто удачные мысли, которые мы вызываем в себе, если нам этого хочется, а идеи, которые обязаны согласовываться со всеми известными законами физики. Недопустимо всерьёз воображать себе то, что очевидным образом противоречит известным законам природы. Так что наш род воображения —весьма трудная игра. Надо иметь достаточно воображения, чтобы думать о чем-то никогда прежде не виденном, никогда прежде не слышанном. В тоже время приходится, так сказать, надевать на мысли смирительную рубашку, ограничивать их условиями, вытекающими из наших знаний о том, какому пути на самом деле следует природа. Проблема создания чего-то, что является совершенно новым и в то же время согласуется со всем, что мы видели раньше, — проблема чрезвычайно трудная.»
— Ричард Фейнман

Принцип соответствия в методологии науки — утверждение, что любая новая научная теория должна включать старую теорию и её результаты как частный случай.

Когда знаменитый физик Ричард Фейнман был назван «Самым умным человеком в мире», его мать Люсиль Фейнман сказала: «Наш Ричи? Самый Умный человек в мире? Да поможет нам всем Бог!»

10 учёных, внёсших самый большой вклад в развитие квантовой физики и год присуждения Нобелевской премии

Макс Планк 1918

Альберт Эйнштейн 1921

Нильс Бор 1922

Луи де Бройль 1929

Макс Борн 1954

Поль Дирак 1933

Вернер Гейзенберг 1932

Вольфганг Паули 1945

Эрвин Шрёдингер 1933

Ричард Фейнман 1965

Проблема излучения абсолютно чёрного тела

В **<u>1900</u>** году Макс Планк выдвинул предположение, что электромагнитное излучение излучается и поглощается дискретными порциями (квантами), пропорциональными частоте осциллятора:

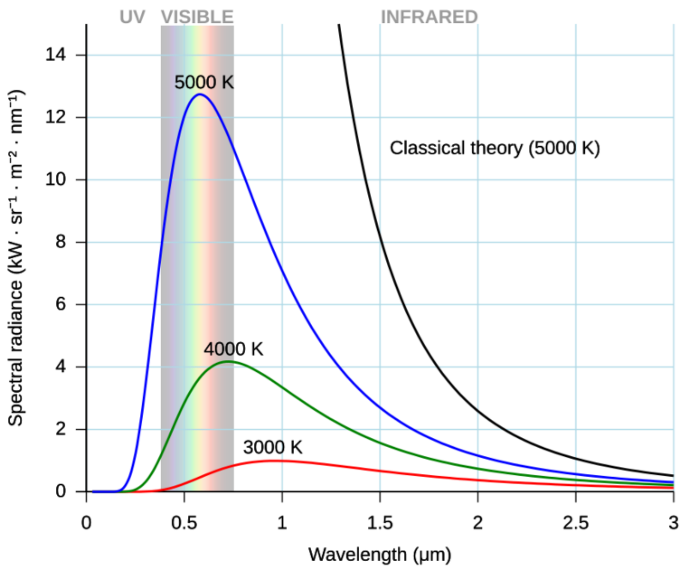
$$\Delta E = h\nu$$

С 2019 года значение постоянной Планка считается зафиксированным и точно равным величине:

$$h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}\ (\text{Дж}\cdot\text{с}).$$

Широко используется также приведённая постоянная Планка, равная постоянной Планка, делённой на 2π и обозначаемая как $\hbar$ («h с чертой»):

$$\hbar = h/2\pi = 1{,}054\,571\,817 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}$$



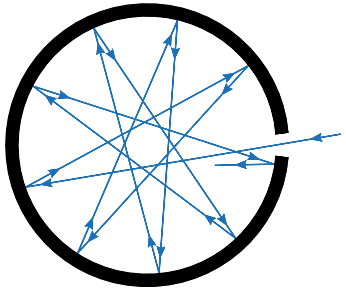
Объёмная спектральная плотность энергии излучения абсолютно чёрного тела в зависимости от частоты и температуры определяется законом Планка:

$$u_\lambda = \frac{8\pi ch}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right)-1} \qquad u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}$$

Абсолютно чёрное тело (сокращённо АЧТ) — физическое тело, которое при любой температуре поглощает всё падающее на него электромагнитное излучение во всех диапазонах. Несмотря на название, абсолютно чёрное тело само может испускать электромагнитное излучение любой частоты и визуально иметь цвет. Спектр излучения абсолютно чёрного тела непрерывен и диктуется только температурой. Длина волны спектрального максимума для АЧТ определяется законом смещения Вина.

Ультрафиолетовая катастрофа — парадокс классической физики, состоящий в том, что полная мощность теплового излучения любого нагретого тела, согласно закону Рэлея — Джинса, должна быть бесконечной. Название парадокс получил из-за того, что спектральная плотность энергии излучения должна была неограниченно расти по мере сокращения длины волны.

По сути, этот парадокс показал в своё время если не внутреннюю противоречивость классической физики, то, во всяком случае, крайне резкое расхождение с экспериментом. Так как это не согласуется с экспериментальным наблюдением, в конце XIX века возникали трудности в описании фотометрических характеристик тел.



Схематичное изображение реализации чёрного тела

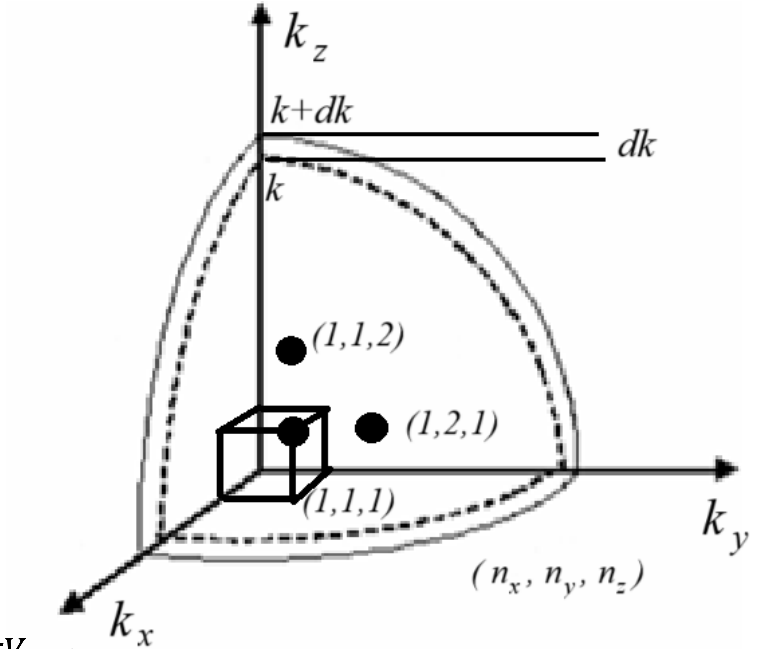
$\frac{\lambda_n}{2} n = L, \quad n = 1,2,3, \ldots$ - одномерный случай или $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1,2,3, \ldots$ Здесь $k = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ и $\lambda_n = \frac{2L}{n}$

В трёхмерном случае $k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}, \quad n_x = 1,2,3, \ldots; \; k_y = \frac{n_y \pi}{L_y}, \quad n_y = 1,2,3, \ldots; k_z = \frac{n_z \pi}{L_z}, \quad n_z = 1,2,3, \ldots$

В трёхмерном случае $k_x = \frac{n_x \pi}{L_x}, \quad n_x = 1,2,3, \ldots; \; k_y = \frac{n_y \pi}{L_y}, \quad n_y = 1,2,3, \ldots; k_z = \frac{n_z \pi}{L_z}, \quad n_z = 1,2,3, \ldots$

Объём на одно состояние = $\frac{\pi}{L_x}\frac{\pi}{L_y}\frac{\pi}{L_z} = \frac{\pi^3}{V}$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$



Объём слоя $\frac{1}{8} 4\,\pi k^2 dk$

Всего две поляризации волн – умножаем на 2

Количество точек внутри слоя $= \dfrac{2\frac{1}{8}4\,\pi k^2 dk}{\frac{\pi^3}{V}} = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$

Переходим к частотам, учитывая $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$: $\quad \frac{V}{\pi^2}\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 d\left(\frac{2\pi\nu}{c}\right) = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$

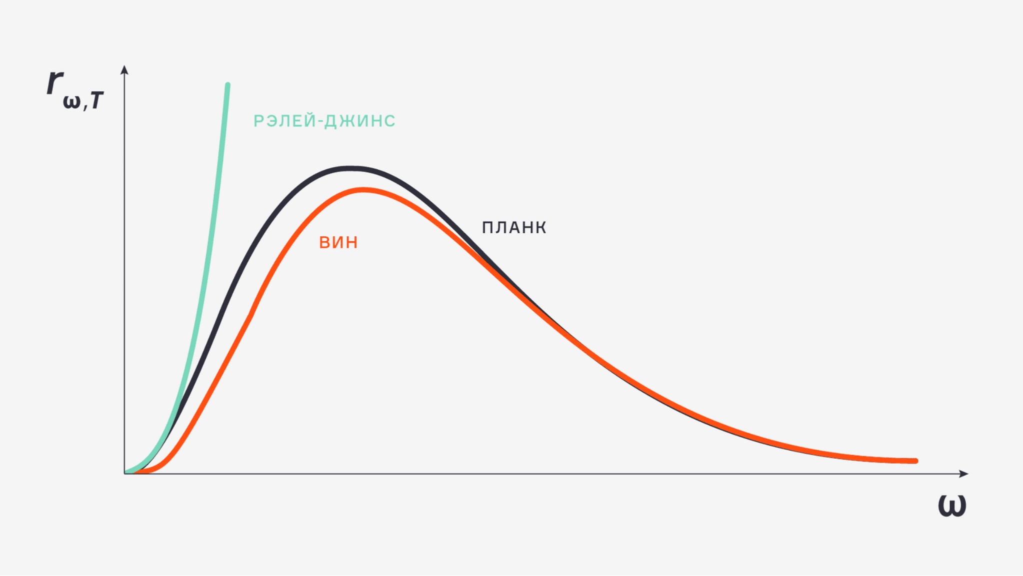
Перепишем: $\frac{8\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu = V\, G(\nu) d\nu$ т.е. $G(\nu)$= $\frac{8\pi}{c^3}\nu^2$ - количество возможных стоячих волн в диапазоне от ν до $\nu + d\nu$

На самом деле, количество существующих стоячих волн в диапазоне от ν до $\nu + d\nu$ получается умножением $G(\nu)$ на вероятность заполнения состояния $f(\nu)d\nu$: $dn = G(\nu)\, f(\nu)\, d\nu$.

Но **Рэлей** предположил, что $f(\nu) = 1$ и каждая волна забирает kT , т.е. $\frac{kT}{2}$ в магнитной волне и $\frac{kT}{2}$ в электрической волне .

$$dw = u(\nu)d\nu = E(\nu)f(\nu)G(\nu)d\nu = kT\, 1\, G(\nu)d\nu = kT\frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu$$

Получается закон Рэлея-Джинса: $u(\nu) = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2$, который приводит к ультрафиолетовой катастрофе! На самом деле $f(\nu) \neq 1$!



Вин предлагал использовать распределение Больцмана: $f(\nu) = \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$ $\quad E(\nu) = h\nu$

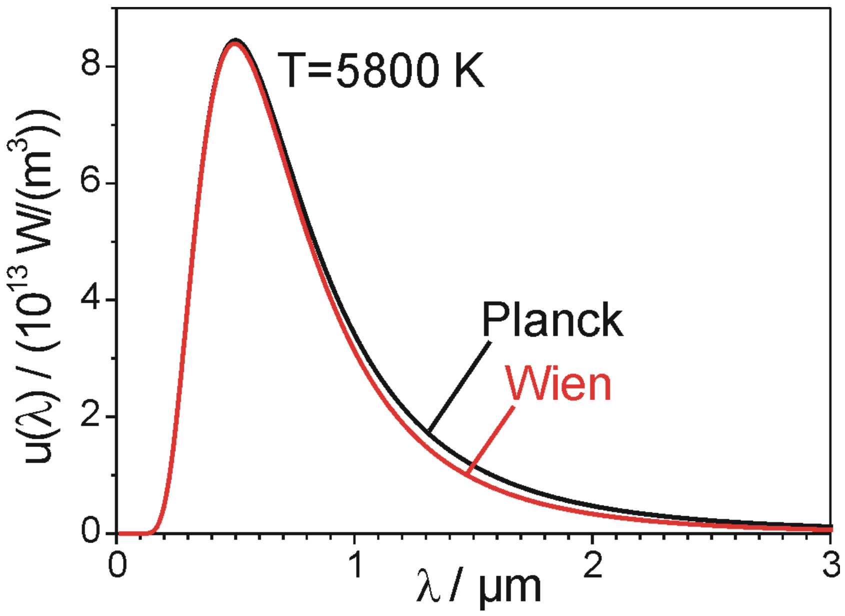
$E(\nu)f(\nu) = \langle E \rangle = h\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$

Модель Вина: $u(\nu) = \dfrac{8\pi h\nu^3}{c^3}\exp\left(-\dfrac{h\nu}{kT}\right)$

Планк сначала угадал формулу, а потом её вывел:

$$f(\nu) = \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \qquad E(\nu) = h\nu \qquad E(\nu)f(\nu) = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

Оказывается, это распределение Бозе-Эйнштейна



Формула Планка: $$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

ВЫВОД:

Планк предположил, что колебания могут обладать лишь дискретным набором энергий: $$E = nh\nu \quad n = 1,2,3, \ldots$$

Средняя энергия осциллятора:

$$E(\nu)f(\nu) = \langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nE_1 \exp(-\alpha n E_1)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n E_1)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial\alpha}(\exp(-\alpha n E_1))}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n E_1)} = \frac{-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n E_1)\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n E_1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n E_1) = 1 + \exp(-\alpha E_1) + \exp(-2\alpha E_1) + \cdots = 1 + \exp(-\alpha E_1) + \exp(-\alpha E_1)\exp(-\alpha E_1) + \cdots =$$

$$= a_0 + a_0 q + a_0 q q + \cdots = \frac{1}{1 - \exp(-\alpha E_1)} = \frac{\exp(\alpha E_1)}{\exp(\alpha E_1) - 1}$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия:

$$a_0, a_1 = a_0 q, a_2 = a_1 q = a_0 q^2, \ldots \quad a_0 = 1, \;\; S = \frac{a_0}{1-q} \;, \qquad q = \exp(-\alpha E_1) < 1, \;\; \alpha E_1 = \frac{h\nu}{kT}, \;\; S = \frac{1}{1-\exp(-\alpha E_1)}$$

$$\langle E \rangle = \frac{-\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n E_1)\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n E_1)} = \frac{-\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{1-\exp(-\alpha E_1)}\right)}{\frac{1}{1-\exp(-\alpha E_1)}} = -(1 - \exp(-\alpha E_1))\left(-\frac{1}{(1-\exp(-\alpha E_1))^2}\right)\frac{\partial}{\partial \alpha}(1 - \exp(-\alpha E_1)) =$$

$$= \frac{-\exp(-\alpha E_1)\frac{\partial}{\partial \alpha}(-\alpha E_1)}{1-\exp(-\alpha E_1)} = \frac{E_1 \exp(-\alpha E_1)}{1-\exp(-\alpha E_1)} = \frac{E_1}{\exp(\alpha E_1)-1}$$

$$\boxed{E(\nu) f(\nu) = \langle E \rangle = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}}$$

$$u(\nu) = E(\nu) f(\nu) G(\nu) = \langle E \rangle \, G(\nu) = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1} \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}$$

Результат классической физики:

$$E(\nu) f(\nu) = \langle E \rangle = \frac{A \int_0^{\infty} E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE}{A \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE} = \cdots = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha E) dE = \frac{1}{\alpha} = kT$$

$$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

«Ура! Получилось!»
- Макс Планк. Нобелевская премия по физике 1918 г.

Свою идею Планк докладывал коллегам с ощущением, что совершает «акт отчаяния» - настолько она противоречила всем принципам классической физики. Идею кванта он рассматривал только как математический приём. Он так и писал известному американскому физику Роберту Вуду: «Это была чисто формальная гипотеза ...чтобы любой ценой получился положительный результат». И даже спустя десять лет Планк призывал своего молодого российского ученика А. Ф. Иоффе «не посягать на самый свет» и «не идти дальше, чем это крайне необходимо». Однако уже в 1905 году Альберт Эйнштейн использовал идею Планка для объяснения фотоэффекта.

Подробнее см.: https://www.nkj.ru/archive/articles/5347/ (Наука и жизнь, КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ- СТО ЛЕТ)

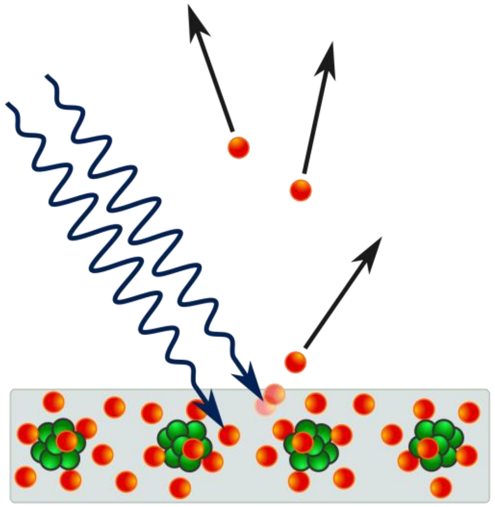
АНАЛИЗ:

Если $h\nu \ll kT$, то $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$ и $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}$ мы учли первый член в разложении в ряд Тейлора

$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1} \approx \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\frac{h\nu}{kT}} = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2$ Получается закон Рэлея-Джинса

Если $h\nu \gg kT$, то $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$ $u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1} \approx \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)$ Получается модель Вина

Фотоэффект



Фотоэффект — это испускание электронов веществом под действием света (и, вообще говоря, любого электромагнитного излучения). В конденсированных веществах (твёрдых и жидких) выделяют внешний и внутренний фотоэффект.

Фотоэффект был объяснён в 1905 году Альбертом Эйнштейном (за что в 1921 году он, благодаря номинации шведского физика Озеена, получил Нобелевскую премию) на основе гипотезы Планка о квантовой природе света. В работе Эйнштейна содержалась важная новая гипотеза — если Планк предположил, что свет излучается только квантованными порциями, то Эйнштейн уже считал, что свет и существует только в виде квантованных порций. Из закона сохранения энергии при представлении света в виде частиц (фотонов) следует формула Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\hbar\omega = A + \frac{mv^2}{2}$$

«Ура! Получилось!»
- Альберт Эйнштейн. Нобелевская премия по физике 1921 г.

где A — т. н. работа выхода (минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из вещества), $\frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия вылетающего электрона, ω — частота падающего фотона с энергией $\hbar\omega$.

Волна де Бройля

Волна де Бройля — волна вероятности (или волна амплитуды вероятности), определяющая плотность вероятности обнаружения объекта в заданном интервале конфигурационного пространства. В соответствии с принятой терминологией говорят, что волны де Бройля связаны с любыми частицами и отражают их волновую природу.

Идея о волнах, связанных не только с квантами света, но и массивными частицами, предложена Луи де Бройлем в 1923—1924 годах и называется гипотезой де Бройля. Хотя трактовка квадрата модуля амплитуды волны как плотности вероятности в конфигурационном пространстве принадлежит Максу Борну, по традиции и в знак признания заслуг французского физика говорят о волнах де Бройля.

Де Бройль выдвинул идею о том, что волновой характер распространения, установленный для фотонов, имеет универсальный характер. Все частицы обладают волновыми свойствами, в частности, подвержены интерференции и дифракции. Причём соотношения, связывающие волновые и корпускулярные характеристики частицы остаются такими же, как и в случае электромагнитного излучения. По гипотезе де Бройля движущейся частице, обладающей энергией и импульсом , соответствует волновой процесс, частота которого равна

$$\nu = \frac{E}{h} \quad \text{или, для циклической частоты} \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$$

а длина волны

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

Колебательный процесс, связанный с неподвижной и движущейся частицей

Де Бройль сделал предположение что каждой частице (пусть это будет электрон) свойственен некий внутренний периодический процесс. Это колебательный процесс в системе K', в которой частица покоится. Каков этот процесс конкретно, де Бройль не обсуждает. Он полагает, что частота процесса в системе K' определяется формулой (m – это масса покоя электрона):

$$\nu' = \frac{mc^2}{h}$$

При этом система K' движется со скоростью v относительно лабораторной системы K. Соответственно, в движущейся системе отсчёта K', собственной для электрона, который в ней покоится, колебательный процесс можно описать уравнением (для всех x') : $S = A\sin(2\pi\nu' t')$

Но согласно прямому преобразованию Лоренца для t' имеем:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Подставляя уравнение для t' в предыдущее уравнение для колебательного процесса S, получаем уравнение для колебательного процесса в неподвижной (лабораторной) системе K:

$$S = A\sin\left(2\pi\frac{mc^2}{h}\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = A\sin(\omega t - kx)$$

где

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{1}{\hbar}\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E}{\hbar} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\hbar}\frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{p}{\hbar}$$

Но это есть волновая формула! Т.е. уравнение для бегущей волны.
Но волну де Бройля записывают как комплекснозначную функцию:

$$\Psi = Ae^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)}$$

«Ура! Получилось!»
- Луи де Бройль.
Нобелевская премия по физике 1929 г.

Фазовая и групповая скорости

По определению фазовая скорость: $$v_{ph} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}$$

Заранее находим: $$\frac{d\omega}{dv} = \frac{1}{\hbar}\frac{d}{dv}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{mc^2}{\hbar}\frac{2\frac{v}{c^2}}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\hbar}\frac{mv}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}$$

По определению групповая скорость:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(1/T)}{d(1/\lambda)} = \frac{d(v_{ph}k)}{dk} = v_{ph} + k\frac{d(v_{ph})}{dk} = v_{ph} + \frac{\omega}{v_{ph}}\frac{d(v_{ph})}{d(\omega/v_{ph})} = \frac{c^2}{v} + \frac{\omega}{c^2/v}\frac{d(c^2/v)}{d(\omega v/c^2)} = \frac{c^2}{v} + \omega v c^2\frac{d(1/v)}{d(\omega v)} = \frac{c^2}{v} - \omega v c^2\frac{dv/v^2}{\omega dv+v d\omega} =$$

$$= \frac{c^2}{v}\left(1 - \frac{\omega dv}{\omega dv+v d\omega}\right) = \frac{c^2}{v}\frac{v d\omega}{\omega dv+v d\omega} = \frac{c^2}{v}\frac{1}{\frac{\omega/v}{d\omega/dv}+1} = \frac{c^2}{v}\frac{1}{\frac{\frac{1}{\hbar}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}{v}\frac{\hbar\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}}{mv}+1} = \frac{c^2}{v}\frac{1}{\left(\frac{c}{v}\right)^2\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)+1} = v$$

Перепишем: $$v_{gr} = v$$

Получаем: $$v_{ph}v_{gr} = c^2$$

Т.е. групповая скорость v_{gr} равна скорости движения подвижной системы отсчёта v, которая всегда заведомо меньше скорости света. При этом фазовая скорость равна v_{ph} больше скорости света. Но ведь это фазовая скорость! Она не ограничена основным положением теории относительности! Основным положением теории относительности как раз ограничена скоростью света предельная скорость движения частиц и распространения взаимодействий, что соответствует групповой скорости!

Что такое Анзац?

Анза́ц (нем. Ansatz, от an — «при», «над», и setzen — «ставить») — используемый в теоретической физике термин немецкого происхождения, обозначающий некую догадку о том, какую форму должно иметь решение уравнения или системы уравнений, а также само это предполагаемое решение (функция или множество функций). Формально эта догадка может не основываться на какой-либо теории (либо основываться на эвристических соображениях), и получать подтверждение лишь после того, как найдено решение рассматриваемых уравнений.

Вначале делается предположение, что решение имеет специфическую форму функции, например многочлен или экспонента, и что эта функция — анзац — имеет ряд неопределённых параметров, которые соответствуют числу уравнений. Анзац подставляется в уравнения, которые предстоит решать, что приводит к системе алгебраических уравнений для свободных параметров, которые, как правило, гораздо легче решить, чем исходные уравнения.

Анзац-подход является важным методом при решении дифференциальных уравнений, где есть возможность подставить пробные функции в систему уравнений и проверить решение.

Уравнение Клейна – Гордона – Фока и уравнение Шрёдингера – волновые уравнения для волн де Бройля

Исторически первым волновым уравнением для волн де Бройля является уравнение Клейна-Гордона-Фока (КГФ). Это уравнение первоначально записал Эрвин Шрёдингер до записи нерелятивистского уравнения, которое носит сейчас его имя. Он отказался от него (не опубликовав), потому что не смог включить в это уравнение спин электрона.

$$\frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \Psi_K$$

Одномерный случай, свободная частица:

$$\hat{E}^2 \Psi_K = c^2 \, \hat{p}_x^2 \, \Psi_K + (m_e c^2)^2 \, \Psi_K \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi_K}{\partial x^2} - \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \Psi_K}$$

Это уравнение отражает релятивистскую связь между энергией и импульсом:

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_e c^2)^2 \qquad \omega^2 = k^2 c^2 + \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \qquad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad \hat{E}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad \hat{p}_x^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\hat{E}\Psi = \hat{E}\left(Ae^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)}\right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(Ae^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)}\right) = i\hbar A e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)} \frac{\partial}{\partial t}\left(-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)\right) =$$

$$= i\hbar A e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)}\left(-i\frac{E}{\hbar}\right) = E\, A e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)} = E\Psi$$

$$\hat{p}\Psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\Psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\left(Ae^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)}\right) = -i\hbar A e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)} \frac{\partial}{\partial x}\left(-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)\right) =$$

$$= -i\hbar A e^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t - \frac{p}{\hbar}x\right)}\left(i\frac{p}{\hbar}\right) = p\Psi$$

Шрёдингер сделал упрощение уравнения и нашёл «своё» нерелятивистское уравнение Шрёдингера (1926):

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_S}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi_S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi_S}{\partial z^2}\right)+V(\vec{r},t)\Psi_S$$

Одномерный случай, свободная частица: $$i\hbar\frac{\partial\Psi_S}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_S}{\partial x^2}$$

За открытие этого уравнения Шрёдингер получил Нобелевскую премию по физике 1933 года. Толчком к выводу волнового уравнения для волн де Бройля Шрёдингером послужила просьба Петера Дебая объяснить идею де Бройля о волновой природе микрочастиц группе аспирантов Цюрихского университета. В 1926 году, вскоре после публикации уравнения Шрёдингера, Фок, Клейн и Гордон каждый независимо вывел и опубликовал уравнение КГФ:

Одномерный случай, свободная частица, уравнение КГФ: $$\frac{\partial^2\Psi_K}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2\Psi_K}{\partial x^2}-\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\Psi_K$$

Анзац $\Psi_K=\Psi_S\,e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}$ Можно записать этот анзац взяв за Ψ_K волну де Бройля $\Psi=Ae^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t-\frac{p}{\hbar}x\right)}$:

$$\Psi_S=\Psi_K e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}=Ae^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t-\frac{p}{\hbar}x\right)}e^{i\frac{mc^2}{\hbar}t}=Ae^{-i\left(\frac{E-mc^2}{\hbar}t-\frac{p}{\hbar}x\right)}\approx Ae^{-i\left(\frac{p^2/2m}{\hbar}t-\frac{p}{\hbar}x\right)}=Ae^{-i\left(\frac{mv^2/2}{\hbar}t-\frac{mv}{\hbar}x\right)}$$

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\approx mc^2+\frac{mv^2}{2}=mc^2+\frac{p^2}{2m}$$

В нерелятивистском пределе $v\ll c$ для свободной частицы : $$\Psi_S=Ae^{-i\left(\frac{p^2/2m}{\hbar}t-\frac{p}{\hbar}x\right)}\approx Ae^{-i\left(\frac{mv^2/2}{\hbar}t-\frac{mv}{\hbar}x\right)}$$

После подстановки $\Psi_K=\Psi_S\,e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}$ в уравнение КГФ , которое относительноΨ_K, получаем уравнение, аналог КГФ, но уже относительно Ψ_S:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_S}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi_S}{\partial x^2}+\frac{\hbar^2}{2m_e c^2}\frac{\partial^2\Psi_S}{\partial t^2}$$

Рассмотрим случай плоской волны. При этом

$$\Psi = ae^{-i\left(\frac{E}{\hbar}t+\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{\hbar}\right)}, \quad \Psi_k = \Psi\, e^{i\frac{m_e c^2}{\hbar}t} = a\, e^{-i\left(\frac{E-m_e c^2}{\hbar}t+\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{\hbar}\right)}.$$

После подстановки волны Ψ_k в уравнение - аналог КГФ , получаем:

$$E - m_e c^2 = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{\left(E-m_e c^2\right)^2}{2m_e c^2}.$$

Здесь второе слагаемое справа – $(E - m_e c^2)^2/2m_e c^2$ – вклад от слагаемого $(\hbar^2/2m_e c^2)\, \partial^2\Psi_k/\partial t^2$.

Введём обозначение для кинетической энергии:

$$E_k = E - m_e c^2$$

Перепишем уравнение используя это обозначение:

$$E_k = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{E_k^2}{2m_e c^2}.$$

В нерелятивистском пределе, как известно

$$E_k = E - m_e c^2 \approx \frac{p^2}{2m_e} \ll m_e c^2.$$

Теперь рассмотрим нерелятивистский предел уравнения (13):

$$E_k \approx \frac{p^2}{2m_e} - \frac{\left(p^2/2m_e\right)^2}{2m_e c^2} = \frac{p^2}{2m_e}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{p^2/2m_e}{m_e c^2}\right) \approx \frac{p^2}{2m_e}. \quad \text{Т.к. } p^2/2m_e \ll m_e c^2$$

Т. е. вкладом второго члена справа $(\hbar^2/2m_e c^2)\, \partial^2\Psi_k/\partial t^2$ в уравнении (11), в нерелятивистском случае, можно пренебречь. В итоге мы получаем нерелятивистский предел для уравнения КГФ для свободного электрона в виде:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2\Psi_S}{\partial x^2}.$$

«Ура! Получилось!»
Эрвин Шрёдингер.
Нобелевская премия по физике 1933 г.

А это и есть уравнение Шрёдингера для свободного электрона!

Нестационарное уравнение Шрёдингера для свободного электрона:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}$$

Анзац (подстановка): $\Psi(x,t) = \psi(x)\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \psi(x)\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) = -i\frac{E}{\hbar}\psi\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$i\hbar\left(-i\frac{E}{\hbar}\psi\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)\right) = E\psi\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E\psi$$

Стационарное уравнение Шрёдингера для свободного электрона $-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E\psi$ или $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m_eE}{\hbar^2}\psi = 0$

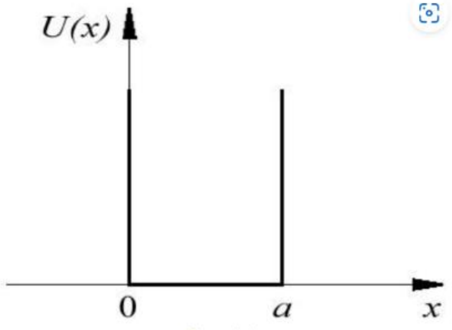
Очень напоминает уравнение гармонических колебаний $x'' + \omega^2\psi = 0$

Электрон в одномерной прямоугольной потенциальной яме с непроницаемыми стенками

$$U = \begin{cases} \infty, & x \le 0 \\ 0, & 0 < x < a \\ \infty, & x \ge a \end{cases}$$

Граничные условия: $\psi(0) = 0,\quad \psi(a) = 0$

Введём обозначение: $k = \sqrt{\frac{2m_eE}{\hbar^2}}$



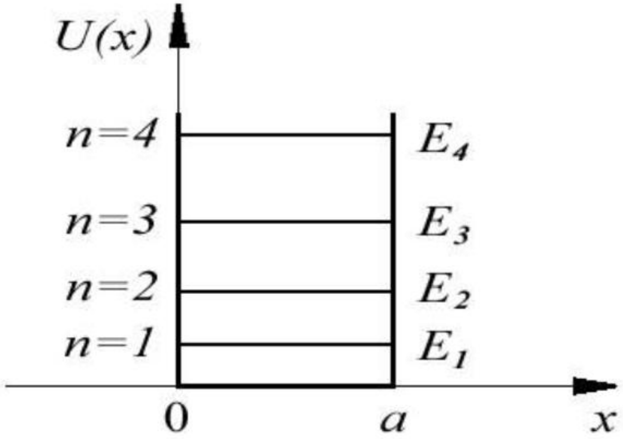
Уравнение $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m_eE}{\hbar^2}\psi = 0$ принимает вид хорошо известного из теории колебаний уравнения $\psi'' + k^2\psi = 0$

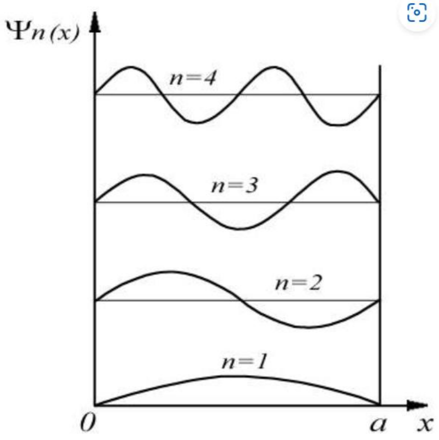
решение которого есть $\psi(x) = A\sin(kx + \alpha)$

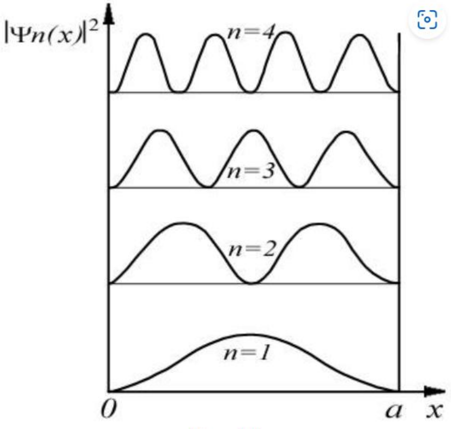
Используя граничное условие $\psi(0) = 0$, получаем $A\sin(\alpha) = 0$

которое для $A \neq 0$ выполняется при $ka = \pm\pi n,\ n = 1,2,3,\ldots$ Получаем

$$\boxed{E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_ea^2}n^2}$$







$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_e a^2} n^2$$

$$\psi_n\,(x) = A\sin(k_n x) \qquad k_n = \pm\frac{\pi n}{a}$$

$$\psi_n^2\,(x) = A^2 \sin^2\,(k_n x)$$

$$\Psi_n\,(x,t) = \psi_n\,(x)\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right)$$

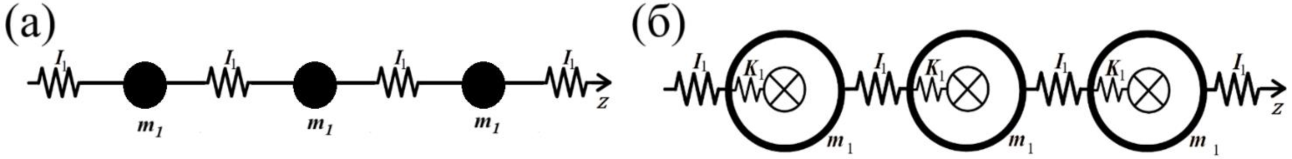
Формула Эйлера: $\exp(ix) = \cos x + i\sin x$

$$\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) = \cos\left(\frac{E_n}{\hbar}t\right) - i\sin\left(\frac{E_n}{\hbar}t\right)$$

$$\Psi_n\,(x,t) = A\sin\left(\pm\frac{\pi n}{a}x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi^2\hbar}{2m_e a^2}n^2 t\right) - i\sin\left(\frac{\pi^2\hbar}{2m_e a^2}n^2 t\right)\right)$$

$$\Psi_n^2(x,t) = \Psi_n\,\Psi_n^* = A^2\sin^2\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi^2\hbar}{2m_e a^2}n^2 t\right) - i\sin\left(\frac{\pi^2\hbar}{2m_e a^2}n^2 t\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi^2\hbar}{2m_e a^2}n^2 t\right) + i\sin\left(\frac{\pi^2\hbar}{2m_e a^2}n^2 t\right)\right)$$

$$\Psi_n^2(x,t) = A^2\sin^2\left(\frac{\pi n}{a}x\right)$$



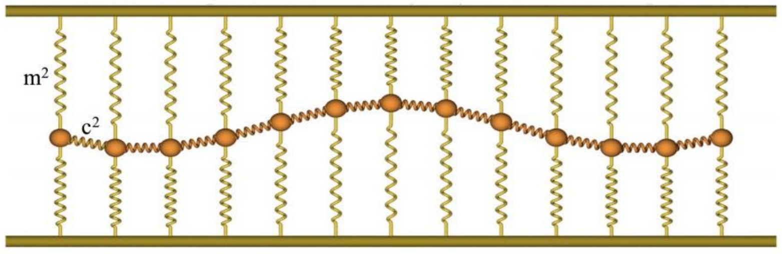


Figure 9.1: Mechanical equivalent of the (real) klein-Gordon equation

Hans de Vries. Understanding Relativistic Quantum Field Theory. http://physics-quest.org/

Одномерная бесконечная цепочка из масс m_1, соединённых пружинками с жёсткостью I_1 (а); то же с добавлением пружинок с жёсткостью K_1, соединяющих каждую массу m_1 с её неподвижным положением равновесия, обозначенным кружочком с крестиком (б)

В случае длинноволнового приближения (переход к сплошной среде) цепочка из одинаковых масс описывается волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = s_{m1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

В случае $M \gg m$ (или $\omega_A \ll \omega_O$) получается уравнение Клейна-Гордона-Фока (КГФ) для второй цепочки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = s_m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \omega_O^2 u$$

Уравнение КГФ является и обобщением уравнения Шрёдингера на релятивистскую квантовую механику и, в одномерном случае для свободной частицы, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2 \Psi.$$

Система уравнений Дирака

В 1979 году, находясь в Иерусалиме на праздновании столетия со дня рождения Эйнштейна, Дирак сказал Аврааму Пайсу:
«Я не принимал большого участия в том споре между Эйнштейном и Бором на Сольвеевской конференции (1927 г). Я выслушивал аргументы, но не ввязывался в спор, главным образом, потому, что меня это мало интересовало. В большей степени меня интересовал вывод правильных уравнений. Мне казалось, что основой работы физика-математика должно быть получение правильных уравнений, а не интерпретация этих уравнений – это уже второстепенный вопрос… Кажется ясным, что сегодняшняя квантовая механика ещё не достигла завершённости… Я думаю, что весьма вероятно, или, по крайне мере вполне возможно, что, в конце концов, Эйнштейн окажется прав, хотя сейчас физикам приходится принимать интерпретацию вероятности Бора, особенно, если им предстоит сдавать экзамены…»

Уравнение Дирака — релятивистски-инвариантное уравнение движения для биспинорного классического поля электрона, применимое также для описания других точечных фермионов со спином ½. Установлено Полем Дираком в 1928 году. За открытие этого уравнения П. Дирак получил Нобелевскую премию по физике 1933 года.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -i\dfrac{mc^2}{\hbar}\Psi_1 + c\left(-\dfrac{\partial \Psi_4}{\partial x} + i\dfrac{\partial \Psi_4}{\partial y} - \dfrac{\partial \Psi_3}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -i\dfrac{mc^2}{\hbar}\Psi_2 + c\left(-\dfrac{\partial \Psi_3}{\partial x} - i\dfrac{\partial \Psi_3}{\partial y} + \dfrac{\partial \Psi_4}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial \Psi_3}{\partial t} = i\dfrac{mc^2}{\hbar}\Psi_3 + c\left(-\dfrac{\partial \Psi_2}{\partial x} + i\dfrac{\partial \Psi_2}{\partial y} - \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial \Psi_4}{\partial t} = i\dfrac{mc^2}{\hbar}\Psi_4 + c\left(-\dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x} - i\dfrac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Psi_i - \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2 \Psi_i \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Каждая из волновых функций, входящих в уравнение Дирака удовлетворяет уравнению КГФ. Но не каждое решение уравнения КГФ является решением уравнения Дирака.

«Ура! Получилось!» - Поль Дирак.
Нобелевская премия по физике 1933 г.

Система уравнений Дирака в компактном виде

Уравнение Дирака для свободного электрона можно записать и в компактном виде используя операторный подход и обозначения Дирака :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \widehat{H}|\Psi\rangle$$

где $$\widehat{H} = \hbar\omega_O\alpha_0 + c\ \sum_{j=1}^{3}\alpha_j\,\hat{p}_j = m_e c^2\alpha_0 + c\ \sum_{j=1}^{3}\alpha_j\,\hat{p}_j$$

оператор полной энергии (гамильтониан) с операторами компонент импульса $\hat{p}_1 = \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_2 = \hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$, $\hat{p}_3 = \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$; $|\Psi\rangle$ - четырёхкомпонентная комплексная волновая функция (биспинор); α_0, α_1, α_2, α_3 — матрицы размера 4×4, называемые альфа-матрицами Дирака:

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix},\ \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0_2 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0_2 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0_2 \end{pmatrix}$$

где 0_2 и I_2 - нулевая и единичная матрицы размерности 2×2, и σ_j (j = 1, 2, 3) — матрицы Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Антикоммутационные соотношения для альфа-матриц

Каждая пара альфа-матриц антикоммутирует, а квадрат каждой равен единице:

$$\alpha_j^2 = I_4, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0_4, \quad i, j = 0, 1, 2, 3 \ (i \neq j),$$

где I_4 и 0_4 - нулевая и единичная матрицы размерности 4×4.

При возведении в квадрат гамильтониана $\hat{H}$, с учётом свойств альфа-матриц Дирака, получаем:

$$\hat{H}^2 = \left(\hbar\omega_O\alpha_0 + c\,\textstyle\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\,\hat{p}_j\right)^2 = \hbar^2\omega_O^2\alpha_0^2 - c^2\hbar^2\, I_4\,\Delta = (m_e c^2)^2\alpha_0^2 - c^2\hbar^2\, I_4\,\Delta\,.$$

Соответственно, после действия на левую часть уравнения Дирака оператором $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, а на правую оператором $\hat{H}$, получается уравнение

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\Psi\rangle = \hat{H}^2|\Psi\rangle,$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\Psi\rangle = c^2\Delta|\Psi\rangle - \left(\frac{m_e c^2}{\hbar}\right)^2|\Psi\rangle.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде четыре независимых уравнений КГФ.

Уравнения Вейля

Устремляя массу частицы m к нулю, получаем систему уравнений Дирака с нулевой массой, которое, можно преобразовать в две системы уравнений Вейля для безмассового нейтрино и антинейтрино:

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_4}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi_4}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial z}\right) + mc^2\,\Psi_1 \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_3}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right) + mc^2\Psi_2 \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_3}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\right) - mc^2\Psi_3 \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_4}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right) - mc^2\Psi_4 \end{cases} \quad \overset{m\to 0}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_4}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi_4}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_3}{\partial z}\right) \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_3}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right) \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_3}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\right) \\ i\hbar\frac{\partial\Psi_4}{\partial t} = i\hbar c\left(-\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_{L1}}{\partial t} = \frac{\partial\Psi_{L2}}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi_{L2}}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_{L1}}{\partial z} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_{L2}}{\partial t} = \frac{\partial\Psi_{L1}}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi_{L1}}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_{L2}}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_{R1}}{\partial t} = -\frac{\partial\Psi_{R2}}{\partial x} + i\frac{\partial\Psi_{R2}}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_{R1}}{\partial z} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi_{R2}}{\partial t} = -\frac{\partial\Psi_{R1}}{\partial x} - i\frac{\partial\Psi_{R1}}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_{R2}}{\partial z} \end{cases}$$

$$\Psi_{\mathrm{L}1} = \frac{\Psi_1 - \Psi_3}{\sqrt{2}} \qquad \Psi_{\mathrm{L}2} = \frac{\Psi_2 - \Psi_4}{\sqrt{2}} \qquad \Psi_{\mathrm{R}1} = \frac{\Psi_1 + \Psi_3}{\sqrt{2}} \qquad \Psi_{\mathrm{R}2} = \frac{\Psi_2 + \Psi_4}{\sqrt{2}}$$

Нейтрино (итал. neutrino — нейтрончик, уменьшительное от neutrone — нейтрон) — общее название нейтральных фундаментальных частиц с полуцелым спином, участвующих только в слабом и гравитационном взаимодействиях и относящихся к классу лептонов. В настоящее время известно три разновидности нейтрино: электронное, мюонное и тау-нейтрино, а также соответствующие им античастицы.

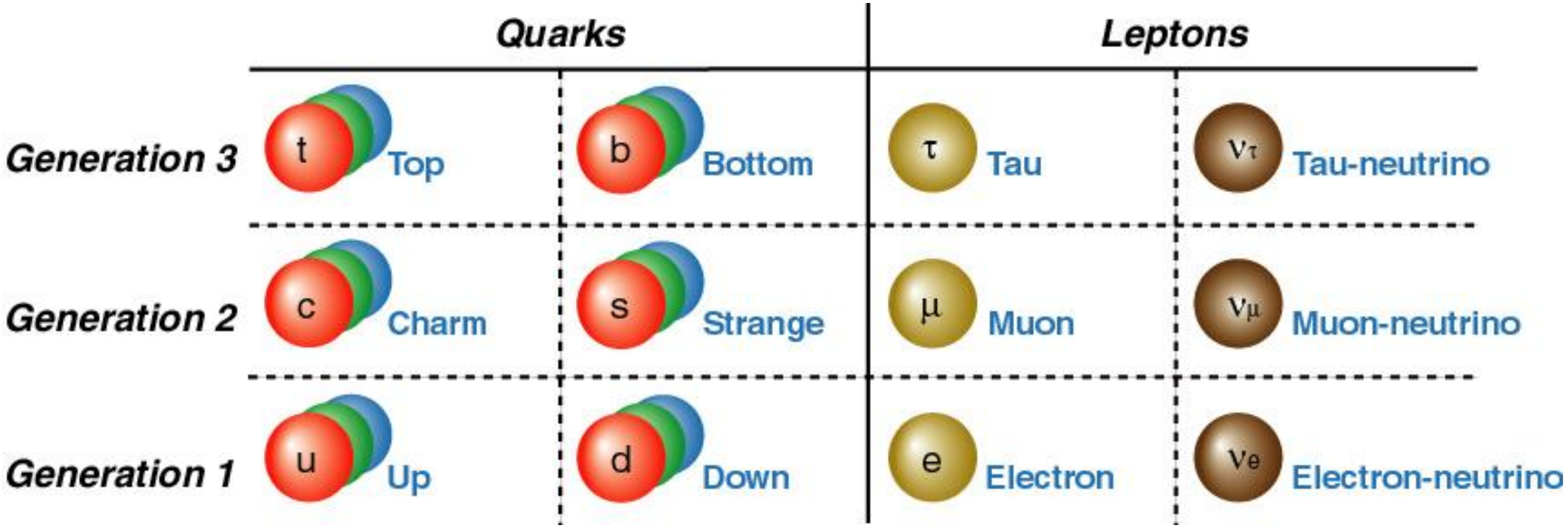
Нейтрино малой энергии чрезвычайно слабо взаимодействуют с веществом, и поэтому имеют колоссальную длину пробега в самых разных веществах. Так, нейтрино с энергией порядка 3—10 МэВ имеют в воде длину свободного пробега порядка 10^{18} м (около ста св. лет). Практически все типы звёзд прозрачны для нейтрино. Каждую секунду через площадку на Земле площадью в 1 см² проходит около $6{\cdot}10^{10}$ нейтрино, испущенных Солнцем[4], однако их влияние на вещество практически никак не ощущается; для их регистрации используются крайне высокочувствительные детекторы большой массы, расположенные под землёй для подавления фона от космических лучей.

Ранее считалось, что у нейтрино нет массы покоя, как у фотонов. Такааки Кадзита и Артур Макдональд получили Нобелевскую премию по физике 2015 года «за открытие нейтринных осцилляций, показывающих, что нейтрино имеют массу».

«Ура! Получилось!» - Такааки Кадзита и
Артур Макдональд .
Нобелевская премия по физике 2015 г.

ПРОБЛЕМА ИЕРАРХИИ ФЕРМИОННЫХ МАСС

Проблема иерархии фермионных масс является одной из нерешённых проблем физики элементарных частиц и заключается в том, что наблюдаемые массы трех поколений фермионов (лептонов и кварков) отличаются в десятки раз, несмотря на то, что другие свойства этих частиц и их квантовые числа одинаковы. В стандартной модели все фермионы (как кварки, так и лептоны) образуют три поколения. Каждое поколение представляет собой набор частиц разных типов, и отличаются они только сильно различающимися массами. В настоящее время существует три поколения лептонов. Первое поколение: электрон, электронное нейтрино. Второе поколение: мюон, мюонное нейтрино. Третье поколение: тау-лептон, тау-нейтрино. Масса электрона составляет 0,511 МэВ, масса мюона - 105,7 МэВ, а масса тау-лептона уже составляет 1777 МэВ. В то же время все эти частицы обладают одинаковым набором квантовых чисел.



https://physicsmasterclasses.org/exercises/keyhole/en/projects/number_of_families.html

Заключение

Уравнение Дирака вместе с уравнениями Максвелла позволяет объяснить взаимодействие свободных электронов с электромагнитным полем, рассеяние света на электроне (эффект Комптона), рождение фотоном электронно-позитронной пары и т. д. Оно значительно обобщает классические уравнения Ньютона, релятивистские классические уравнения движения частиц и уравнение Шрёдингера. Из уравнения Дирака следует, что электрон обладает собственным механическим моментом количества движения — спином, равным ħ/2, а также собственным магнитным моментом, равным (без учёта гиромагнитного отношения) магнетону Бора eħ/2mc, который ранее (1925) был открыт экспериментально (e и m — заряд и масса электрона, c — скорость света, ħ — постоянная Дирака, или редуцированная постоянная Планка). С помощью уравнения Дирака была получена более точная формула для уровней энергии атома водорода и водородоподобных атомов (ионов), включающая тонкую структуру уровней, а также объяснён эффект Зеемана. На основе уравнения Дирака были найдены формулы для вероятностей рассеяния фотонов свободными электронами (эффект Комптона) и излучения электрона при его торможении (тормозного излучения), получившие экспериментальное подтверждение. Однако последовательное релятивистское описание движения электрона даётся квантовой электродинамикой. Характерная особенность уравнения Дирака — наличие среди его решений таких, которые соответствуют состояниям с отрицательными значениями энергии для свободного движения частицы (что соответствует отрицательной массе частицы). Это представляло трудность для теории, так как все механические законы для частиц в таких состояниях были бы неверными, переходы же в эти состояния в квантовой теории возможны. Действительный физический смысл переходов на уровни с отрицательной энергией выяснился в дальнейшем, когда была доказана возможность взаимопревращения частиц. Из уравнения Дирака следовало, что должна существовать новая частица (античастица по отношению к электрону) с массой электрона и электрическим зарядом противоположного знака; такая частица была действительно открыта в 1932 К. Андерсоном и названа позитроном. Это явилось огромным успехом теории электрона Дирака. Переход электрона из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией и обратный переход интерпретируются как процесс образования пары электрон-позитрон и аннигиляция такой пары.

Литература

Гарднер М. Теория относительности для миллионов. – М.: Атомиздат, 1965.

Гоффман Б. Корни теории относительности. — М: Знание, 1987.

Дирак, П. Воспоминания о необычной эпохе / П. Дирак. – М.: Наука, 1990.

Бройль, Луи де. Революция в физике (новая физика и кванты) / Луи де Бройль. – М.: Атомиздат, 1965.

Бройль, Луи де. Соотношения неопределённостей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. - Москва : Мир, 1986.

Гейзенберг, В. Физика и философия. – М.: Изд. иностр. литературы, 1963.

Гринштейн, Д. Квантовый вызов: современные исследования оснований квантовой механики. - Долгопрудный : Интеллект, 2012.

Мигдал, А. Б. Квантовая физика для больших и маленьких. - Москва : Наука, 1989. - (Библиотечка «Квант»; Вып. 75).