

А.А. ТРЕЩЕВ<sup>1</sup>, Ю.А. ЗАВЬЯЛОВА<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ КОЛЬЦЕВЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ ИЗ МАТЕРИАЛОВ, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К ВИДУ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

**Аннотация.** Рассматривается модель трехслойной кольцевой пластины средней толщины. Предполагается, что нагрузка на пластину принята равномерно – распределенной. В качестве определяющих соотношений берутся универсальные, построенные в нормированном тензорном пространстве напряжений, связанном с главными осями анизотропии материала. Нагрузка была принята таким образом, чтобы прогибы срединной поверхности пластины считались малыми по сравнению с ее толщиной. Закрепление пластины жесткое по внешнему и внутреннему контурам.

Поскольку некоторые ортотропные разнсопротивляющиеся материалы проявляют нелинейную зависимость деформаций от напряжений, материальные характеристики приняты в виде функций от интенсивности напряжений. В результате постановки краевой задачи была разработана математическая модель для анализируемого класса задач, реализованная в виде численного алгоритма интегрированного в пакет прикладных программ среды Mathcad.

Для решения системы разрешающих дифференциальных уравнений изгиба кольцевых ортотропных пластин использовался метод переменных параметров упругости с конечно-разностной аппроксимацией второго порядка точности.

**Ключевые слова:** пластина, ортотропные материалы, напряженно - деформированное состояние, разнсопротивляемость.

A.A. TRESHCHEV<sup>1</sup>, YU.A. ZAVYALOVA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Tula State University, Tula, Russia

## DEFORMATION OF ANNULAR ORTHOTROPIC PLATES OF MEDIUM THICKNESS MADE OF MATERIALS SENSITIVE TO THE TYPE OF STRESS STATE

**Abstract.** Discusses a model of a three-layer annular plate of medium thickness. It is assumed that the load on the plate is assumed to be uniformly distributed. The universal relations constructed in the normalized tensor stress space associated with the main axes of the anisotropy of the material are taken as the determining relations. The load was taken in such a way that the deflections of the middle surface of the plate were considered small in comparison with its thickness. The fixing of the plate is rigid along the external and internal contours.

Since some orthotropic materials with different resistance exhibit a nonlinear dependence of deformations on stresses, the material characteristics are taken as functions of stress intensity. As a result of the formulation of the boundary value problem, a mathematical model was developed for the analyzed class of problems, implemented as a numerical algorithm integrated into the Mathcad software package.

To solve the system of resolving differential equations of bending of annular orthotropic plates, the method of variable elasticity parameters with a finite-difference approximation of the second order of accuracy was used.

**Keywords:** plate, orthotropic materials, stress-strain state, different resistance.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmueser D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells // *AIAA Journal*. 1983. Vol. 21. No.12. pp. 1742 – 1747.
2. Reddy L.N., Bert C.W. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials // *ZAMM*. 1982. Vol. 62. No.6. Pp. 213 – 219.
3. Jones R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Orthotropic Materials // *AIAA Journal*. 1977. Vol. 15. No.10. Pp. 1436 – 1443.
4. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material // *AIAA Journal*. 1980. Vol. 18. No.8. Pp. 995 – 1001.
5. Jones R.M. Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Orthotropic Moduli in Tension and Compression // *AIAA Journal*. 1971. Vol. 9. No.5. Pp. 917 – 923.
6. Крегерс А.Ф., Максимов Р.Д., Турциныш Р.П. Нелинейная ползучесть тканевого стеклопластика при некоторых видах сложного напряженного состояния // *Механика полимеров*. 1973. №2. С. 212 – 218.
7. Амелина Е.В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет / Е.В.Амелина [и др.] // *ИВТ СО РАН: Вычислительные технологии*. 2015. Т. 20. №5. С. 27–52.
8. Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов // *Ученые записки Казанского университета. Физико-математическая наука*. 2015. Т. 157. кн. 4. С. 112–132.
9. Shafiqullin L.N., Bobrishev A.A., Erofeev V.T., Treshchev A.A., Shafiqullina A.N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts // *International Journal of Applied Engineering Research*. 2015. Vol. 10. No.23. pp. 43758-43762.
10. Розе А.В. Жигун И.Г., Душин М.Н. Трехармированные тканые материалы // *Механика полимеров*. 1970. №3. С. 471–476.
11. Jones R.M., Nelson D.A.R. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite // *AIAA Journal*. 1976. Vol. 14. No.10. pp. 1427–1435.
12. Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // *AIAA Journal*. 1977. Vol. 15. No.1. pp. 16–25.
13. Золочевский А.А., Кузнецов В.Н. Расчет анизотропных оболочек из разномодульных материалов при неосесимметричном нагружении // *Динамика и прочность тяжелых машин*. Днепропетровск: ДГУ, 1989. С.84–92.
14. Елсуфьев С.А. Исследование деформирования фторопласта-4 при линейном и плоском напряженном состояниях // *Механика полимеров*. 1968. №4. С. 742–746.
15. Елсуфьев С.А., В.М.Чебанов Изучение деформирования фторопласта в условиях плоского напряженного состояния // *Исслед. по упругости и пластичности*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1971. Вып. 8. С. 209–213.
16. Айнбиндер С.Б., Лака М.Г., Майорс И.Ю. Влияние гидростатического давления на механические свойства полимерных материалов // *Механика полимеров*. 1965. № 1. С. 65 – 75.
17. Айнбиндер С.Б., Алксне К.И., Тюпина Э.Л., Лака М.Г. Свойства полимеров при высоких давлениях. М.: Наука, 1973. 118 с.
18. Деревянко Н.И. Свойства армированного полистирола при кратковременном растяжении, сжатии и изгибе // *Механика полимеров*. 1968. №6. С. 1059–1064.
19. Божанов П.В., Трещев А.А. Определение прочностных критериев при возникновении пластических деформаций в поликарбонате // *Инновации и инвестиции*. 2018. №12. С. 323-326.
20. Bert C.W. Models for Fibrous Composite with Different Properties in Tension and Compression // *Transaction of the ASME*. 1977. Vol. 99 N. Ser. D. No. 4. pp. 344–349.
21. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности разносопротивляющихся материалов. Тула: ТулГУ, 2020. 359 с.
22. Bazant Z.P., Bhat P.D. Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete // *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*. 1976. Vol. 102. No. EM4. pp. 701–722.
23. Kupfer H.B. Das nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsiger Beanspruchung // *Beton und Stahlbetonbau*. 1973. No.11. pp. 269–274.
24. Tasuji M.E., Slate F.O., Nilson A.H. Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading // *ACI Journal*. 1979. No.7. pp. 806–812.
25. Амбарцумян С.А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1969. № 3. С. 51 – 61.
26. Ломакин Е.В. Соотношения теории упругости для анизотропного тела, деформационные характеристики которых зависят от вида напряженного состояния // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1983. №3. С. 63 – 69.
27. Трещев А.А., Завьялова Ю.А., Лапшина М.А. Вариант модели деформирования ортотропных композитных материалов // *Эксперт: Теория и практика (Научно-практический журнал)*. Тольятти: АНО «Институт судебной строительно-технической экспертизы». 2020. №3(6). С. 62 – 68.

28. Трещев А.А., Завьялова Ю.А., Лапшина М.А. Изгиб ортотропных пластин средней толщины с учетом зависимости материальных параметров от вида напряженного состояния // Строительная механика и конструкции. Воронеж: ВГТУ. 2022. Вып. 1. №32. С. 7–28.
29. Трещев А.А., Монастырев Ю.А., Чибрикина В.Д., Завьялова Ю.А., Лапшина М.А. Описание деформирования ортотропных разносопротивляющихся материалов // Строительная механика и конструкции. Воронеж: ВГТУ. 2019. №1(20). С. 7–13.
30. Трещев А.А. Потенциальная зависимость между деформациями и напряжениями для ортотропных физически нелинейных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Орел: ОГУ. 2017. № 4-1 (324). С. 71 – 74.
31. Treshchev A.A., Zavyalova Yu.A., Lapshina M.A., Gvozdev A.E., Kuzovleva O.V., Krupitsyn E.S. Defining equations of deformation of materials with double anisotropy // Chebyshevskii sbornik. 2021. Vol. 22. No. 4. pp. 369 – 383.
32. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
33. Батов П.А., Батырев К.Г., Матченко Н.М. Применение модифицированного пространства для расчета ортотропных пластин с использованием ANSYS и аналитических методов // Сборник материалов 2-го Российско-Украинского симпозиума. Пенза: ПГУАС. 2002. С. 165–167.
34. Батырев К.Г. Осесимметричная задача изгиба трансверсально изотропной пластины под действием поперечной нагрузки // Известия Тульского государственного университета. Серия: Технология, механика и долговечность строительных материалов, конструкций и сооружений. Тула: ТулГУ. 2001. Вып. 2. С. 10 – 18.
35. Пикуль В.В. Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 536 с.
36. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
37. Трещев А.А. Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся материалов. М.: Тула: РААСН; ТулГУ, 2007. 160 с.
38. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
39. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопроотивление материалов. М.: Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит, 1986. 560 с.
40. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1981. 496 с.

## REFERENCES

1. Schmuesser D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells / D.W.Schmuesser // AIAA Journal. 1983. Vol. 21. No.12. pp. 1742 - 1747.
2. Reddy L.N. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / L.N.Reddy, C.W.Bert // ZAMM. 1982. Vol. 62. No.6. Pp. 213 – 219.
3. Jones R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Ortotropic Materials / R.M.Jones // AIAA Journal. 1977. Vol. 15. No.10. Pp. 1436 – 1443.
4. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material / R.M.Jones // AIAA Journal. 1980. Vol. 18. No.8. Pp. 995 – 1001.
5. Jones R.M. Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. 1971. Vol. 9. No.5. Pp. 917 – 923.
6. Kregers A.F. Nelineynaya polzuchest' tkanevogo stekloplastika pri nekotoryh vidah slojnogo napryajonnogo sostoyaniya [Nonlinear creep of fiberglass fabric in some types of complex stress state] / A.F.Kregers, R.D.Maksimov, R.P.Turcinysh // Mechanics of polymers. 1973. No. 2. Pp. 212 – 218. (rus)
7. Amelina E.V. O nelineynom deformirovanii ugleplastikov: eksperiment, model', raschot [On nonlinear deformation of carbon fiber plastics: experiment, model, calculation] / E.V.Amelina [et al.] // ICT SB RAS: Computational Technologies. 2015. Vol. 20. No. 5. Pp. 27–52. (rus)
8. Kayumov R.A. Identifikaciya mehanicheskikh harakteristik armirovannih voloknami kompozitov [Identification of mechanical characteristics of fiber-reinforced composites] / R.A.Kayumov, S.A.Lukanin, V.N.Paimushin, S.A.Kholmogorov // Scientific notes of the Kazan University. Physical and mathematical sciences. – 2015. Vol. 157. book 4. Pp. 112–132. (rus)
9. Shafigullin L.N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts / L.N.Shafigullin, A.A.Bobrishev, V.T.Erofeev, A.A.Treshchev, A.N.Shafigullina // International Journal of Applied Engineering Research. 2015. Vol. 10. No.23. Pp. 43758–43762.
10. Rose A.V. Treharmirovannye tkanie materialy [Three-reinforced woven materials] / A.V.Rose, I.G.Zhigun, M.N.Dushin // Mechanics of polymers. 1970. No. 3. Pp. 471–476. (rus)
11. Jones R.M., Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R.M.Jones, D.A.R.Nelson // AIAA Journal. 1976. Vol. 14. No.10. Pp. 1427–1435.

12. Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // *AIAA Journal*. 1977. Vol. 15. No.1. Pp. 16–25.
13. Zolochovsky A.A. Raschet anizotropnih obolochek iz raznomodul'nykh materialov pri neosesimmetrichnom nagrujenii [Calculation of anisotropic shells from multi-modular materials under non-axisymmetric loading] / A.A.Zolochovsky, V.N.Kuznetsov // *Dynamics and strength of heavy machines*. – Dnepropetrovsk: DSU, 1989. Pp. 84–92. (rus)
14. Elsufyev S.A. Issledovanie deformirovaniya ftoroplasta-4 pri lineynom i ploskom napryajonnom sostoyaniyah [Investigation of deformation of fluoroplast-4 under linear and plane stress states] / S.A.Elsufyev // *Mechanics of polymers*. 1968. No. 4. Pp. 742–746. (rus)
15. Elsufyev S.A. Izuchenie deformirovaniya ftoroplasta v usloviyah ploskogo napryajonnogo sostoyaniya [The study of fluoroplast deformation in a plane stress state] / S.A.Elsufyev, V.M.Chebanov // *Research. on elasticity and plasticity*. L.: LSU Publishing House, 1971. Issue 8. Pp. 209–213. (rus)
16. Ainbinder S.B. Vliyanie gidrostaticeskogo davleniya na mehanicheskie svoystva polimernih materialov [The influence of hydrostatic pressure on the mechanical properties of polymer materials] / S.B.Ainbinder, M.G.Laka, I.Y.Majors // *Mechanics of polymers*. 1965. No. 1. Pp. 65–75. (rus)
17. Ainbinder S.B. Svoystva polymerov pri vysokih davleniyah [Properties of polymers at high pressures] / S.B.Ainbinder, K.I.Aksne, E.L.Tyurina, M.G.Laka. M.: Nauka, 1973. 118 p. (rus)
18. Derevyanko N.I. Svoystva armirovannogo polistirola pri kratkovremennom rastyajenii, sjatii i izgibe [Properties of reinforced polystyrene under short-term stretching, compression and bending] / N.I.Derevyanko // *Mechanics of polymers*. 1968. No.6. Pp. 1059–1064. (rus)
19. Bazhanov P.V. Opredelenie prochnostnykh kriteriev pri vozniknovenii plasticheskikh deformatsiy [Determination of strength criteria in the occurrence of plastic deformations in polycarbonate] / P.V.Bozhanov, A.A.Treshchev // *Innovations and investments*. 2018. No. 12. Pp. 323–326. (rus)
20. Bert C.W. Models for Fibrous Composite with Different Properties in Tension and Compression / C.W.Bert // *Transaction of the ASME*. 1977. Vol. 99 H. Ser. D. No. 4. Pp. 344–349.
21. Treshchev A.A. Teoriya deformirovaniya i prochnosti raznosoprotivlyayushchih materialov [Theory of deformation and strength of different resistant materials] / A.A. Treshchev // Tula: TulSU, 2020. 359 p. (rus)
22. Bazant Z.P. Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete / Z.P.Bazant, P.D.Bhat // *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*. 1976. Vol. 102. No. EM4. Pp. 701–722.
23. Kupfer H.B. Das nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsiger Beanspruchung / H.B.Kupfer // *Beton und Stahlbetonbau*. 1973. No.11. Pp. 269–274.
24. Tasuji M.E. Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading / M.E.Tasuji, F.O.Slate, A.H.Nilson // *ACI Journal*. 1979. No.7. Pp. 806–812.
25. Ambartsumyan S.A. Osnovnye uravneniya i sootnosheniya raznomodul'noy teorii uprugosti anizotropnogo tela [Basic equations and relations of the multi-modulus theory of elasticity of an anisotropic body] / S.A. Ambartsumyan // *Izv. of the USSR Academy of Sciences. MSB*. 1969. No. 3. Pp. 51–61. (rus)
26. Lomakin E.V. Sootnosheniya teorii uprugosti anizotropnogo tela, deformatsionnye karakteristiki kotorih zavisyat ot vida napryajonnogo sostoyaniya [Relations of the theory of elasticity for an anisotropic body, the deformation characteristics of which depend on the type of stress state] / E.A. Lomakin // *Izv. of the USSR Academy of Sciences. MSB*. 1983. No.3. Pp. 63–69. (rus)
27. Treshchev A.A. Variant modeli deformirovaniya ortotropnih kompozitnykh materialov [Variant of the deformation model of orthotropic composite materials] / A.A. Treshchev, Yu.A. Zavyalova, M.A. Lapshina // *Expert: Theory and Practice (Scientific and Practical journal)*. – Togliatti: ANO "Institute of Forensic Construction and Technical Expertise" 2020. No.3(6). Pp. 62–68. (rus)
28. Treshchev A.A. Izgib ortotropnih plastin sredney tolshchiny s uchetom zavisimosti material'nykh parametrov ot vida napryajonnogo sostoyaniya [Bending of orthotropic plates of medium thickness taking into account the dependence of material parameters on the type of stress state] / A.A. Treshchev, Yu.A. Zavyalova, M.A. Lapshina // *Structural mechanics and constructions. Voronezh: VSTU*. 2022. Issue 1. No. 32. Pp. 7–28. (rus)
29. Treshchev A.A. Opisanie deformirovaniya ortotropnih raznosoprotivlyayushchih materialov [Description of deformation of orthotropic materials with different resistance] / A.A. Treshchev, Yu.A.Monastyrev, V.D.Chibrikina, Yu.A.Zavyalova, M.A.Lapshina // *Construction mechanics and structures. Voronezh: VSTU*. 2019. No. 1(20). Pp. 7–13. (rus)
30. Treshchev A.A. Potentsial'naya zavisimost' mezhdu deformatsiyami i napryajeniyami dlya ortotropnih fizicheskikh nelineynykh materialov [Potential dependence between deformations and stresses for orthotropic physically nonlinear materials] / A.A.Treshchev // *Fundamental and applied problems of engineering and technology*. Eagle: OGU. 2017. № 4-1 (324). Pp. 71–74. (rus)
31. Treshchev A.A. Defining equations of deformation of materials with double anisotropy / A.A.Treshchev, Yu.A.Zavyalova, M.A.Lapshina, A.E.Gvozdev, O.V.Kuzovleva, E.S.Krupitsyn // *Chebyshevskii sbornik*. 2021. Vol. 22. No. 4. Pp. 369 – 383.
32. Timoshenko S.P. Plastinki i obolochki [Plates and shells] / S.P. Timoshenko, S. Voynvsky-Krieger. M.: Nauka, 1966. 636 p. (rus)

33. Batov P.A. Primeneniye modificirovannogo prostranstva dlya rascheta ortotropnih plastin s ispol'zovaniyem ANSYS i analiticheskikh metodov [Application of modified space for calculation of orthotropic plates using ANSYS and analytical methods] / P.A.Batov, K.G.Batyrev, N.M.Matchenko // Collection of materials of the 2nd Russian-Ukrainian Symposium. Penza: PGUAS. 2002. Pp. 165–167. (rus)
34. Batyrev K.G. Osesimmetrichnaya zadacha izgiba transversal'no izotropnoy plastini pod deystviem poperechnoy nagruzki [Axisymmetric problem of bending a transversally isotropic plate under the action of a transverse load] / K.G.Batyrev // Izvestiya Tula State University. Series: Technology, mechanics and durability of building materials, structures and structures. Tula: TulSU. 2001. Issue 2. Pp. 10–18. (rus)
35. Pikul V.V. Mehanika obolochek [Mechanics of shells] / V.V.Pikul. Vladivostok: Dalnauka, 2009. 536 p. (rus)
36. Ambartsumyan S.A. Obshchaya teoriya anizotropnih obolochek [General theory of anisotropic shells] / S.A.Ambartsumyan. M.: Nauka, 1974. 446 p. (rus)
37. Treshchev A.A. Anizotropnite plastini i oblochki iz raznosopronivlyayushchihsya materialov [Anisotropic plates and shells made of highly resistant materials] / A.A. Treshchev. M.: Tula: RAASN; TulSU, 2007. 160 p. (rus)
38. Alfutov N.A. Raschot mnogosloynnih plastin i obolochek iz kompozicionnih materialov [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials] / N.A.Alfutov, P.A.Zinoviev, B.G.Popov. M.: Mashinostroenie, 1984. 263 p. (rus)
39. Birger I.A. Soprotivleniye materialov [Resistance of materials] / I.A.Birger, R.R.Mavlyutov. M.: Nauka. Gl. ed. phys. - mate. lit, 1986. 560 p. (rus)
40. Pisarenko G.S. Uravneniya i kraevye zadachi teorii plastichnosti i polzuchesti [Equations and boundary value problems of the theory of plasticity and creep] / G.S.Pisarenko, N.S.Mozharovsky // Reference manual. Kiev: Nauk. dumka, 1981. 496 p. (rus)

**Информация об авторах:**

**Трещев Александр Анатольевич**

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия,

Чл.-корр. РААСН, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Строительство, строительные материалы и конструкции».

E-mail: [taa58@yandex.ru](mailto:taa58@yandex.ru).

**Завьялова Юлия Андреевна**

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия,

аспирант кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции».

E-mail: [zavyalova\\_yuliya95@mail.ru](mailto:zavyalova_yuliya95@mail.ru).

**Information about authors:**

**Treshchev Alexandr An.**

Tula State University, Tula, Russia,

corresponding member of RAASN, doctor of technical sciences, professor, head of the department of Construction, Building Materials and Structures.

E-mail: [taa58@yandex.ru](mailto:taa58@yandex.ru).

**Zavyalova Yuliya An.**

Tula State University, Tula, Russia,

graduate student of the department of Construction, Building Materials and Structures.

E-mail: [zavyalova\\_yuliya95@mail.ru](mailto:zavyalova_yuliya95@mail.ru).