8 класс

8.1. Найдите наибольшее целое число, 35% которого является числом из интервала (28,1; 29).

Решение:

Найдем числа n, удовлетворяющие неравенствам:

$28{,}1 < 0{,}35n < 29.$

Решим неравенства.

1) $28{,}1 < 0{,}35n$.

Поделим обе части неравенства на 0,35. Округляя, получим:

$n > 80{,}29$.

2) $0{,}35n < 29$.

Поделим обе части неравенства на 0,35. Округляя, получим:

$n < 82{,}86$.

В найденном диапазоне значений наибольшим целым числом является 82.

Ответ: 82.

8.2 При каких значениях коэффициента a ***парабола*** $y = x^2 = ax + 1$ ***проходит под точкой A(2;3) и одновременно над точкой B(3;4)?***

Решение:

Парабола $y = y(x) = x^2 + ax + 1$ проходит под точкой *A(2;3)* только в том случае, если $y(2) < 3$, и проходит над точкой *B(3;4)* только в том случае, если $y(3) > 4$. Это дает нам систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^2 + a \cdot 2 + 1 < 3, \\ 3^2 + a \cdot 3 + 1 > 4. \end{cases}$$

Решая систему неравенств, получим: $a < -1,\ a > -2.$

Ответ: $-2 < a < -1.$

8.3. На диагонали прямоугольника выбрали точку и провели через нее прямые, параллельные сторонам. По разные стороны от диагонали образовались два прямоугольника. Докажите, что их площади равны.

Решение:

См. рисунок.

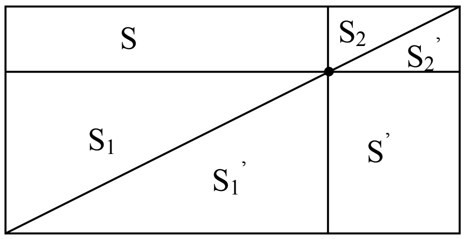
Диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника. Поэтому:

– площади S_1 и S_1' треугольников равны: $S_1 = S_1'$;

– площади S_2 и S_2' треугольников равны: $S_2 = S_2'$;

в свою очередь, площади двух треугольников, составляющих прямоугольник, также равны, т.е.: $S + S_1 + S_2 = S' + S_1' + S_2'$.

Значит, $S = S'$, что и требовалось доказать.



8.4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = a, \\ \dfrac{xz}{x+z} = b, \\ \dfrac{yz}{y+z} = c, \end{cases}$$

где a,b,c ***– заданные числа,*** $abc \neq 0$**.**

Решение:

Рассмотрим первое уравнение $\dfrac{xy}{x+y} = a$, так как, $a \neq 0$, то можно считать, что $x \neq 0$, $y \neq 0$. Равенство $\dfrac{xy}{x+y} = a$ можно преобразовать следующим образом: $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a}$.

Это приводит нас к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{b}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{c}. \end{cases} \qquad (1)$$

Теперь решим систему уравнений. Например, это можно сделать так.

Сложим все три уравнения системы (1):

$$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Вычитая из полученного равенства третье уравнение системы (1), умноженное на два, получаем:

$\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}$, откуда:

$\dfrac{2}{x}=\dfrac{bc+ac-ab}{abc}$ и $x=\dfrac{2abc}{bc+ac-ab}$.

Аналогично находим:

$$y=\frac{2abc}{bc-ac+ab},$$

$$z=\frac{2abc}{-bc+ac+ab}.$$

Ответ: $x=\dfrac{2abc}{bc+ac-ab}$, $y=\dfrac{2abc}{bc-ac+ab}$, $z=\dfrac{2abc}{-bc+ac+ab}$.

8.5. Докажите, что не существует таких целых положительных чисел x и y, что $x^3+3=4y(y+1)$.

Решение:

Уравнение $x^3+3=4y(y+1)$ перепишем в виде $x^3=(2y-1)(2y+3)$. Числа в скобках в правой части равенства являются взаимно простыми.

Проведем следующие рассуждения.

Число x представим как произведение двух натуральных чисел: $x=ab$, при этом $a \neq b$, соответственно: $x^3=a^3b^3$.

В нашем случае $a^3=2y-1,\ b^3=2y+3$.

Поскольку произведение двух взаимно простых чисел образует куб натурального числа (x^3), каждое из двух взаимно простых чисел также должно являться кубом натурального числа.

Разница между числами $(2y-1)$ и $(2y+3)$ всегда равна четырем, т.е. $b^3 - a^3 = 4$. Но в последовательности кубов натуральных чисел 1, 8, 27, 64, … нет чисел, отличающихся на 4. Пришли к **противоречию**.