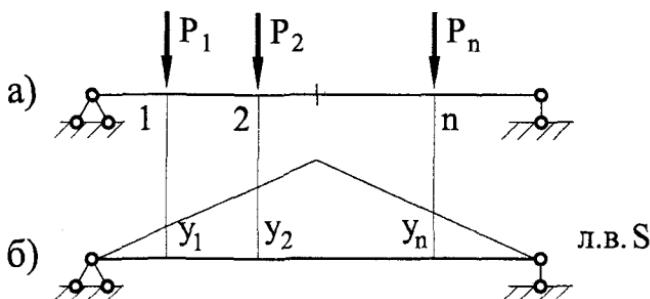


Кафедры: «Строительные конструкции и материалы»  
«Теоретическая и прикладная механика»

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
по строительной механике  
для выполнения расчетно-графической работы № 2  
«ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ В СТАТИЧЕСКИ  
ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ»**



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
по строительной механике  
для выполнения расчетно-графической работы № 2  
«ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ В СТАТИЧЕСКИ  
ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ»**

*Для специальностей:*

*270102 – «Промышленное и гражданское строительство»;  
270105 – «Городское строительство и хозяйство»,  
270177 – «Проектирование зданий»,  
270205 – «Автомобильные дороги и аэродромы»*

*Печатается по решению  
редакционно-издательского совета ОрелГТУ*

*Орел – 2007  
Издательство ОрелГТУ*

Авторы: Коробко Виктор Иванович, д.т.н., профессор;  
Коробко Андрей Викторович, д.т.н., профессор.

Рецензент: зав. кафедрой «Строительные конструкции и материалы» д.т.н., профессор В.И. Колчунов.

Методическое пособие предназначено для выполнения расчетно-графической работы № 2 по строительной механике на тему «Построение линий влияния в статически определимых стержневых систем» студентами специальностей:

270102 – «Промышленное и гражданское строительство»;  
270105 – «Городское строительство и хозяйство»,  
270177 – «Проектирование зданий»,  
270205 – «Автомобильные дороги и аэродромы».

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РФ,  
доктора технических наук, профессора В.И. Коробко.

Технический редактор А.В. Коробко

Орловский государственный технический университет  
Лицензия № 00670 от 05.01.2000

Подписано к печати 25.12.2006. Формат 60x84 1/16.  
Печать офсетная. Усл. п. л. 1,37. Тираж 300 экз. Заказ № 140.

Отпечатано в ОАО «Типография «Труд»,  
302000, г. Орел, ул. Ленина, 1

© ОрелГТУ, 2007  
©Коробко А.В., Коробко А.В., 2007

# 1 ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ РЕАКЦИЙ И ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛКАХ

## 1.1 Некоторые общие сведения

*Линией влияния* называется график, выражающий закономерность изменения какого-либо усилия или перемещения в определенном сечении заданного элемента сооружения при передвижении по нему единичной силы  $P = 1$ , не изменяющей своего направления.

В отличие от эпюры, также выражающей закономерность изменения какого-либо усилия по длине элемента при неподвижной нагрузке, в которой координата  $x$  соответствует сечению, где определяется усилие, в линии влияния координата  $x$  означает место приложения единичной подвижной нагрузки. Ордината же в линии влияния под единичной силой соответствует усилию в сечении, для которого эта линия влияния построена.

Для определения размерности линии влияния необходимо разделить размерность искомой величины на размерность нагрузки:

$$\text{размерность ординаты л.в.} = \frac{\text{размерность искомой величины}}{\text{размерность нагрузки}}$$

Так, ординаты линии влияния изгибающего момента (л.в.  $M$ ) имеют размерность  $\text{kH}\cdot\text{м}/\text{kH} = \text{м}$ , поперечной (л. в.  $Q$ ) и продольной (л. в.  $N$ ) сил –  $\text{kH}/\text{kH} = 1$  (безразмерная величина), прогиба (л.в.  $w$ ) –  $\text{м}/\text{kH}$  и т. п.

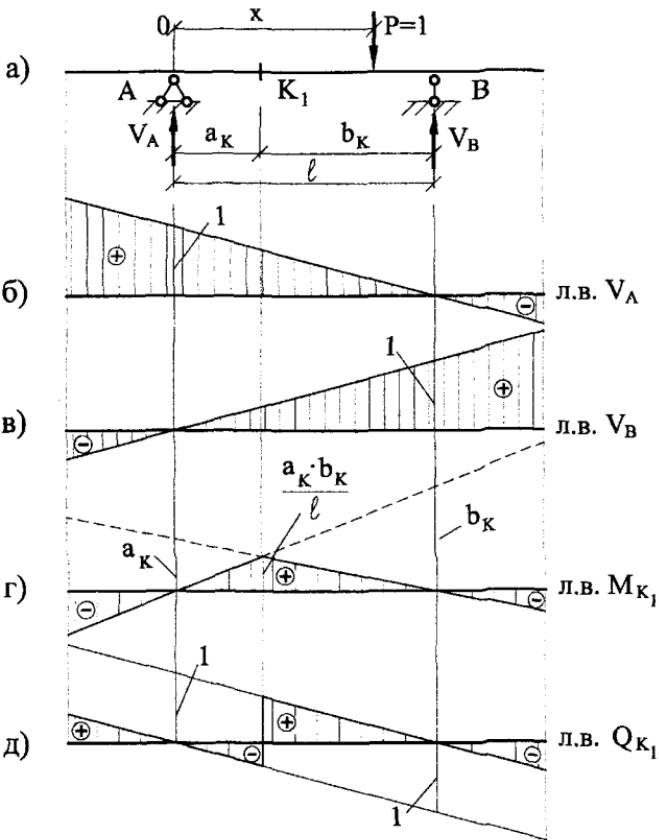
## 1.2 Построение линий влияния реакций и усилий в простых балках статическим методом

*Линии влияния опорных реакций*

Рассмотрим двухконсольную балку, изображенную на рисунке 1.1-а. Поместим начало координат в левую опору и расположим единичную нагрузку на расстоянии  $x$  от левой опоры.

Из условий равновесия найдем опорные реакции в заданной балке:

$$V_A = \frac{\ell - x}{\ell} = 1 - \frac{x}{\ell}, \quad V_B = \frac{x}{\ell}.$$



*Рисунок 1.1*

Это и будут закономерности изменения реакций в зависимости от положения единичной подвижной нагрузки, то есть линии влияния  $V_A$  и  $V_B$  (рис. 1.1-б, в):

$$\text{л.в. } V_A = 1 - \frac{x}{l}, \quad \text{л.в. } V_B = \frac{x}{l}. \quad (1.1)$$

**Линия влияния изгибающего момента и поперечной силы**

Пусть сечение  $K_1$  расположено между опорами (рис. 1.1-а). Запишем аналитические выражения для определения изгибающего

момента и поперечной силы в этом сечении. Если единичная нагрузка находится справа от сечения  $K_1$ , то

$$M_{K1} = V_A \cdot a = a \frac{\ell - x}{\ell} \quad \text{и л.в. } M_{K1} = a \cdot \text{л.в. } V_A; \quad (1.2)$$

$$Q_{K1} = V_A = \frac{\ell - x}{\ell} \quad \text{и л.в. } Q_{K1} = \text{л.в. } V_A. \quad (1.3)$$

Если единичная нагрузка находится слева от сечения  $K_1$ , то

$$M_{K1} = V_B b = b \frac{x}{\ell} \quad \text{и л.в. } M_{K1} = b \cdot \text{л.в. } V_B; \quad (1.4)$$

$$Q_{K1} = -V_A = -\frac{x}{\ell} \quad \text{и л.в. } Q_{K1} = -\text{л.в. } V_A. \quad (1.5)$$

По выражениям (1.2) и (1.3) строятся правые ветви линий влияния, а по (1.4) и (1.5) – левые, то есть на тех участках, где расположена единичная сила (см. рис. 1.1-г, д).

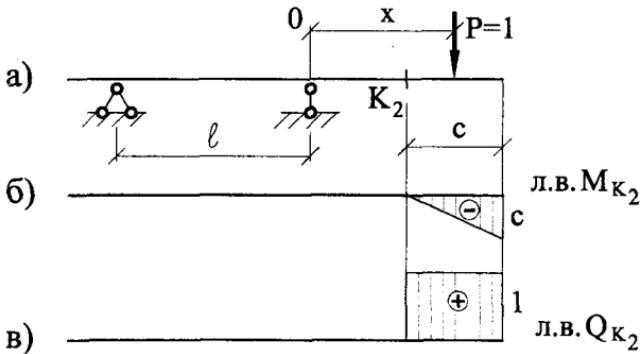


Рисунок 1.2

Пусть сечение  $K_2$  расположено на консоли (рис. 1.2-а). Поместим начало координат в заданном сечении и запишем аналитические выражения для определения изгибающего момента и поперечной силы в этом сечении. Если единичная нагрузка находится справа от сечения  $K_2$ , то

$$M_{K2} = -1 \cdot x = -x \quad \text{и л.в. } M_{K2} = -x; \quad (1.6)$$

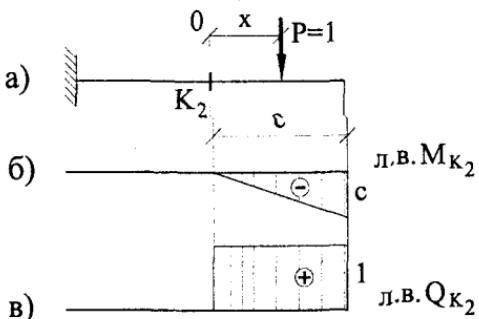
$$Q_{K_2} = 1 \quad \text{и} \quad \text{l.v. } Q_{K_2} = 1. \quad (1.7)$$

Если единичная нагрузка находится слева от сечения  $K_2$ , то

$$M_{K_2} = Q_{K_2} = 0.$$

и соответственно

$$\text{l.v. } M_{K_2} = 0, \quad \text{l.v. } Q_{K_2} = 0. \quad (1.8)$$



**Рисунок 1.3**

По выражениям (1.7) строятся правые ветви линий влияния  $M$  и  $Q$ , а по (1.8) – левые (см. рис. 1.1-т, д).

Таким же образом строятся линии влияния внутренних усилий и тогда, когда сечение расположено на левой консоли. В этом случае удобно ось  $Ox$  направлять влево от сечения, а при выводе формул следует использовать

правило знаков для левой отсеченной части балки.

Очевидно, полученные формулы могут быть использованы и для построения линий влияния для консольных стержней (рис. 1.3).

### 1.3 Определение усилий по линиям влияния при действии неподвижной нагрузки

#### Действие сосредоточенных сил

Выше отмечалось, что каждая ордината линии влияния показывает величину силового фактора, когда над этой ординатой находится груз  $P = 1$ . Если над этой ординатой будет находиться заданный груз  $P$ , а не единичная сила, то  $S = Py$ . Если на балку действует  $n$  сосредоточенных сил (рис. 1.4), то на основе принципа независимости действия сил будем иметь:

$$S_P = \sum_{i=1}^n P_i y_i, \quad (1.9)$$

где  $S$  - обобщенный силовой фактор ( $R, M, Q$ ), с линии влияния которого берутся значения ординат (рисунок 1.4).

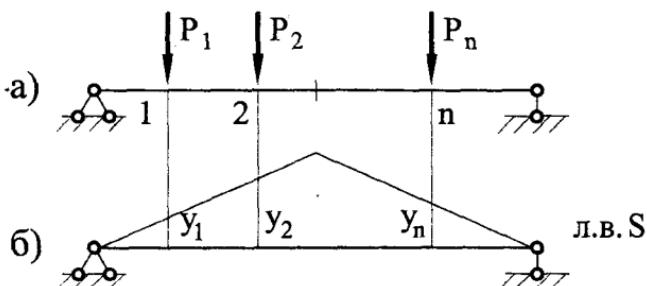


Рисунок 1.4

### Действие распределенных нагрузок

Рассмотрим действие распределенной нагрузки  $q(x)$  (рис. 1.5). Ее можно представить как систему бесконечно малых сосредоточенных сил  $dP = q(x)dx$ . Значение искомой величины от этой элементарной силы будет равно:

$$dS_q = q(x)dx \cdot y(x) = q(x)d\Omega, \quad (1.10)$$

где  $d\Omega = y(x)dx$  – площадь элементарного участка линии влияния.

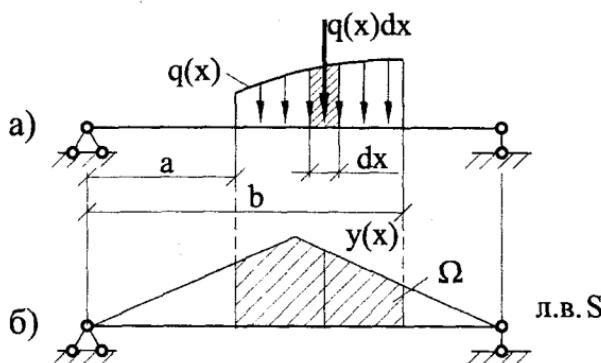


Рисунок 1.5

для определения  $S$  необходимо проинтегрировать выражение (1.10) в пределах действия распределенной нагрузки:

$$S_q = \int_a^b q(x) \cdot y(x) dx = \int_{\Omega} q(x) d\Omega. \quad (1.11)$$

В случае, если  $q(x) = \text{const}$ , то

$$S_q = q \int_{\Omega} d\Omega = q\Omega, \quad (1.12)$$

где  $\Omega$  – площадь линии влияния на длине участка загружения балки распределенной нагрузкой. Если на сооружение действует  $m$  распределенных нагрузок, то

$$S_q = \sum_{i=1}^m q_i \Omega_i. \quad (1.13)$$

#### Действие сосредоточенных моментов

При действии на балку неподвижного сосредоточенного момента (рис. 1.6-а) его следует представить в виде пары сил с плечом  $\Delta x$ :  $M = P\Delta x$ , откуда  $P = M/\Delta x$ .

Для определения усилия  $S_M$  воспользуемся формулой (1.9):

$$S_M = -Py_1 + Py_2 = -P(y_1 - y_2) = -M \frac{y_1 - y_2}{\Delta x} = -M \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.14)$$

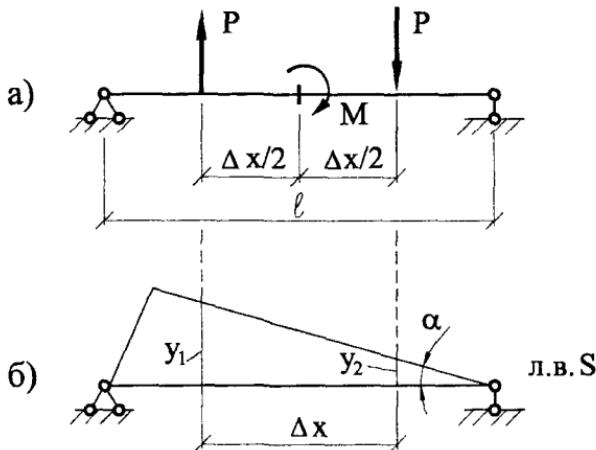


Рисунок 1.6

Знак усилия в этой формуле зависит от направления сосредоточенного изгибающего момента и наклона загруженного участка линии влияния: если эта ветвь линии влияния восходящая ( $y_1 < y_2$ ), то  $\operatorname{tg}\alpha$  будет положительной величиной, а если она нисходящая ( $y_1 > y_2$ ), то  $\operatorname{tg}\alpha$  будет отрицательной величиной; направление изгибающего момента по часовой стрелке считаем положительным.

Если к рассматриваемой системе приложено несколько сосредоточенных моментов, то общее усилие  $S$  определяется как сумма воздействий каждого из них:

$$S_M = \sum_{i=1}^k M_i \operatorname{tg}\alpha_i. \quad (1.15)$$

Для стержневой системы балочного типа, на которую воздействуют и сосредоточенные силы, и распределенные нагрузки, и сосредоточенные изгибающие моменты, обобщенное усилие  $S$  будет определяться по формуле:

$$S = \sum_{i=1}^n P_i y_i + \sum_{i=1}^m q_i \Omega_i + \sum_{i=1}^k M_i \operatorname{tg}\alpha_i \quad (1.16)$$

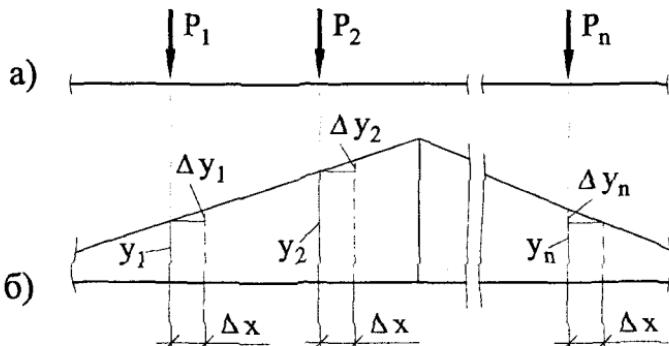
При определении усилия  $S$  необходимо использовать следующие правила знаков.

- сосредоточенная сила и распределенная нагрузка положительны, если они направлены сверху вниз.
- сосредоточенный момент положителен, если он действует по направлению движения часовой стрелки.
- знаки  $y$  и  $\Omega$  соответствуют знаку линии влияния.
- тангенс угла наклона касательной положителен, если на данном участке алгебраические значения ординат линии влияния при перемещении пары сил слева направо увеличиваются.

## 1.4 Невыгодное загружение линии влияния при действии системы сосредоточенных сил

Представим линию влияния усилия  $S$  в виде многоугольника, изображенного на рисунке 1.7. Пусть на заданную конструкцию действует подвижная нагрузка в виде системы сосредоточенных сил  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Усилие  $S$  найдем по формуле (1.9):

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots + P_n y_n.$$



*Рисунок 1.7*

При сдвиге заданной системы сил на расстояние  $\Delta x$  усилие  $S$  получит приращение  $\Delta S$ , и новое значение усилия найдем по формуле

$$S + \Delta S = P_1(y_1 + \Delta y_1) + P_2(y_2 + \Delta y_2) + \dots + P_n(y_n + \Delta y_n).$$

В зависимости от направления отдельных участков линии влияния приращения ординат  $\Delta y_i$  могут быть как положительными, так и отрицательными.

Из приведенных выше двух выражений найдем приращение усилия  $\Delta S$ :

$$\Delta S = P_1\Delta y_1 + P_2\Delta y_2 + \dots + P_n\Delta y_n, \quad (1.17)$$

а из рисунка 1.7 – приращение ординат линии влияния:

$$\Delta y_1 = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha_1; \quad \Delta y_2 = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha_2; \quad \dots; \quad \Delta y_n = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha_n,$$

где  $\alpha_i$  – угол наклона рассматриваемого участка линии влияния к горизонтали. Подставляя эти значения в (1.9), получим:

$$\Delta S = \Delta x(P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + P_2 \operatorname{tg} \alpha_2 + \dots + P_n \operatorname{tg} \alpha_n) = \Delta x \sum P_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (1.18)$$

Откуда

$$\Delta S / \Delta x = \sum P_i \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Эта формула является приближенным выражением производной от

функции  $S$  по  $x$ . Приравнивая эту производную к нулю, получим аналитический критерий максимума усилия  $S$ :

$$\Delta S/\Delta x = \sum P_i \operatorname{tg} \alpha_i = 0. \quad (1.19)$$

Однако для системы сосредоточенных сил воспользоваться этим критерием невозможно, поскольку при переходе какой-либо силы через  $i$ -ю вершину линии влияния угол  $\alpha_i$  изменяется скачкообразно. Следовательно, производная может быть либо отрицательной, либо положительной:

$$\Delta S/\Delta x = \sum P_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0, \quad \text{либо} \quad \Delta S/\Delta x = \sum P_i \operatorname{tg} \alpha_i > 0. \quad (1.20)$$

Критерий (1.20) говорит о том, что при переходе сосредоточенной силы через опасное положение сумма  $\sum P_i \operatorname{tg} \alpha_i$  должна менять свой знак на обратный. Другими словами: *необходимым условием опасного положения системы сосредоточенных сил является такое ее положение, при котором один из грузов (называемый критическим) переходит вершину линии влияния*. Этот признак не является достаточным, поскольку в указанном положении может измениться величина, но не знак суммы. Поэтому задачу определения опасного положения системы сосредоточенных сил решают путем выполнения последовательных попыток, изменяя положение сосредоточенных сил над вершинами линии влияния.

Выявив положение системы, при котором выполняется условие (1.20), определяем величину максимального усилия  $S$  по формуле (1.16).

## 1.5 Построение линий влияния реакций и усилий в многопролетных балках

Удобнее всего строить линии влияния усилий в многопролетной балке с помощью кинематического метода. Суть его заключается в следующем: для определения вида линии влияния какого-либо усилия необходимо отбросить соответствующую связь, приложить по линии ее действия в положительном направлении усилие и изобразить возможную форму движения полученного механизма под его воздействием; эпюра перемещений полученного кинематического механизма с точностью до масштабного множителя будет соответствовать линии влияния усилия в отброшенной связи.

либо усилия определяются с учетом соответствующих известных формул, полученных статическим методом для однопролетных балок. С помощью этих ординат из подобия треугольников находят ординаты линий влияния, распространяющихся за пределы простой балки, на которой выбрано сечение.

На рисунке 1.8 показан вид различных линий влияния усилий в многопролетной балке построенных кинематическим методом.

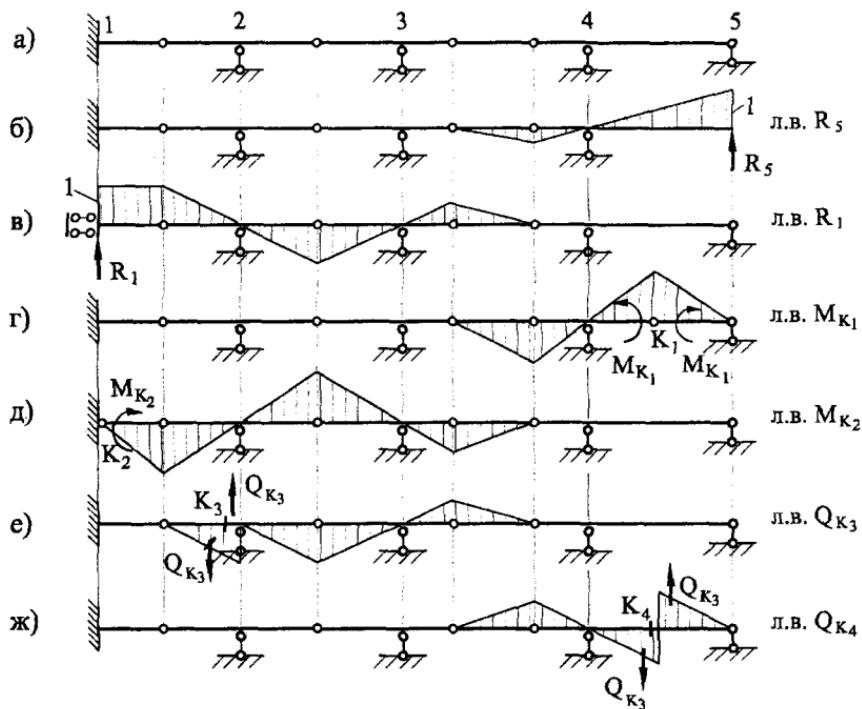


Рисунок 1.8

## 2 ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ И УСИЛИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ ФЕРМЫ

### 2.1 Построение линий влияния усилий в элементах простых ферм

Линии влияния опорных реакций в балочных фермах строятся аналогично балкам.

#### Построение линий влияния усилий в элементах фермы

Рассмотрим ферму с треугольной решеткой (рис. 2.1-а). Расположение подвижной нагрузки  $P = 1$  на рисунке показано пунктиром (езды понизу).

При построении линий влияния желательно усилия в стержнях фермы выражать через опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$ , которые, как и в балках, будут определяться с помощью выражений:

$$V_B = \frac{x}{\ell} \quad \text{и} \quad V_A = 1 - \frac{x}{\ell}.$$

Построим линии влияния усилий в стержнях рассеченной на рисунке панели. В случае, когда единичная сила расположена справа от рассеченной панели, будем рассматривать равновесие левой отсеченной части фермы, а в случае, когда единичная сила расположена слева от рассеченной панели, – равновесие правой отсеченной части фермы.

Для определения усилия  $S_1$  составим уравнения равновесия и, проведя необходимые преобразования, найдем:

$$\sum(M_{K1})^n = 0, \quad V_A d + S_1 r_1 = 0, \quad S_1 = -V_A \frac{d}{r_1};$$

$$\sum(M_{K1})^n = 0, \quad V_B (\ell - d) + S_1 r_1 = 0, \quad S_1 = -V_B \frac{\ell - d}{r_1}.$$

Откуда имеем:

$$\text{л.в. } S_1 = -\frac{d}{r_1} \cdot \text{л.в. } V_A; \quad (2.1)$$

$$\text{л.в. } S_1 = -\frac{\ell - d}{r_1} \cdot \text{л.в. } V_B. \quad (2.2)$$

Как видно из выражений (2.1) и (2.2), когда единичная нагрузка находится справа от сечения, усилие  $S_1$  изменяется по закону реакции  $V_A$ , а когда нагрузка находится слева от сечения, — по закону реакции  $V_B$ . Построив «исправленные» линии влияния реакций  $V_A$  и  $V_B$  (то есть умноженные на коэффициенты  $-d/r_1$  и  $-(l-d)/r_1$  соответственно), получим линию влияния усилия  $S_1$  (рис. 2.1-б).

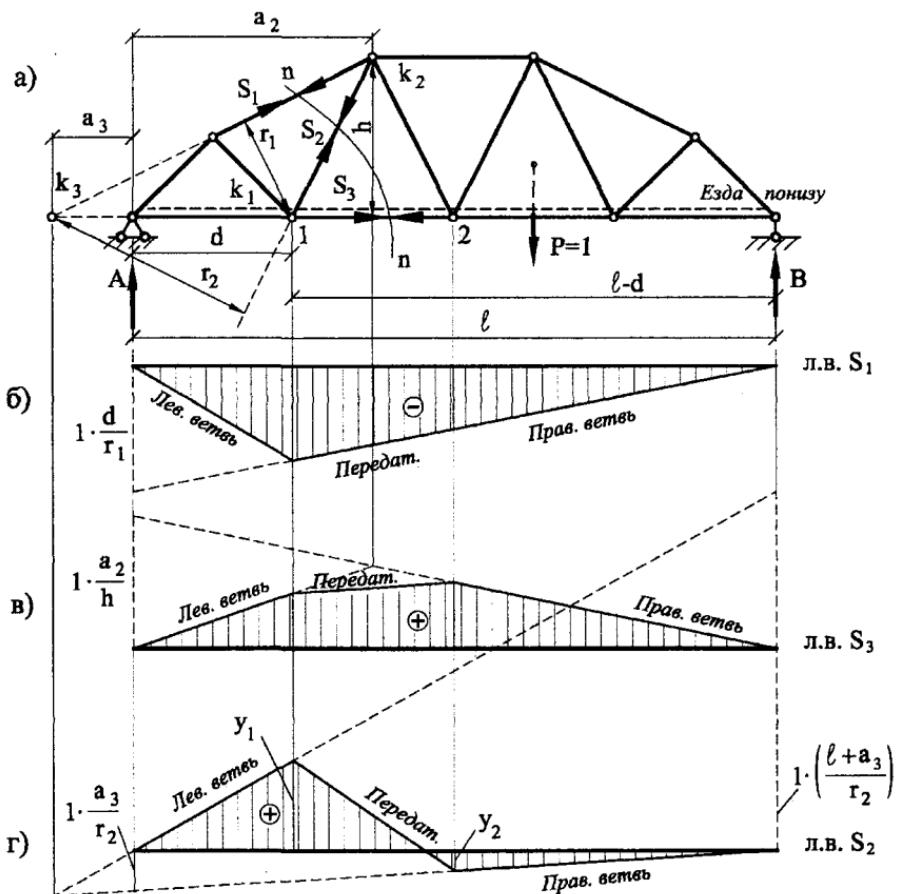


Рисунок 2.1

При построении линий влияния усилий в элементах фермы необходимо каждую из ветвей доводить до рассеченной панели. В пределах панели строится передаточная линия в виде прямой, соединяющей узловые ординаты правой и левой ветвей линии влияния.

Для построения линии влияния усилия  $S_3$  составим уравнения равновесия и, проведя необходимые преобразования, найдем:

$$\sum(M_{K2})^n = 0, \quad V_A a_2 - S_3 h = 0, \quad S_3 = -V_A \frac{a_2}{h};$$

$$\sum(M_{K2})^n = 0, \quad V_B (\ell - a_2) + S_3 h = 0, \quad S_3 = -V_B \frac{\ell - a_2}{h}.$$

Откуда имеем:

$$\text{л.в. } S_3 = -\frac{a_2}{h} \cdot \text{л.в. } V_A; \quad (2.3)$$

$$\text{л.в. } S_3 = -\frac{\ell - a_2}{h} \cdot \text{л.в. } V_B. \quad (2.4)$$

Как видно из выражений (2.3) и (2.4), и в этом случае, когда единичная нагрузка находится справа от сечения, усилие  $S_3$  изменяется по закону реакции  $V_A$ , а когда нагрузка находится слева от сечения, – по закону реакции  $V_B$ . Построив «исправленные» линии влияния реакций  $V_A$  и  $V_B$ , получим линию влияния усилия  $S_3$  (рис. 3.13-в).

Для построения линии влияния усилия  $S_2$  составим уравнения равновесия и, проведя необходимые вычисления, найдем:

$$\sum(M_{K3})^n = 0, \quad V_A a_3 - S_2 r_2 = 0, \quad S_2 = -V_A \frac{a_3}{r_2};$$

$$\sum(M_{K3})^n = 0, \quad V_B (\ell + a_3) + S_2 r_2 = 0, \quad S_2 = V_B \frac{\ell + a_3}{r_2}.$$

Откуда имеем:

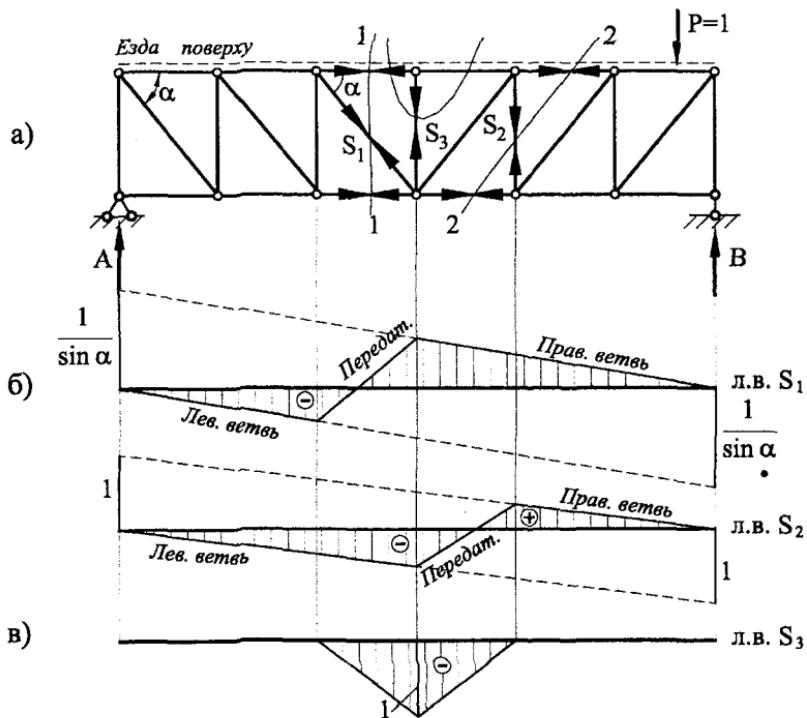
$$\text{л.в. } S_2 = -\frac{a_3}{r_2} \cdot \text{л.в. } V_A, \quad (2.5)$$

$$\text{л.в. } S_2 = \frac{\ell + a_3}{r_2} \cdot \text{л.в. } V_B. \quad (2.6)$$

Как видно из выражений (2.5) и (2.6), и для усилия  $S_2$  линия влияния изменяется по закону реакции  $V_A$  (правая ветвь) и по закону реакции  $V_B$ ,

(левая ветвь). Построив «исправленные» линии влияния реакций  $V_A$  и  $V_B$  и передаточную прямую, получим линию влияния усилия  $S_2$  (рис. 2.1-г).

Сопоставляя построенные линии влияния, можно сделать вывод о том, что для балочной фермы линии влияния для усилий в элементах нижнего и верхнего поясов однозначны, а для раскосов – двузначны.



**Рисунок 2.2**

Рассмотрим ферму с параллельными поясами и треугольной решеткой (рис. 2.2-а). Построим линии влияния усилий в раскосе и двух стойках заданной фермы (для элементов поясов линии влияния усилий будут аналогичны рассмотренным в предыдущем примере). Пусть езда осуществляется поверху.

Проведем сечение 1-1. Для нахождения усилия  $S_1$  необходимо составить уравнение равновесия  $\Sigma Y = 0$ .

Когда нагрузка находится справа от сечения, будем рассматривать равновесие левой отсеченной части, а когда слева, – правой отсеченной части.

$$\sum Y^a = 0, \quad V_A - S_1 \sin \alpha = 0, \quad S_1 = \frac{V_A}{\sin \alpha};$$

$$\sum Y^n = 0, \quad V_{\hat{A}} + S_1 \sin \alpha = 0, \quad S_1 = -\frac{V_{\hat{A}}}{\sin \alpha}.$$

Откуда имеем:

$$\text{л.в. } S_1 = -\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \text{л.в. } V_A, \quad (2.7)$$

$$\text{л.в. } S_1 = -\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \text{л.в. } V_B. \quad (2.8)$$

Построив «исправленные» линии влияния реакций  $V_A$  и  $V_B$  и передаточную прямую, получим линию влияния усилия  $S_1$  (рис. 2.2-б).

Проведем сечение 2-2. Для нахождения усилия  $S_2$  необходимо также составить уравнение равновесия  $\Sigma Y = 0$ .

$$\sum O^e = 0, \quad V_A - S_2 = 0, \quad S_2 = V_A;$$

$$\sum O^n = 0, \quad V_{\hat{A}} + S_2 = 0, \quad S_2 = -V_{\hat{A}}.$$

Откуда имеем:

$$\ddot{\text{e.â. }} S_2 = \ddot{\text{e.â. }} V_A; \quad (2.9)$$

$$\ddot{\text{e.â. }} S_2 = -\ddot{\text{e.â. }} V_{\hat{A}}; \quad (2.10)$$

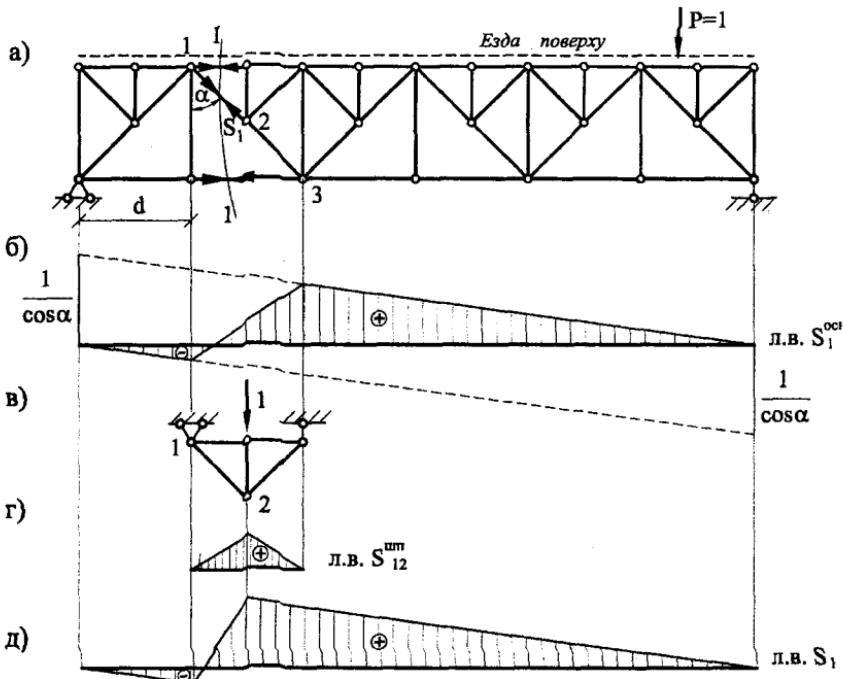
Построив линии влияния реакций  $V_A$  и  $V_B$  и передаточную прямую, получим линию влияния усилия  $S_2$  (рис. 2.2-в).

Для построения линии влияния усилия  $S_3$  вырежем центральный узел верхнего пояса фермы. Усилие в этом стержне может возникнуть только тогда, когда подвижная сосредоточенная сила  $P = 1$ , двигаясь по верхнему поясу, окажется в пределах двух смежных центральных панелей фермы. Причем в том случае, когда единичная сила приложена к узлу,  $S_3 = -1$ . Если единичная сила будет находиться слева и справа от рассекаемых панелей, то  $S_3 = 0$ .

При езде понизу усилие  $S_3 = 0$  всегда

## 2.2 Построение линий влияния усилий в элементах шпренгельной фермы

Линии влияния реакций опор и усилий в элементах шпренгельной фермы, принадлежащих только основной ферме, а также в элементах, принадлежащих только шпренгелям, строятся аналогично рассмотренному выше.



**Рисунок 2.3**

Рассмотрим балочную шпренгельную ферму, изображенную на рисунке 2.3-а. Построим линию влияния усилия  $S_1$  в стержне, принадлежащем и основной ферме, и шпренгелю, при езде поверху.

Проведем сечение 1-1. Мысленно уберем шпренгель, попадающий в рассеченную панель, и построим линию влияния усилия в элементе основной фермы  $S_1^{oc}$  так, как это делалось в предыдущем параграфе

(рис. 2.3-б). Заметим, что эта линия влияния будет окончательной для стержня 2-3.

Далее рассмотрим выделенный шпренгель отдельно (рис. 2.3-в) и построим линию влияния усилия в элементе шпренгеля  $(S_1)^{шп}$ . Максимальное усилие в этом стержне возникнет тогда, когда единичная сила будет находиться над стойкой. Вырезая опорный узел и составляя уравнение равновесия  $\Sigma Y = 0$ , получим  $(S_1)^{шп} = 1/(2 \cos \alpha)$  (рис. 2.3-г).

Окончательную линию влияния усилия  $S_3$  получим, складывая линии влияния  $(S_1)^{осн}$  и  $(S_1)^{шп}$  (рис. 2.3-д). Эту линию влияния можно было построить сразу же без отбрасывания шпренгеля, поскольку в сечении 1-1 попадает всего три стержня.

Аналогично могут быть построены линии влияния и для усилий в стержнях верхнего пояса заданной фермы.

### 3 ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ РЕАКЦИЙ ОПОР И ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ТРЕХШАРНИРНЫХ АРКАХ

Построение линий влияния реакций

Рассмотрим произвольное расположение подвижной нагрузки  $P = 1$  на трехшарнирной арке (рис. 3.1-а). Составляя уравнения равновесия  $\Sigma M_A = 0$  и  $\Sigma M_B = 0$ , получим соответственно:

$$V_B = \frac{x}{\ell} \quad \text{и} \quad V_A = 1 - \frac{x}{\ell}.$$

Выражения для вертикальных реакций в арке получились точно такими же, как и в балке, поэтому и линии влияния для вертикальных реакций будут аналогичными (рис. 3.1-б, в).

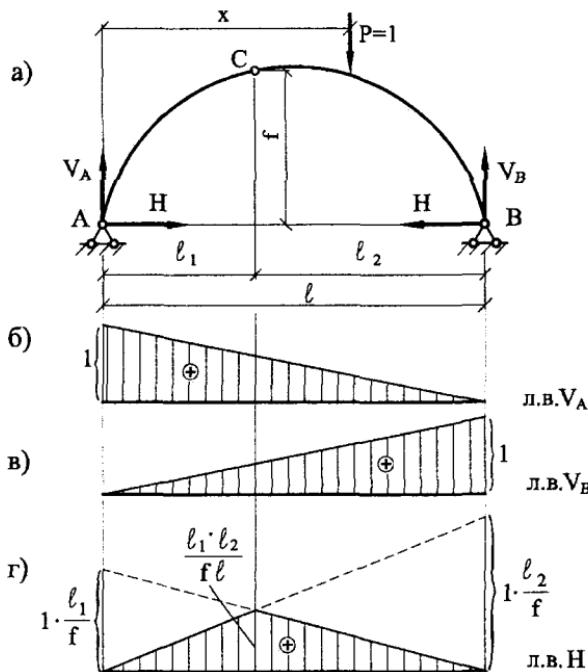


Рисунок 3.1

Построим линию влияния распора, для чего рассмотрим два положения подвижной нагрузки: справа и слева от ключевого шарнира.

Пусть сосредоточенная сила  $P = 1$  находится правее ключевого шарнира. Составляя уравнение равновесия для левой части арки  $\sum(M_C)^n = 0$ , найдем:

$$V_A \ell_1 - H \cdot f = 0; \quad H = V_A \frac{\ell_1}{f} = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{\ell_1}{f}.$$

Откуда для правой ветви линии влияния  $H$  получим:

$$\text{л.в. } H = \frac{\ell_1}{f} \text{ л.в. } V_A. \quad (3.1)$$

Для построения этой ветви линии влияния отложим над левой опорой ординату  $1 \cdot \ell_1/f$  и соединим ее прямой линией с правой опорой (рис. 3.1-г).

Проведем аналогичные вычисления и построения для случая, когда сосредоточенная сила  $P = 1$  расположена левее ключевого шарнира. При этом получим:

$$\sum(M_C)^n = 0, \quad V_A \ell_2 - H \cdot f = 0; \quad H = V_A \frac{\ell_2}{f} = \frac{x}{\ell} \frac{\ell_2}{f}.$$

Откуда для левой ветви линии влияния  $H$  запишем:

$$\text{л.в. } H = \frac{\ell_2}{f} \text{ л.в. } V_B. \quad (3.2)$$

Для построения этой ветви линии влияния отложим над правой опорой ординату  $1 \cdot \ell_2/f$  и соединим ее прямой линией с левой опорой (рис. 3.1-г). Точка пересечения правой и левой ветвей линии влияния лежит на вертикали, проходящей через ключевой шарнир.

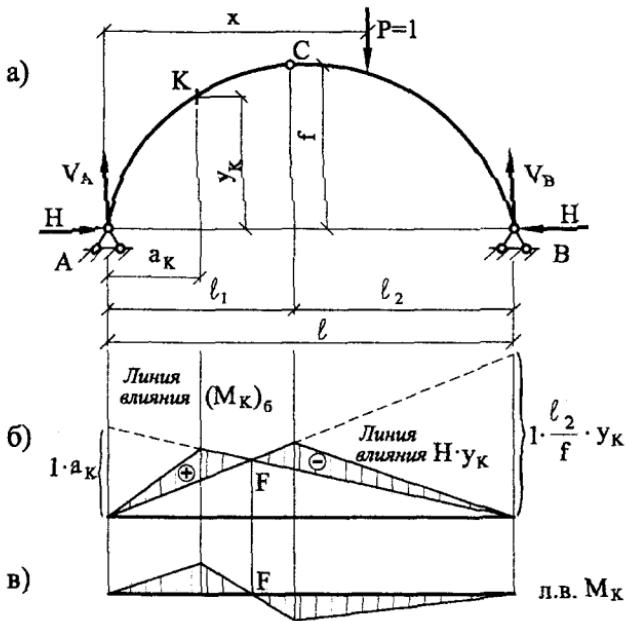
### Построение линий влияния изгибающего момента

Линию влияния изгибающего момента будем строить с помощью формулы

$$M_K = (M_K)^b - H \cdot y_K.$$

Из этой формулы следует:

$$\text{л.в. } M_K = \text{л.в. } (M_K)^b - y_K \cdot \text{л.в. } H. \quad (3.3)$$



**Рисунок 3.2**

Построение л.в.  $M_K$  удобно выполнять способом наложения (рис. 3.2) в следующей последовательности:

- 1) строим линию влияния балочного момента в сечении «К» (л.в.  $(M_K)_b$ ) (рис. 3.2-б);
- 2) строим линию влияния распора (л.в.  $H$ ) и «исправляем» ее путем умножения всех ординат на  $u_K$ ;
- 3) считая ординаты «исправленной» л.в.  $H$  отрицательными, накладываем ее на л.в.  $(M_K)_b$  (рис. 3.2-б);
- 4) заштриховываем полученные разности ординат наложенных линий влияния и приводим их к горизонтали (рис.3.2-в).

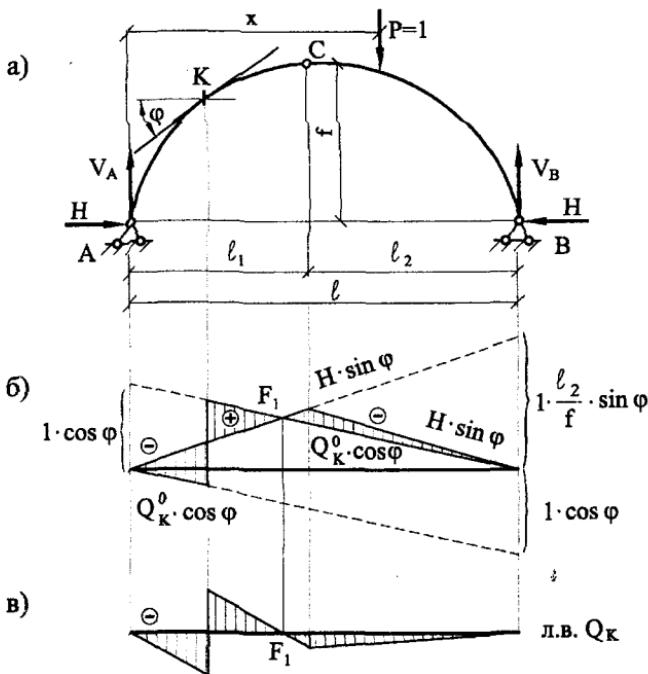
#### Построение линий влияния поперечной силы

Линию влияния поперечной силы будем строить с помощью формулы

$$Q_K = Q_K^a \cos \varphi - H \sin \varphi.$$

Из этой формулы следует:

$$\text{л.в. } Q_K = \cos\varphi \cdot \text{л.в. } (Q_K)^6 - \sin\varphi \cdot \text{л.в. } H. \quad (3.4)$$



*Рисунок 3.3*

Построение л.в.  $Q_K$  также удобно выполнять способом наложения (рис. 3.3) в следующей последовательности:

- 1) строим линию влияния поперечной силы в сечении «К» балки (л.в.  $(Q_K)^6$ ) и «исправляем» ее путем умножения всех ординат на  $\cos\varphi$  (рис. 3.3-б);
- 2) строим линию влияния распора (л.в.  $H$ ) и «исправляем» ее путем умножения всех ординат на  $\sin\varphi$ ;
- 3) считая ординаты «исправленной» л.в.  $H$  отрицательными, накладываем ее на «исправленную» л.в.  $(Q_K)^6$  (рис. 3.3-б);
- 4) заштриховываем полученные разности ординат наложенных линий влияния и приводим их к горизонтали (рис. 3.3-в).

## Построение линий влияния нормальной силы

Линию влияния нормальной силы будем строить с помощью формулы

$$N_K = -(Q_K)^6 \sin\varphi - H \cos\varphi.$$

Из этой формулы следует:

$$\text{л.в. } N_K = \sin\varphi \cdot \text{л.в. } Q_K^6 - \cos\varphi \cdot \text{л.в. } H. \quad (3.5)$$

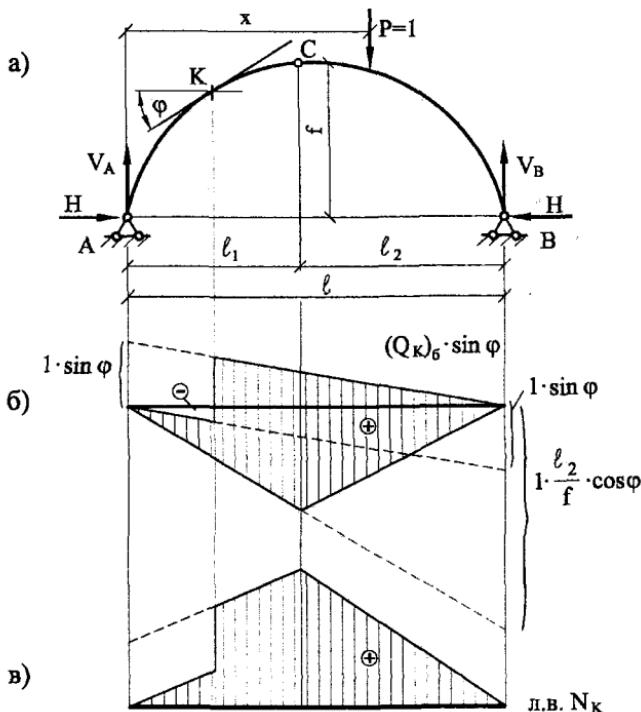


Рисунок 3.4

Построение л.в.  $N_K$  выполняем в следующей последовательности (рис. 3.4):

- 1) строим линию влияния поперечной силы в сечении «К» балки (л.в.  $(Q_K)^6$ ) и «исправляем» ее путем умножения всех ординат на  $\sin\varphi$  (рис. 3.4-б);
- 2) строим линию влияния распора (л.в.  $H$ ) и «исправляем» ее путем умножения всех ординат на  $\cos\varphi$ ;
- 3) ординаты «исправленной» л.в.  $H$  откладываем вниз;

4) заштриховываем полученные разности ординат наложенных линий влияния и приводим их к горизонтали (рис. 3.4-в).

5. Меняем знак в полученной линии влияния  $N_k$ , поскольку в выражении для определения  $N$  перед скобкой стоит знак минус.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1</b>	<b>ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ РЕАКЦИЙ ОПОР И ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В МНОГОПРОЛЕТНЫХ БАЛКАХ</b>	<b>3</b>
1.1	Некоторые общие сведения	3
1.2	Построение линий влияния реакций и усилий в простых балках статическим методом	3
1.3	Определение усилий по линиям влияния при действии неподвижной нагрузки	6
1.4	Невыгодное загружение линии влияния при действии системы сосредоточенных сил	9
1.5	Построение линий влияния реакций и усилий в многопролетных балках	11
<b>2</b>	<b>ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ И НОРМАЛЬНЫХ СИЛ В ЭЛЕМЕНТАХ ФЕРМ</b>	<b>13</b>
2.1	Построение линий влияния усилий в элементах простых ферм	13
2.2	Построение линий влияния усилий в элементах шпренгельных ферм	18
<b>3</b>	<b>ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ РЕАКЦИЙ ОПОР И ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ТРЕХШАРНИРНЫХ АРКАХ</b>	<b>20</b>