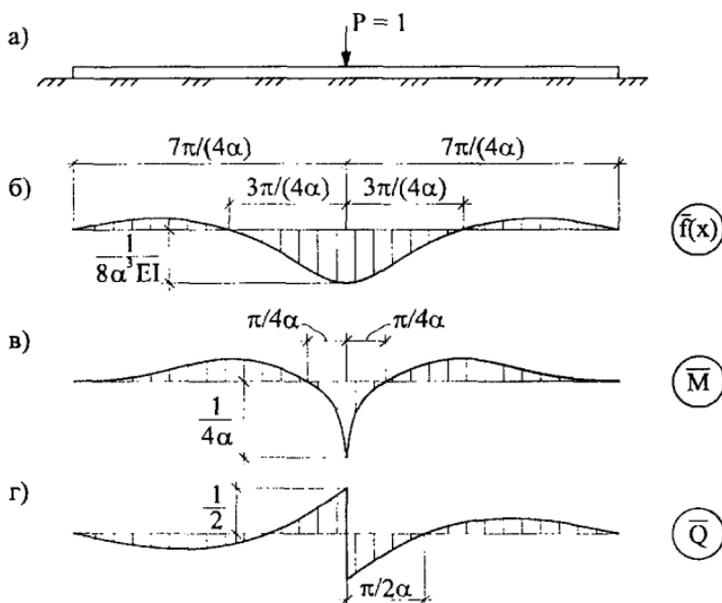


Кафедра «Строительные конструкции и материалы»

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**  
**по строительной механике**  
для выполнения расчетно-графической работы на тему  
«РАСЧЕТ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ»



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
по строительной механике  
для выполнения расчетно-графических работ на тему  
«РАСЧЕТ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ»**

*Для специальностей:*

*270205 – «Автомобильные дороги и аэродромы»  
270102 – «Промышленное и гражданское строительство»;  
270105 – «Городское строительство и хозяйство»,  
270177 – «Проектирование зданий»,*

Печатается по решению  
редакционно-издательского совета ОрелГТУ

Орел – 2007  
Издательство ОрелГТУ

**Авторы:** **Коробко Виктор Иванович**, д.т.н., профессор;  
**Юров Александр Петрович**, к.т.н., доцент;  
**Морозов Станислав Александрович**, студент.

**Рецензент:** зав. кафедрой «Строительные конструкции  
и материалы» д.т.н., профессор **В.И. Колчунов**.

Методическое пособие предназначено для выполнения расчетно-графической работы по строительной механике на тему «Расчет балок на упругом основании» студентами специальностей:

- 270205 – «Автомобильные дороги и аэродромы»,
- 270102 – «Промышленное и гражданское строительство»;
- 270105 – «Городское строительство и хозяйство».
- 270177 – «Проектирование зданий».

*Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РФ,  
доктора технических наук, профессора В.И. Коробко.  
Компьютерный набор Юров А.П.  
Компьютерная графика Морозов С.А.*

Орловский государственный технический университет  
Лицензия № 00670 от 05.01.2000

Подписано к печати 15.02.2007. Формат 60x84 1/16.  
Печать офсетная. Уч. печ. л. 4,12. Тираж 200 экз. Заказ № 1391.

Отпечатано в ОАО «Типография «Труд»,  
302028, г. Орел, ул. Ленина, 1

© Орел ГТУ, 2007

© Коробко В.И., Юров А.П., Морозов, 2007

## Введение

Теория расчета балок на упругом основании имеет важное значение в строительной практике. Специалисту по проектированию искусственных сооружений на автомобильных дорогах приходится часто прибегать к многовариантному проектированию при поиске экономических форм конструкций этих сооружений. В первую очередь это относится к искусственным сооружениям на слабых грунтах (например, к трубам), ленточным фундаментам железобетонных путепроводов, наплавным мостам, балочным клеткам деревянных мостов, фундаментам высотных зданий, подкрановым путям, днищам элеваторов и газгольдеров, покрытиям усовершенствованных автодорог, полов промышленных зданий, бетонным покрытиям аэродромов и т.п. На возведение таких сооружений в нашей стране уходит почти половина бетона, используемого в строительстве. Столь огромные материальные и денежные затраты требуют внимательного отношения к вопросам расчета конструкций на упругом основании.

Проблемы, связанные с исследованием конструкций, лежащих на упругом основании, представляют собой одну из актуальных, сложных и интересных задач строительной механики. В последнее время внимание к этим задачам все более возрастает. С одной стороны это объясняется насущными потребностями инженерной практики, а с другой – развитием и совершенствованием методов расчета. Большую роль при этом играет современная вычислительная техника.

В развитие теории расчета конструкций на упругом основании значительный вклад внесли русские ученые Н.П. Пузыревский, А.Н. Крылов, П.Л. Пастернак, А.А. Уманский, Г.Э. Проктор, Б.Н. Жемочкин, М.И. Горбунов-Посадов, Н.М. Герсеванов, В.А. Флорин, Н.Н. Леонтьев и др.

При расчете конструкции на упругом основании сначала устанавливается ее расчетная модель и рассматриваются условия ее контакта с основанием, а затем производится расчет.

Обычно конструкции изготавливаются из однородного и изотропного материала. Их контакт с основанием при любых сочетаниях внешних воздействий считается непрерывным, то есть предполагается совпадение вертикальных перемещений конструкции и поверхности основания по всей площади контакта.

## 1 Некоторые общие сведения

**Балкой на упругом основании** называется брус, лежащий на упругом основании, на который кроме заданных внешних сил  $q(x)$  действуют еще реактивные силы  $p(x)$  – реакции упругого основания (рис. 1.1).

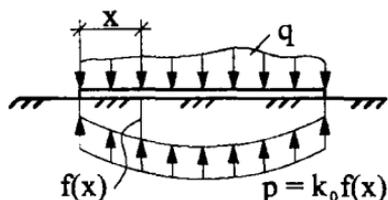


Рисунок 1.1

Реакция упругого основания определяется по формуле

$$p(x) = kb f(x) = k_0 f(x), \quad (1.1)$$

где  $f(x)$  – функция прогибов балки;  $b$  – ширина балки;  $k$  – коэффициент податливости основания (коэффициент постели), имеющий размерность  $\text{Н/см}^3$  или  $\text{Па/м}$ ;  $k_0 = kb$ . Значения коэффициента постели основания для различных грунтов приведены в таблице 1.1.

Значения коэффициента постели основания для различных грунтов приведены в таблице 1.1.

Таблица 9.1 – Значения коэффициента постели для различных грунтов

№№ п/п	Вид грунта	$k$ , МПа/м
1	Песок свеженасыпанный; глина мокрая, размягченная	1...5
2	Грунты средней плотности: песок слежавшийся; гравий насыпной; глина влажная	5...50
3	Грунты плотные: песок и гравий, плотно слежавшиеся; щебень; глина влажная	50...100
4	Грунты весьма плотные: грунт песчано-глинистый, искусственно уплотненный; глина твердая	100...200
5	Известняк, песчаник, мерзлота	200...1000
6	Твердая скала	1000...15000

Если интенсивность нагрузки, действующей на балку, принять как сумму внешней и реактивной нагрузки, то можно воспользоваться дифференциальным уравнением изгиба балки, известным из сопротивления материалов:

$$EI f^{IV}(x) = q(x) - p(x),$$

или 
$$f^{IV}(x) + 4\alpha^4 f(x) = q(x)/EI, \quad (1.2)$$

где  $\alpha = \sqrt[4]{kb/(4EI)}$  (см<sup>-1</sup>). Коэффициент  $\alpha$  является одним из основных параметров уравнения изгиба, он зависит одновременно и от жесткости балки ( $EI$ ), и от жесткости основания.

Если балка имеет незагруженные участки (например, при воздействии только сосредоточенных сил), то дифференциальное уравнение (1.2) становится однородным:

$$f^{IV}(x) + 4\alpha^4 f(x) = 0. \quad (1.3)$$

Заменим в уравнениях (1.2) и (1.3) независимую переменную  $x$  безразмерным параметром  $\xi = \alpha x$ . Тогда

$$f(\xi) = f(\alpha x), \quad f^{IV}(x) = \alpha^4 f^{IV}(\xi)$$

и 
$$\frac{d^4 f(\xi)}{d\xi^4} + 4f(\xi) = \frac{4q(\xi)}{k_0}; \quad (1.4)$$

$$\frac{d^4 f(\xi)}{d\xi^4} + 4f(\xi) = 0. \quad (1.5)$$

## 2 Интегрирование однородного дифференциального уравнения

Полное решение дифференциального уравнения (1.4) заключается в нахождении общего интеграла этого уравнения и определения всех входящих в него постоянных интегрирования. Так как это уравнение линейное, то его решение складывается из общего решения однородного дифференциального уравнения (1.5) и какого-либо частного решения полного уравнения (1.4).

Общее решение уравнения (1.4) можно представить в виде следующих функций:

$$f(\xi) = e^{\xi} (\hat{A}_1 \sin \xi + \hat{A}_2 \cos \xi) + e^{-\xi} (\hat{A}_3 \sin \xi + \hat{A}_4 \cos \xi); \quad (2.1)$$

$$f(\xi) = B_1 \operatorname{ch} \xi \cos \xi + B_2 \operatorname{ch} \xi \sin \xi + B_3 \operatorname{sh} \xi \cos \xi + B_4 \operatorname{sh} \xi \sin \xi, \quad (2.2)$$

где  $A_1, A_2, A_3, A_4$  и  $B_1, B_2, B_3, B_4$  – постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий балки. В том, что функции (2.1) и (2.2) тождественно удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.5) можно убедиться путем подстановки этих функций и их производных в это уравнение. Постоянные интегрирования  $A_i$  и  $B_i$  связаны между собой линейной комбинацией, о чем будет подробнее сказано далее.

В зависимости от длины балки на упругом основании принято подразделять на следующие группы:

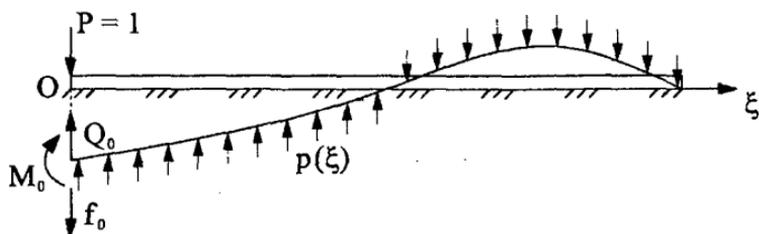
- 1) абсолютно жесткая балка на упругом основании;
- 2) бесконечно длинная или полубесконечная балка;
- 3) короткая балка на упругом основании.

Для отнесения балки к той или иной группе используют параметр  $\alpha \ell$ , где  $\ell$  – длина балки. Абсолютно жесткими считают балки при  $\alpha \ell \leq 0,80$ , короткими – при  $1,20 \leq \alpha \ell \leq 4,00$ ; бесконечно длинными – при  $\alpha \ell \geq 6,00$ .

Уравнение (2.1) удобно использовать при расчете весьма длинных балок, у которых нагрузка занимает небольшой участок, удаленный от концов балки на достаточно большое расстояние. Уравнение (2.2) используют при расчете коротких балок.

### 3 Расчет бесконечно длинной балки, лежащей на упругом основании, при действии сосредоточенной силы $P$

Рассмотрим случай, когда к бесконечно длинной балке на упругом основании приложен один груз  $P = 1$  (рис. 3.1).



**Рисунок 3.1** – Балка на упругом основании под действием единичной сосредоточенной силы  $P = 1$

Упругая линия балки будет симметричной относительно точки приложения силы  $P$ , так как балка имеет бесконечную длину. Поэтому будем рассматривать ее половину, расположенную правее точки приложения груза. Действие отброшенной левой части балки заменим внутренними усилиями  $M_0$  и  $Q_0$ . Начало координат поместим в точке приложения груза.

Запишем уравнение упругой линии балки для этого случая нагружения:

$$\bar{f}(\xi) = e^{\xi}(A_1 \cos \xi + A_2 \sin \xi) + e^{-\xi}(A_3 \cos \xi + A_4 \sin \xi), \quad (3.1)$$

$A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$  – произвольные постоянные, определяемые из соответствующих граничных условий. При  $\xi = \infty$  прогиб и угол наклона балки будут равняться нулю:

$$f(\infty) = 0; \quad f'(\infty) = 0. \quad (3.2)$$

Эти условия могут быть удовлетворены только при  $A_1 = 0$  и  $A_2 = 0$ , поскольку величина  $e^{\xi}$  в (3.1) стремится к бесконечности. В этом случае из (3.1) получим:

$$\bar{f}(\xi) = e^{-\xi}(A_3 \cos \xi + A_4 \sin \xi) \quad (3.3)$$

Оставшиеся две произвольные постоянные  $A_3$  и  $A_4$  могут быть определены из условий сопряжения левого и правого участков балки под силой (при  $\xi = 0$ ). Так как упругая линия симметрична относительно оси  $Ox$  (относительно линии действия единичной силы), то при  $\xi = 0$  должен быть равным нулю угол наклона упругой линии балки ( $\varphi_0 = 0$ ), а поперечная сила –  $Q_0 = P/2$  (в случае действия единичной силы  $Q_0 = 1/2$ ):

$$\frac{df}{d\xi} = 0; \quad EI\alpha^3 \frac{d^3 f}{d\xi^3} = +\frac{P}{2} = \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

Здесь первое уравнение выражает условие симметрии угла наклона касательной к оси балки в начале координат, а второе – равенство поперечной силы половине приложенной нагрузки.

Дифференцируя последовательно выражение (3.3), получим:

$$\frac{df}{d\xi} = e^{-\xi}[(A_4 - A_3) \cdot \cos \xi - (A_4 + A_3) \cdot \sin \xi]; \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = 2e^{-\xi} \cdot (A_3 \sin \xi - A_4 \cos \xi); \quad (3.6)$$

$$\frac{d^3 f}{d\xi^3} = 2e^{-\xi} [(A_3 + A_4) \cdot \cos \xi + (A_4 - A_3) \cdot \sin \xi]. \quad (3.7)$$

Из первого граничного условия (3.4) при  $\xi = 0$  будем иметь:

$$A_4 = A_3;$$

а из второго –

$$A_4 = A_3 = \frac{1}{8EI\alpha^3}. \quad (3.8)$$

Подставляя полученные значения  $A_4$  и  $A_3$  в выражения (3.3) и производные (3.5)...(3.7) и учитывая при этом, что  $EJ\alpha^2 f''(\xi) = -M(\xi)$ , получим:

$$f(\xi) = +\frac{P}{8EI\alpha^3} \cdot e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) + \frac{P}{8EI\alpha^3} \cdot \eta; \quad (3.9)$$

$$\varphi(\xi) = -\frac{P}{8EI\alpha^3} \cdot e^{-\xi} \cdot \sin \xi = -\frac{P}{4EI\alpha^3} \cdot \eta_3; \quad (3.10)$$

$$M(\xi) = -\frac{P}{4\alpha} \cdot e^{-\xi} (\sin \xi - \cos \xi) = +\frac{P}{4\alpha} \cdot \eta_1; \quad (3.11)$$

$$Q(\xi) = -\frac{P}{2} \cdot e^{-\xi} \cos \xi = -\frac{P}{2} \cdot \eta_2. \quad (3.12)$$

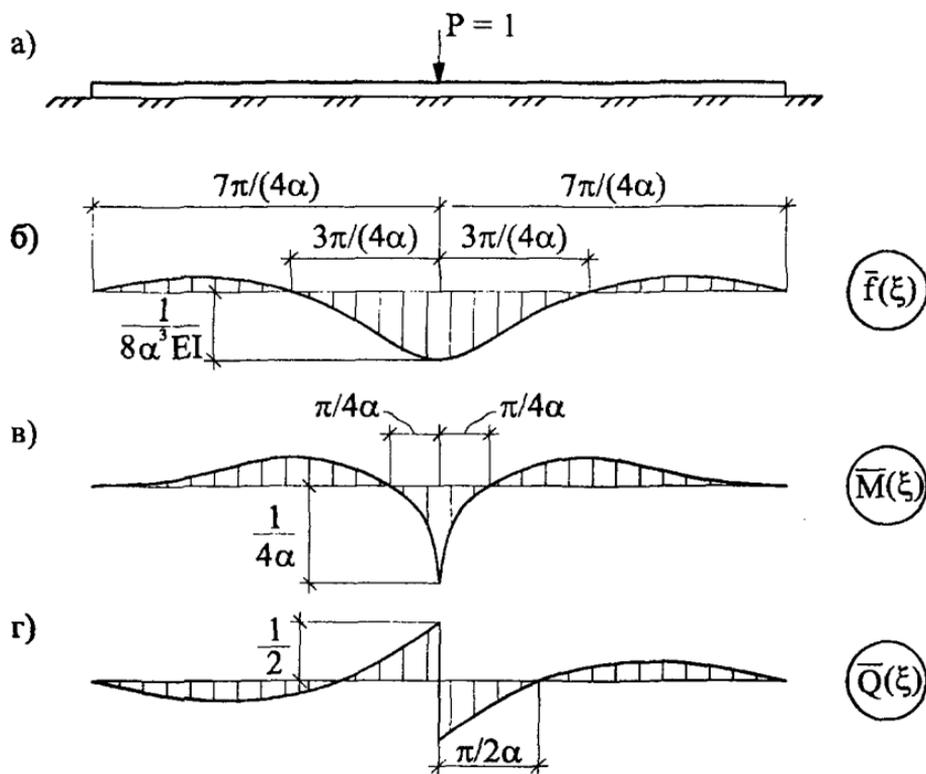
Здесь  $\varphi(\xi)$  – угол поворота сечений балки. Уравнения (3.9)...(3.12) зависят от функций  $\eta$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$ , для которых составлены таблицы для обычно применяемых значений аргумента  $\xi$  (см. приложение 2):

$$\eta = e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi); \quad \eta_1 = -e^{-\xi} (\sin \xi - \cos \xi);$$

$$\eta_2 = +e^{-\xi} \cdot \cos \xi; \quad \eta_3 = +e^{-\xi} \cdot \sin \xi.$$

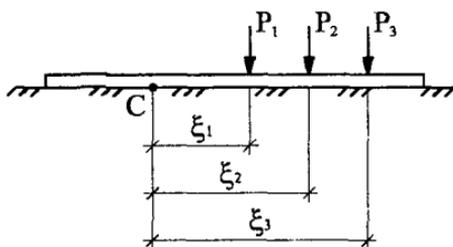
Пользуясь этой таблицей и уравнениями (3.9)...(3.12), можно построить эпюры  $f(\xi)$ ,  $\varphi(\xi)$ ,  $M(\xi)$  и  $Q(\xi)$  от груза  $P = 1$ , приложенного в начале координат. Правые половины этих эпюр строятся с учетом най-

денных табличных данных; левые половины эюр  $\bar{f}(\xi)$  и  $\bar{M}(\xi)$  имеют симметричный вид с правыми, а эюр  $\bar{Q}(\xi)$  и  $\bar{\varphi}(\xi)$  – обратно симметричный. Общий вид эюр  $\bar{f}(\xi)$ ,  $\bar{M}(\xi)$  и  $\bar{Q}(\xi)$  для бесконечно длинной балки, лежащей на сплошном упругом основании, представлен на рисунке 3.2.



**Рисунок 3.2** – Общий вид эюр  $\bar{f}(\xi)$ ,  $\bar{M}(\xi)$  и  $\bar{Q}(\xi)$  для бесконечно длинной балки, лежащей на сплошном упругом основании

Построенными эюрами  $\bar{f}(\xi)$ ,  $\bar{M}(\xi)$  и  $\bar{Q}(\xi)$  от единичной сосредоточенной силы можно воспользоваться для определения прогиба  $f(\xi)$ , угла поворота  $\varphi(\xi)$ , изгибающего момента  $M(\xi)$  и поперечной силы  $Q(\xi)$  от любой нагрузки в виде системы сосредоточенных сил.



**Рисунок 3.3** – Балка, нагруженная системой сосредоточенных сил

Рассмотрим балку, нагруженную несколькими сосредоточенными силами (рис. 3.3). Требуется подсчитать изгибающий момент в точке С от действия этих сил. Воспользуемся принципом независимости действия сил. По формулам (3.9), (3.11) и (3.12) получим:

$$f_C = \frac{1}{8EI\alpha^3} [P_1\eta(\xi_1) + P_2\eta(\xi_2) + P_3\eta(\xi_3) + \dots] = \frac{1}{8EI\alpha^3} \sum_i^n P_i\eta(\xi_i); \quad (3.13)$$

$$M_C = \frac{1}{4\alpha} [P_1\eta_1(\xi_1) + P_2\eta_1(\xi_2) + P_3\eta_1(\xi_3) + \dots] = \frac{1}{4\alpha} \sum_i^n P_i\eta_1(\xi_i); \quad (3.14)$$

$$Q_C = \frac{1}{2} [P_1\eta_2(\xi_1) + P_2\eta_2(\xi_2) + P_3\eta_2(\xi_3) + \dots] = \frac{1}{2} \sum_i^n P_i\eta_2(\xi_i); \quad (3.15)$$

Если участок балки от  $\xi = \xi_1$  до  $\xi = \xi_2$  занят сплошной равномерной нагрузкой  $q$ , то, разбивая ее на бесконечно малые элементы  $dP = qd\xi = q \frac{d\xi}{\alpha}$  и применяя формулу, например (3.14), получим:

$$M_q = \frac{1}{4\alpha} \int_{\xi_1}^{\xi_2} q \frac{d\xi}{\alpha} \eta_1(\xi) = \frac{q}{4\alpha^2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta_1(\xi) d\xi = \frac{q}{4\alpha^2} \cdot \Omega_{\overline{M}(\xi)} \quad (3.16)$$

где  $\Omega_i(\xi)$  – площадь, ограниченная эюрой  $M(\xi)$ , построенной от  $P = 1$ , приложенной в точке С, на участке действия распределенной нагрузки.

Аналогично можно найти прогибы, углы поворота и поперечные силы в сечениях бесконечно длинной балки при действии на нее нескольких сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки.

#### 4 Расчет коротких балок методом начальных параметров

Известно [1], что при расчете коротких балок, лежащих на упругом основании, при решении однородного дифференциального уравнения

$$\bar{f}^{IV}(\xi) + 4f(\xi) = 0 \quad (4.1)$$

удобно использовать в качестве интеграла выражение

$$\bar{f}(\xi) = B_1 \operatorname{ch} \xi \cos \xi + B_2 \operatorname{ch} \xi \sin \xi + B_3 \operatorname{sh} \xi \cos \xi + B_4 \operatorname{sh} \xi \sin \xi, \quad (4.2)$$

или 
$$\bar{f}(\xi) = B_1 Z_1 + B_2 Z_2 + B_3 Z_3 + B_4 Z_4,$$

где 
$$Z_1 = \operatorname{ch} \xi \cos \xi; \quad Z_2 = \operatorname{ch} \xi \sin \xi;$$

$$Z_3 = \operatorname{sh} \xi \cos \xi; \quad Z_4 = \operatorname{sh} \xi \sin \xi. \quad (4.3)$$

Выясним физический смысл произвольных постоянных интегрирования  $B_1, B_2, B_3$  и  $B_4$ , входящих в это выражение (4.2). Возьмем последовательно три производные от него по параметру  $\xi$ :

$$\varphi(\xi) = \alpha f'(\xi) = \alpha [(B_2 + B_3)Z_1 + (B_4 - B_1)Z_2 + (B_1 + B_4)Z_3 + (B_2 - B_3)Z_4]; \quad (4.4)$$

$$M(\xi) = -EI\alpha^2 \cdot f''(\xi) = -2EI\alpha^2 [B_4 Z_1 - B_3 Z_2 + B_2 Z_3 - B_1 Z_4]; \quad (4.5)$$

$$Q(\xi) = -EI\alpha^2 \cdot f'''(\xi) = \\ = -2EI\alpha^2 [(B_2 - B_3)Z_1 - (B_1 + B_4)Z_2 + (B_4 - B_1)Z_3 - (B_2 + B_3)Z_4]. \quad (4.6)$$

Параметры  $B_i$  можно выразить через начальные условия (при  $\xi = 0$ )

$$f(0) = f_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad M(0) = M_0, \quad Q(0) = Q_0. \quad (4.7)$$

Используя эти начальные условия из выражений (4.2), (4.4)...(4.6) получим:

$$f_0 = B_1; \quad \varphi_0 = \alpha(B_2 + B_3); \quad M_0 = -2EJa^2B_4; \quad Q_0 = -2EJ\alpha^3(B_2 - B_3). \quad (4.8)$$

Отсюда найдем:

$$B_1 = f_0, \quad B_2 = \frac{\varphi_0}{2\alpha},$$

$$B_3 = -\frac{M_0}{2EI\alpha^2}, \quad B_4 = -\frac{Q_0}{4EI\alpha^3}. \quad (4.9)$$

Подставляя эти выражение в (4.2), получим:

$$f(\xi) = f_0 Z_1 + \frac{\varphi_0}{\alpha} \left( \frac{Z_2 + Z_3}{2} \right) - \frac{M_0}{EI\alpha^2} \cdot \frac{Z_4}{2} - \frac{Q_0}{EI\alpha^3} \left( \frac{Z_2 - Z_3}{4} \right) \quad (4.10)$$

Линейные комбинации функций  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ , полученные в (4.10), называются *функциями Крылова*, и в отечественной литературе обозначаются соответственно:

$$\begin{cases} Y_1(\xi) = Z_1(\xi) = \operatorname{ch}\xi \cdot \cos \xi; \\ Y_2(\xi) = \frac{1}{2}(Z_2 + Z_3) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi \cdot \sin \xi + \operatorname{sh}\xi \cdot \cos \xi); \\ Y_3(\xi) = \frac{1}{2}Z_4 = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\xi \cdot \sin \xi; \\ Y_4(\xi) = \frac{1}{4}(Z_2 - Z_3) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\xi \cdot \sin \xi - \operatorname{sh}\xi \cdot \cos \xi). \end{cases} \quad (4.11)$$

Функции Крылова  $Y_1 \dots Y_4$  обладают рядом замечательных свойств. Прежде всего, следует отметить, что их производные выражаются через те же функции (см. таблицу 4.1).

Таблица 4.1 – *Последовательные производные функций Крылова*

Функция	Производные			
	$Y'_i$	$Y''_i$	$Y'''_i$	$Y^{IV}_i$
$Y_1$	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$	$-4Y_1$
$Y_2$	$Y_1$	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$
$Y_3$	$Y_2$	$Y_1$	$-4Y_4$	$-4Y_3$
$Y_4$	$Y_3$	$Y_2$	$Y_1$	$-4Y_4$

Другое свойство функций Крылова заключается в том, что при  $\xi = 0$  эти функции и их производные принимают значения, представленные в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Производные функций Крылова

Значение функции при $\xi = 0$	Значение производных при $\xi = 0$			
	первой	второй	третьей	четвертой
I	0	0	0	-4
0	I	0	0	0
0	0	I	0	0
0	0	0	I	0

Это свойство весьма полезно при составлении уравнений граничных условий.

Для функций Крылова составлены таблицы при различных значениях аргумента, которые приведены в Приложении 1.

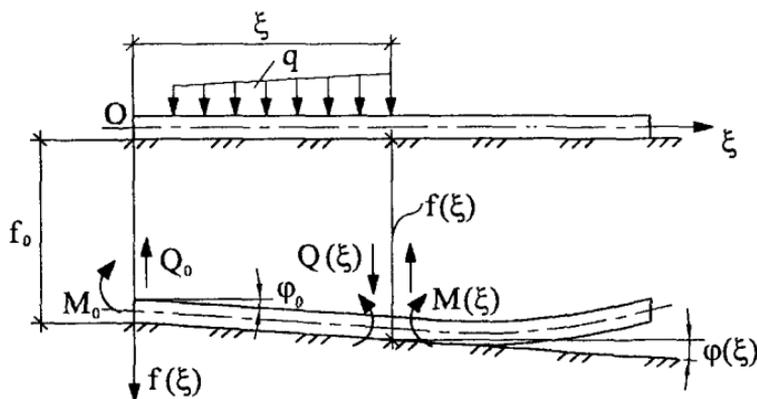
Таким образом, общее решение однородного дифференциального уравнения (4.1) с учетом выражений (4.9) и (4.11) можно записать с помощью функций Крылова:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\xi) = f_0 Y_1 + \varphi_0 \frac{Y_2}{\alpha} - M_0 \frac{Y_3}{E I \alpha^2} - Q_0 \frac{Y_4}{E I \alpha^3}; \\ \varphi(\xi) = -4\alpha f_0 Y_4 + \varphi_0 Y_1 - M_0 \frac{Y_2}{E I \alpha} - Q_0 \frac{Y_3}{E I \alpha^2}; \\ M(\xi) = 4f_0 E I \alpha^2 Y_3 + 4\varphi_0 E I \alpha Y_4 + M_0 Y_1 + Q_0 \frac{Y_2}{\alpha}; \\ Q(\xi) = 4f_0 E I \alpha^3 Y_2 + 4\varphi_0 E I \alpha^2 Y_3 - 4M_0 \alpha Y_4 + Q_0 Y_1. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Пользуясь этими выражениями и таблицами функций  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$  (см. Приложение 1), можно найти прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в любом сечении ненагруженного участка балки, если известны для него начальные условия  $f_0, \varphi_0, M_0, Q_0$ .

В сечениях, где прикладывается внешняя нагрузка, начальные условия изменяются. Поэтому с целью построения универсальных формул для расчета коротких балок необходимо учитывать прира-

щения внутренних сил  $\Delta M_i$ ,  $\Delta Q_i$  и внешней нагрузки  $\Delta q_i$  на границах характерных участков:



**Рисунок 4.1** – Параметры напряженно-деформированного состояния в сечениях балки

Пусть на отрезке  $0\xi$  (рис. 4.1) на балку действуют любая внешняя нагрузка. Дифференциальное уравнение в этом случае будет иметь вид

$$f^{IV}(\xi) + 4f(\xi) = \frac{4q(\xi)}{k_0} \quad (4.13)$$

Так как уравнение (4.13) линейное, то его решение состоит из общего решения однородного уравнения (первое выражение из (4.12)), которое записано выше в форме начальных параметров, и какого-либо частного решения полного уравнения (4.13). Частное решение зависит от вида правой части уравнения (4.13).

В теории расчета балок на упругом основании [1...3] с помощью интеграла Коши и правила интегрирования Лейбница найдены частные решения дифференциального уравнения (4.13) через функции Крылова при различных видах внешней нагрузки: сосредоточенный момент (рис. 4.2-а); сосредоточенная сила (рис. 4.2-б); равномерно распределенная нагрузка, расположенная на всей балке (рис. 4.2-в) или на ее ограниченном участке (рис. 4.2-г). Эти решения представлены в таблице 4.3. На основании этих частных решений запишем расчетные формулы для определения параметров напряженно-деформированного состояния балок в любом их сечении:

$$y(\xi) = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ -\frac{\Delta M_i}{EI\alpha^2} y_3(\xi_i) - \frac{\Delta Q_i}{EI\alpha^3} y_4(\xi_i) + \frac{\Delta q(\xi_i)}{4EI \cdot \alpha^4} (1 - y_1(\xi_i)) \right]; \quad (4.14)$$

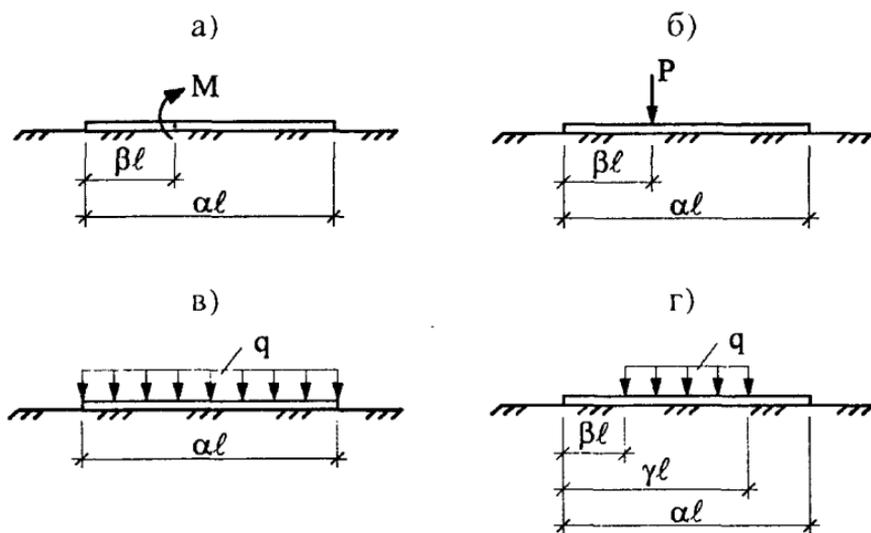
$$\varphi(\xi) = \varphi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ -\frac{\Delta M_i}{EI\alpha} y_2(\xi_i) - \frac{\Delta Q_i}{EI\alpha^2} y_3(\xi_i) + \frac{\Delta q(\xi_i)}{EI \cdot \alpha^3} y_4(\xi_i) \right]; \quad (4.15)$$

$$M(\xi) = M_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \Delta M_i y_1(\xi_i) + \frac{\Delta Q_i}{\alpha} y_2(\xi_i) - \frac{\Delta q(\xi_i)}{\alpha^2} y_3(\xi_i) \right]; \quad (4.16)$$

$$Q(\xi) = Q_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ -\Delta M_i 4\alpha y_4(\xi_i) + \Delta Q_i y_1(\xi_i) - \frac{\Delta q(\xi_i)}{\alpha} y_2(\xi_i) \right]. \quad (4.17)$$

Здесь  $y_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $M_1$  и  $Q_1$  – соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила на правой границе первого участка, которые определяются по формулам (4.12);  $\xi_i = \xi - \beta_i$  и обозначает абсциссу сечения, где определяется тот или иной физический параметр:  $\beta_i$  – абсцисса границы характерного участка.

По формулам (4.14)...(4.17), можно составить таблицу перемещений (прогибов и углов поворота) и внутренних сил (изгибающих моментов и поперечных сил) балки на упругом основании при любой нагрузке.



**Рисунок 4.2**

Таблица 4.3 – Кинематические и статистические параметры для балки на упругом основании

Решение однородного уравнения	Частные решения для различных нагрузок			
	M (рис. 4.2-а)	P (рис. 4.2-б)	q (рис. 4.2-в)	q (рис. 4.2-г)
$f(\xi) = f_0 y_1(\xi) + \frac{\varphi_0}{\alpha} y_2(\xi) -$ $-\frac{M_0}{E I \alpha^2} y_3(\xi) - \frac{Q_0}{E I \alpha^3} y_4(\xi)$	$-\frac{4M\alpha^2}{k_0} y_3(\xi - \beta)$	$\frac{4P\alpha}{k_0} y_4(\xi - \beta)$	$\frac{q}{k_0} [1 - y_1(\xi)]$	$\beta \leq \xi \leq \gamma \quad \frac{q}{k_0} [1 - y_1(\xi - \beta)];$ $\gamma \leq \xi \leq \alpha \quad \frac{q}{k_0} [y_1(\xi - \gamma) - y_1(\xi - \beta)]$
$\varphi(\xi) = -4\alpha f_0 y_4(\xi) + \varphi_0 y_1(\xi) -$ $-\frac{M_0}{E I \alpha} y_2(\xi) - \frac{Q_0}{E I \alpha^2} y_3(\xi)$	$-\frac{4M\alpha^3}{k_0} y_2(\xi - \beta)$	$\frac{4P\alpha^2}{k_0} y_3(\xi - \beta)$	$\frac{4q\alpha}{k_0} y_4(\xi)$	$\beta \leq \xi \leq \gamma \quad \frac{4q\alpha}{k_0} \cdot y_4(\xi - \beta);$ $\gamma \leq \xi \leq \alpha \quad \frac{4q\alpha}{k_0} [y_4(\xi - \beta) - y_4(\xi - \gamma)]$
$M(\xi) = 4E I \alpha^2 f_0 y_3(\xi) + 4E I \alpha \varphi_0 y_4(\xi) +$ $+ M_0 y_1(\xi) + \frac{Q_0}{\alpha} y_2(\xi)$	$M y_1(\xi - \beta)$	$-\frac{4PE I \alpha^3}{k_0} y_2(\xi - \beta)$	$-\frac{4qE I \alpha^2}{k_0} y_3(\xi)$	$\beta \leq \xi \leq \gamma \quad -\frac{4q\alpha^2 E I}{k_0} \cdot y_3(\xi - \beta);$ $\gamma \leq \xi \leq \alpha \quad -\frac{q}{\alpha^2} [y_3(\xi - \beta) - y_3(\xi - \gamma)]$
$Q(\xi) = 4E I \alpha^3 f_0 y_2(\xi) + 4E I \alpha^2 \varphi_0 y_3(\xi) -$ $-4\alpha M_0 y_4(\xi) + Q_0 y_1(\xi)$	$-4M\alpha y_4(\xi - \beta)$	$-P y_1(\xi - \beta)$	$-\frac{4qE I \alpha^3}{k_0} y_2(\xi)$	$\beta \leq \xi \leq \gamma \quad -\frac{q}{\alpha} \cdot y_2(\xi - \beta);$ $\gamma \leq \xi \leq \alpha \quad -\frac{q}{\alpha} [y_2(\xi - \beta) - y_2(\xi - \gamma)]$

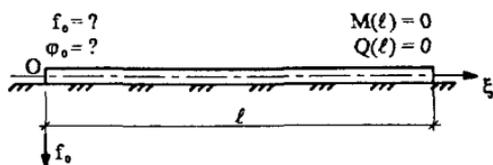


Рисунок 4.3

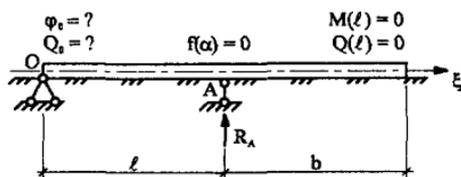


Рисунок 4.4

Рассмотрим балку, свободно лежащую на сплошном упругом основании (рис. 4.3). На левом конце этой балки (в начале координат) изгибающий момент  $M_0$  и поперечная сила  $Q_0$  равны нулю. Если в начале координат были бы приложены сосредоточенные внешний момент  $M$  и сила  $P$ , то в этом случае начальные параметры определялись бы из равенств  $M_0 = \pm M$  и  $Q_0 = P$ .

Таким образом, значения параметров  $M_0$  и  $Q_0$  для заданной балки известны. Значения же параметров  $f_0$  и  $\varphi_0$  неизвестны и зависят от величины внешних сил, жесткости

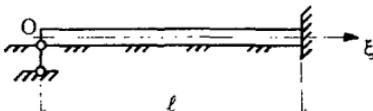
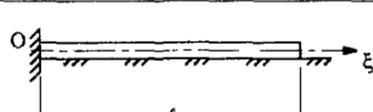
балки  $EI$  и коэффициента постели  $k_0$ . Для их определения следует использовать граничные условия на правом конце балки при  $\xi = \alpha l$ . В рассматриваемом случае  $M_l = 0$  и  $Q_l = 0$ . Эти условия дают возможность составить два линейных уравнения, содержащих неизвестные начальные параметры  $f_0$  и  $\varphi_0$ . Решая эту систему уравнений, получим численные значения величин  $f_0$  и  $\varphi_0$ .

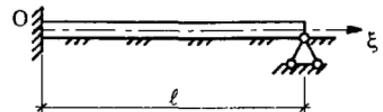
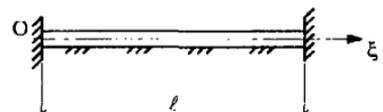
Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения изгиба балки на упругом основании содержит четыре начальных параметра, два из которых всегда заданы. Два других начальных параметра определяются для каждого конкретного случая из двух граничных условий, выражающих условия закрепления балки.

Рассмотри балку на упругом основании, изображенную на рисунке 4.4. Для нее известными начальными параметрами будут  $f_0 = 0$  и  $M_0 = 0$ , а неизвестными –  $\varphi_0$  и  $Q_0$ . Кроме того, неизвестной будет и величина реакции  $R_A$ . Для определения этих неизвестных необходимо составить три уравнения, показывающие, что изгибающий момент и поперечная сила на правом конце балки при  $\xi = \alpha(l + b)$  равны нулю и прогиб на опоре  $A$  также равен нулю.

В таблице 4.4 приводятся различные схемы закрепления балок на упругом основании, соответствующие этим схемам неизвестные начальные параметры и граничные условия для определения этих неизвестных параметров.

Таблица 4.4 – Схемы закрепления балок на упругом основании, соответствующие им неизвестные начальные параметры и граничные условия для их определения

№ № п/п	Заданная балка	Неизвестные начальные параметры	Граничные условия для определения неизвестных пара- метров
1	2	3	4
1		$f_0$ и $\varphi_0$	$M_l = 0,$ $Q_l = 0$
2		$f_0$ и $\varphi_0$	$f_l = 0,$ $M_l = 0$
3		$f_0$ и $\varphi_0$	$f_l = 0,$ $\varphi_l = 0$
4		$Q_0$ и $\varphi_0$	$M_l = 0,$ $Q_l = 0$
5		$\varphi_0$ и $Q_0$	$F_l = 0,$ $M_l = 0$
6		$\varphi_0$ и $Q_0$	$f_l = 0,$ $\varphi_l = 0$
7		$M_0$ и $Q_0$	$M_l = 0,$ $Q_l = 0$

1	2	3	4
8		$M_0$ и $Q_0$	$f_l = 0,$ $M_l = 0$
9		$M_0$ и $Q_0$	$f_l = 0,$ $\varphi_l = 0$

После нахождения неизвестных начальных параметров, используя формулы (4.14)...(4.17) и таблицу 4.3, можно для любого сечения балки определить прогиб, угол поворота, изгибающий момент и перерезывающую силу.

### **Алгоритм расчета балок на упругом основании**

1. Вычисляем основные параметры, характеризующие упругие свойства балки и основания:  $k_0 = k \cdot b$ ;  $I_{\Sigma}; \alpha = \sqrt[4]{k_0 / (4EI)}$ .

4. Разбиваем балку на участки и для каждого участка записываем выражение частного решения  $\Phi(\xi)$  и его производных, пользуясь таблицей 4.3.

3. Используя граничные условия для любого случая закрепления балки на упругом основании (табл. 4.4), определяем два неизвестных начальных параметра.

4. Используя таблицу 4.3, подсчитываем значения функций  $f(\xi)$ ,  $\varphi(\xi)$ ,  $M(\xi)$ ,  $Q(\xi)$  в  $n$  характерных точках балки. Эти вычисления рекомендуется выполнять в табличной форме.

5. Проверяем расчет, используя уравнение равновесия.

### **5 Примеры расчета коротких балок на упругом основании**

**Пример 5.1.** Необходимо построить эпюры прогибов  $f(\xi)$ , углов поворота  $\varphi(\xi)$ , изгибающих моментов  $M(\xi)$  и перерезывающих сил  $Q(\xi)$  для балки, свободно лежащей на упругом основании и нагруженной сосредоточенной силой  $P$  (см. рис. 5.1-а). Исходные данные для расчета:

$c = 2$  м,  $d = 3$  м; поперечное сечение балки прямоугольное  $b \times h = 0,4 \times 0,3$  м;  $E = 10^5$  МПа,  $k = 8 \cdot 10^7$  Н/м<sup>3</sup>,  $P = 100$  кН = 0,1 МН.

**Решение.** 1. Вычисляем основные параметры, характеризующие упругие свойства балки и основания. Погонный коэффициент постели

$$k_0 = k \cdot b = 8 \cdot 10^7 \cdot 0,4 = 3,2 \cdot 10^7 \text{ Па} = 32 \text{ МПа};$$

момент инерции сечения балки

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,4 \cdot 0,3^3}{12} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$$

параметр  $\alpha$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_0}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{32}{4 \cdot 10^5 \cdot 9 \cdot 10^{-4}}} = 0,546 \text{ м}^{-1}.$$

Определяем координаты характерных сечений балки  $\xi = \alpha x$ , расположенных с шагом 1 м:

$$\begin{array}{lll} \xi_0 = 0, & \xi_1 = 0,546, & \xi_2 = 1,092, \\ \xi_3 = 1,638, & \xi_4 = 2,184, & \xi_5 = 2,730. \end{array}$$

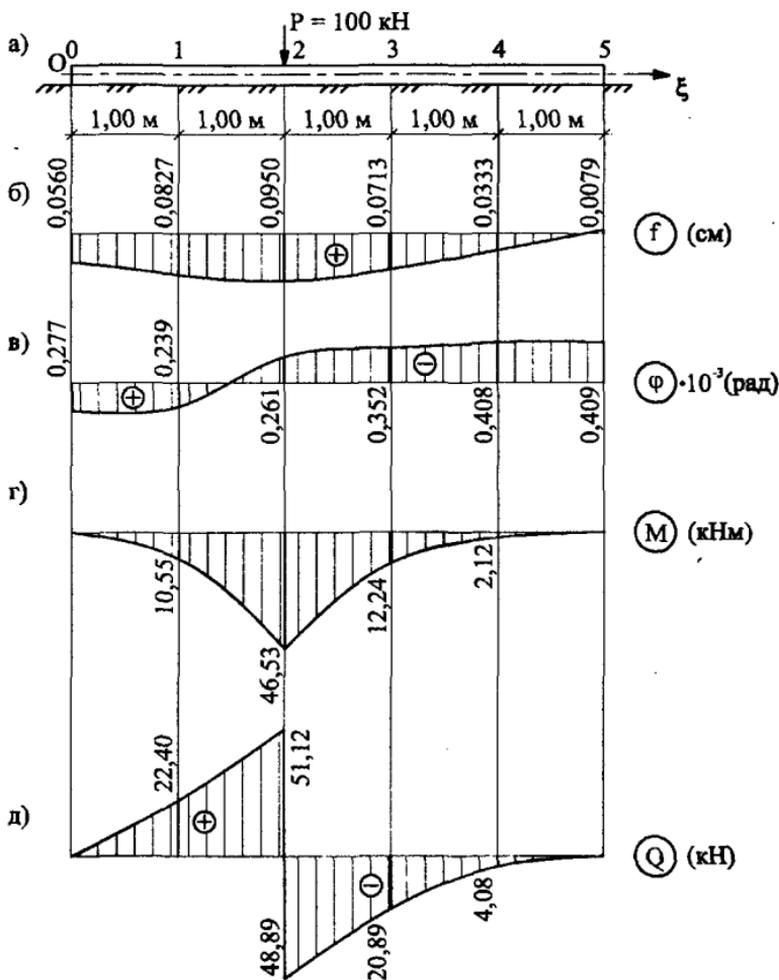
В рассматриваемом примере неизвестными начальными параметрами являются прогиб  $f_0$  и угол поворота  $\varphi_0$  левого конца балки. Из таблицы 4.4 видно, что граничными условиями для определения начальных параметров являются:  $M_l = 0$ ,  $Q_l = 0$ .

2. Пользуясь таблицей 4.3, запишем уравнения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил для первого и второго участков балки, учитывая что  $M_0 = Q_0 = 0$ .

Для первого участка балки ( $0 \leq \xi \leq 1,092$ ):

$$\begin{cases} f(\xi) = f_0 Y_1 + \frac{\varphi_0}{a} Y_2, \\ \varphi(\xi) = -4\alpha f_0 Y_4 + \varphi_0 Y_1, \\ M(\xi) = -4EI\alpha^2 f_0 Y_3 + 4EI\alpha \varphi_0 Y_4, \\ Q(\xi) = 4EI\alpha^3 f_0 Y_3 + 4EI\alpha^2 \varphi_0 Y_3; \end{cases} \quad (5.1)$$

для второго участка балки ( $1,092 \leq \xi \leq 2,730$ ):



**Рисунок 5.1** – Параметры напряженно-деформированного состояния алки

$$\begin{cases} f(\xi) = f_0 Y_1 + \frac{\varphi_0}{\alpha} Y_2 + \frac{4P\alpha}{k_0} Y_4 (\xi - 1,092), \\ \varphi(\xi) = -4\alpha f_0 Y_4 + \varphi_0 Y_1 + \frac{4P\alpha^2}{k_0} Y_3 (\xi - 1,092), \\ M(\xi) = \frac{k_0}{\alpha^2} f_0 Y_3 + \frac{k_0}{\alpha^3} \varphi_0 Y_4 - \frac{P}{\alpha} Y_2 (\xi - 1,092), \\ Q(\xi) = \frac{k_0}{\alpha} f_0 Y_2 + \frac{k_0}{\alpha^2} \varphi_0 Y_3 - P Y_1 (\xi - 1,092). \end{cases} \quad (5.2)$$

Таблица 5.1 – Решение примера 5.1

Участки	Сечения	$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_1(\xi-1,092)$	$Y_2(\xi-1,092)$	$Y_4(\xi-1,092)$
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	0	0	1,000	0	0	0	0	0	-
	1	0,546	0,985	0,548	0,151	0,028	0	0,00	-
	2	1,092	0,766	1,033	0,585	0,214	1	0	-
II	2	1,092	0,766	1,033	0,585	0,214	1	0	0
	3	1,638	-0,185	1,484	1,237	0,710	0,985	0,548	0
	4	2,184	-2,563	0,588	1,791	1,543	0,766	1,033	0,0277
5	2,730	-7,056	-1,958	1,527	2,519	-0,185	1,248	0,2144	
Участки	Сечения	$f_0 Y_{1cm}$	$\varphi/\alpha Y_2$	$4P\alpha/k_0 \times Y_4(\xi-1,092)$	$f(\xi), cm$	$-4\alpha f_0 Y_4$	$\varphi_0 Y_1$	$4P\alpha^2/k_0 \times Y_3(\xi-1,092)$	$\varphi(\xi), рад$
I	2	11	12	13	14	15	16	17	18
I	0	0,0557	0	-	0,0557	0	$0,277 \cdot 10^{-3}$	-	$0,277 \cdot 10^{-3}$
	1	0,0549	0,0278	-	0,0827	$-0,336 \cdot 10^{-4}$	$0,273 \cdot 10^{-3}$	-	$0,239 \cdot 10^{-3}$
	2	0,0426	0,0524	-	0,0950	$-0,262 \cdot 10^{-3}$	$0,212 \cdot 10^{-3}$	-	$-0,261 \cdot 10^{-3}$
3	0,0426	0,0524	-	0,0950	$-0,262 \cdot 10^{-3}$	$0,212 \cdot 10^{-3}$	-	$-0,261 \cdot 10^{-3}$	
II	3	-0,0103	0,0633	0,019	0,0713	$-0,864 \cdot 10^{-3}$	$-0,512 \cdot 10^{-3}$	$0,563 \cdot 10^{-3}$	$-0,352 \cdot 10^{-3}$
	4	-0,1428	0,0298	0,146	0,0333	$-0,188 \cdot 10^{-2}$	$-0,720 \cdot 10^{-3}$	$0,218 \cdot 10^{-2}$	$-0,408 \cdot 10^{-3}$
	5	-0,393	-0,0994	0,484	-0,0079	$-0,306 \cdot 10^{-2}$	$-0,196 \cdot 10^{-2}$	$0,461 \cdot 10^{-3}$	$-0,409 \cdot 10^{-3}$
Участки	Сечения	$\frac{k_0}{\alpha^2} \times f_0 Y_3$	$\frac{k_0}{\alpha^3} \varphi_0 Y_4$	$-P/\alpha \times Y_2(\xi-1,092)$	$M(\xi), кНм$	$\frac{k_0}{\alpha} f_0 Y_2$	$\frac{k_0}{\alpha^2} \varphi_0 Y_3$	$-P \times Y_1(\xi-1,092)$	$Q(\xi), кН$
I	2	19	20	21	21	23	24	25	26
I	0	0	0	0	0	0	0	-	0
	1	9,03	1,52	0,000	10,55	17,90	4,50	-	22,40
	2	34,97	11,66	0	46,53	33,72	17,40	-	51,12
3	34,97	11,66	0	46,53	33,71	17,40	-100	-48,89	
II	3	73,99	38,69	-100,44	12,24	40,76	36,82	-98,47	-20,89
	4	107,17	84,10	-189,15	2,12	19,18	53,29	-76,55	-4,08
	5	91,32	137,20	-228,64	0,000	-63,932	45,45	18,49	0,000

Подставим в уравнения (5.2)  $\xi = \alpha l$  и распишем граничные условия, тогда получим:

$$\begin{cases} M(2,73) = \frac{k_0}{\alpha^2} f_0 \cdot 1,52705 + \frac{k_0}{\alpha^3} \cdot 2,5191 \cdot \varphi_0 - \frac{P}{\alpha} \cdot 1,2484 = 0; \\ Q(2,73) = \frac{k_0}{\alpha^2} f_0 \cdot 1,9581 + \frac{k_0}{\alpha^3} \cdot 1,52705 \cdot \varphi_0 - 0,1849P = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

В этих уравнениях значения гиперболо-тригонометрических функций  $Y_1, Y_2, Y_3$  и  $Y_4$  при соответствующих значениях аргумента взяты по таблицам Приложения 1. Решая эту систему уравнений получим:

$$\frac{k_0}{\alpha} f_0 = 0,3265 \cdot P,$$

$$f_0 = \frac{0,3265 \cdot P \alpha}{k_0} = \frac{0,3265 \cdot 0,1 \cdot 0,546}{32} = 0,000557 \text{ м} = 0,0557 \text{ см};$$

$$\frac{k_0}{\alpha^2} \varphi_0 = 0,2976 \cdot P,$$

$$\varphi_0 = \frac{0,2976 P \alpha^2}{k_0} = \frac{0,2976 \cdot 0,1 \cdot 0,546^2}{32} = 2,772 \cdot 10^4 \text{ рад}.$$

5. По формулам (5.1) и (5.2) для первого и второго участков балки вычисляем значения  $f(\xi)$ ,  $\varphi(\xi)$ ,  $M(\xi)$  и  $Q(\xi)$  для выбранных характерных сечений. Подсчет приведем в табличной форме (см. таблица 5.1). При составлении головки таблиц будет учтено соотношение, вытекающее из выражения

$$\alpha = \sqrt[4]{k_0 / (4EI)}; \quad k_0 = 4EI\alpha^4.$$

По данным таблицы 5.1 строим эпюры прогибов  $f(\xi)$ , углов поворота  $\varphi(\xi)$ , изгибающих моментов  $M(\xi)$  и перерезывающих сил  $Q(\xi)$  для заданной балки (см. рис. 5.2).

**Пример 5.2.** Необходимо построить эпюры прогибов  $f(\xi)$ , углов поворота  $\varphi(\xi)$ , изгибающих моментов  $M(\xi)$  и перерезывающих сил  $Q(\xi)$  для балки на упругом основании с жестко защемленными концами и загруженной сосредоточенным моментом  $M$  (см. рис. 5.2-а). Исходные данные для расчета:  $M = 100 \text{ кНм} = 0,1 \text{ МНм}$ ,  $c = 3 \text{ м}$ ,  $d = 2 \text{ м}$ ; остальные

данные те же, что и в предыдущем примере: поперечное сечение балки прямоугольное  $b \times h = 0,4 \times 0,3$  м;  $E = 10^5$  МПа,  $k = 8 \cdot 10^7$  Н/м<sup>5</sup>.

**Решение.** Все основные параметры, характеризующие упругие свойства балки и основания, возьмем из предыдущего примера, так как они остались неизменными:

$$k_0 = 32 \text{ МПа}; \quad I_x = 9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4; \quad \alpha = 0,546 \text{ м}^{-1}.$$

В заданной балке неизвестными начальными параметрами будут  $M_0, Q_0$ , (см. табл. 4.4), которые можно найти из граничных условий при  $\xi = \alpha \ell$ :

$$f_\ell = 0, \quad \varphi_\ell = 0. \quad (5.4)$$

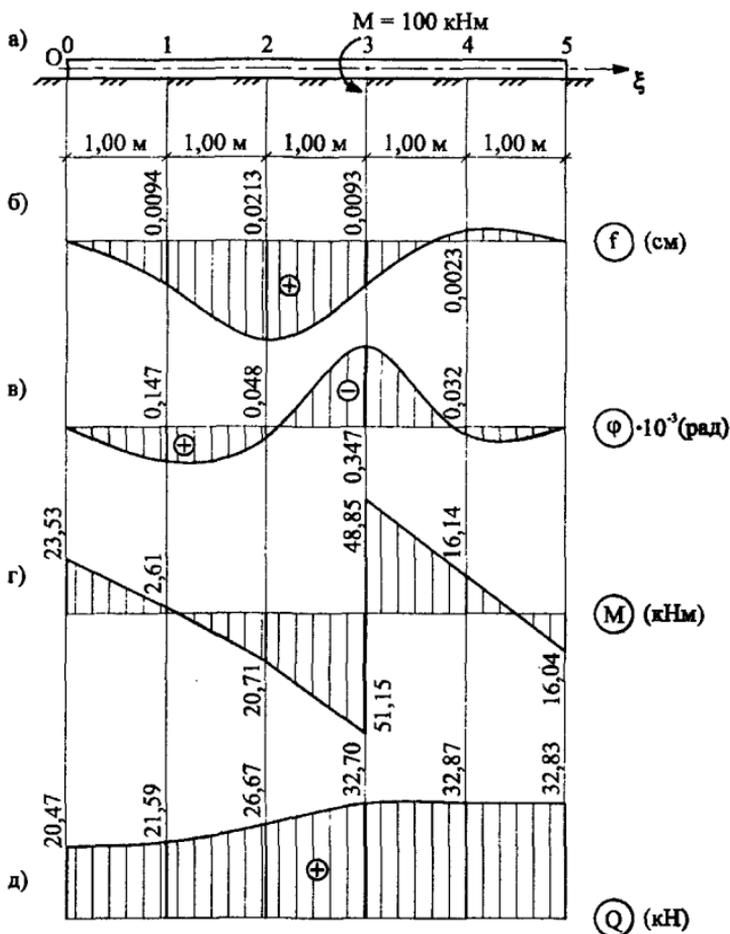
Учитывая (5.4), запишем для первого и второго участков развернутые формулы для определения перемещений (прогибов и углов поворота) и внутренних силовых факторов (изгибающих моментов и перерезывающих сил).

Для первого участка ( $0 \leq \xi \leq 1,638$ ):

$$\begin{cases} f(\xi) = -\frac{4\alpha^2}{k_0} M_0 y_3 - \frac{4\alpha}{k_0} y_4 Q_0, \\ \varphi(\xi) = -\frac{4\alpha^3}{k_0} M_0 y_2 - \frac{4\alpha^2}{k_0} Q_0 y_3, \\ M(\xi) = M_0 y_1 + \frac{Q_0}{\alpha} y_2, \\ Q(\xi) = -4\alpha M_0 y_4 + Q_0 y_1; \end{cases} \quad (5.5)$$

для второго участка ( $1,638 \leq \xi \leq 2,73$ ):

$$\begin{cases} f(\xi) = -\frac{4\alpha^2}{k_0} M_0 y_3 - Q_0 \frac{4\alpha}{k_0} y_4 + \frac{4M\alpha^2}{k_0} y_3 (\xi - 1,638), \\ \varphi(\xi) = -\frac{4\alpha^3}{k_0} M_0 y_2 - \frac{4\alpha^2}{k_0} Q_0 y_3 + \frac{4M\alpha^3}{k_0} y_2 (\xi - 1,638), \\ M(\xi) = M_0 y_1 + \frac{Q_0}{\alpha} y_2 - M y_1 (\xi - 1,638), \\ Q(\xi) = -4\alpha M_0 y_4 + Q_0 y_1 + 4\alpha M y_4 (\xi - 1,638). \end{cases} \quad (5.6)$$



**Рисунок 5.2** – Параметры напряженно-деформированного состояния балки

Используя два первых выражения из (5.6) и граничные условия (5.4), получим:

$$\begin{aligned}
 f(2,73) &= -\frac{4\alpha^2}{32} M_0 y_3 - Q_0 \frac{4\alpha}{k_0} y_4 + \frac{4M\alpha^2}{k_0} y_3(1,092) = \\
 &= -\frac{4 \cdot 0,546^2}{32} M_0 1,527 - \frac{4 \cdot 0,546}{32} Q_0 2,519 - \frac{4 \cdot 0,1 \cdot 0,546^2}{32} 0,585 = 0,
 \end{aligned}$$

Таблица 5.2 – Решение примера 5.2

Участки	Сечения	$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_{11}(\xi-1.638)$	$Y_{12}(\xi-1.638)$	$Y_{13}(\xi-1.638)$	$Y_{14}(\xi-1.638)$
I	2	5	4	5	6	7	8	9	10	11
I	0	0	1	0	0	0	-	-	-	-
	1	0.546	0.9847	0.5484	0.1511	0.0277	-	-	-	-
	2	1.092	0.7655	1.0328	0.5848	0.2144	-	-	-	-
	3	1.638	-0.1849	1.2484	1.2374	0.7099	1	-	-	0
II	3	1.638	-0.1849	1.2484	1.2374	0.7099	1	-	-	0
	4	2.184	-2.5633	0.5876	1.7906	1.5431	0.9847	0.5484	0.1511	0.0277
	5	2.730	-7.0560	-1.9591	1.5271	2.5192	0.7655	1.0328	0.5848	0.2144
Участки	Сечения	$-4\alpha^2/k_0 \times$ $\times M_0 Y_3$	$-4\alpha/k_0 \times$ $\times Q_0 Y_4$	$4\alpha^2 M/k_0 \times$ $\times Y_3(\xi-1.638)$	$f(\xi),$ см	$-4\alpha^3/k_0 \times$ $\times M_0 Y_2$	$-4\alpha^2/k_0 \times$ $\times Q_0 Y_3$	$4\alpha^3 M/k_0 \times$ $\times Y_2(\xi-1.638)$	$\omega(\xi),$ рад	
I	2	12	13	14	15	16	17	18	19	
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	1	0.0133	-0.0039	0	0.0094	$0.262 \cdot 10^{-3}$	$-0.115 \cdot 10^{-3}$	-	$0.147 \cdot 10^{-3}$	
	2	0.0513	-0.030	0	0.0213	$0.494 \cdot 10^{-3}$	$-0.446 \cdot 10^{-3}$	-	$0.048 \cdot 10^{-3}$	
	3	0.109	-0.099	0	0.0932	$0.597 \cdot 10^{-3}$	$-0.944 \cdot 10^{-3}$	-	$-0.347 \cdot 10^{-3}$	
II	3	0.109	-0.099	0	0.0932	$0.597 \cdot 10^{-3}$	$-0.944 \cdot 10^{-3}$	-	$-0.347 \cdot 10^{-3}$	
	4	0.157	-0.216	0.0563	-0.0023	$0.281 \cdot 10^{-3}$	$-1.366 \cdot 10^{-3}$	$1.116 \cdot 10^{-3}$	$-0.032 \cdot 10^{-3}$	
	5	0.134	-0.352	0.218	0.00	$-0.937 \cdot 10^{-3}$	$-1.165 \cdot 10^{-3}$	$2.102 \cdot 10^{-3}$	0.00	

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= -\frac{4\alpha^3}{k_0} M_0 Y_2 - \frac{4\alpha^2}{k_0} Q_0 Y_3 + \frac{4M\alpha^3}{k_0} Y_2(1,092) = \\ &= -\frac{4 \cdot 0,546^3}{32} M_0(-1,958) - \frac{4 \cdot 0,546^2}{32} Q_0 1,527 - \frac{4 \cdot 0,1 \cdot 0,546^3}{32} 1,039 = 0; , \\ &\begin{cases} M_0 + 3,021 \cdot Q_0 = 0,03826 . \\ M_0 - 1,428 \cdot Q_0 = -0,05273 . \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Откуда получим:

$$M_0 = 0,02352 \text{ МНм.} \quad Q_0 = 0,02045 \text{ МН.}$$

По формулам (5.5) и (5.6) для первого и второго участков балки вычисляем значения  $f(\xi)$ ,  $\varphi(\xi)$ ,  $M(\xi)$  и  $Q(\xi)$  для выбранных характерных сечений. Подсчет приведем в табличной форме (см. таблица 5.2).

По данным таблицы 5.2 строим эпюры прогибов  $f(\xi)$ , углов поворота  $\varphi(\xi)$ , изгибающих моментов  $M(\xi)$  и перерезывающих сил  $Q(\xi)$  для заданной балки (см. рис. 5.2).

**Пример 5.3.** Необходимо построить эпюры прогибов  $f(\xi)$ , углов поворота  $\varphi(\xi)$ , изгибающих моментов  $M(\xi)$  и перерезывающих сил  $Q(\xi)$  для балки на упругом основании, изображенной на рисунке 5.3-а. Исходные данные для расчета:  $M = 100 \text{ кНм} = 0,1 \text{ МНм}$ ,  $P = 100 \text{ кН} = 0,1 \text{ МН}$ ,  $q = 20 \text{ кН/м} = 0,02 \text{ МН/м}$ ; остальные данные те же, что и в предыдущих примерах:  $c = 3 \text{ м}$ ,  $d = 3 \text{ м}$ ; поперечное сечение балки прямоугольное  $b \times h = 0,4 \times 0,3 \text{ м}$ ;  $E = 10^5 \text{ МПа}$ ,  $k = 8 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^5$

**Решение.** Все основные параметры, характеризующие упругие свойства балки и основания, возьмем из предыдущих примеров, так как они остались неизменными:

$$k_0 = 32 \text{ МПа}; \quad I_y = 9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4; \quad \alpha = 0,546 \text{ м}^{-1}.$$

Для заданной балки в начале координат  $y_0 = M_0 = 0$ , а неизвестными начальными параметрами будут  $\varphi_0$ ,  $Q_0$  и  $R_3$ , которые можно найти из следующих граничных условий (см. таблицу 4.4):

$$\text{при } \xi = 2,730 \quad \rightarrow \quad M(2,73) = -M, \quad Q(2,73) = P;$$

$$\text{при } \xi = 1,638 \quad \rightarrow \quad f(1,638) = 0.$$

С учетом этих граничных условий, а также данных таблицы 2.3 запишем:

$$M(2,73) = \frac{k_0}{\alpha^3} \varphi_0 Y_4(2,73) + \frac{Q_0}{\alpha} Y_2(2,73) -$$

$$- \frac{q}{\alpha^2} Y_3(2,73) + \frac{R_B}{\alpha} Y_2(1,092) = -M :$$

$$Q(2,73) = \frac{k_0}{a^2} \varphi_0 Y_3(2,73) + Q_0 Y_1(2,73) - \frac{q}{\alpha} Y_2(2,73) + R_B Y_1(1,09) = P ;$$

$$f(1,64) = \frac{\varphi_0}{\alpha} Y_2(1,638) - \frac{4\alpha}{k_0} Q_0 Y_4(1,638) + \frac{q}{k_0} [1 - Y_1(1,638)] = 0.$$

Подставив в эти уравнения значения функций Крылова (см. Приложение 1), получим систему трех алгебраических уравнений, относительно трех неизвестных  $\varphi_0$ ,  $Q_0$ ,  $R_B$ :

$$\begin{cases} 495,22\varphi_0 - 3,586Q_0 - 0,1024 + R_B 1,903 = -0,10, \\ 163,9\varphi_0 - 7,056Q_0 - 0,0717 + R_B 0,766 = 0,10, \\ 2,29\varphi_0 - 0,0485Q_0 + 0,000740 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдем:

$$\varphi_0 = -0,3755 \cdot 10^{-3} \text{ рад}, \quad Q_0 = -0,00247 \text{ МН}, \quad R_B = 0,095 \text{ МН}.$$

С учетом полученных начальных параметров запишем уравнения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил.

$$f(\xi) = 10^{-4} [-6,88 \cdot Y_2(\xi) + 1,686 \cdot Y_4(\xi) + 6,25[1 - Y_1(\xi)] - 6,484 \cdot Y_4(\xi - 1,638)],$$

$$\varphi(\xi) = 10^{-3} [-3,755 Y_1(\xi) + 0,092 \cdot Y_3(\xi) + 1,365 Y_4(\xi) - 3,54 \cdot Y_3(\xi - 1,638)],$$

$$M(\xi) = -0,0738 \cdot Y_4(\xi) - 0,00452 \cdot Y_2(\xi) - 0,06709 \cdot Y_3(\xi) + 0,174 \cdot Y_2(\xi - 1,638)$$

$$Q(\xi) = -0,0403 \cdot Y_3(\xi) - 0,00247 \cdot Y_1(\xi) - 0,0366 \cdot Y_2(\xi) + 0,095 \cdot Y_1(\xi - 1,638).$$

По этим формулам определяем все искомые параметры в харак-

терных сечениях балки (см. табл. 5.3).

По данным таблицы 5.3 строим эпюры прогибов  $f(\xi)$ , углов поворота  $\varphi(\xi)$ , изгибающих моментов  $M(\xi)$  и перерезывающих сил  $Q(\xi)$  для заданной балки (см. рис. 5.3).

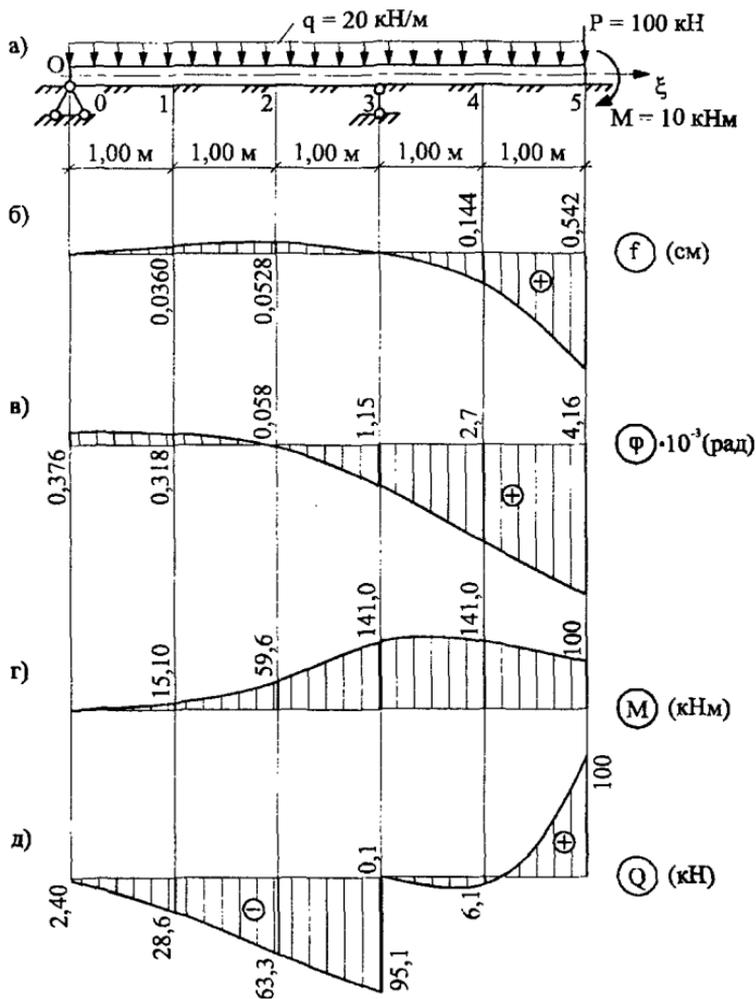


Рисунок 5.3 – Параметры напряженно-деформированного состояния балки

Таблица 5.3 – Решение примера 5.3

Участ- ки	Сече- ния	$\xi$	$Y_1(\xi)$	$Y_2(\xi)$	$Y_3(\xi)$	$Y_4(\xi)$	$Y_1(\xi-1.638)$	$Y_2(\xi-1.638)$	$Y_3(\xi-1.638)$	$Y_4(\xi-1.638)$	1- $Y_1(\xi)$	$-6.88 \cdot 10^{-7} \times$ $\times Y_2(\xi)$	$1.686 \cdot 10^{-2} \times$ $\times Y_4(\xi)$
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	0	0	1	0	0	0	-	-	-	-	0	0	0
	1	0.546	0.985	0.548	0.151	0.028	-	-	-	-	0.019	-0.0377	$0.459 \cdot 10^{-1}$
	2	1.092	0.766	1.033	0.585	0.214	-	-	-	-	0.234	-0.0710	$0.355 \cdot 10^{-1}$
	3	1.638	-0.185	1.248	1.237	0.710	-	-	-	-	1.185	-0.0859	0.0118
II	3	1.638	-0.185	1.248	1.237	0.710	0	0	0	0	1.185	-0.0859	0.0118
	4	2.184	-2.563	0.588	1.791	1.543	0.9808	0.578	0.168	0.032	3.563	-0.040	0.0256
	5	2.730	-7.056	-1.959	1.527	2.519	0.766	1.039	0.585	0.213	8.056	0.135	0.0424
Учас- тки	Сече- ния	$6.825 \cdot 10^{-2} \times$ $\times (1-Y_4(\xi))$	$6.484 \cdot 10^{-2} \times$ $\times Y_4(\xi-1.638)$	$f(\xi)$ , см	$-3.775 \cdot 10^{-3} \times$ $\times Y_1(\xi)$	$9.2 \cdot 10^{-3} \times$ $\times Y_3(\xi)$	$1.365 \cdot 10^{-3} \times$ $\times Y_3(\xi)$	$3.54 \cdot 10^{-3} \times$ $\times Y_3(\xi)$	$\varphi(\xi)$ , рад				
I	2	15	16	17	14	15	16	17	18				
	0	0	-	0	$-0.376 \times 10^{-1}$	0	0	-	$-0.376 \times 10^{-1}$				
	1	$0.957 \times 10^{-1}$	-	-0.036	$-0.370 \times 10^{-1}$	$0.136 \times 10^{-1}$	$0.378 \times 10^{-1}$	-	$-0.318 \times 10^{-1}$				
	2	$0.147 \times 10^{-1}$	-	-0.528	$-0.287 \times 10^{-1}$	$0.528 \times 10^{-1}$	$0.293 \times 10^{-1}$	-	$0.580 \times 10^{-1}$				
	3	0.0741	-	0.00	$0.694 \times 10^{-1}$	$0.112 \times 10^{-1}$	$0.969 \times 10^{-1}$	-	$0.115 \times 10^{-1}$				
II	3	0.0741	-	0.00	$0.694 \times 10^{-1}$	$0.112 \times 10^{-1}$	$0.969 \times 10^{-1}$	-	$0.115 \times 10^{-1}$				
	4	0.160	$-0.180 \times 10^{-1}$	0.144	$0.962 \times 10^{-1}$	$0.162 \times 10^{-1}$	$0.211 \times 10^{-1}$	$-0.535 \times 10^{-1}$	$0.270 \times 10^{-1}$				
	5	0.504	-0.139	0.542	$0.265 \times 10^{-1}$	$0.138 \times 10^{-1}$	$0.344 \times 10^{-1}$	$-0.207 \times 10^{-1}$	$0.416 \times 10^{-1}$				
Учас- тки	Сече- ния	$-0.0738 \times$ $\times Y_1(\xi)$	$-0.00452 \times$ $\times Y_3(\xi)$	$-0.06709 \times$ $\times Y_3(\xi)$	$0.174 \times$ $\times Y_3(\xi-1.638)$	$M(\xi)$ , кНм	$-0.0403 \times$ $\times Y_1(\xi)$	$-0.00247 \times$ $\times Y_1(\xi)$	$-0.0366 \times$ $\times Y_2(\xi)$	$0.095 \times$ $\times Y_1(\xi-1.638)$	$Q(\xi)$ , кНм		
I	2	20	21	22	23	24	25	26	27				
	0	0	0.0	0	-	0	0	-2.4	0	-	-2.4		
I	1	-2.40	-2.57	-10.1	-	-15.1	-6.1	-2.4	-20.1	-	-28.6		
	2	-15.75	-47.0	-39.2	-	-59.6	-23.6	-1.9	-37.8	-	-63.3		
	3	-52.39	-5.65	-83.0	-	-141.0	-49.9	0.5	-45.7	0	-95.1		
II	3	-52.39	-5.65	-83.0	0	-141.0	-49.9	0.5	-45.7	95.0	-0.1		
	4	-113.8	-2.66	-120.1	95.4	-141.1	-72.2	6.2	-21.5	93.5	6.1		
	5	-186.0	8.85	-102.5	179.7	-99.9	-61.5	17.1	71.7	72.7	100.0		

**Пример 5.4.** Необходимо построить эпюры прогибов  $f(\xi)$ , углов поворота  $\varphi(\xi)$ , изгибающих моментов  $M(\xi)$  и перерезывающих сил  $Q(\xi)$  для балки на упругом основании, изображенной на рисунке 5.4. Исходные данные для расчета:  $M = 100 \text{ кНм} = 0,1 \text{ МНм}$ ,  $P = 3000 \text{ кН} = 3,00 \text{ МН}$ ,  $q = 1000 \text{ кН/м} = 1,00 \text{ МН/м}$ ; остальные данные те же, что и в предыдущих примерах:  $s = 1 \text{ м}$ ; поперечное сечение балки прямоугольное  $I = 4 \cdot 10^6 \text{ см}^4 = 0,04 \text{ м}^4$ ;  $E = 0,14 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $k_0 = 14 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3 = 140 \text{ МН/м}^3$

**Решение.** Вычисляем значение параметра  $\alpha$ :

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k_0}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{14 \cdot 10^7}{4 \cdot 0,14 \cdot 10^5 \cdot 0,04}} = 0,5 \text{ м}^{-1}.$$

Для заданной балки в начале координат  $y_0 = \varphi_0 = 0$ , а неизвестными начальными параметрами будут  $M_0$  и  $Q_0$ , которые можно найти из следующих граничных условий (см. таблицу 4.4):

$$\text{при } \xi = 3,0 \quad \rightarrow \quad M(3,0) = 0 \text{ и } Q(3,0) = 0.$$

С учетом этих граничных условий, а также данных таблицы 4.3 запишем

$$\begin{aligned} M(\xi) &= M_0 y_1(\xi) + \frac{Q_0}{\alpha} y_2(\xi) - M y_1(\xi - 1) - \\ &- \frac{q}{\alpha^2} [y_3(\xi - 1,5) - y_3(\xi - 2)] - \frac{P}{\alpha} y_2(\xi - 2,5) = 0, \\ Q(\xi) &= -4M_0 \alpha y_4(\xi) + Q_0 y_1(\xi) + 4M \alpha y_4(\xi - 1) - \\ &- \frac{q}{\alpha} [y_2(\xi - 1,5) - y_2(\xi - 2)] - P y_1(\xi - 2,5) = 0. \end{aligned}$$

После подстановки в эти выражения функций Крылова получим:

$$\begin{aligned} -9,9669M_0 - 8,497Q_0 + 0,15656 - 4 \cdot (1,0620 - 0,4945) \cdot 6 \cdot 0,499 &= 0, \\ -5,6692M_0 - 9,9669Q_0 + 0,2465 - 0,5601 - 2,9685 &= 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$Q_0 = 0,2019 \text{ МН}, \quad M_0 = -0,5432 \text{ МНм}.$$

С учетом полученных начальных параметров запишем уравнения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих

сил:

$$f(\xi) = -\frac{4\alpha^2}{k_0} M_0 y_3(\xi) - \frac{4\alpha}{k_0} Q_0 y_4(\xi) + \frac{4M\alpha^2}{k_0} y_3(\xi - 1,0) + \\ + \frac{q}{k_0} [1 - y_1(\xi - 1,5)] - \frac{q}{k_0} [1 - y_1(\xi - 2,0)] + \frac{4P\alpha}{k_0} y_4(\xi - 2,5),$$

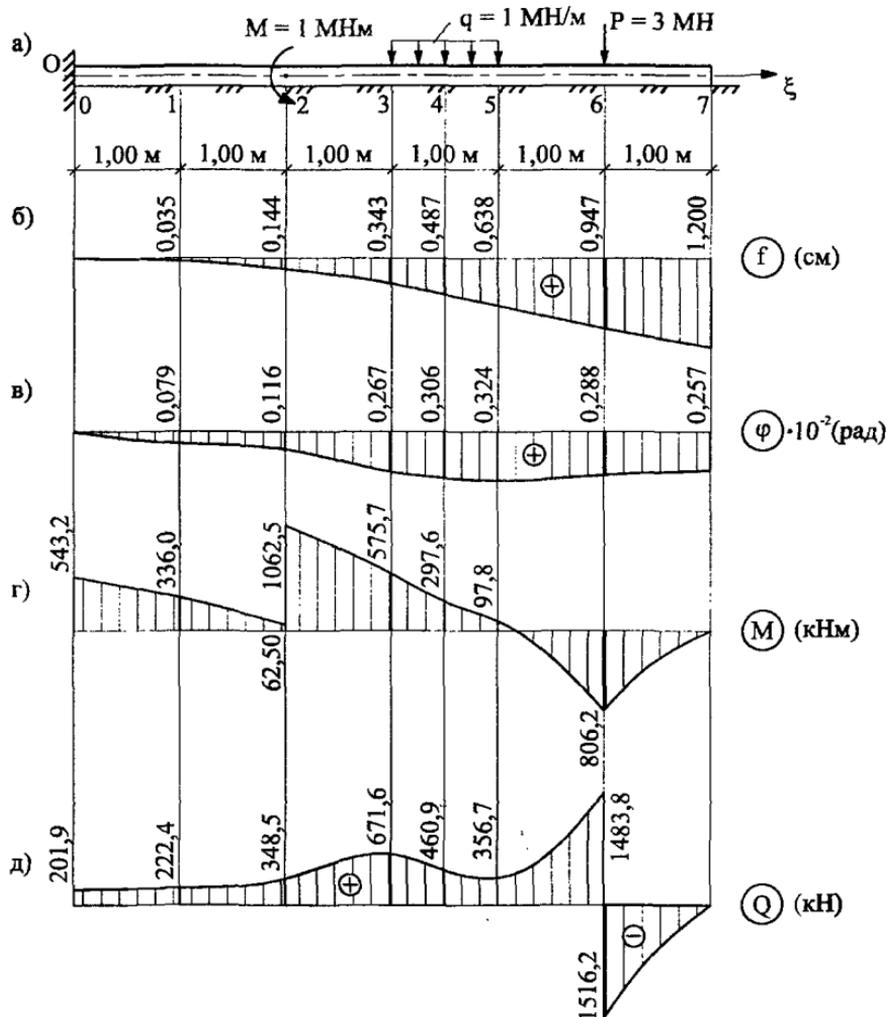


Рисунок 5.4 – Параметры напряженно-деформированного состояния балки

Таблица 5.4 – Решение примера 5.4

Уча- сток	Сече- ние	$\xi$	$Y_1(\xi)$	$Y_1(\xi-1)$	$Y_1(\xi-1.5)$	$Y_1(\xi-2)$	$Y_1(\xi-2.5)$	$Y_2(\xi)$	$Y_2(\xi-1)$	$Y_2(\xi-1.5)$	$Y_2(\xi-2)$	$Y_2(\xi-2.5)$
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
I	0	0	1	-	-	-	-	0	-	-	-	-
	1	0.5	0.9895	-	-	-	-	0.4990	-	-	-	-
	2	1	0.8337	-	-	-	-	0.9668	-	-	-	-
II	2	1	0.8334	1	-	-	-	0.9668	0	-	-	-
	3	1.5	0.1664	0.9993	-	-	-	1.2486	0.4989	-	-	-
III	3	1.5	0.1664	0.9993	1	-	-	1.2486	0.4989	0	-	-
	4	1.75	-0.5284	0.9473	0.9993	-	-	1.2097	0.7421	0.2500	-	-
	5	2	-1.5656	0.8337	0.9895	-	-	0.9558	0.9667	0.4989	-	-
IV	5	2	-1.5656	0.8337	0.9895	1	-	0.9558	0.9667	0.4989	0	-
	6	2.5	-4.9128	0.1664	0.8337	0.9895	-	-0.5885	1.2486	0.9668	0.4990	-
V	6	2.5	-4.9128	0.1664	0.8337	0.9895	1	-0.5885	1.2486	0.9668	0.4990	0
	7	3	-9.9669	-1.5656	0.1664	0.8337	0.9895	-1.2485	0.9558	1.2486	0.9668	0.4990
Уча- сток	Сече- ние	$\xi$	$Y_3(\xi)$	$Y_3(\xi-1)$	$Y_3(\xi-1.5)$	$Y_3(\xi-2)$	$Y_3(\xi-2.5)$	$Y_4(\xi)$	$Y_4(\xi-1)$	$Y_4(\xi-1.5)$	$Y_4(\xi-2)$	$Y_4(\xi-2.5)$
I	2	3	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
I	0	0	0	-	-	-	-	0	-	-	-	-
	1	0.5	0.1249	-	-	-	-	0.0208	-	-	-	-
	2	1	0.4945	-	-	-	-	0.1659	-	-	-	-
II	2	1	0.4945	0	-	-	-	0.1659	0	-	-	-
	3	1.5	1.0620	0.1249	-	-	-	0.5490	0.0208	-	-	-
III	3	1.5	1.0620	0.1249	0	-	-	0.5490	0.0208	0	-	-
	4	1.75	1.3729	0.2802	0.0312	-	-	0.8535	0.0702	0.0026	-	-
	5	2	1.6490	0.4945	0.1249	-	-	1.2325	0.1659	0.0208	-	-
IV	5	2	1.6490	0.4945	0.1249	0	-	1.2325	0.1659	0.0208	0	-
	6	2.5	1.8105	1.0620	0.4945	0.1249	-	2.1293	0.5490	0.1659	0.0208	-
V	6	2.5	1.8105	1.0620	0.4945	0.1249	0	2.1293	0.5490	0.1659	0.0208	0
	7	3	0.7069	1.6490	1.0620	0.4945	0.1249	2.8346	1.2325	0.5490	0.1659	0.0208

Продолжение таблицы 5.4

Учас- ток	Сече- ние	ξ	$-\frac{4\alpha^2}{k_0} \times M_0 Y_3(\xi)$	$-\frac{4\alpha}{k_0} \times Q_0 Y_4(\xi)$	$\frac{4\alpha^2}{k_0} M \times Y_3(\xi - 1)$	$\frac{q}{k_0} \times [1 - Y_1(\xi - 1.5)]$	$\frac{q}{k_0} [Y_4(\xi - 2) - Y_4(\xi - 1.5)]$	$\frac{4\alpha}{k_0} P \times Y_4(\xi - 2.5)$	f(ξ), см												
										1	2	3	24	25	26	27	28	29	30		
										1	1	0.5	0.0425	-0.0075	-	-	-	-	-	0.035	
										2	1	1	0.192	-0.0479	-	-	-	-	-	0.144	
										3	1	1.5	0.412	-0.1584	0.0891	0	-	-	-	0.343	
										4	1.5	1.5	0.412	-0.1584	0.0891	0	-	-	-	0.343	
										5	2	1.75	0.553	-0.2462	0.2002	0.0005	0	-	-	0.487	
6	2	2	0.640	-0.3555	0.3532	0.0075	0	-	-	0.638											
7	2.5	2	0.640	-0.3555	0.3532	0.0075	0	-	-	0.638											
8	2.5	2.5	0.703	-0.6142	0.7586	-	-	-	-	-	0.947										
9	2.5	3	0.274	-0.6142	0.7586	-	-	-	-	-	0.947										
10	3	3	1.179	-0.8176	1.179	-	-	-	-	-	1.200										
Учас- ток	Сече- ние	ξ	$-\frac{4\alpha^3}{k_0} \times M_0 Y_3(\xi)$	$\frac{4\alpha^2}{k_0} \times Q_0 Y_3(\xi)$	$\frac{4\alpha^3}{k_0} M \times Y_2(\xi - 1)$	$\frac{4q\alpha}{k_0} \times Y_4(\xi - 1.5)$	$\frac{4q\alpha}{k_0} [Y_4(\xi - 2) - Y_4(\xi - 1.5)]$	$\frac{4\alpha^2}{k_0} \times P Y_3(\xi - 2.5)$	φ(ξ), рад												
										1	2	3	31	32	33	34	35	36	37		
										1	1	0.5	0.00788	-	-	-	-	-	-	-	0.000788
										2	1	1	0.001876	-0.000713	-	-	-	-	-	-	0.001163
										3	1	1.5	0.001876	-0.000713	0.001782	-	-	-	-	-	0.001163
										4	1.5	1.5	0.002422	-0.001531	0.001782	-	-	-	-	-	0.002673
										5	2	1.75	0.002347	-0.001980	0.002651	0.000038	-	-	-	-	0.002673
6	2	2	0.001854	-0.002378	0.003453	0.000312	-	-	-	-	0.003056										
7	2.5	2	0.001854	-0.002378	0.003453	0.000312	-	-	-	-	0.003241										
8	2.5	2.5	-0.001142	-0.002611	0.004460	-	0.002175	-	-	-	0.002882										
9	2.5	3	-0.001142	-0.002611	0.004460	-	0.002175	-	-	-	0.002882										
10	3	3	-0.008242	-0.001030	0.003414	-	0.005743	-	-	-	0.002677										

1, продолжение таблицы 5.4

Учас-ток	Сече-ние	$\Xi$	$M_0 Y_1(\xi)$	$\frac{Q_0}{\alpha} Y_2(\xi)$	$\cdot M U_1(\xi - 1)$	$-\frac{q}{\alpha^2} Y_3(\xi - 1.5)$	$\frac{q}{\alpha^2} [Y_3(\xi - 2) \cdot Y_3(\xi - 1.5)]$	$\frac{P}{\alpha} Y_2(\xi - 2.5)$	$M(\xi),$ кНм
I	2	3	38	3.9	40	41	42	43	44
	0	0	-543.2	0	-	-	-	-	-543.2
II	1	0.5	-537.5	201.5	-	-	-	-	-336.0
	2	1	-452.9	390.4	-	-	-	-	-62.5
III	2	1	-452.9	390.4	-1000.0	-	-	-	-1062
	3	1.5	-90.4	504.2	-989.5	-	-	-	-575.7
IV	3	1.5	-90.4	504.2	-989.5	-	-	-	-575.7
	4	1.75	287.0	488.5	-947.3	-124.8	-	-	-297.6
V	5	2	850.4	385.1	-833.7	-499.6	0	-	-97.8
	5	2	850.4	385.1	-833.7	-499.6	0	-	-97.8
VI	6	2.5	2688.6	-237.6	-166.4	-	-1478.4	-	806.2
	6	2.5	2688.6	-237.6	-166.4	-	-1478.4	-	549.0
VII	7	3	5414.0	-1705.6	1565.6	-	-2270.0	2994.0	$\approx 0.00$
	7	3	5414.0	-1705.6	1565.6	-	-2270.0	2994.0	$\approx 0.00$
Учас-ток	Сече-ние	$\xi$	$-4M_0 Y_4(\xi)$	$Q_0 Y_1(\xi)$	$4M\alpha Y_4(\xi - 1)$	$-\frac{q}{\alpha} Y_2(\xi - 1.5)$	$\frac{q}{\alpha} [Y_2(\xi - 2) \cdot Y_2(\xi - 1.5)]$	$-P U_1(\xi - 2.5)$	$Q(\xi),$ кН
I	2	3	45	46	47	48	49	50	51
	0	0	0	201.9	-	-	-	-	201.9
II	1	0.5	22.6	199.8	-	-	-	-	222.4
	2	1	180.2	168.3	-	-	-	-	348.5
III	2	1	180.2	168.3	-	-	-	-	348.5
	3	1.5	596.4	33.6	41.6	-	-	-	671.6
IV	3	1.5	596.4	33.6	41.6	-	-	-	671.6
	4	1.75	927.2	-106.7	140.4	-500.0	-	-	460.9
V	5	2	1339.0	-316.1	331.8	-998.0	0	-	356.7
	5	2	1339.0	-316.1	331.8	-998.0	0	-	356.7
VI	6	2.5	2313.2	-991.9	1098.0	-	-935.5	-	1483
	6	2.5	2313.2	-991.9	1098.0	-	-935.5	-	1483
VII	7	3	3079.5	-2012.4	2465.0	-	-963.6	3000.0	-1516
	7	3	3079.5	-2012.4	2465.0	-	-963.6	-2968.5	$\approx 0.0$

$$\varphi(\xi) = -\frac{4\alpha^3}{k_0} M_0 Y_2(\xi) - \frac{4\alpha^2}{k_0} Q_0 Y_3(\xi) + \frac{4M\alpha^3}{k_0} Y_2(\xi - 1.0) + \\ + \frac{4q\alpha}{k_0} Y_4(\xi - 1.5) - \frac{4q\alpha}{k_0} Y_4(\xi - 2.0) + \frac{4P\alpha^2}{k_0} Y_3(\xi - 2.5);$$

$$M(\xi) = M_0 Y_1(\xi) + \frac{Q_0}{\alpha} Y_2(\xi) - M Y_1(\xi - 1.0) - \\ - \frac{q}{\alpha^2} Y_3(\xi - 1.5) + \frac{q}{\alpha^2} Y_3(\xi - 2.0) - \frac{P}{\alpha} Y_2(\xi - 2.5);$$

$$Q(\xi) = -4\alpha M_0 Y_4(\xi) + Q_0 Y_1(\xi) + 4M\alpha Y_4(\xi - 1.0) - \\ - \frac{q}{\alpha^2} Y_2(\xi - 1.5) + \frac{q}{\alpha^2} Y_2(\xi - 2.0) - \frac{P}{\alpha} Y_1(\xi - 2.5).$$

По этим формулам с учетом значений функций Крылова определяем все искомые параметры в характерных сечениях балки (см. табл. 5.4).

По данным таблицы 5.4 строим эпюры прогибов  $f(\xi)$ , углов поворота  $\varphi(\xi)$ , изгибающих моментов  $M(\xi)$  и перерезывающих сил  $Q(\xi)$  для заданной балки (см. рис. 5.4).

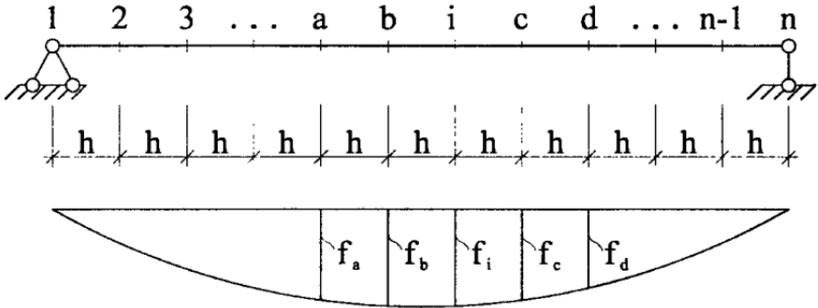
## 6 Решение дифференциального уравнения изгиба балки на упругом основании при помощи конечных разностей

Запишем дифференциальное уравнение изгиба балки:

$$EI \frac{d^4 f}{dx^4} + k_0 f(x) = q(x).$$

Как было показано выше, точное решение этого дифференциального уравнения, при большом количестве нагрузок, действующих на балку, во многих случаях оказывается очень громоздким. В настоящее время для решения этого уравнения часто применяют численный метод – метод конечных разностей. Этот метод позволяет заменить дифференциальное уравнение системой линейных алгебраических уравнений.

Количество уравнений зависит от количества выбранных на балке характерных сечений с неизвестными прогибами. Чем больше назначено характерных сечений, тем выше точность получаемого решения. Однако следует помнить, что при росте количества сечений растет объем вычислений и, соответственно, накапливаются погрешности вычислений.



**Рисунок 6.1** – К расчету балки на упругом основании методом конечных разностей

Рассмотрим деформированную ось балки (рис. 6.1). Нанесем на балку точки через равные промежутки \$h\$ (рис. 6.1). Для записи двух первых производных в центральной точке \$i\$ с координатой \$x\_i\$ через прогибы балки в этой точке и соседних с ней точках \$b\$ и \$c\$ аппроксимируем изогнутую ось балки на участке \$b-i-c\$ параболой второго порядка:

$$f_i = Ax_i^2 + Bx_i + C = 0. \quad (6.1)$$

Найдем первую и вторую производные от этой функции:

$$\frac{df_i}{dx_i} = 2Ax_i + B, \quad (6.2)$$

$$\frac{d^2f_i}{dx_i^2} = 2A. \quad (6.3)$$

С учетом выражения 6.1 найдем значения прогибов в точках \$c\$ (\$f\_c\$) и \$b\$ (\$f\_b\$):

$$\begin{cases} f_c = A(x_i + h)^2 + B(x_i + h) + C = f_i + A(2hx_i + h^2) + Bh, \\ f_b = A(x_i - h)^2 + B(x_i - h) + C = f_i + A(-2hx_i + h^2) - Bh. \end{cases} \quad (6.4)$$

Вычитаем из первого уравнения второе:

$$f_c - f_b = 2h(2Ax_i + B). \quad (6.5)$$

Сравнивая соотношения (6.5) и (6.2), запишем приближенное выражение для первой производной:

$$\frac{df_i}{dx_i} = \frac{f_c - f_b}{2h}. \quad (6.6)$$

Приближенное выражение для второй производной получим путем сложения уравнений (6.4):

$$f_c + f_b = 2f_i + 2Ah^2.$$

Откуда следует:

$$\frac{d^2f_i}{dx_i^2} = \frac{f_c - 2f_i + f_b}{h^2} = 2A. \quad (6.7)$$

Взяв первую производную от второй, с учетом выражения (6.6) найдем третью производную:

$$\frac{d^3f_i}{dx_i^3} = \frac{d}{dx_i} \left( \frac{d^2f_i}{dx_i^2} \right) = \left( \frac{f_c - 2f_i + f_b}{h^2} \right)' = \frac{1}{2h^3} (f_d + 2f_b - 2f_c - f_a). \quad (6.8)$$

Вторая производная от (6.7) дает четвертую производную:

$$\frac{d^4f_i}{dx_i^4} = \frac{d^2}{dx_i^2} \left( \frac{d^2f_i}{dx_i^2} \right) = \left( \frac{f_c - 2f_i + f_b}{h^2} \right)'' = \frac{1}{h^4} [6f_i - 4(f_b + f_c) + f_a + f_d]. \quad (6.9)$$

Заменим дифференциальное уравнение изгиба балки конечно-разностным уравнением:

$$EI \frac{1}{h^4} [6f_i - 4(f_b + f_c) + f_a + f_d] + k_0 f_i = q(x_i),$$

где  $p_i = k_0 f_i$  – интенсивность реакции упругого основания. После несложных преобразований оно приводится к виду:

$$\left(6 + \frac{k_0 h^4}{EI}\right) f_i - 4f_b - 4f_c + f_a + f_d = \frac{q_i h^4}{EI}, \quad (6.10)$$

где  $q_i$  – нагрузка, приходящаяся на сечение  $i$ .

Таким образом, получено уравнение в конечных разностях для балки, лежащей на упругом основании. Оно является каноническим (эталонным) уравнением для всех выбранных характерных сечений и их количество будет равняться числу этих сечений.

К полученным уравнениям добавляются уравнения, учитывающие условия опирания балки (граничные условия). Результатом решения полученной системы уравнений являются прогибы в заданных точках, по которым в дальнейшем можно вычислить углы поворота, изгибающие моменты, поперечные силы и реакции опоры упругого основания.

С учетом дифференциальных соотношений между прогибом, углом поворота сечения, изгибающим моментом и поперечной силой, известных из сопротивления материалов, можно записать формулы для вычисления этих параметров с помощью конечных разностей:

а) для углов поворота

$$\varphi_i = \frac{df_i}{dx_i} = \frac{f_c - f_b}{2h}; \quad (6.11)$$

б) для изгибающих моментов

$$M_i = -EI \frac{d^2 f_i}{dx_i^2} = -EI \frac{f_c - 2f_i + f_b}{h^2}; \quad (6.12)$$

в) для поперечной силы

$$Q_i = -EI \frac{d^3 f_i}{dx_i^3} = -EI \frac{2f_b - 2f_c + f_d - f_a}{2h^3}. \quad (6.13)$$

Уравнение (6.10) требует регулярной схемы выбора сечений в балке. Для каждого сечения с неизвестным прогибом требуется составить уравнение (6.10), в которое входят прогибы четырех прилегающих точек. Прогибы в тех же точках нужны и для определения внутренних усилий по формулам (6.11)...(6.13).

Для крайнего и соседнего с ним сечений балки при записи уравнений (6.10) требуется использование перемещений соответственно в двух и одной законтурных точках слева и справа от крайних сечений. Эти законтурные точки получают мысленно, продолжая балку за ее пределы на расстояние  $2h$  влево и вправо от крайних сечений. Перемещения в законтурных точках определяются с учетом граничных условий на концах балки.

Рассмотрим три основных случая опирания балки:

**1. Свободный край.** На свободном крае

$$M(x_i) = 0; \quad Q(x_i) = q_i h. \quad (6.14)$$

Из первого граничного условия с учетом (6.12) имеем:

$$f_c - 2f_i + f_b = 0. \quad (6.15)$$

Поперечная сила равна нагрузке, прикладываемой в контурные точки. Из второго граничного условия (6.14) с учетом (6.13) следует:

$$Q_i = -EI \cdot \frac{2f_b - 2f_c + f_d - f_a}{2h^3} = q_i h.$$

После преобразований получаем:

$$-(2f_a - 2f_c + f_d - f_b) = \frac{2q_i h^4}{EI}. \quad (6.16)$$

**2. Шарнирно опертый край.** Для шарнирно опертого края

$$f_i = 0; \quad M = 0. \quad (6.17)$$

Учитывая выражение (6.12) и граничные условия (6.17), будем иметь

$$f_c + f_b = 0, \quad \text{или} \quad f_c = -f_b. \quad (6.18)$$

Для определения поперечной силы в крайнем сечении балки по выражению (6.14) необходимо знать прогиб во второй законтурной точке. Его также можно найти по формуле (6.13), используя шаг разбиения балки  $2h$ :

$$M_i = -EI \frac{f_d - 2f_i + f_a}{(2h)^2} = 0.$$

Откуда

$$f_d + f_a = 0, \quad \text{или} \quad f_d = -f_a. \quad (6.19)$$

Значение поперечной силы на опоре приближенно можно находить через поперечную силу в ближайшей приконтурной точке с добавлением нагрузки на участке между этой точкой и опорой, а опорную реакцию – через поперечную силу на опоре с добавлением нагрузки, приложенной в контурной точке.

**3. Жестко защемленный край.** На жестко защемленном крае

$$f_i = 0; \quad \varphi_i = 0. \quad (6.20)$$

Используя второе граничное условие, из выражение (6.11) получим:

$$\varphi_i = \frac{f_c - f_b}{2h} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_c = f_b. \quad (6.21)$$

Аналогично при шаге разбиения  $2h$  будем иметь:

$$\varphi_i = \frac{f_d - f_a}{2(2h)} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_d = f_a. \quad (6.22)$$

Изложенный выше конечно-разностный метод расчета балки на упругом основании удобно решать с использованием ЭВМ.

### **Алгоритм расчета балки на упругом основании с использованием конечно-разностного метода**

1. Разбиваем балку на  $n$  равных участков с шагом  $h$  и нумеруем выделенные сечения.

2. Подсчитываем узловые нагрузки  $q_i$ , приходящиеся на каждое намеченное сечение балки.

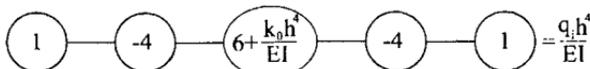
3. Составляем уравнения (6.10) для каждого сечения балки, используя трафарет, изображенный на рисунке 6.2.а.

4. Решаем систему  $n$  алгебраических уравнений и определяем прогибы  $f_i$  во всех намеченных сечениях.

5. Используя уравнения в конечных разностях (6.12)...(6.14), подсчитываем значения углов поворота  $\varphi_i$ , изгибающих моментов  $M_i$  и поперечных сил  $Q_i$ , используя трафареты, приведенные на рисунке 6.2, схемы б), в) и г).

6. По полученным данным строим эпюры  $f_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $M_i$  и  $Q_i$ .

### Каноническое уравнение в конечных разностях

а) 

### Угловые перемещения и усилия

б)  $\varphi_i = \frac{1}{2h} \cdot \left( \begin{array}{c} (-1) \text{---} 0 \text{---} 1 \end{array} \right)$

в)  $M_i = -\frac{EI}{h^2} \cdot \left( \begin{array}{c} 1 \text{---} -2 \text{---} 1 \end{array} \right)$

г)  $Q_i = -\frac{EI}{2h} \cdot \left( \begin{array}{c} (-1) \text{---} 2 \text{---} 0 \text{---} -2 \text{---} 1 \end{array} \right)$

**Рисунок 6.2** — Графарты для подсчета параметров напряженно-деформированного состояния балки на упругом основании

При вычислении параметров напряженно-деформированного состояния балки по найденным значениям прогибов  $f_i$  удобно пользоваться вспомогательными шаблонами, которые представлены на рисунке 6.2. Эти шаблоны средним кругом необходимо мысленно наложить на сечение, в котором отыскивается тот или иной параметр, а числа и выражения, стоящие в кружках, следует умножить на соответствующие прогибы балки в накрываемых шаблоном сечениях.

### Литература

1. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.Л. Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1973.
2. Клепиков С.Н. Расчет конструкций на упругом основании. – Киев: Будівельник, 1967.
3. Симвулиди И.Д. Расчет инженерных конструкций на упругом основании. – М.: Высшая школа, 1973.
4. Коробко В.И., Коробко Л.В. Строительная механика стержневых систем. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 510 с.

### Задания к расчетно-графической работе

Для балки, изображенной на рисунке П.3, с принятыми по таблице исходными данными требуется построить эпюры прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил.

Исходные данные выбираются по трем последним цифрам номера зачетной книжки следующим образом: по последней цифре – номер варианта и геометрические размеры балки; по сумме двух последних цифр – внешние нагрузки; по сумме трех цифр – сечения, где приложены нагрузки, и физико-механические параметры балки и основания. Например, три последние цифры в номере зачетной книжки 345, тогда: вариант задания и геометрические размеры выбираются по цифре 5; внешние нагрузки – по цифре 9 ( $4 + 5 = 9$ ); сечения, где приложены нагрузки, и физические параметры балки – по цифре 3 ( $3 + 4 + 5 = 12 = 1 + 2 = 3$ ).

Таблица – **Исходные данные для расчета балки на упругом основании**

№№ варианта	Геометрические размеры				Внешние нагрузки			Сечения, где приложены внешние нагрузки			Физические параметры балки и основания		
	<b>1</b>				<b>2</b>			<b>3</b>			<b>4</b>		
	а, м	б, м	с, м	д, м	q, кН/м	P, кН	M, кНм	M	P	q	k <sub>0</sub> , МПа	E, МПа	I, м <sup>4</sup>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>
1	1	2	3	4	0,20	0,10	0,25	0	1	1-3	30	10 <sup>5</sup>	10 <sup>-3</sup>
2	1	1	3	3	0,10	0,15	0,12	0	3	0-3	40	2·10 <sup>5</sup>	2·10 <sup>-3</sup>
3	2	1	3	4	0,15	0,25	0,18	1	3	0-2	50	1,5·10 <sup>5</sup>	3·10 <sup>-3</sup>
4	2	2	3	1	0,25	0,12	0,22	3	4	0-3	60	2,2·10 <sup>5</sup>	4·10 <sup>-3</sup>
5	3	1	2	2	0,12	0,18	0,20	2	3	1-3	70	3·10 <sup>5</sup>	5·10 <sup>-3</sup>
6	3	2	3	3	0,18	0,22	0,16	0	3	1-4	60	2,5·10 <sup>5</sup>	4·10 <sup>-3</sup>
7	2	3	1	1	0,22	0,20	0,18	1	2	2-4	50	3·10 <sup>5</sup>	3·10 <sup>-3</sup>
8	1	3	4	4	0,20	0,16	0,20	2	1	0-3	40	2,4·10 <sup>5</sup>	4·10 <sup>-3</sup>
9	2	2	3	3	<b>0,16</b>	<b>0,18</b>	<b>0,20</b>	3	2	1-3	30	1,8·10 <sup>5</sup>	10 <sup>-3</sup>
0	2	1	1	2	0,18	0,20	0,18	0	4	1-4	40	1,2·10 <sup>5</sup>	2·10 <sup>-3</sup>

**Примечание.** Если сосредоточенный момент попадет на жестко защемленную опору, а сосредоточенная сила на жестко защемленную концевую опору или промежуточную опору, то их следует перенести в ближайшее характерное сечение балки.

Таблица П.1 – Варианты заданий

<p>①</p> <p><math>M = 0,25 \text{ кНм}</math>   <math>P = 0,1 \text{ кН}</math>   <math>q = 0,20 \text{ кН/м}</math></p> <p><math>a = 1 \text{ м}</math>   <math>b = 2 \text{ м}</math>   <math>c = 3 \text{ м}</math>   <math>d = 4 \text{ м}</math></p>	<p>⑥</p>
<p>②</p>	<p>⑦</p>
<p>③</p>	<p>⑧</p>
<p>④</p>	<p>⑨</p>
<p>⑤</p>	<p>⑩</p>

Таблицы гиперболо-круговых функций  
(функций Крылова)

$$Y_1 = \cosh \xi \cdot \cos \xi ; \quad Y_2 = \frac{1}{2} (\cosh \xi \sin \xi + \sinh \xi \cos \xi) ;$$

$$Y_3 = \frac{1}{2} \sinh \xi + \sin \xi ; \quad Y_4 = \frac{1}{4} (\cosh \xi \sin \xi - \sinh \xi \cos \xi) .$$

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
0	1	0	0	0
0,001	1,00000	0,00100	0,00000	0,00000
0,002	1,00000	0,00200	0,00000	0,00000
0,003	1,00000	0,00300	0,000005	0,00000
0,004	1,00000	0,00400	0,00001	0,00000
0,005	1,00000	0,00500	0,000015	0,00000
0,006	1,00000	0,00600	0,00002	0,00000
0,007	1,00000	0,00700	0,000025	0,00000
0,008	1,00000	0,00800	0,00003	0,00000
0,009	1,00000	0,00900	0,00004	0,00000
0,010	1,00000	0,01000	0,00005	0,00000
0,011	1,00000	0,01100	0,00006	0,00000
0,012	1,00000	0,01200	0,00007	0,00000
0,013	1,00000	0,01300	0,00085	0,00000
0,014	1,00000	0,01400	0,00010	0,00000
0,015	1,00000	0,01500	0,000115	0,00000
0,016	1,00000	0,01600	0,00013	0,00000
0,017	1,00000	0,01700	0,000145	0,00000
0,018	1,00000	0,01800	0,00016	0,00000
0,019	1,00000	0,01900	0,00018	0,00000
0,020	1,00000	0,02000	0,00020	0,00000
0,03	1,0000	0,0300	0,00045	0,000005
0,04	1,0000	0,0400	0,00050	0,00001
0,05	1,0000	0,0500	0,00125	0,00000
0,06	1,0000	0,0600	0,0018	0,00005
0,07	1,0000	0,0700	0,00245	0,00005
0,08	1,0000	0,0800	0,0032	0,0001
0,09	1,0000	0,06995	0,00405	0,0001
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,00015

$\xi$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
0.11	1.0000	0.1100	0.00609	0.0002
0.12	1.0000	0.1200	0.0072	0.0003
0.13	0.9999	0.1300	0.00845	0.00035
0.14	0.9999	0.1400	0.0098	0.00045
0.15	0.9999	0.1500	0.01125	0.00055
0.16	0.9999	0.1600	0.0128	0.0007
0.17	0.9999	0.1700	0.01445	0.0008
0.18	0.9998	0.17995	0.0162	0.0010
0.19	0.9998	0.1900	0.01805	0.00115
0.20	0.9997	0.2000	0.0200	0.00135
0.21	0.9997	0.2100	0.02205	0.00155
0.22	0.9996	0.21995	0.0242	0.0018
0.23	0.9995	0.22995	0.02645	0.0020
0.24	0.9995	0.2400	0.0288	0.0023
0.25	0.9993	0.2500	0.03125	0.0026
0.26	0.9992	0.25995	0.0338	0.0029
0.27	0.9991	0.26995	0.03645	0.0033
0.28	0.9990	0.27995	0.0392	0.0037
0.29	0.9988	0.28995	0.04205	0.0041
0.30	0.9987	0.2999	0.0450	0.0045
0.31	0.9985	0.3099	0.04805	0.00495
0.32	0.9983	0.3199	0.0512	0.00550
0.33	0.9980	0.32985	0.0545	0.0060
0.34	0.9978	0.33985	0.0578	0.0066
0.35	0.9975	0.3498	0.06125	0.00715
0.36	0.9972	0.3598	0.0648	0.00775
0.37	0.9969	0.3698	0.06845	0.00845
0.38	0.9965	0.3797	0.0722	0.00915
0.39	0.9961	0.3897	0.07605	0.0099
0.40	0.9957	0.39965	0.0800	0.0107
0.41	0.9953	0.4096	0.0840	0.0115
0.42	0.9948	0.4196	0.08815	0.01235
0.43	0.9943	0.4295	0.0924	0.01325
0.44	0.9938	0.43945	0.09675	0.0142
0.45	0.9932	0.4494	0.1012	0.0152
0.46	0.9925	0.45935	0.10575	0.0162
0.47	0.9919	0.4693	0.1104	0.0173
0.48	0.9911	0.4792	0.11515	0.0184
0.49	0.9904	0.4891	0.11995	0.0196
0.50	0.9895	0.49895	0.1249	0.0208

$\xi$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
0.51	0.9887	0.50885	0.12595	0.0221
0.52	0.9878	0.51875	0.1351	0.0234
0.53	0.9869	0.5286	0.14035	0.0248
0.54	0.9858	0.5385	0.14507	0.0262
0.55	0.9847	0.54835	0.1511	0.0277
0.56	0.9836	0.5582	0.15665	0.02925
0.57	0.9824	0.5680	0.16225	0.03085
0.58	0.9811	0.5778	0.1680	0.0325
0.59	0.9798	0.5876	0.1738	0.342
0.60	0.9784	0.5974	0.17975	0.0360
0.61	0.9769	0.6072	0.18575	0.0378
0.62	0.9754	0.61695	0.1919	0.0397
0.63	0.9738	0.6267	0.1981	0.04165
0.64	0.9721	0.6364	0.2044	0.04365
0.65	0.9703	0.64615	0.21085	0.0457
0.66	0.9684	0.65585	0.21735	0.0479
0.67	0.9664	0.6655	0.22395	0.0501
0.68	0.9644	0.67515	0.23063	0.0524
0.69	0.9623	0.6848	0.23745	0.0547
0.70	0.9600	0.6944	0.24435	0.0571
0.71	0.9577	0.70395	0.25135	0.0596
0.72	0.9552	0.71355	0.2584	0.0621
0.73	0.9527	0.7231	0.2656	0.06475
0.74	0.9501	0.7326	0.2729	0.06745
0.75	0.9473	0.7421	0.28025	0.0702
0.76	0.9444	0.7516	0.28775	0.0730
0.77	0.9415	0.7610	0.2953	0.07595
0.78	0.9384	0.7704	0.30295	0.07895
0.79	0.9351	0.77975	0.3107	0.0820
0.80	0.9318	0.7891	0.31855	0.08515
0.81	0.9283	0.7984	0.3265	0.0884
0.82	0.9247	0.8077	0.3345	0.0917
0.83	0.9210	0.8169	0.34265	0.0951
0.84	0.9171	0.82615	0.35085	0.09855
0.85	0.9131	0.8352	0.35915	0.1021
0.86	0.9090	0.84435	0.36755	0.1057
0.87	0.9047	0.8534	0.37605	0.1095
0.88	0.9002	0.8624	0.3846	0.1133
0.89	0.8956	0.8714	0.3933	0.1172
0.90	0.8931	0.88035	0.40205	0.1211

$\xi$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
0.91	0.8859	0.88925	0.4109	0.1252
0.92	0.8808	0.89805	0.41985	0.1293
0.93	0.8753	0.90685	0.42885	0.1336
0.94	0.8701	0.91595	0.43795	0.1379
0.95	0.8645	0.9242	0.44715	0.1424
0.96	0.8587	0.93285	0.45645	0.1469
0.97	0.8528	0.94145	0.46585	0.1515
0.98	0.8466	0.9499	0.4753	0.1562
0.99	0.8339	0.9586	0.48485	0.1611
1.00	0.8337	0.96675	0.49445	0.1659
1.01	0.8270	0.9750	0.50442	0.17085
1.02	0.8201	0.98325	0.51395	0.1760
1.03	0.8129	0.9914	0.5238	0.18115
1.04	0.8056	0.9995	0.53375	0.18645
1.05	0.7980	1.00755	0.5438	0.1918
1.06	0.7902	1.01545	0.55395	0.1973
1.07	0.7822	1.0233	0.5641	0.2029
1.08	0.7740	1.0311	0.5744	0.2086
1.09	0.7655	1.0388	0.58475	0.2144
1.10	0.7568	1.04645	0.59515	0.2203
1.11	0.7479	1.05392	0.60565	0.2263
1.12	0.7387	1.0613	0.61625	0.23235
1.13	0.7293	1.0687	0.6269	0.2386
1.14	0.7196	1.07595	0.6376	0.2449
1.15	0.7097	1.0831	0.6484	0.25135
1.16	0.6995	1.09015	0.6593	0.2579
1.17	0.6891	1.0971	0.6702	0.26459
1.18	0.6784	1.10395	0.68125	0.2713
1.19	0.6674	1.11065	0.6923	0.2782
1.20	0.6561	1.1173	0.70345	0.28515
1.21	0.6446	1.1238	0.7146	0.29225
1.22	0.6330	1.1306	0.7259	0.29965
1.23	0.6206	1.13645	0.7372	0.3068
1.24	0.6082	1.1426	0.7487	0.3142
1.25	0.5955	1.1486	0.7601	0.32175
1.26	0.5824	1.1545	0.7716	0.3294
1.27	0.5691	1.1602	0.7832	0.3372
1.28	0.5555	1.1659	0.7948	0.34505
1.29	0.5415	1.17135	0.8065	0.3531
1.30	0.5272	1.1767	0.81825	0.3612

$\xi$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
1.31	0,5126	1,1819	0,83005	0,3694
1.32	0,4977	1,1870	0,8419	0,3778
1.33	0,4824	1,19185	0,8538	0,3663
1.34	0,4668	1,1966	0,8657	0,3949
1.35	0,4508	1,2012	0,8777	0,4036
1.36	0,4345	1,20565	0,88975	0,4124
1.37	0,4178	1,20985	0,9018	0,4214
1.38	0,4008	1,21395	0,91395	0,4305
1.39	0,3833	1,2179	0,9261	0,43965
1.40	0,3656	1,22165	0,9383	0,4490
1.41	0,3474	1,2252	0,95055	0,45845
1.42	0,3289	1,2286	0,9628	0,4680
1.43	0,3100	1,2317	0,9751	0,4777
1.44	0,2907	1,2348	0,98645	0,4875
1.45	0,2710	1,2375	0,9998	0,4974
1.46	0,2509	1,2402	1,0122	0,5075
1.47	0,2304	1,2426	1,0246	0,51765
1.48	0,2095	1,2448	1,03705	0,5280
1.49	0,1882	1,2468	1,0495	0,5384
1.50	0,1664	1,2485	1,06195	0,5490
1.51	0,1442	1,2501	1,07445	0,55965
1.52	0,1216	1,25145	1,0870	0,5705
1.53	0,0986	1,2526	1,0995	0,5814
1.54	0,0746	1,2534	1,11205	0,59245
1.55	0,0512	1,25405	1,12405	0,6036
1.56	0,0268	1,25445	1,1371	0,6149
1.57	0,0020	1,2546	1,14965	0,6264
$\pi/2$	0	1,2546	1,15065	0,6273
1.58	-0,0233	1,2545	1,1622	0,63795
1.59	-0,0490	1,25415	1,17475	0,6496
1.60	-0,0753	1,2535	1,18725	0,66145
1.61	-0,1019	1,2526	1,1998	0,67335
1.62	-0,1291	1,25145	1,21235	0,6854
1.63	-0,1568	1,25005	1,22485	0,6976
1.64	-0,1849	1,24835	1,23735	0,7099
1.65	-0,2136	1,24635	1,2498	0,7224
1.66	-0,2427	1,24405	1,26225	0,7349
1.67	-0,2724	1,2415	1,2747	0,7476
1.68	-0,3026	1,2386	1,2871	0,7604
1.69	-0,3332	1,2354	1,29945	0,7734
1.70	-0,3644	1,2322	1,3118	0,7863

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
1.71	-0.3961	1.22815	1.3241	0.7996
1.72	-0.4284	1.2240	1.33635	0.8129
1.73	-0.4612	1.2195	1.34855	0.8263
1.74	-0.4945	1.2148	1.36075	0.83985
1.75	-0.5284	1.20965	1.3729	0.8535
1.76	-0.5628	1.2042	1.38495	0.8673
1.77	-0.5977	1.1984	1.3970	0.8812
1.78	-0.6333	1.1923	1.4089	0.89525
1.79	-0.6694	1.1857	1.4208	0.9094
1.80	-0.7060	1.17885	1.4326	0.9237
1.81	-0.7433	1.1716	1.44435	0.93805
1.82	-0.7811	1.1640	1.45605	0.95255
1.83	-0.8195	1.1560	1.46765	0.96715
1.84	-0.8584	1.1476	1.47915	0.9819
1.85	-0.8980	1.13885	1.4906	0.9968
1.86	-0.9382	1.12965	1.50195	1.0117
1.87	-0.9790	1.12005	1.5132	1.0268
1.88	-1.0203	1.11005	1.52435	1.0420
1.89	-1.0623	1.09965	1.5354	1.0573
1.90	-1.1049	1.0888	1.54635	1.0727
1.91	-1.1481	1.07755	1.55715	1.0882
1.92	-1.1920	1.06585	1.5679	1.1038
1.93	-1.2364	1.05375	1.5785	1.1196
1.94	-1.2815	1.0411	1.58895	1.1354
1.95	-1.3273	1.0281	1.5993	1.15135
1.96	-1.3736	1.01455	1.6095	1.1674
1.97	-1.4207	1.00065	1.6196	1.1835
1.98	-1.4683	0.98615	1.62955	1.1998
1.99	-1.5166	0.97125	1.6393	1.2161
2.00	-1.5656	0.95575	1.64895	1.2325
2.01	-1.6153	0.9399	1.6584	1.2421
2.02	-1.6656	0.9235	1.66775	1.2575
2.03	-1.7165	0.9066	1.6769	1.28245
2.04	-1.7682	0.88915	1.6859	1.2993
2.05	-1.8205	0.87125	1.69465	1.3162
2.06	-1.8734	0.8528	1.7033	1.3332
2.07	-1.9271	0.83375	1.7117	1.3502
2.08	-1.9815	0.8142	1.71995	1.3674
2.09	-2.0365	0.7939	1.7280	1.3845
2.10	-2.0923	0.7735	1.73585	1.4020

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
2.11	-2.1487	0.7523	1.7435	1.41935
2.12	-2.2058	0.73055	1.7509	1.4368
2.13	-2.2636	0.700815	1.7581	1.4544
2.14	-2.3221	0.68525	1.76505	1.4720
2.15	-2.3814	0.66175	1.7718	1.4897
2.16	-2.4413	0.6376	1.7783	1.5074
2.17	-2.5020	0.6129	1.78455	1.52525
2.18	-2.5633	0.5876	1.79055	1.5431
2.19	-2.6254	0.5616	1.7963	1.56105
2.20	-2.6882	0.5351	1.8018	1.57905
2.21	-2.7518	0.50785	1.8070	1.5971
2.22	-2.8160	0.48005	1.81195	1.6152
2.23	-2.9810	0.45115	1.8166	1.6333
2.24	-2.9466	0.4224	1.82095	1.6515
2.25	-3.0131	0.3926	1.82505	1.66975
2.26	-3.0802	0.3621	1.8288	1.6880
2.27	-3.1481	0.3310	1.83225	1.7063
2.28	-3.2167	0.2992	1.83545	1.7247
2.29	-3.2861	0.26665	1.83825	1.7430
2.30	-3.3562	0.23345	1.84075	1.7614
2.31	-3.4270	0.19955	1.84295	1.7798
2.32	-3.4986	0.16485	1.84475	1.7983
2.33	-3.5708	0.12955	1.8462	1.8167
2.34	-3.6439	0.0935	1.8473	1.8352
2.35	-3.7177	0.05655	1.8481	1.85365
2.36	-3.7922	0.0191	1.84845	1.87215
2.37	-3.8675	0.01915	1.8485	1.8905
2.38	-3.9435	0.05825	1.84805	1.9091
2.39	-4.0202	0.09805	1.8473	1.9276
2.40	-4.0976	-0.1386	1.8461	1.94605
2.41	-4.1756	-0.17995	1.84455	1.9645
2.42	-4.2548	-0.2221	1.8425	1.98295
2.43	-4.3345	-0.2651	1.8401	2.00135
2.44	-4.4150	-0.30885	1.83725	2.0198
2.45	-4.4961	-0.3534	1.8339	2.0381
2.46	-4.5780	-0.39875	1.83015	2.0564
2.47	-4.6606	-0.44495	1.8259	2.0747
2.48	-4.7439	-0.4920	1.82125	2.09295
2.49	-4.8280	-0.53985	1.81605	2.1111
2.50	-4.9128	-0.5885	1.8105	2.12925

$\xi$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
2.51	-4.9984	-0.6381	1.8043	2.14735
2.52	-5.0846	-0.6885	1.79765	2.16535
2.53	-5.1716	-0.7398	1.79055	23.1833
2.54	-5.2593	-0.79195	1.7829	2.2012
2.55	-5.3477	-0.8450	1.7747	2.21895
2.56	-5.4368	-0.8989	1.7660	2.23665
2.57	-5.5266	-0.95375	1.7567	2.5443
2.58	-5.6172	-1.00945	1.7469	2.2718
2.59	-5.7084	-1.0661	1.7365	2.2892
2.60	-5.8003	-1.1236	1.72555	2.3065
2.61	-5.8929	-1.18205	1.71405	2.3237
2.62	-5.9862	-1.2415	1.7019	2.3408
2.63	-6.0803	-1.3018	1.6892	2.35755
2.64	-6.1748	-1.36305	1.6759	2.3746
2.65	-6.2701	-1.4253	1.66195	2.39125
2.66	-6.3661	-1.48845	1.64735	2.4078
2.67	-6.4628	1.55265	1.6322	2.4242
2.68	-6.5600	-1.6177	1.6163	2.44045
2.69	-6.5680	-1.6838	1.6027	2.45665
2.70	-6.7565	-1.7509	1.58265	2.47245
2.71	-6.8556	-1.81895	1.5648	2.4882
2.72	-6.9558	-1.88805	1.5462	2.5037
2.73	-7.0560	-1.95805	1.5270	2.5191
2.74	-7.1571	-2.02915	1.5071	2.5343
2.75	-7.2588	-2.1019	1.4864	2.54925
2.76	-7.3611	-2.1743	1.4650	2.5640
2.77	-7.4639	-2.2484	1.4429	2.5785
2.78	-7.5673	-2.3236	1.4201	2.59285
2.79	-7.6714	-2.3998	1.3964	2.60695
2.80	-7.7759	-2.4770	1.3721	2.6208
2.81	-7.8810	-2.5553	1.34695	2.6344
2.82	-7.9866	-2.63465	1.3210	2.6477
2.83	-8.0929	-2.71505	1.29425	2.6606
2.84	-8.1995	-2.7965	1.2667	2.6736
2.85	-8.3065	-2.8790	1.2383	2.68615
2.86	-8.4144	-2.96265	1.2091	2.6984
2.87	-8.5225	-3.0473	1.17905	2.7103
2.88	-8.6312	-3.1331	1.14815	2.72195
2.89	-8.7404	-3.21995	1.1164	2.7333
2.90	-8.8471	-3.3079	1.08375	2.7443

$\xi$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
2.91	-8.9598	-3.3969	1.05025	2,75495
2.92	-9.0703	-3.48715	1.0158	2,7653
2.93	-9,1811	-3,57835	0,98045	2,7753
2.94	-9,2923	-3,6707	0,94425	2,7849
2.95	-9,4390	-3,7642	0,90705	2,79415
2.96	-9,5158	-3,8588	0,86895	2,80305
2.97	-9,6881	-3,9545	0,82985	2,8115
2.98	-9,7407	-4,05135	0,78985	2,8196
2.99	-9,8536	-1,1493	0,74885	2,8273
3.00	-9,9669	-4,24845	0,70685	2,8346
3.01	-10.0804	-4,34865	0,66385	2,8414
3.02	-10,1943	-4,45005	0,61985	2,8479
3.03	-10,3083	-4,55255	0,57485	2,8538
3.04	-10,4225	-4,6562	0,52885	2,8594
3.05	-10,5317	-4,76105	0,4817	2,86442
3.06	-10,6516	-4,86695	0,4336	2,8690
3.07	-10,7665	-4,97405	0,3844	2,8731
3.08	-10,8815	-5,0823	0,3341	2,87665
3.09	-10,9966	-5,19165	0,28275	2,8798
3.10	-11,1119	-5,30235	0,2303	2,8823
3.11	-11,2272	-5,4139	0,1767	2,88435
3.12	-11,3427	-5,5268	0,1220	2,88585
3.13	-11,4580	-5,64075	0,06615	2,8868
3.14	-11,5736	-5,75595	0,00915	2,8872
$\pi$	-11,5919	-5,77435	0	2,8872
3.15	-11,6890	-5,8722	-0,04895	2,88695
3.16	-11,8045	-5,98975	-0,1083	2,8862
3.17	-11,9200	-6,10835	-0,16875	2,8848
3.18	-12,0353	-6,2281	-0,23045	2,8828
3.19	-12,1506	-6,34905	-0,29335	2,8802
3.20	-12,2656	-6,47105	-0,3574	2,8769
3.21	-12,3806	-6,5943	-0,4227	2,87305
3.22	-12,4956	-6,7187	-0,4893	2,8685
3.23	-12,6101	-6,8442	-0,5571	2,85325
3.24	-12,7373	-6,97095	-0,6262	2,8573
3.25	-12,8388	-7,0988	-0,6966	2,8507
3.26	-12,9527	-7,2277	-0,76815	2,8434
3.27	-13,0662	-7,3578	-0,8411	2,8354
3.28	-13,1795	-7,4890	-0,9153	2,8266
3.29	-13,2924	-7,6213	-0,9908	2,8171
3.30	-13,4048	-7,7549	-1,0678	2,80675

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
3.31	-13.5168	-7.88945	-1.144595	2.7957
3.32	-13.6285	-8.0252	-1.22555	2.78385
3.33	-13.7395	-8.16195	-1.30045	2.7712
3.34	-13.8501	-8.3000	-1.3888	2.7577
3.35	-13.9601	-8.4390	-1.4725	2.7454
3.36	-14.0695	-8.5792	-1.55765	2.7282
3.37	-14.1784	-8.72045	-1.6441	2.7122
3.38	-14.2866	-8.8627	-1.73205	2.69535
3.39	-14.3941	-9.0062	-1.82135	2.6776
3.40	-14.5008	-9.15065	-1.9121	2.6589
3.41	-14.6066	-9.2962	-2.0044	2.6393
3.42	-14.7118	-9.4427	-2.0980	2.61885
3.43	-14.8162	-9.59045	-2.19325	2.5974
3.44	-14.9197	-9.73915	-2.2899	2.5750
3.45	-15.0222	-9.8888	-2.3880	2.5516
3.46	-15.1238	-10.03955	-2.4876	2.5272
3.47	-15.2244	-10.1913	-2.58885	2.5018
3.48	-15.3238	-10.34405	-2.6915	2.4754
3.49	-15.4224	-10.4977	-2.7957	2.4480
3.50	-15.5198	-10.65245	-2.90145	2.4195
3.51	-15.6159	-10.8081	-3.00875	2.38995
3.52	-15.7108	-10.9647	-3.1176	2.3593
3.53	-15.8046	-11.1223	-3.2280	2.3276
3.54	-15.8971	-11.28085	-3.34005	2.2948
3.55	-15.9881	-11.4403	-3.4537	2.26075
3.56	-16.0780	-11.6007	-3.5689	2.22565
3.57	-16.1663	-11.76185	-3.68565	2.1894
3.58	-16.2531	-11.9240	-3.8041	2.15195
3.59	-16.3384	-12.08695	-3.92415	2.1133
3.60	-16.4218	-12.25075	-4.04585	2.0735
3.61	-16.5043	-12.4154	-4.1692	2.0324
3.62	-16.5847	-12.5808	-4.2942	1.99005
3.63	-16.6634	-12.7470	-4.4208	1.9465
3.64	-16.7405	-12.9141	-4.5491	1.9017
3.65	-16.8155	-13.0818	-4.6791	1.8555
3.66	-16.8889	-13.2504	-4.81075	1.80805
3.67	-16.9602	-13.4196	-4.9441	1.7593
3.68	-17.0296	-13.5896	-5.07915	1.7092
3.69	-17.0970	-13.6745	-5.2159	1.7006
3.70	-17.1622	-13.9315	-5.35435	1.60485

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
3.71	-17.2253	-14.1034	-5.4945	1.5506
3.72	-17.2861	-14.2759	-5.6364	1.49495
3.73	-17.3449	-14.4492	-5.78005	1.43790
3.74	-17.4022	-14.6228	-5.9254	1.3793
3.75	-17.4552	-14.7971	-6.0725	1.3194
3.76	-17.5067	-14.9719	-6.22135	1.2579
3.77	-17.5557	-15.1472	-6.37195	1.1949
3.78	-17.6024	-15.3231	-6.5243	1.1305
3.79	-17.6463	-15.4994	-6.6784	1.06445
3.80	-17.6875	-15.6760	-6.8343	0.9969
3.81	-17.7259	-15.8531	-6.99195	0.92775
3.82	-17.7616	-16.0304	-7.1513	0.85705
3.83	-17.7945	-16.2083	-7.31255	0.7847
3.84	-17.8245	-16.3864	-7.4755	0.7108
3.85	-17.8513	-16.5648	-7.6403	0.6852
3.86	-17.8751	-16.7433	-7.80685	0.5579
3.87	-17.8960	-16.8223	-7.9751	0.4791
3.88	-17.9135	-17.1013	-8.14525	0.39845
3.89	-17.9277	-17.2804	-8.3171	0.3161
3.90	-17.9387	-17.4598	-8.4909	0.2321
3.91	-17.9464	-17.6393	-8.66635	0.14635
3.92	-17.9504	-17.8187	-8.8437	0.0587
3.93	-17.9511	-17.9983	-9.0227	-0.0305
3.94	-17.9480	-18.1778	-9.20365	-0.1217
3.95	-17.9412	-18.3572	-9.3863	-0.2172
3.96	-17.9307	-18.5365	-9.57075	-0.3095
3.97	-17.9165	-18.7158	-9.75205	-0.4061
3.98	-17.8983	-18.8949	-9.94505	-0.50455
3.99	-17.8761	-19.0738	-10.13495	-0.60495
4.00	-17.8498	-19.2523	-10.3265	-0.7073
4.01	-17.8172	-19.4307	-10.5199	-0.8115
4.02	-17.7850	-19.6087	-10.7151	0.9176
4.03	-17.7461	-19.7865	-10.9121	-1.0258
4.04	-17.7029	-19.9637	-11.1109	-1.1359
4.05	-17.6551	-20.1405	-11.3114	-1.2481
4.06	-17.6030	-20.3169	-11.5137	-1.3621
4.07	-17.5461	-20.4925	-11.7178	-1.4783
4.08	-17.4846	-20.6677	-11.9235	-1.5965
4.09	-17.4185	-20.8422	-12.3111	-1.7168
4.10	-17.3472	-21.0160	-12.3404	-1.8392

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
4,11	-17,2712	-21,1890	-12,5513	-1,9636
4,12	-17,1900	-21,3614	-12,7641	-2,0902
4,13	-17,1040	-21,5329	-12,9778	-2,2189
4,14	-17,0126	-21,7034	-13,1948	-2,3498
4,15	-16,9160	-21,8731	-13,41265	-2,4828
4,16	-16,8139	-22,0417	-13,6322	-2,6180
4,17	-16,7064	-22,2094	-13,85355	-2,7555
4,18	-16,5934	-22,3759	-14,0765	-2,8951
4,19	-16,4748	-22,5412	-14,30105	-3,2870
4,20	-16,3505	-22,7054	-14,52735	-3,1812
4,21	-16,2203	-22,86815	-14,75505	-3,5275
4,22	-16,0842	-23,02985	-14,9847	-3,4763
4,23	-13,9423	-23,18995	-15,21575	-3,6272
4,24	-15,7939	-23,3485	-15,44835	-3,7805
4,25	-15,6398	-23,50585	-15,6827	-3,9362
4,26	-15,4793	-23,66155	-15,91865	-4,0942
4,27	-15,3122	-23,8153	-16,1509	-4,2545
4,28	-15,1387	-23,96765	-16,3949	-4,4174
4,29	-14,9587	-24,11805	-16,63525	-4,5825
4,30	-14,7722	-24,26685	-16,8773	-4,7501
4,31	-14,5788	-24,4136	-17,12065	-4,9200
4,32	-14,3786	-24,5574	-17,3655	-5,0924
4,33	-14,1714	-24,7012	-17,61185	-5,2673
4,34	-13,9570	-24,8417	-17,8595	-5,4447
4,35	-13,7357	-24,98015	-18,10845	-5,6245
4,36	-13,5070	-25,11635	-18,35905	-5,8069
4,37	-13,2712	-25,2500	-18,6110	-5,9916
4,38	-13,0276	-25,38185	-18,86415	-6,1791
4,39	-12,7766	-25,51075	-19,1185	-6,3690
4,40	-12,5180	-25,63725	-19,37425	-6,5615
4,41	-12,2517	-25,7612	-19,6313	-6,7369
4,42	-11,9776	-25,88235	-19,88745	-6,9541
4,43	-11,6625	-26,00065	-20,14885	-7,1543
4,44	-11,4051	-26,1161	-20,4095	-7,3571
4,45	-11,1069	-26,20735	-20,67115	-7,5517
4,46	-10,8003	-26,3884	-20,9341	-7,7705
4,47	-10,4851	-26,44475	-21,19805	-7,9818
4,48	-10,1615	-26,54795	-21,46295	-8,1945
4,49	-9,8295	-26,6479	-21,72885	-8,4104
4,50	-9,4890	-26,74465	-21,9959	-8,6290

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
4.51	-9.1392	-26.8377	-22.26385	-8.6503
4.52	-8.7805	-26,9272	-22.53265	-9,0744
4.53	-8,4133	-27,0132	-22,30225	-9,0009
4.54	-8.0368	-27,09565	-23,07295	-9,9304
4.55	-7.6509	-27,17395	-23,34415	-9,7624
4.56	-7.2556	-27,2485	-23,61635	-9,9972
4.57	-6.8510	-27,31915	-23,8892	-10,235
4.58	-6.4366	-27,38545	-24,16275	-10,475
4.59	-6.0127	-27,4477	-24,4369	-10,718
4.60	-5.5791	-27,50565	-24,7116	-10,964
4.61	-5.1358	-27,5592	-24,9869	-11,2123
4.62	-4.8237	-27,6086	-25,2630	-11,4635
4.63	-4.2189	-27,6531	-25,5392	-11,7175
4.64	-3,7450	-27,6928	-25,8158	-11,9742
4.65	-3,2607	-27,7277	-26,09285	-12,2338
4.66	-2,7663	-27,7581	-26,3705	-12,4961
4.67	-2,2611	-27,7831	-26,6481	-12,7612
4.68	-1,7449	-27,8031	-26,9262	-13,0293
4.69	-1,2187	-27,8180	-27,2042	-13,2998
4.70	-0,6812	-27,8274	-27,4823	-13,5731
4.71	-0.1327	-27,8316	-27,7608	-13,8495
$3\pi/2$	-0	-27,8317	-27,8272	-13,9158
4.72	-0,4268	-27,8300	-28,0390	-14,1284
4.73	-0,9976	-27,8228	-28,3171	-14,4101
4.74	-1,5799	-27,8100	-28,5955	-14,6948
4.75	-2,1731	-27,7913	-28,8734	-14,9820
4.76	-2,7782	-27,7667	-29,1513	-15,2723
4.77	-3,3951	-27,7356	-29,4287	-15,5652
4.78	-4,0236	-27,6987	-29,7061	-15,8609
4.79	-4,6638	-27,6553	-29,9827	-16,1592
4.80	5,3164	-27,6051	-30,2589	-16,4604
4.81	5,9811	-27,5487	-30,5348	-16,7645
4.82	6,6574	-27,4859	-30,8101	-17,0712
4.83	7,3466	-27,4155	-31,0844	-17,3806
4.84	8,0477	-27,3389	-31,3583	-17,6928
4.85	8,7623	-27,2546	-31,6313	-18,0079
4.86	9,4890	-27,1634	-31,9035	-18,3256
4.87	10,2282	-27,0649	-32,1746	-18,6460
4.88	10,9806	-26,9588	-32,4447	-18,9691
4.89	11,7458	-28,8451	-32,7137	-19,2948
4.90	12,5239	-26,7238	-32,9814	-19,6232

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
4.91	13.3158	-26.5946	-33.2481	-19.9544
4.92	14.1202	-26.4577	-33.5135	-20.2882
4.93	14.9362	-26.3122	-33.7773	-20.6248
4.94	15.7044	-26.1587	-34.0396	-20.9638
4.95	16.6157	-25.9967	-34.3002	-21.3053
4.96	17.4750	-25.8262	-34.5594	-21.6497
4.97	18.3478	-25.6472	-34.8168	-21.9986
4.98	19.2348	-25.4594	-35.0726	-22.3462
4.99	20.1356	-25.2623	-35.3259	-22.6980
5.00	21.0504	-25.0564	-35.5774	-23.052
5.01	21.9800	-24.8412	-35.8271	-23.4097
5.02	22.8474	-24.6170	-36.0744	-23.7691
5.03	23.8815	-24.3826	-36.3192	-24.1311
5.04	24.8537	-24.1391	-36.5619	-24.4954
5.05	25.8407	-23.8859	-36.8022	-24.8623
5.06	26.8427	-23.6225	-37.0397	-25.2315
5.07	27.8598	-23.3489	-37.2747	-25.6032
5.08	28.8914	-23.0650	-37.5067	-25.9771
5.09	29.9377	-22.7711	-37.7359	-26.3532
5.10	30.9997	-22.4660	-37.9618	-26.7317
5.11	32.0766	-22.1508	-38.1852	-27.1126
5.12	33.1687	-21.8245	-38.4050	-27.4955
5.13	34.2762	-21.4874	-38.0216	-27.8806
5.14	35.3991	-21.1391	-38.8348	-28.2679
5.15	36.5377	-20.7795	-39.0445	-28.6574
5.16	37.6913	-20.4083	-39.2501	-29.0486
5.17	38.8617	-20.0245	-39.4524	-29.4423
5.18	40.0474	-19.6309	-39.6509	-29.8379
5.19	41.2485	-19.2247	-39.8452	-30.2354
5.20	42.4661	-18.8057	-40.0350	-30.6346
5.21	43.6994	-18.3753	-40.2213	-31.036
5.22	44.9186	-17.9321	-40.4028	-31.439
5.23	46.2148	-17.4758	-40.5796	-31.844
5.24	47.4958	-17.0073	-40.7520	-32.250
5.25	48.7949	-16.5258	-40.9196	-32.659
5.26	50.1091	-16.0316	-41.0826	-33.069
5.27	51.4399	-15.5239	-41.2403	-33.481
5.28	52.7876	-15.0029	-41.3932	-33.894
5.29	54.1511	-14.4684	-41.5405	-34.308
5.30	55.5317	-13.9201	-41.6825	-34.724

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
5.31	56.9296	-13.3573	-41.8187	-35.1421
5.32	58.3438	-12.7808	-41.9493	-35.5609
5.33	59.7745	-12.1903	-42.0741	-35.9610
5.34	61.2218	-11.5856	-42.1931	-36.4023
5.35	62.6869	-10.9659	-42.3060	-36.8250
5.36	64.1678	-10.3321	-42.4127	-37.2485
5.37	65.6857	-9.68225	-42.5124	-37.6731
5.38	67.1818	-9.08835	-42.6060	-38.0986
5.39	68.7140	-8.3390	-42.6928	-38.5251
5.40	70.2637	-7.6440	-42.7726	-38.9524
5.41	71.8308	-6.9336	-42.8458	-39.3807
5.42	73.4144	-6.2076	-42.9117	-39.8095
5.43	75.0158	-5.4651	-42.9699	-40.2390
5.44	76.6338	-4.70715	-43.0210	-40.6691
5.45	78.2687	-3.9328	-43.0641	-41.0993
5.46	79.9216	-3.1418	-43.0995	-41.5303
5.47	81.5916	-2.33395	-43.1267	-41.9613
5.48	83.2786	-1.5095	-43.1458	-42.3926
5.49	84.9829	-0.66825	-43.1568	-42.8241
5.50	86.7044	0.19005	-43.1592	-43.2557
5.51	88.4432	1.0656	-43.1531	-43.6873
5.52	90.1996	1.95885	-43.1381	-44.1189
5.53	91.9722	2.86925	-43.1140	-44.5500
5.54	93.7637	3.7984	-43.0806	-44.9812
5.55	95.5718	4.7453	-43.0377	-45.4117
5.56	97.3960	5.7095	-42.9857	-45.8418
5.57	99.2383	6.6927	-42.9237	-46.2713
5.58	101.0984	7.6950	-42.8515	-46.7002
5.59	102.9739	8.7148	-42.769	-47.1281
5.60	104.8687	9.75435	-42.6774	-47.5558
5.61	106.7790	10.8125	-42.574	-47.9818
5.62	108.7074	11.89025	-42.461	-48.4071
5.63	110.6518	12.98645	-42.337	-48.8309
5.64	112.6133	14.10285	-42.201	-49.2538
5.65	114.5922	15.23805	-42.055	-49.6752
5.66	116.5866	16.39495	-41.896	-50.0944
5.67	118.5994	17.57953	-41.727	-50.5130
5.68	120.6877	18.7666	-41.545	-50.9291
5.69	128.6730	19.9835	-41.551	-51.3433
5.70	124.7352	21.2199	-41.145	-51.7562

$\xi$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
5.71	128,814	28,47245	-40,821	-52,107
5.72	128,909	23,75709	-40,695	-52,575
5.73	131,981	23,0563	-40,451	-52,081
5.74	133,147	26,2610	-40,137	-53,336
5.75	135,290	27,7192	-39,924	-53,784
5.76	137,450	29,08315	-39,640	-54,182
5.77	139,626	30,46925	-39,342	-54,577
5.78	141,814	31,8755	-39,030	-54,969
5.79	144,022	33,30525	-38,704	-54,357
5.80	146,245	34,7564	-38,364	-55,743
			-	
5.81	148,482	36,23005	-38,001	-56,125
5.82	150,734	37,7255	-37,639	-56,503
5.83	153,003	39,3449	-36,854	-56,878
5.84	155,2845	40,78585	-36,438	-57,242
5.85	157,599	42,35035	-36,008	-57,6143
5.86	159,895	43,9378	-35,560	-57,977
5.87	162,221	45,5484	-35,096	-58,335
5.88	164,561	47,1825	-34,616	-58,688
5.89	166,914	48,8394	-34,120	-59,036
5.90	169,284	50,5203	-34,120	-59,380
5.91	171,665	52,22545	-33,075	-59,719
5.92	174,061	53,95415	-32,527	-60,052
5.93	176,070	55,7067	-31,961	-60,381
5.94	178,892	57,4833	-31,376	-60,703
5.95	181,327	59,2852	-30,775	-61,019
5.96	183,773	61,7303	-30,154	-61,020
5.97	186,233	63,30865	-29,515	-61,461
5.98	188,703	64,83465	-28,857	-61,933
5.99	191,187	66,7344	-28,212	-62,225
6.00	193,681	68,65775	-27,212	-62,511
6.01	196,188	70,6079	-26,769	-62,789
6.02	198,705	72,58215	-26,033	-63,060
6.03	201,232	74,5817	-25,277	-63,324
6.04	203,771	76,60666	-24,501	-63,581
6.05	206,319	78,6547	-23,704	-63,830
6.06	208,877	80,73305	-22,885	-64,071
6.07	211,443	82,83495	-22,047	-64,302
6.08	214,021	84,96215	-21,180	-64,528
6.09	216,607	87,11495	-20,304	-64,745
6.10	219,200	89,29465	-20,343	-64,952

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
6.11	221.802	91.49915	-18.474	-65.150
6.12	224.411	93.72995	-18.474	-65.339
6.13	227.029	95.9871	-17.526	-65.520
6.14	229.654	98.27085	-16.355	-65.691
6.15	232.283	100.55375	-15.560	-65.833
6.16	234.921	102.91675	-14.542	-66.001
6.17	237.564	105.27925	-13.501	-66.141
6.18	240.212	107.6680	-12.437	-66.271
6.19	242.865	110.0831	-11.346	-66.390
6.20	245.523	112.5249	-10.236	-66.4981
6.21	248.185	114.993	-9.0980	-66.5947
6.22	250.850	117.489	-7.9351	-66.6796
6.23	253.521	120.011	-6.7480	-66.7537
6.24	256.192	122.560	-5.5350	66.8150
6.25	258.865	125.134	4.2969	-66.8642
6.26	261.540	127.737	-3.0320	-66.9005
6.27	264.216	130.3666	-1.7413	-66.9242
6.28	266.893	133.0194	-0.4257	-66.9354
$2\pi$	267.747	133.8724	0	-66.9362
6.30	272.249	138.4120	2.2885	-66.9174
6.40	298.8909	166.9722	17.5362	-65.9486
6.50	324.7861	198.1637	35.7712	-63.3104
6.60	349.2554	231.8800	57.253	-58.6870
6.70	371.4244	267.9374	82.225	-51.7430
6.80	390.2947	306.0558	110.909	-42.1189
6.90	404.7145	347.3498	143.493	-30.1819
7.00	413.3762	386.8071	180.119	-13.284
7.10	414.8263	428.2849	220.872	6.7296
7.20	407.4216	469.4772	265.766	31.0280
7.30	389.3783	509.4156	314.726	60.019
7.40	358.7306	546.9342	367.569	94.102
7.50	313.3700	580.6710	423.986	133.650
7.60	251.0334	609.0402	483.523	179.003
7.70	169.3472	630.2294	545.556	230.441
7.80	65.8475	642.1835	609.260	288.168
$5/2\pi$	0	643.9927	643.992	321.996
7.90	-62.0375	642.5871	673.606	352.312

$\xi$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
8.00	-216,864	628,8779	737,3100	422,8713
8.10	-401,167	598,2343	798,818	499,7008
8.20	-617,414	547,5808	856,2887	582,49745
8.30	-867,909	473,5995	907,554	670,7544
8.40	-1154,66	372,7865	950,116	763,7226
8.50	-1479,37	241,4135	981,098	860,3917
8.60	-1843,29	75,6088	997,2527	959,44835
8.70	-2247,04	-128,5823	994,938	1059,2289
8.80	-2690,48	-375,1167	970,125	1157,6838
8,90	-3172,69	-667,9794	918,366	1252,3560
9.00	-3691,48	-1010,880	834,861	1340,3007
9.10	-4243,55	-1407,369	714,408	1418,0930
9.20	-4824,06	-1860,536	551,493	1481,7610
9.30	5426,51	-2372,948	340,309	1526,7834
9.40	-6042,32	-2946,271	74,8875	1548,0229
3 $\pi$	-6195,82	3097,9119	0	1548,9560
9.50	6660,96	-3581,475	-250,996	1539,7419
9.60	-7269,37	-4278,169	-643,486	1495,5985
9,70	-7851,71	-5034,471	-1108,62	1408,6174
9.80	-8389,57	-5847,036	-1652,25	1271,2663
9.90	-8860,94	-6710,207	-2279,73	1075,3680
10.00	-9240,87	-7616,146	-2995,72	812,3636

## Приложение 2

### Значения функций $\eta$ , $\eta_1$ , $\eta_2$ , $\eta_3$

$\alpha x$	$\eta$	$\eta_3$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\alpha x$
0.0	1.0000	+0.0000	1.0000	+1.0000	0.0
0.1	0.9907	+0.0903	0.8100	+0.09003	0.1
0.2	0.9651	+0.1627	0.6398	+0.8024	0.2
0.3	0.9267	+0.2189	0.4888	+0.7074	0.3
0.4	0.8784	+0.2610	0.3564	+0.6174	0.4
0.5	0.8231	+0.2908	0.2415	+0.5323	0.5
0.6	0.7628	+0.30999	0.1431	+0.4530	0.6
0.7	0.6997	+0.3199	0.0599	+0.3708	0.7
$\pi/4$	0,6448	+0,3224	0.0000	+0.3224	0,785

$\alpha x$	$\eta$	$\eta_3$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\alpha x$
0,8	0.6354	+0,3223	-0,0093	+0,3131	0,8
0.9	0.5712	+0,3185	-0,0657	+0,2527	0,9
1.0	0.5083	0,3096	-0,1108	0,1988	1,0
1.1	0,4467	+0,2967	-0,1457	+0,1510	1,1
1.2	0.3892	+0,2807	-0,1716	+0,1091	1,2
1.3	0,3355	+0,2626	-0,1893	+0,0729	1,3
1.4	0.2849	+0,2430	-0,2011	+0,0419	1,4
1.5	0,2384	+0,2226	-0,2068	+0,0158	1,5
$\pi/2$	0.2079	+0,2079	-0,2079	0,0000	1,571
1.6	0,1959	+0,2018	-0,2077	-0,0059	1,6
1.7	0,1576	+0,1812	-0,2047	-0,0235	1,7
1.8	0,1234	+0,1610	-0,1985	-0,0376	1,8
1.9	0,0932	+0,1415	-0,1899	-0,0484	1,9
2.0	0,0667	+0,1231	-0,1794	-0,0563	2,0
2.1	0,0439	+0,1057	-0,1675	-0,0618	2,1
2.2	0,0244	+0,0896	-0,1547	-0,0652	2,2
2.3	0,0080	+0,0748	-0,1416	-0,0668	2,3
$3\pi/4$	0,000	+0,0670	-0,1340	-0,0670	2,356
2.4	-0,0056	+0,0613	-0,1282	-0,0669	2,4
2.5	-0,0166	+0,0491	-0,1149	-0,0658	2,5
2.6	-0,0254	+0,0383	-0,1019	-0,0636	2,6
2.7	-0,0320	+0,0287	-0,0805	-0,0608	2,7
2.8	-0,0369	+0,0204	-0,0777	-0,0573	2,8
2.9	-0,0403	+0,0132	-0,0666	-0,0534	2,9
3.0	-0,04226	+0,00703	-0,05632	-0,04929	3,0
3.1	-0,04314	+0,00187	-0,04688	-0,04501	3,1
$\pi$	-0,04321	+0,00000	-0,04321	-0,04321	3,142
3.2	-0,04307	-0,00238	-0,03831	-0,04069	3,2
3.3	-0,04224	-0,00582	-0,03060	-0,03642	3,3
3.4	-0,04079	-0,00853	-0,02374	-0,03227	3,4
3.5	-0,03887	-0,01059	-0,01769	-0,02828	3,5
3.6	-0,03689	-0,01209	-0,01241	-0,02450	3,6
3.7	-0,03407	-0,01310	-0,00787	-0,02097	3,7
3.8	-0,03138	-0,01369	-0,00401	-0,01770	3,8
3.9	-0,02862	-0,01392	-0,00077	-0,01469	3,9
$5\pi/4$	-0,02786	-0,01393	0,00000	-0,01393	3,927

	$\eta_3$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\alpha x$	
	-0.01386	0.00189	-0.01197	4.0	
	-0.01356	0.00403	-0.00953	4.1	
	-0.01307	0.00572	-0.00735	4.2	
	-0.01243	0.00699	-0.00544	4.3	
	-0.01168	0.00791	-0.00377	4.4	
	-0.01086	0.00852	-0.00234	4.5	
	-0.00999	0.00786	-0.00113	4.6	
	-0.00909	0.00898	-0.00011	4.7	
	-0.00898	0.00898	0.00000	4.712	
	-0.00820	0.00892	0.00072	4.8	
	-0.00732	0.00870	+0.00139	4.9	
	-0.00646	0.00837	+0.00191	5.0	
	-0.00564	0.00795	+0.00230	5.1	
	-0.00487	0.00746	+0.00259	5.2	
	-0.00415	0.00692	+0.00277	5.3	
	-0.00349	0.00636	+0.00267	5.4	
	-0.00290	0.00579	+0.00290	5.498	
	-0.00288	0.00578	+0.00290	5.5	
	-0.00233	0.00520	+0.00287	5.6	
	-0.00184	0.00464	+0.00279	5.7	
	-0.00141	0.00409	+0.00268	5.8	
	-0.00102	0.00356	+0.00254	5.9	
	-0.00069	0.00307	+0.00238	6.0	
	-0.00069	0.00261	+0.00221	6.1	
6,2	0.00185	-0.00017	0.00219	+0.00202	6.2
$8\pi/4$	0.00187	0.00000	0.00187	+0.00187	6.283
6,3	0.00187	+0.00003	0.00181	+0.00184	6.3
6,4	0.00184	+0.00019	0.00146	+0.00165	6.4
6,5	0.00179	+0.00032	0.00115	+0.00147	6.5
6,6	0.00172	+0.00042	0.00087	+0.00129	6.6
6,7	0.00162	+0.00050	0.00063	+0.00113	6.7
6,8	0.00152	+0.00055	0.00042	+0.00097	6.8
6,9	0.00141	+0.00058	0.00024	+0.00082	6.9
7,0	0.00129	+0.00060	0.00009	+0.00069	7.0
$9\pi/4$	0.0120	+0.00060	0.00000	+0.00060	7.069

## Содержание

Введение	3
1 Некоторые общие сведения	4
2 Интегрирование однородного дифференциального уравнения	5
3 Расчет бесконечно длинной балки, лежащей на упругом основании, при действии сосредоточенной силы $P$	6
4 Расчет коротких балок методом начальных параметров	11
5 Примеры расчета коротких балок на упругом основании	19
Пример 5.1	19
Пример 5.2	23
Пример 5.3	27
Пример 5.4	31
6 Решение дифференциального уравнения изгиба балки на упругом основании при помощи конечных разностей	36
Литература	42
Задания к расчетно-графической работе	43
Приложение 1    Таблицы гиперболо-круговых функций (функций Крылова)	45
Приложение 2    Значения функций $\eta$ , $\eta_1$ , $\eta_2$ , $\eta_3$	62