

На правах рукописи



МИЛОВАНОВ Николай Юрьевич

**МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ У СТАРШЕКЛАССНИКОВ СИСТЕМЫ
ПОНЯТИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НА ОСНОВЕ
ГРАФИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ**

13.00.02 – теория и методика
обучения и воспитания (математика)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата педагогических наук

Орел – 2017

Работа выполнена на кафедре теории и методики обучения
математике и информатике ФГБОУ ВО
«Волгоградский государственный социально-педагогический университет»

Научный руководитель доктор педагогических наук, доцент
Ковалева Галина Ивановна

Официальные оппоненты: **Подходова Наталья Семеновна**
доктор педагогических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Российский государственный
педагогический университет им. А.И.Герцена»,
профессор кафедры методики обучения
математике и информатике

Далингер Виктор Алексеевич
доктор педагогических наук, профессор, ФГБОУ
ВО «Омский государственный педагогический
университет», заведующий кафедрой
математики и методики обучения математике

Ведущая организация ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный
университет»

Защита диссертации состоится 25 мая 2017 г. в 13:00 часов на заседании
диссертационного совета Д 212.183.04, созданного на базе ФГБОУ ВО
«Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», адрес:
302020, г. Орел, Наугорское шоссе, д. 29, ауд. 212.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО
«Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева» и на сайте
<http://www.oreluniver.ru/>

Автореферат разослан «___» марта 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Селютин Владимир Дмитриевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. Одной из целей образования сегодня является формирование у обучающихся умений строить и исследовать модели реальных процессов. Должны быть сформированы ключевые понятия, приемы и действия, позволяющие познать окружающий мир. Для математического исследования реальных ситуаций важны понятия математического анализа: теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления. «Это основные понятия того языка, на котором говорит природа, определенный золотой фонд общечеловеческой культуры» (А.Г. Мордкович). При этом определения понятий математического анализа в школьном курсе математики даются в формальном (символьном) представлении, что затрудняет их восприятие обучающимися и установление связей между ними. Эта проблема может быть разрешена посредством формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений.

Степень разработанности проблемы исследования. Вопросы формирования математических понятий всегда были в центре внимания ведущих методистов, таких как В.Д. Белоусов, Я.И. Груденов, Ю.М. Колягин, С.Е. Ляпин, Н.В. Метельский, В.А. Оганесян, П.К. Петрушин, В.В. Репьев, А.А. Столяр, Р.С. Черкасов и др. Ими разработана общая методика формирования математических понятий: выделены этапы этого процесса, сформулированы методические требования, описаны приемы формирования математических понятий, алгоритмизированы действия обучающихся по усвоению понятий.

Современные подходы к формированию математических понятий представлены в трудах Э.К. Брейтигам, Н.С. Подходовой, Г.И. Саранцева, Н.Л. Стефановой и др. Авторы рассматривают формирование понятий с позиций системно-деятельностного и личностно ориентированного подходов, решают проблему формирования метапонятий.

Следует отметить, что при изучении понятий в приоритете всегда должна выступать наглядность, это подтверждено в работах В.П. Зинченко, П.Г. Сатьянова, Е.И. Смирнова, Л.М. Фридмана, И.С. Якиманской и др.

Так, В.П. Зинченко в своих трудах по педагогической психологии вводит понятие «визуальное мышление», определяя его как человеческую деятельность, продуктом которой является порождение новых образов, создание новых визуальных форм, несущих определенную смысловую нагрузку и делающих знание видимым.

Говоря о наглядности в преподавании математики, И.С. Якиманская оперирует понятием «пространственное мышление» и в работах об основных

показателях и условиях развития пространственного мышления, формируемых на графических основах, выделяет тип, широту оперирования и полноту образа.

Е.И. Смирнов констатирует, что математические представления обучающихся возникают в учебном процессе не как формальные копии исходного объекта, а как некие модели, трансформирующиеся в определенные психические образы. Психический образ является субъективным феноменом, формирующимся в процессе предметно-практической, чувственной и мыслительной активности и представляющим собой результат целостного, интегрального отражения математических знаний у обучающихся.

Л.М. Фридман утверждает, что взаимодействие наглядного и абстрактного мышления развивается и совершенствуется в процессе обучения, при этом целесообразность использования средств наглядности зависит от того, способствует ли деятельность, непосредственной целью которой является освоение этой наглядности, другой деятельности (основной) по овладению учащимися знаниями, ради усвоения которых и используются эти средства.

Вопросами формирования понятий математического анализа занимались такие методисты, как Э.К. Брейтигам, Ю.М. Колягин, В.И. Мишин, А.Г. Мордкович, Н.С. Подходова, А.А. Столяр и др.

Так, А.Г. Мордкович выделяет несколько способов введения понятий математического анализа: принятие на веру, наглядно-интуитивный уровень, правдоподобные рассуждения и введение формально строгого определения.

Э.К. Брейтигам при формировании понятий и фактов математического анализа рассматривает концепцию деятельностно-смыслового подхода в контексте развивающего обучения, интегрирующую методологическую, психологическую, педагогическую и методическую составляющие.

В трудах А.Н. Землякова, И.В. Кисельникова, М.И. Коньковой и др. рассматриваются подходы к формированию конкретных понятий математического анализа – предела функции на бесконечности и в точке, производной функции, первообразной функции, определенного и неопределенного интеграла. Вопросам формирования системы понятий математического анализа уделено крайне мало внимания. При этом успешность изучения курса математического анализа зависит от того, будет ли сформирована система понятий математического анализа.

В педагогической науке сложились *теоретические предпосылки* методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений.

Первую группу работ составляют исследования по общей методике формирования систем понятий. Так, П.М. Эрдниев считает необходимым укрупнение единиц усвоения, т.к. из одного компонента системы легко вывести

другие элементы; Л.И. Токарева выделяет блочно-иерархическую структуру систем понятий и доказывает необходимость в установлении связей между понятиями (внутрисистемные, внутриспредметные, межсистемные и межпредметные); С.В. Иванова формирует понятия высшей математики путем включения в специальную систему знаний на основе учебных понятийных образований; И.В. Кисельников устанавливает связи между новыми понятиями и ранее изученными, выделяя четыре мыслительных действия: уподобление, абстрагирование, обобщение и выделение новых свойств и отношений в объектах.

Анализ работ вышеперечисленных авторов позволяет сделать вывод о необходимости формирования системы понятий, т.к. именно в ней раскрываются все связи между изучаемыми понятиями и смысл их изучения.

В исследованиях второй группы рассматриваются вопросы визуализации понятий. Так, В.А. Далингер считает необходимым строить процесс формирования понятий на основе зрительно-познавательного подхода, в котором главное положение – широкое и целенаправленное использование познавательной функции наглядности; А.Я. Цукарь в своих трудах приходит к выводам, что формирование понятий, выявление их сущностных свойств требуют обращения к содержательной стороне, т.е. к их образам, поэтому недопустимо преждевременное введение аналитического определения понятия без предварительного формирования его графического образа.

Основополагающий вывод, вытекающий из рассмотренных выше исследований состоит в том, что графические представления понятий являются основой для формирования понятий математического анализа в систему.

Одновременно с теоретическими развивались и *практические предпосылки* формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений. К ним следует отнести разработку федеральных государственных образовательных стандартов среднего (полного) общего образования нового поколения, требующих от обучающегося знаний и умений в познании окружающего мира; введение УМК по математике, реализующего современные концепции обучения математике, в том числе и математическому анализу.

Однако, можно констатировать, что проблема формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений находится в стадии становления. Необходимо выделить средства, способы и приемы формирования системы понятий математического анализа на основе графических представлений.

Актуальность данного исследования обусловлена **противоречиями** между:
– потребностью в формировании у старшеклассников системы понятий

математического анализа как языка познания реальных процессов окружающего мира и существующей практикой обучения без использования графических представлений как основы систематизации понятий математического анализа;

– необходимостью формирования системы понятий математического анализа на основе графических представлений и степенью ее разработанности в традиционной методике обучения.

Потребность в разрешении выявленных противоречий позволила сформулировать **проблему исследования**: каковы дидактические условия и средства формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений? Данная проблема определила выбор темы исследования: *«Методика формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений»*.

Объект исследования – процесс формирования у старшеклассников понятий математического анализа.

Предмет исследования – методика формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений.

Цель исследования – разработать методику формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений.

Гипотеза исследования заключается в том, что формирование у старшеклассников системы понятий математического анализа будет эффективным, если:

– выявление взаимосвязей между понятиями математического анализа происходит на основе графических представлений;

– перенос взаимосвязей двух понятий системы на два других понятия рассматривается как основной прием формирования системы понятий математического анализа, иерархия которой определена по операции дифференцирования;

– формирование у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений обеспечивается разработанной методикой, включающей целевой (формирование системы понятий математического анализа как одна из приоритетных целей), содержательный (содержание иерархических систем задач) и процессуальный (средства и формы изучения понятий математического анализа и организации решения старшеклассниками иерархических систем задач) компоненты;

– в качестве дидактических условий эффективной реализации методики

формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений будут выступать реализация индивидуального подхода в процессе коррекции сформированности у старшеклассников системы понятий математического анализа и вовлечение старшеклассников в деятельность смыслообразования через проблемные ситуации.

Задачи исследования:

1) выявить сущность графических представлений понятий математического анализа как основы их систематизации;

2) охарактеризовать перекодирование как прием формирования системы понятий математического анализа, иерархия которой определена по операции дифференцирования;

3) разработать целевой, содержательный и процессуальный компоненты методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений;

4) выявить дидактические условия эффективной реализации методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений.

Теоретико-методологической основой исследования являются положения целостного (В.И. Данильчук, В.С. Ильин, Н.К. Сергеев и др.) и системного (В.Г. Афанасьев, В.В. Краевский и др.) подходов к рассмотрению педагогического процесса; теория деятельности и деятельностный подход к развитию личности и обучению (А.Н. Леонтьев, С.Л. Рубинштейн и др.); основные идеи формирования понятий и систем понятий (Э.К. Брейтигам, Я.И. Груденов, Н.С. Подходова, Н.Л. Стефанова, Г.И. Саранцев, В.В. Репьев, А.А. Столяр, Р.С. Черкасов и др.); идеи формирования визуализации понятий в математике (В.А. Далингер, В.П. Зинченко, Е.И. Смирнов, Л.М. Фридман, И.С. Якиманская и др.); аспекты развития мыслительных операций при формировании понятий (И.В. Воинова, С.Л. Рубинштейн, Д.А. Филиппова, А.А. Харитоновна и др.); ведущие идеи теории задач и задачного подхода в обучении математике, конструировании задач (Ю.М. Колягин, Г.И. Ковалева, Г.И. Саранцев, Л.М. Фридман и др.); основные положения и принципы обучения математическому анализу в школьном курсе математики (А.Н. Земляков, А.Г. Мордкович, А.Я. Цукарь и др.); положения теории построения методической системы обучения (В.П. Беспалько, Е.В. Данильчук, В.М. Монахов, А.М. Пышкало, Т.К. Смыковская и др.).

Методы исследования: теоретические (сравнительный анализ научной литературы и нормативной документации); прогностические (метод моделирования); эмпирические (тестирование, наблюдение, методика с выбором заданий, фиксирование результатов обучения и формирования,

педагогический эксперимент); статистической и математической обработки экспериментальных данных и их интерпретация.

Эмпирическая база исследования: МОУ «СШ № 92 Краснооктябрьского района Волгограда», ГАУДПО «Волгоградская государственная академия последипломного образования» (всего приняли участие 253 человека, в том числе в формирующем эксперименте – 88 человек).

Исследование проводилось в 2011–2016 гг. и включало три этапа.

На *первом этапе* (2011–2012 гг.) проведен анализ исследований по научной проблематике, существующей практике формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа; определены цели и задачи, сформулирована гипотеза, конкретизированы методы исследования; выявлены критерии и уровни формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений. На *втором этапе* (2012–2014 гг.) разрабатывалась методика формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений; проведен поисковый эксперимент. На *третьем этапе* (2014–2016 гг.) проведен формирующий эксперимент, сформулированы выводы и подведены итоги, оформлено диссертационное исследование.

Положения, выносимые на защиту:

1. Основой формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа является графическое представление, под которым будем понимать наглядно-образное знание о существенных признаках понятия, открывающихся в ходе анализа отношений данного понятия с другими понятиями.

Сущность графических представлений понятий математического анализа раскрывают их основные характеристики: адекватность графического представления аналитическому представлению понятия (тождественное сопоставление аналитического представления понятия математического анализа с его графическим представлением); широта оперирования графическим представлением понятий (видоизменение графических представлений понятий математического анализа); раскрытие свойств понятия на основе его графического представления (переход от графического представления понятия к его аналитическому представлению); полнота графического представления (установление связей между графическими представлениями системы понятий математического анализа, «наложение» образов различных понятий системы).

2. Понятия математического анализа – «первообразная функция», «функция» и «производная функция» – образуют систему понятий, иерархия которой определена по операции дифференцирования.

Приемом формирования у старшеклассников системы понятий математи-

ческого анализа, иерархия которой определена по операции дифференцирования, является перекодирование, классическое определение которого как перехода от одного языка представления информации к другому расширяется за счет переноса взаимосвязей двух понятий системы на два других понятия, не нарушающих иерархию данной системы.

Количество понятий и характер выполняемых старшеклассниками перекодировок являются критериями выделения трех уровней сформированности системы понятий математического анализа: первый уровень характеризуется выполнением перекодирования информации об одном понятии; второй уровень обусловлен наличием перекодирования между двумя понятиями системы в классическом понимании; третий уровень определяется выполнением перекодирования понятий системы как переноса взаимосвязей между ними.

3. Под методикой формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений будем понимать строго определенное педагогическое воздействие, направленное на установление взаимосвязей между понятиями математического анализа на основе оперирования старшеклассниками графическими образами и проявляющееся при реализации целей и содержания соответствующего раздела школьного курса математики.

Спецификой целевого компонента являются глобальная (формирование у старшеклассников системы понятий математического анализа), интегративная (формирование у старшеклассников системы понятий школьного курса математики за счет получения опыта систематизации понятий математического анализа и его переноса на формирование других систем понятий школьного курса математики) и этапные цели. Содержательный компонент методики представлен содержанием иерархических систем задач. Специфику процессуального компонента методики отражают такие методы организации изучения понятий математического анализа и решения учащимися иерархических систем задач, как наглядные (графические представления понятий, демонстрация фактов математического анализа на готовом чертеже), практические (построение графических образов, их изменение), индукция и дедукция (выведение основных фактов математического анализа – смысловой основы графических образов), проблемно-поисковые (учебные ситуации), методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности (увеличение количества решаемых задач в иерархической системе), методы контроля над эффективностью учебно-познавательной деятельности и самоконтроля (методы сопоставления графических представлений и формально-логических рассуждений, построение соответствия между ними).

4. Дидактические условия эффективной реализации методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений: включение в содержание школьного курса начал анализа графических представлений понятий и иерархических систем задач; осуществление мониторинга достижения уровней сформированности системы понятий математического анализа; реализация индивидуального подхода в процессе коррекции сформированности у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений, базирующаяся на учете ошибок обучающихся и последующем построении индивидуальной образовательной траектории обучения; овладение учителем математики методикой формирования системы понятий математического анализа и наличие опыта методической деятельности по их формированию; вовлечение старшеклассников в деятельность смыслообразования через проблемные ситуации.

Научная новизна результатов исследования состоит в том, что впервые разработана методика формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа, базирующаяся на идее установления взаимосвязей между понятиями на основе графических представлений. Качественная новизна представленной методики состоит в использовании иерархической системы задач, содержащей задачи на работу с графическими представлениями одновременно с несколькими изучаемыми понятиями математического анализа. При этом впервые получены следующие научные результаты исследования:

– введено новое понятие в теорию и методику обучения математике «перекодирование как прием формирования системы понятий математического анализа, иерархия которой определена по операции дифференцирования», уточнено понятие «графическое представление понятий математического анализа»;

– выявлены уровни сформированности у старшеклассников системы понятий математического анализа в зависимости от количества понятий и характера выполняемых старшеклассниками перекодировок;

– дано научное понимание иерархической системы задач как основного средства формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений;

– выявлены дидактические условия эффективной реализации методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений.

Теоретическая значимость результатов исследования состоит в том, что:

– обоснована и доказана целесообразность использования графических представлений понятий математического анализа для их систематизации, что

является вкладом в разработку научных основ процесса формирования понятий школьного курса математики;

– теоретически обоснована авторская методика формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений, что способствует развитию теории и методики обучения математике;

– сформулированы требования к иерархической системе задач как средству формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений, что дополняет теорию задачного подхода.

Полученные результаты исследования могут служить основой для решения научных проблем в области повышения у старшеклассников качества знаний и умений по математическому анализу.

Практическая ценность результатов исследования состоит в том, что:

– созданное методическое обеспечение дает возможность учителям математики формировать у старшеклассников систему понятий математического анализа на основе графических представлений;

– разработанные иерархические системы задач обеспечат поэтапное формирование у старшеклассников системы понятий математического анализа;

– разработанные средства диагностики позволят констатировать уровни сформированности у старшеклассников системы понятий математического анализа.

Достоверность результатов исследования обеспечивается обоснованностью исходных теоретико-методологических позиций; использованием комплекса методов исследования; сочетанием опытной и экспериментальной работы; длительным характером опытно-экспериментальной работы по реализации методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа.

Апробация результатов исследования осуществлялась через:

– участие в региональных, всероссийских и международных научных и научно-практических конференциях: «Математика. Информатика. Технологический подход к обучению в вузе и школе» (Курган, 2011), «Актуальные проблемы методики обучения математике в школе» (Омск, 2012), LXV научной конференции студентов ВГСПУ «Исследовательская мобильность как фактор развития студенческой науки» (Волгоград, 2012), «Актуальные проблемы обучения математике, физике и информатике в школе и вузе» (Пенза, 2013), «Актуальные психолого-педагогические проблемы профессиональной подготовки» (Стерлитамак, 2013), V Международной студенческой электронной научной конференции «Студенческий научный форум 2013»

(Москва, 2013), «Актуальные проблемы обучения математике, физике и информатике в школе и вузе» (Пенза, 2014), «Повышение результативности обучения математике на профильном уровне: проблемы, опыт, перспективы» (Волгоград, 2014), «Методика подготовки к ЕГЭ и ОГЭ по математике» (Волгоград, 2014), «Организация научно-исследовательской и проектной деятельности учащихся по математике: проблемы, опыт, инновации» (Волгоград, 2014), «Интеграция традиционных и инновационных технологий обучения математике в контексте ФГОС основного общего образования» (Волгоград, 2014), XI Международной научно-практической конференции «Артемовские чтения» (Пенза, 2015), XXXIV Международном семинаре преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (Калуга, 2015), «Актуальные вопросы методики обучения математике и информатике» (Ульяновск, 2015), «Актуальные проблемы обучения физико-математическим и естественнонаучным дисциплинам в школе и вузе» (Пенза, 2016), «Актуальные вопросы методики обучения математике и информатике в условиях стандартизации образования» (Ульяновск, 2016), VII Межрегиональной научно-практической конференции учителей «Актуальные проблемы обучения физико-математическим и естественнонаучным дисциплинам в школе и вузе» (Пенза, 2016), Межрегиональном научно-методическом семинаре «Система задач урока математики как средство построения индивидуальной образовательной траектории: приемы конструирования, проблемы и опыт использования» (Волгоград, 2016);

– публикацию материалов исследования в различных научных и научно-методических изданиях (всего 19 работ, из них 4 статьи – в ведущих рецензируемых научных изданиях, определенных Высшей аттестационной комиссией Минобрнауки России).

Внедрение результатов исследования проводилось на базе МОУ «СШ № 92 Краснооктябрьского района Волгограда», а также в практике переподготовки учителей математики на базе ГАОУ ДПО «Волгоградская государственная академия последипломного образования».

Структура и содержание работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка литературы (168 источников) и 4 приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе «Теоретические основы формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений» раскрывается проблема изучения понятий математического анализа и их формирования в систему. Доказывается необходимость формирования системы понятий математического анализа на основе графических представлений. Вы-

деляется перекодирование графических представлений как основной прием формирования системы понятий математического анализа.

Под формированием понятия будем понимать совместную деятельность учителя и обучающегося, направленную на усвоение школьниками содержания понятия, определение понятия и наполнение его объема.

Формирование понятий – сложный психологический процесс, начинающийся с образования простейших форм чувственного познания – ощущений и протекающий часто по схеме: ощущение – восприятие – представление – понятие. Переход от представлений к понятиям совершается при помощи мыслительных операций, прежде всего, обобщения и абстрагирования.

В теории и методике обучения математике проводилось множество исследований по формированию понятий и требований к данному процессу (В.Д. Белоусов, Э.К. Брейтигам, Я.И. Груденов, Ю.М. Колягин, С.Е. Ляпин, Н.В. Метельский, В.А. Оганесян, П.К. Петрушин, Н.С. Подходова, В.В. Репьев, Г.И. Саранцев, А.А. Столяр, Р.С. Черкасов и др.), однако проблема формирования математических понятий в частной методике остается открытой, так как не существует универсального способа формирования понятий по всем изучаемым темам школьного курса математики.

В частности, понятия математического анализа учителю приходится формировать при отсутствии более ранних чувственных форм познания, имеющих образную природу. «Поэтому особо возрастает роль графических способов представления материала и решения задач, когда учитель использует, по сути, не реальные образы, а их подчас искусственно созданные заместители – фигурные конструкторы». (Н.С. Подходова).

Необходимость использования «образов» при изучении абстрактных понятий доказывается в трудах В.А. Далингера, А.Н. Землякова, А.Г. Мордковича, А.Я. Цукаря и др.

Так В.А. Далингер процесс обучения математике на основе зрительно-познавательного подхода связывает с формированием устойчивых зрительных образов и овладением различными мыслительными операциями над ними, аналогичными таким общим процессам, как абстрагирование, отделение главного от второстепенного, структурирование, логические рассуждения и др. Делает акцент на «первичность» образа, на немедленную и возможно более точную зрительную ассоциацию с абстрактным понятием, предшествующую словесному описанию.

А.Н. Земляков считает, что изучение основных понятий математического анализа проходит успешнее, если на этапе ознакомления с понятиями делается перенос внимания учащихся с формального, логически строгого и точного

определения данного понятия на *наглядные, интуитивные представления об этом понятии*. Упоминание о данном понятии должно ассоциироваться с *соответствующим наглядно-графическим образом*.

А.Я. Цукарь делает вывод, что формирование понятий, выявление их сущностных свойств требует обращения к содержательной стороне, то есть к их *образам*, поэтому недопустимо преждевременное введение аналитического определения понятия без предварительного формирования его *графического образа*.

Графический образ – идеально-чувственное представление объекта, информации, ситуации, явления и пр., возникающее в процессе и результате восприятия. Так как понятия математического анализа абстрактны, то их формирование сопровождается построением графических «образов». Это не образ восприятия. Это результат представления осмысления понятия. Корректнее такие «образы» (если они были построены) называть графическими представлениями.

Представление – форма отражения в виде наглядно-образного знания, одно из проявлений памяти, следовой образ ранее бывшего ощущения или восприятия. И.М. Сеченов указывал, что в структуру представления наряду с образом «входят, помимо внешних признаков, такие, которые открываются не непосредственно, а только при детальном умственном или физическом анализе предметов в их отношении друг к другу и к человеку».

Е.И. Смирнов констатирует, что математические представления обучающихся возникают в учебном процессе не как формальные копии исходного объекта, а как некие модели, трансформирующиеся в определенные психические образы. Психический образ является субъективным феноменом, формирующимся в процессе предметно-практической, чувственной и мыслительной активности и представляющим собой результат целостного, интегрального отражения математических знаний у обучающихся.

Графическое представление формируется учителем (совместно с учениками), является результатом анализа абстрактных понятий в их отношениях друг к другу (значение производной функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику функции в данной точке – отношение понятий математического анализа). Под ***графическим представлением понятий математического анализа*** будем понимать наглядно-образное знание о существенных признаках понятия, открывающихся в ходе анализа отношений данного понятия с другими понятиями.

Сущность графических представлений понятий математического анализа раскрывают их основные характеристики: адекватность графического представления аналитическому представлению понятия (тождественное сопо-

ставление аналитического представления понятия математического анализа с его графическим представлением); широта оперирования графическим представлением понятий (видоизменение графических представлений понятий математического анализа); раскрытие свойств понятия на основе его графического представления (переход от графического представления понятия к его аналитическому представлению); полнота графического представления (установление связей между графическими представлениями системы понятий математического анализа, «наложение» образов различных понятий системы).

Основными источниками отбора понятий в школьном курсе математики служат базовая наука, учебный предмет и концептуальные схемы учений Л.Д. Кудрявцева, Н.Х. Розова, А.А. Столяра, Л.М. Фридмана и др. В теории и практике сложился определенный понятийный аппарат курса математического анализа, включающий такие понятия, как функция, её предел, производная и первообразная.

Понятия математического анализа: первообразная функции, функция и производная функции – образуют систему понятий, представленную иерархией по операции дифференцирования, так как $F'(x) = f(x)$ и $F''(x) = f'(x)$ (схема 1).

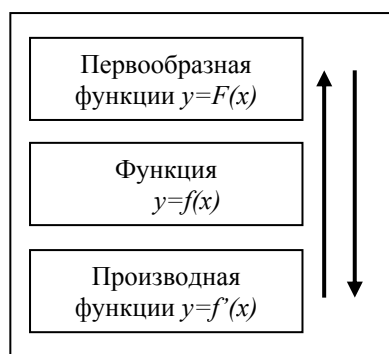


Схема 1. Иерархия понятий начал анализа

Приемом формирования системы понятий математического анализа, иерархия которой определена по операции дифференцирования, является перекодирование.

Традиционная трактовка понятия «перекодирование» – это переход от одной формы представления информации к другой, операция преобразования знаков или групп знаков одной знаковой системы в знаки или группы знаков другой знаковой системы.

Такой подход в теории и методике обучения математике используют Н.С. Подходова, О.А. Кожокарь и Е.Ф. Фефилова для конструирования задач, и в зависимости от того, каким способом будет представлена информация, классифицируют задачи на словесно-образные, образно-символьные, символьно-словесные и внутриобразные перекодировки.

А.В. Дюндин рассматривает понятие перекодирования на межпредметной связи понятий, то есть знания о понятии в одном изучаемом курсе переносятся в другой курс. И для определения уровня развития умения перекодировать информацию использует критерии: теоретический (знания о связях систем терминов, обозначений и графических образов различных предметных областей) и практический (умение применять знания при решении межпредметных упражнений и заполнении таблиц перекодировок).

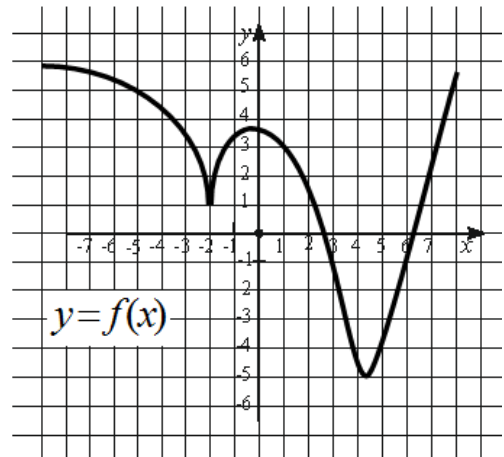


Рис. 1. График функции

Однако традиционного понимания перекодирования понятий математического анализа для формирования их систем, на наш взгляд, недостаточно.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача №1. По графику функции $y = f(x)$ (рис. 1) определите количество точек, при которых производная функции равна нулю или не существует? (Производная функции равна нулю в экстремумах. По графику (рис. 2) это означает, что в данных точках касательная будет параллельна оси абсцисс, а не существует в точках, где касательная параллельна оси ординат. Получаем ответ: три точки.)

Задача №2. По графику первообразной функции $y = F(x)$ (рис. 3) определите количество точек, при которых функция $y = f(x)$ равна нулю.

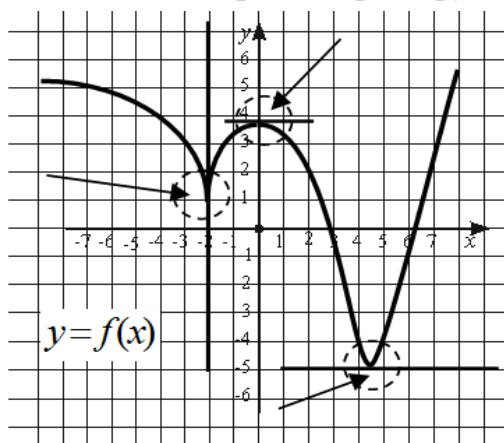


Рис. 2. Решение задачи №1

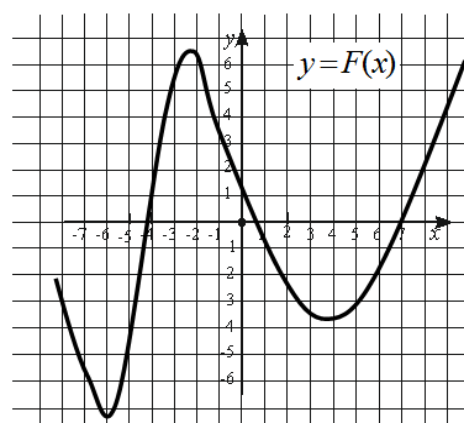


Рис. 3. Первообразная функции

Помня, что $F'(x) = f(x)$, можем перекодировать понятие «первообразная функции» в понятие «функция», а понятие «функция» в понятие «производная функции», и тогда задание звучит так: по графику функции определите количество точек, при которых производная функции равна нулю. Получается, что задачу №2 перевели в задачу №1, и необходимо на чертеже посчитать количество экстремумов. Таким образом, осуществлен перенос взаимосвязей

двух понятий – функция и производная – на два других понятия – первообразная и функция.

Приемом формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа, иерархия которой определена по операции дифференцирования, является перекодирование, классическое определение которого, как перехода от одного языка представления информации к другому, расширяется за счет переноса взаимосвязей двух понятий системы на два других понятия, не нарушающих иерархию данной системы.

В зависимости от количества понятий и характера выполняемых перекодировок выделены уровни сформированности у старшеклассников системы понятий математического анализа.

I уровень характеризуется выполнением перекодирования информации об одном понятии. Примером диагностики может служить задача типа: по графику функции $y = f(x)$ (рис. 4) определите, в каких значениях аргумента значение функции равно 7. (Ответ: при $x = -4$.)

На II уровне обучающийся выполняет задачи на перекодирование двух понятий математического анализа в традиционном понимании (переход от одной формы представления информации к другой). При решении задач обучающийся может переходить от графического представления понятия к его аналитическому представлению и наоборот. Диагностической является задача, в которой представлен графический образ одного понятия, а требуется характеристика другого понятия. Например, по графику производной функции $y = f'(x)$ (рис. 4) определите количество экстремумов функции $y = f(x)$. (Ответ: Одна точка.)

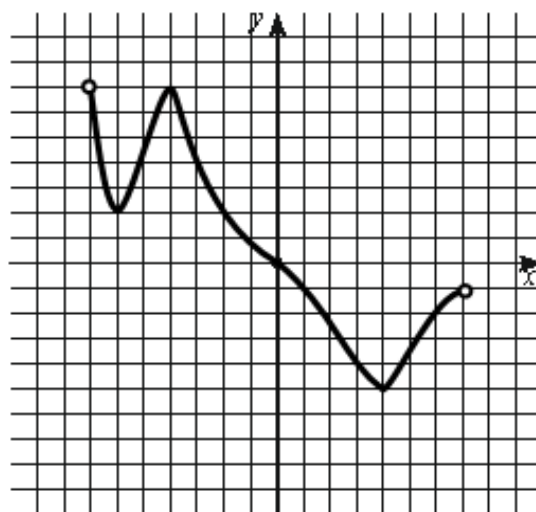


Рис. 4. График функции

Характеристики III уровня: понятия и факты математического анализа систематизированы, обучающийся демонстрирует быстрое и осознанное выполнение заданий как с графическими, так и с аналитическими представлениями, при этом обучающийся может связать понятия математического анализа в одну систему на основе приема перекодирования как переноса взаимосвязей между ними. Пример диагностики: по графику первообразной функции $y = F(x)$ (рис. 4) определите числовые промежутки, на которых функция $y = f(x)$ положительна. Ответ: $x \in (-6; -4) \cup (4; 7)$.

Отправной точкой для названия данного приема являются работы И.С. Якиманской, так как перекодированию она приписывает свободу оперирования образами, проявляющаяся в легкости и быстроте перехода от одного графического изображения к другому.

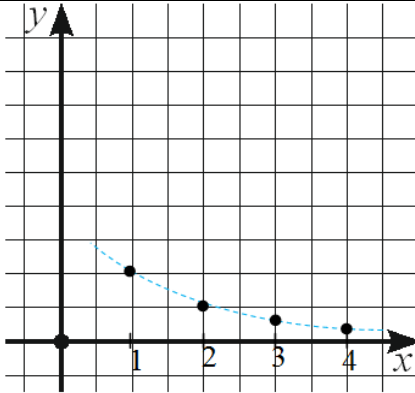
Во второй главе «Разработка и реализация методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализ на основе графических представлений» приводятся характеристики целевого, содержательного и процессуального компонентов соответствующей методики, описывается опытно-экспериментальная работа исследования, включающая констатирующий, поисковый и формирующий эксперименты.

Под методикой формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений будем понимать строго определенное педагогическое воздействие, направленное на установление взаимосвязей между понятиями математического анализа на основе оперирования старшеклассниками графических образов и проявляющееся при реализации целей и содержания соответствующего раздела школьного курса математики.

Специфику *целевого компонента методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений* отражают глобальная (формирование у старшеклассников системы понятий математического анализа) и интегративная (формирование у старшеклассников системы понятий школьного курса математики за счет получения опыта систематизации понятий математического анализа и его переноса на формирование других систем понятий школьного курса математики) цели.

Таблица 1

Пример предела последовательности как частного случая функции, определенной на множестве натуральных чисел

Пример последовательности	Графическое представление последовательности	Пояснение
$y_n = \frac{1}{n}$		<p>С увеличением номера члена последовательности, ее значение все больше стремится к нулю, так как происходит уменьшение значения, по сравнению с предыдущими. На графике видим, что последовательность стремится к нулю, но никогда ей равняться не будет, тем самым раскрывая графическое представление предела функции на бесконечности – горизонтальная асимптота.</p>

На каждом этапе обучения (формирование понятий и фактов теории пределов, дифференциального и интегрального исчислений) смоделированы цели формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений.

Так на первом этапе обучения, одной из целью является формирование понятия «предел функции на бесконечность» на основе графических представлений как горизонтальной асимптоты (табл. 1).

Содержательный компонент методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений раскрывается через содержание иерархических систем задач.

Под системой задач понимают совокупность упорядоченных и подобранных в соответствии с поставленной целью задач, действующих как одно целое, взаимосвязь и взаимодействие которых приводит к заранее намеченному результату. (Г.И. Ковалева)

Иерархической будем называть систему задач, включающую задачи:

1) направленные на формирование графических представлений понятий математического анализа;

2) решение которых требует использования приема перекодирования понятий как переноса взаимосвязей двух понятий системы на два других понятия, не нарушающих иерархию системы, определенную по операции дифференцирования.

Процессуальный компонент методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений реализуется через специфичные методы организации изучения понятий математического анализа и решения учащимися иерархических систем задач: наглядные (графические представления понятий, демонстрация фактов математического анализа на готовом чертеже), практические (построение графических образов, их изменение), индукция и дедукция (выведение основных фактов математического анализа – смысловой основы графических образов), проблемно-поисковые (учебные ситуации), методы стимулирования и мотивации учебно-познавательной деятельности (увеличение количества решаемых задач в иерархической системе), методы контроля и самоконтроля за эффективностью учебно-познавательной деятельности (методы сопоставления графических представлений и формально-логический рассуждений, построение соответствия между ними).

Представим компоненты методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений (схема 2).

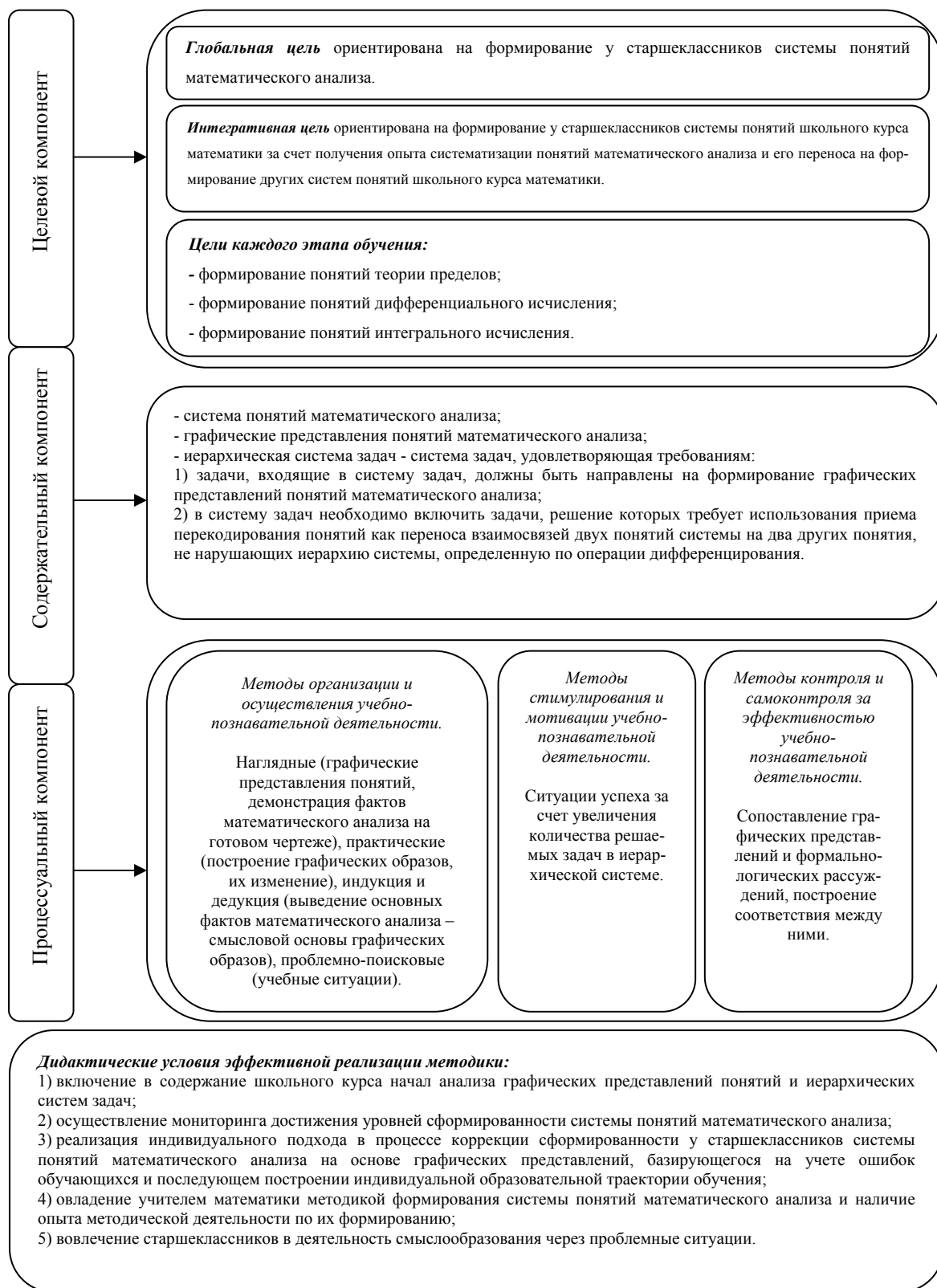


Схема 2. Компоненты методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений

Опытно-экспериментальная работа по оценке эффективности методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений проводилась на базе МОУ «СШ №92

Краснооктябрьского района Волгограда» и ГАОУ ДПО «Волгоградская государственная академия последипломного образования» с 2011 по 2016 гг. Она представлена констатирующим, поисковым и формирующим педагогическими экспериментами.

В опытно-экспериментальной работе приняли участие 253 человек, среди которых 56 учителей математики Волгограда и Волгоградской области.

Констатирующий эксперимент проводился с обучающимися 11 класса (40 человек) и с учителями математики на базе Волгоградской государственной академии повышения квалификации и переподготовки работников образования (56 человек).

Вывод констатирующего эксперимента: понятия математического анализа у большинства старшеклассников не систематизированы; учителя математики испытывают затруднения в формировании системы понятий математического анализа.

В ходе **поискового эксперимента**, в котором приняли участие старшеклассники (69 человек), апробировались отдельные системы задач, анализировались методические подходы к формированию системы понятий математического анализа у старшеклассников, уточнялась гипотеза исследования.

В результате были выделены следующие **дидактические условия эффективности методики** формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений:

1) включение в содержание школьного курса начал анализа графических представлений понятий и иерархических систем задач;

2) осуществление мониторинга достижения уровней сформированности системы понятий математического анализа;

3) реализация индивидуального подхода в процессе коррекции сформированности у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений, базирующейся на учете ошибок обучающихся и последующем построении индивидуальной образовательной траектории обучения;

4) овладение учителем математики методикой формирования системы понятий математического анализа и наличие опыта методической деятельности по их формированию;

5) вовлечение старшеклассников в деятельность смыслообразования через проблемные ситуации.

Цель **формирующего эксперимента** – доказать эффективность методики формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений. Формирующий эксперимент был

организован и проведен в естественных условиях учебного процесса на уроках алгебры и начал анализа обучающимися 11 классов (88 человек) МОУ «СШ № 92 Краснооктябрьского района Волгограда»: экспериментальная группа – 43 человека, контрольная группа – 45 человек. В контрольной группе изучение начал математического анализа проводилось по классической методике, в экспериментальной – по разработанной нами методике. Результат отразим при помощи таблицы (табл. 2) и диаграмм (диаграмма 1, диаграмма 2).

Таблица 2

*Результаты сформированности системы понятий
математического анализа*

в контрольной и экспериментальной группах после эксперимента

Уровень сформированности системы понятий математического анализа у старшеклассников	Результаты контрольной группы	Результаты экспериментальной группы
I уровень	17	6
II уровень	26	25
III уровень	2	12
Σ	45	43

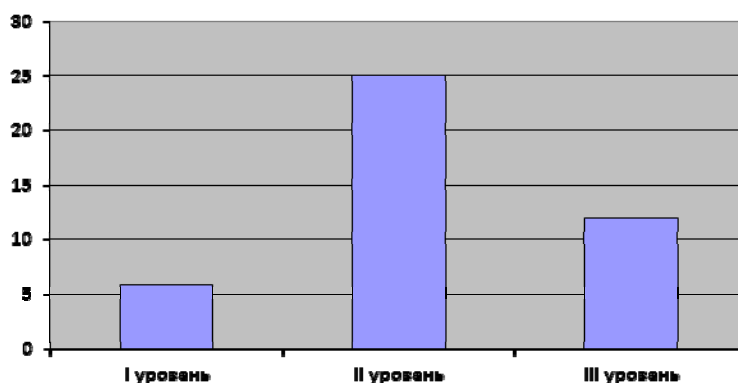


Диаграмма 1. Результаты сформированности системы понятий математического анализа в экспериментальной группе после эксперимента

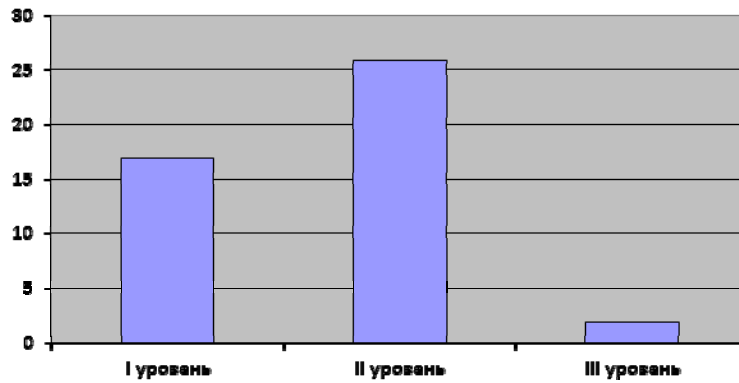


Диаграмма 2. Результаты сформированности системы понятий математического анализа в контрольной группе после эксперимента

Так как полученные статистические данные могут быть представлены в порядковой шкале, то целесообразно использование критерия однородности χ^2 .

Порядковая шкала с различными уровнями соответствует уровням сформированности системы понятий математического анализа у старшеклассников на основе графических представлений $L = 3$. Для экспериментальной группы вектор баллов есть $n = (6; 25; 12)$, для контрольной группы вектор баллов $m = (17; 26; 2)$.

Эмпирическое значение:

$$\chi_{эмп}^2 = N \cdot M \cdot \sum_{i=1}^L \frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i + m_i} = 43 \cdot 45 \cdot \left(\frac{\left(\frac{6}{43} - \frac{17}{45}\right)^2}{6+17} + \frac{\left(\frac{25}{43} - \frac{26}{45}\right)^2}{25+26} + \frac{\left(\frac{12}{43} - \frac{2}{45}\right)^2}{12+2} \right) \approx 12,39.$$

Так как $\chi_{эмп} = 12,39$ и $\chi_{0,05}^2 = 5,99$, следовательно $\chi_{эмп} > \chi_{0,05}^2$. Это означает достоверность различий характеристик экспериментальной и контрольной групп после окончания эксперимента составляет 95%. Следовательно, можно сделать вывод, что эффект изменений обусловлен именно применением экспериментальной методики обучения.

Таким образом, итоги контрольной работы показали, что экспериментальная группа лучше справилась со всеми заданиями, то есть осуществляемая нами методика позволила сформировать у старшеклассников систему понятий математического анализа.

Основные результаты исследования:

1. Обосновано значение графических представлений для формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа.
2. В традиционной системе понятий математического анализа выделена подсистема понятий (первообразная функции, функция и производная функции), иерархия которых определена операцией дифференцирования.

3. Построена уровневая модель сформированности у старшеклассников системы понятий математического анализа. Выделен прием перекодирования, владение которым инициируют уровни сформированности у старшеклассников системы понятий математического анализа.

4. Разработана методика формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений отличительной особенностью которой является организация деятельности старшеклассников по выявлению связей между понятиями соответствующего раздела школьного курса математики.

5. Раскрыты особенности построения иерархической системы задач как средства формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа.

6. Выделены дидактические условия формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗЛОЖЕНО В СЛЕДУЮЩИХ ПУБЛИКАЦИЯХ:

Статьи в рецензируемых журналах и изданиях, рекомендованных ВАК

1. Милованов, Н.Ю. Визуализация представлений понятий математического анализа как необходимое требование для их систематизации / Н.Ю. Милованов, Г.И. Ковалева // ИЗВЕСТИЯ Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота. – 2014. – №4(30). – С. 77–83 (авт. – 0,6 п.л.).

2. Милованов, Н.Ю. Иерархическая задача как основное средство формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа / Н.Ю. Милованов // Известия Волгоградского технического университета. – 2015. – №2(155). – С. 200–204 (0,6 п.л.).

3. Милованов, Н.Ю. Формирование у старшеклассников умения перекодировать информацию (на примере изучения понятий математического анализа) / Н.Ю. Милованов // Мир науки, культуры, образования. – 2016. – №1(56). – С. 45–47 (0,4 п.л.).

4. Милованов, Н.Ю. Перекодирование как прием формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа / Н.Ю. Милованов // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова. – 2016. – Т. 22 – №1 – С. 168–170 (0,5 п.л.).

Статьи, тезисы докладов и выступлений на научных конференциях и семинарах

5. Милованов, Н.Ю. Понятие симметрической производной / Н.Ю. Милованов // Математика. Информатика. Технологический подход к обучению в вузе и школе: Материалы всерос. науч.-практ. конф. г. Курган, 28–29 марта 2011 г. – Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2011. – С. 21–24 (0,25 п.л.).

6. Милованов, Н.Ю. Организация интегрированного урока по теме «Нахождение

определенного интеграла по формуле Симпсона» / Н.Ю. Милованов // Актуальные проблемы методики обучения математике в школе: сб. материалов II Всероссийской науч.-практ. конф. (с международным участием). г. Омск, 2012 г. – Омск: Полиграфический центр КАН, 2012. – С. 237–239 (0,2 п.л.).

7. Милованов, Н.Ю. Графическая интерпретация математических фактов как условие преемственности обучения математическому анализу в школе и ВУЗе / Н.Ю. Милованов // Электронный научно-образовательный журнал ВГСПУ «Грани познания». – №1(21), 2013. – С. 72–79 (0,5 п.л.).

8. Милованов, Н.Ю. Система задач на применение геометрического смысла производной / Н.Ю. Милованов, Т.Ю. Дюмина // Актуальные психолого-педагогические проблемы профессиональной подготовки: материалы IX Междунар. науч.-практ. конф., г. Стерлитамак, 30–31 января 2013 г. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2013. – Ч. 2. – С. 156–159 (авт. – 0,2 п.л.).

9. Милованов, Н.Ю. Проблемы преподавания начал анализа (на примере теоремы Вейерштрасса) / Н.Ю. Милованов // Актуальные проблемы обучения математике, физике и информатике в школе и вузе: сб. науч. ст. IV межрег. науч.-практ. конф. учителей. г. Пенза, 25–26 января 2013 г. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2013. – С. 98–102 (0,3 п.л.).

10. Милованов, Н.Ю. Наибольшее и наименьшее значение функции / Н.Ю. Милованов // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок». Сб. тезисов. г. Москва, 2012/2013 учебный год. – Москва: ИД «Первое сентября»; ООО «Чистые пруды», 2013. – С. 452 (0,2 п.л.).

11. Милованов, Н.Ю. Дифференциальные уравнения в школьном курсе математики / Н.Ю. Милованов // Актуальные проблемы обучения математике, физике и информатике в школе и вузе: сб. науч. ст. V межрег. науч.-практ. конф. учителей. г. Пенза, 2014 г. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2014. – С. 63–65 (0,2 п.л.).

12. Милованов, Н.Ю. Конструирование систем устных задач по математическому анализу / Н.Ю. Милованов // Теория и практика обучения математике в условиях модернизации общего образования: сб. научн.-метод. работ учителей математики Волгоградского региона. г. Волгоград, 2015 г. – Волгоград: Изд-во ВГАПО, 2015. – С. 101–105 (0,3 п.л.).

13. Милованов, Н.Ю. Перекодирование графических представлений при решении задач с понятиями математического анализа / Н.Ю. Милованов // Актуальные вопросы методики обучения математике и информатике: Материалы всерос. научно-практ. конф. препод. мат, информ. школ и вузов. г. Ульяновск, 16 декабря 2014 г. – Ульяновск: УлГПУ, 2015. – С. 105–109 (0,3 п.л.).

14. Милованов, Н.Ю. Анализ школьных учебников на наличие графических представлений понятий математического анализа / Н.Ю. Милованов // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы: сб. ст. XI Междунар. науч.-практ. конф. «Артемовские чтения». г. Пенза, 14–15 мая 2015 г. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2015. – С. 71–73 (0,3 п.л.).

15. Милованов, Н.Ю. Методические основы формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа / Н.Ю. Милованов, Г.И. Ковалева // Концепция развития математического образования: проблемы и пути реализации: Материалы XXXIV Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – Москва: Издательство: ООО «ГРП», 2015. – С. 79–83 (авт. – 0,2 п.л.).

16. Милованов, Н.Ю. Преимущество изучения понятий математического анализа при переходе из школы в вуз / Н.Ю. Милованов // Актуальные проблемы обучения физико-математическим и естественнонаучным дисциплинам в школе и вузе : сб. ст. VII Межрегион. Науч.-практ. конф. учителей (г. Пенза, 5-6 февраля 2016 г.) / под общ. ред. д-ра пед. наук, проф. М.А. Родионова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. – С. 73–77 (0,3 п.л.).

17. Милованов, Н.Ю. Иерархическая система задач как средство формирования понятий математического анализа / Н.Ю. Милованов // Система задач урока математики как средство построения индивидуальной образовательной траектории: приемы конструирования, проблемы и опыт использования: сборник материалов межрегионального научно-методического семинара. – Волгоград: ГАУ ДПО «ВГАПО», 2016. – С. 44–47 (0,4 п.л.).

18. Милованов, Н.Ю. Задачная технология открытия алгоритма нахождения наибольшего и наименьшего значений функции / Н.Ю. Милованов // Система задач урока математики как средство построения индивидуальной образовательной траектории: приемы конструирования, проблемы и опыт использования: сборник материалов межрегионального научно-методического семинара. – Волгоград: ГАУ ДПО «ВГАПО», 2016. – С. 128–130 (0,3 п.л.).

Учебно-методические работы

19. Милованов Н.Ю., Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Задания на готовых чертежах / Н.Ю. Милованов. – Волгоград: Учитель, 2015. – 106 с. (6,3 п.л.).

Милованов Н.Ю.

Методика формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений:
автореф. дис. ... канд. пед. наук. – Орел, 2017. – 26 с.

Подписано в печать 26.01.2017 г. Формат 60x80 1/16

Печатается на ризографе. Бумага офисная.

Гарнитура Times. Объем 1,5 усл. п.л. Тираж 100 экз.

Заказ № 14

Отпечатано с готового оригинал-макета
на полиграфической базе редакционно-издательского отдела

ФГБОУ ВО «ОГУ имени И.С. Тургенева»

302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95

Тел. (4862) 74-09-30