На правах рукописи

Башкатов Александр Валерьевич

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТЫХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ АГРЕССИВНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ СРЕДЫ

Специальность 05.23.17 — Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Тула 2017

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет».

Научный руководитель:	доктор технических наук, профессор **Трещев Александр Анатольевич**
Официальные оппоненты:	**Овчинников Игорь Георгиевич** доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина», кафедра «Транспортное строительство», профессор
	Трушин Сергей Иванович доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», кафедра «Строительная и теоретическая механика», профессор
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства» (г. Пенза).

Защита состоится «*15*» *сентября* 2017 г. в *12*:*00* часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.094.03 на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Юго-Западный государственный университет», федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева», федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Тульский государственный университет», по адресу: 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» http://www.swsu.ru.

Автореферат разослан «___» _____ 201_ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.т.н., доцент

Бакаева
Наталья Владимировна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Степень ее разработанности. Несмотря на развитие различных технологий одним из основных строительных материалов остается железобетон, запатентованный Жозефом Монье еще в 1867 году. Железобетон – это композитный нелинейный разносопротивляющийся материал, обладающий рядом преимуществ, таких как: длительный срок службы, огнеустойчивость, высокое сопротивление динамическим и статическим нагрузкам. Однако данного вида конструкции подвержены комплексу внешних воздействий, снижающих их работоспособность.

Опыт обследования железобетонных конструкций показывает, что агрессивные эксплуатационные среды являются одним из основных негативных факторов, влияющих на работоспособность инженерных сооружений из железобетона. Наиболее распространенной является хлоридсодержащая среда, основными источниками которой являются: технологические хлоридсодержащие среды; хлоридсодержащие средства-антиобледенители; морская вода и солевой туман, которые контактируют с поверхностью армированных конструкций. Действие агрессивных сред приводит к существенному изменению механических характеристик материала несущих конструкций, коррозионному поражению арматуры и бетона, что в итоге приводит к значительному снижению несущей способности, сокращению надежности и уменьшению срока службы зданий и сооружений.

Проблема же обеспечения долговечности и безопасности при проектировании, строительстве и эксплуатации различных зданий и сооружений, а особенно объектов фортификационных сооружений, промышленных предприятий и транспортных сетей является одной из важнейших сторон деятельности научно-исследовательских и проектных организаций во многих развитых странах мира. В Российской Федерации данный вопрос входит в перечень приоритетных направлений развития фундаментальных научных исследований в области архитектуры, градостроительства и строительных наук РААСН. Проведенный анализ существующих работ по изучению экспериментального и теоретического исследования поведения конструкций, эксплуатируемых в агрессивных средах, показал, что круг ученых, занимающихся данной тематикой достаточно мал. Основной вклад в изучение этой проблемы внесли такие ученые как В.М. Долинский, Н.С. Дядькин, И.Г. Овчинников, В.В.Петров, В.П. Селяев, В.И. Соломатов и другие. В своей работе Г.В. Карпенко утверждает то, что достаточно надежной физической теории, позволяющей корректно описать поведение материалов и конструкций в условиях действия агрессивных сред - нет, на сегодняшний день вопрос построения такой теории все еще открыт.

Таким образом, рассматриваемая в диссертационной работе задача определения напряженно-деформированного состояния слоистых армированных пластин из физически нелинейных материалов с учетом воздействия агрессивной среды и разрушения в форме трещинообразования, является актуальной, как в научном, так и в прикладном плане.

Объект исследования – слоистые армированные пластины на основе тяжелого бетона, с защитным верхним полимербетонным слоем, работающие в условиях воздействия механической нагрузки и агрессивной эксплуатационной среды.

Предмет исследования – новые оценки напряженно-деформированного состояния слоистых армированных пластин, с защитным полимербетонным слоем, работающих в условиях воздействия агрессивной эксплуатационной среды и механической нагрузки.

Целью диссертационной работы является построение модели, описывающей напряженно-деформированное состояние слоистых конструкций из армированных физически нелинейных разносопротивляющихся материалов с учетом воздействия агрессивной эксплуатационной среды.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи работы**:

1. провести анализ известных экспериментальных данных по влиянию агрессивных сред на изменение физико-механических свойств материалов и существующих теоретических работ по этому влиянию на напряженно-деформированное состояние конструкций из разносопротивляющихся материалов;
2. разработать математическую модель деформирования армированных слоистых пластин с учетом явления разносопротивляемости, воздействия агрессивной среды и повреждаемости в форме трещинообразования;
3. разработать и реализовать алгоритм расчета конструкций с учетом разносопротивляемости и нелинейности материала, повреждаемости в форме трещинообразования, а также действия агрессивной эксплуатационной среды;
4. используя разработанную в диссертации математическую модель и ее программную реализацию, выполнить апробацию модели путем решения серии типовых задач;
5. провести качественный и количественный анализ полученных результатов.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующих результатах, **выносимых на защиту**:

1. впервые представлена модель деформирования армированных слоистых пластин из нелинейных разносопротивляющихся материалов с учетом деградации слоя защитного материала под воздействием агрессивной среды и повреждаемости несущих слоев в форме трещинообразования;
2. разработан алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом разносопротивляемости и действия агрессивной эксплуатационной среды, а также повреждаемости в форме трещинообразования;
3. получены результаты расчетов, демонстрирующие новые количественные оценки влияния действия агрессивных эксплуатационных сред и внешней нагрузки на напряженно-деформированное состояние конструкций.

Теоретическая значимость работы:

1. проведен анализ известных экспериментальных данных по влиянию агрессивных сред на изменение физико-механических свойств материалов и существующих теоретических работ по этому влиянию на напряженно-деформированное состояние конструкций из разносопротивляющихся материалов;
2. разработана математическая модель деформирования армированных слоистых пластин с учетом явления разносопротивляемости, воздействия агрессивной среды и повреждаемости в форме трещинообразования.

Практическая значимость работы:

1. разработана прикладная программа для расчёта напряженно-деформированного состояния конструкций, выполненных из армированных разносопротивляющихся материалов в соответствии с построенной моделью;
2. получены результаты расчетов, демонстрирующие новые количественные оценки влияния действия агрессивных эксплуатационных сред и внешней нагрузки на напряженно-деформированное состояние конструкций, что доказывает необходимость совместного учета разносопротивляемости материала конструкций и воздействия агрессивной эксплуатационной среды.
3. результаты выполненной работы могут использоваться для проектных и поверочных расчетов конструкций, выполненных из армированных разносопротивляющихся материалов в условиях воздействия агрессивной среды и с учетом процессов разрушения в форме трещинообразования;
4. материалы диссертации могут быть использованы в рамках учебных курсов для магистрантов, проходящих подготовку по направлению 08.04.01 «Строительство».

Методология и методы исследования, использованные в диссертационной работе:

1. известные и апробированные теории по определению напряженно-деформированного состояния конструкций из разносопротивляющихся материалов, эксплуатируемых в условиях воздействия агрессивной эксплуатационной среды;
2. метод конечных элементов;
3. метод пошаговых нагружений;
4. метод переменных параметров упругости.

Достоверность представленных в исследовании положений и выводов подтверждается использованием общепринятых допущений и гипотез, базирующихся на фундаментальных положениях строительной механики и механики деформируемого твердого тела; использованием апробированных и проверенных на экспериментальных данных теоретических и эмпирических соотношений; корректным применением известных математических методов; хорошим согласованием экспериментальных и расчетных данных по силовому деформированию железобетонных пластин при различных опираниях и нагрузках.

Данная модель реализована численно с помощью метода конечных элементов в гибридной формулировке, все численные расчеты выполнены на ЭВМ с практической оценкой точности решения.

Внедрение результатов работы осуществлено в расчетную практику ООО «Инженерный центр промышленного проектирования» (г. Тула), ООО «Строительное Проектирование» (г. Тула). Программный комплекс используется указанными предприятиями для оценки ресурса прочности конструкций при проведении проектных работ, НИР и ОКР.

Использование результатов работы подтверждено актами о внедрении.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на международных и всероссийских конференциях:

- на VII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (2012 г., Пенза);

- на XIV, XV, XVI, XVII международной НТК «Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии» (2013, 2014, 2015, 2016 г., Тула);
- на Международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (2013, 2014 г., Тула);
- на VIII региональной молодёжной научно-практической конференции Тульского государственного университета «Молодёжные инновации» (2014 г., Тула);
- на II международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы механики в современном строительстве» (2014 г., Пенза);
- на 10-й, 12-й Международной конференции по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики» (2014, 2016 г., Тула);
- на VIII международном симпозиуме «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела» посвященного 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова (9-11 декабря 2015 г., Тверь);
- на I международной научно-практической конференции «Повышение надежности и безопасности транспортных сооружений и коммуникаций» (2015 г., Саратов);
- на Международной конференции, посвященной 85-летию кафедры железобетонных и каменных конструкций, 100-летию со дня рождения профессора, доктора технических наук Н.Н. Попова (19-20 апреля 2016 г., Москва);
- на VI Международном симпозиуме «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» VI International symposium «Actual Problems Of Computational Simulation In Civil Engineering» (15-20 августа 2016 г., г. Владивосток).

По результатам перечисленных конференций опубликованы тезисы и полные тексты докладов.

Реализация результатов работы состоялась при выполнении исследований госбюджетной НИР № 36-10 «Актуальные проблемы технологии строительных материалов и проектирования конструкций».

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 12 печатных работ, в том числе 4 в изданиях, рекомендуемых ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы и приложений. Работа изложена на 129 страницах основного текста, включающих в том числе 46 рисунков, 5 таблиц, список литературы из 254 наименований, и приложения на 60 страницах, содержащих результаты решения прикладных задач и технические акты внедрения. Общий объём работы — 224 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность диссертационного исследования, приводится описание отдельных глав работы, дается характеристика научной новизны, достоверности и практической значимости.

В первой главе диссертации проводится анализ известных экспериментальных данных по влиянию агрессивных сред на изменение физико-механических свойств материалов. По результатам проведенного анализа в качестве наиболее показательных с точки зрения кинетики агрессивной среды выбраны экспериментальные данные, полученные В.В. Петровым и П.В. Селяевым (см. рис. 1).

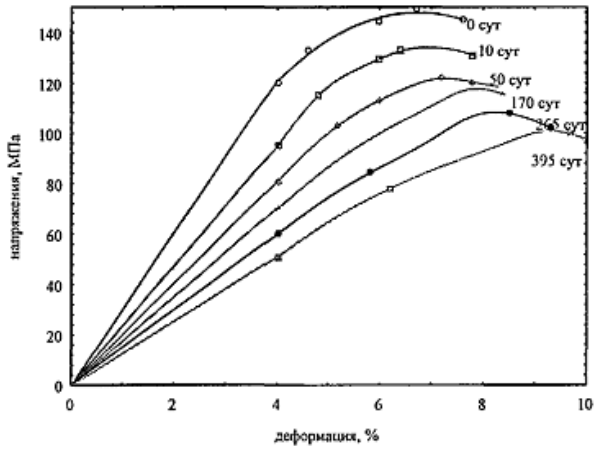

Рис. 1. Кривые деформирования эпоксидных бетонов в водном 20% растворе NaCl

Проводится исследование существующих теорий по описанию механического поведения материалов чувствительных к виду напряженного состояния. Рассматриваются работы множества российских и зарубежных авторов. Особое внимание уделяется универсальным определяющим соотношениям Н.М. Матченко и А.А. Трещёва, которые позволяют наиболее полно и адекватно описать поведение разносопротивляющихся материалов.

Приводится обзор существующих работ по определению влияния эксплуатационных сред на напряженно-деформированное состояние конструкций из армированных нелинейных разносопротивляющихся материалов.

Сделан вывод, что кинетику агрессивной среды наиболее корректно описывает методика, предложенная в работах В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова и О.В. Пениной, но данная методика не учитывает разносопротивляемость материала.

На основании обзора делается объективный вывод, что существующие определяющие соотношения не могут с достаточной точностью описать деформирование физически нелинейных разносопротивляющихся материалов с учетом кинетики агрессивной среды.

Во второй главе рассматривается потенциал деформаций в форме W_1 для начально изотропного, нелинейного разносопротивляющегося материала, предложенный в работах Н.М. Матченко и А.А. Трещева:

$$W_1 = \left(A_e + B_e\xi\right)\sigma^2 + \left(C_e + D_e\xi + E_e\eta\, Cos3\varphi\right)\tau^2 + \\ + \left[\left(A_p + B_p\xi\right)\sigma^2 + \left(C_p + D_p\xi + E_p\eta\, Cos3\varphi\right)\tau^2\right]^n; \quad (1)$$

где $\sigma = \delta_{ij}\sigma_{ij}/3$; $\tau = \sqrt{S_{ij}S_{ij}/3}$; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$; $\xi = Cos\psi = \sigma / S_0$; $\eta = Sin\psi = \tau / S_0$; $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$; $Cos3\varphi = \sqrt{2}\det(S_{ij})/\tau^3$; δ_{ij} – символы Кронекера; A_e, B_e, C_e, D_e, E_e,

A_p, B_p, C_p, D_p, E_p, n – константы, подлежащие экспериментальному определению, эксперименты заимствованы из работ А.А. Гвоздева и Р.Г. Касимова; ξ, η – нормированные нормальные и касательные напряжения на октаэдрической площадке. Зависимости между деформациями и напряжениями получены путем применения формул Кастильяно к потенциалу (1):

$$e_{ij} = \frac{\partial W_1}{\partial \sigma_{ij}}; \ (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Приводятся законы изменения объема и формы, а также фазовая характеристика для начально изотропных физически нелинейных разносопротивляющихся материалов, вытекающие из потенциала деформаций W_1, которые имеют вид:

$$e = \sigma / (3K_0) + \tau / (3D_0), \tag{3}$$

$$э = \sqrt{1 + tg^2\omega}\left[\tau / (2G_0) + \sigma / (3D_0)\right], \tag{4}$$

$$tg\omega = 3R\eta \sin 3\varphi / \left[3\eta / (2G_0) + \xi / D_0\right], \tag{5}$$

где K_0, G_0, D_0 - соответственно обобщенные функции модуля объемных деформаций, сдвига и дилатации; $e = e_{ij}\delta_{ij} / 3$ - средние деформации; $э = \gamma / 2$ - деформации сдвига на октаэдрической площадке; $\omega = \varphi - \beta$ - разность фаз напряженного и деформированного состояния.

В третьей главе в рамках теории деформирования пластин на основе выбранных определяющих соотношений рассмотрена модель гибридного изгибного треугольного конечного элемента (КЭ) треугольной формы с 5 степенями свободы в узле, учитывающая продольные усилия и деформации поперечного сдвига, позволяющая просто и эффективно исследовать НДС конструкций произвольной геометрии, в частности слоистых пластин. Данная модификация КЭ предложена и многократно апробирована в работах А.А. Трещёва и В.Г. Теличко.

Для описания связи между деформациями и перемещениями в рамках гипотез С.П. Тимошенко используются соотношения вида:

$$\begin{gathered} e_{11} = u_{1,1} + x_3\psi_{2,1}; \ e_{22} = u_{2,2} - x_3\psi_{1,2}; \ e_{33} = 0; \\ \gamma_{12} = u_{1,2} + u_{2,1} + x_3(\psi_{2,2} - \psi_{1,1}); \ \gamma_{13} = \psi_2 + w_{,1}; \gamma_{23} = -\psi_1 + w_{,2}, \end{gathered} \tag{6}$$

где u_k - горизонтальные перемещения; x_3 - координата по толщине; ψ_k - углы поворота срединной поверхности; γ_k - деформации поперечного сдвига; $w_{,k}$ - производная прогиба.

Уравнения равновесия слоистой армированной пластины записываются в традиционном виде:

$$\begin{gathered} N_{11,1} + N_{12,2} = 0; \qquad N_{12,1} + N_{22,2} = 0; \\ M_{11,1} + M_{12,2} = Q_1; \ M_{12,1} + M_{22,2} = Q_2; \ Q_{1,1} + Q_{2,2} = q. \end{gathered} \tag{7}$$

Зависимость между деформациями и напряжениями, вытекающая из потенциала W_1 (1):

$$\{e\} = [A]\{\sigma\}, \tag{8}$$

где $\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \tau_{12}\\ \tau_{13}\\ \tau_{23}\end{Bmatrix}$; $\{e\}=\begin{Bmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{23}\end{Bmatrix}$; $[A]=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{16} & A_{14} & A_{15}\\ & A_{22} & A_{26} & A_{24} & A_{25}\\ & & A_{66} & A_{64} & A_{65}\\ & sim & & A_{44} & A_{45}\\ & & & & A_{55}\end{bmatrix}$.

Здесь A_{11}, A_{12}, A_{16}, A_{14}, A_{15}, A_{22}, A_{26}, A_{24}, A_{26}, A_{66}, A_{64}, A_{65}, A_{44}; A_{45}, A_{55} - компоненты симметричной матрицы $[A]$ - функции включающие константы потенциала определяются W_1, обозначенные через R_k.

Связь между напряжениями и деформациями представим в виде:

$$\{\sigma\}=[B]\{e\}, \tag{9}$$

где $[B]=[A]^{-1}$.

Тогда усилия в сечениях пластины определяются следующим образом:

$$N_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}dx_3;\ M_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{ij}x_3dx_3;\ Q_i=\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{i3}dx_3,\ (i,j=1,2) \tag{10}$$

Связь между вектором обобщенных сил и вектором обобщенных деформаций срединной поверхности примет вид:

$$M=\begin{Bmatrix}M_{11}\\ M_{22}\\ M_{12}\\ Q_1\\ Q_2\\ N_{11}\\ N_{22}\\ N_{12}\end{Bmatrix};\ [D]=\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{16} & K_{14} & K_{15} & K_{11} & K_{12} & K_{16}\\ & D_{22} & D_{26} & K_{24} & K_{25} & K_{12} & K_{22} & K_{26}\\ & & D_{66} & K_{64} & K_{65} & K_{16} & K_{26} & K_{66}\\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{14} & C_{24} & C_{46}\\ & & & & C_{55} & C_{15} & C_{25} & C_{65}\\ & Sim & & & & C_{11} & C_{12} & C_{16}\\ & & & & & & C_{22} & C_{26}\\ & & & & & & & C_{66}\end{bmatrix};\ \{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\psi_{2,1}\\ -\psi_{1,2}\\ \psi_{2,2}-\psi_{1,1}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{23}\\ u_{1,1}\\ u_{2,2}\\ u_{1,2}+u_{2,1}\end{Bmatrix}; \tag{11}$$

где $C_{km}=\int_{-h/2}^{h/2}B_{km}dx_3$; $K_{km}=\int_{-h/2}^{h/2}B_{km}x_3dx_3$; $D_{km}=\int_{-h/2}^{h/2}B_{km}x_3^2dx_3$. - интегральные жесткостные функции, получаемые в результате выполнения численного интегрирования отдельных жесткостей по толщине элемента и зависящие от напряженного состояния.

В четвертой главе строится математическая модель для определения НДС армированных слоистых пластин с учетом разносопротивляемости основного несущего слоя - бетона, повреждения его трещинообразованием, комплексного воздействия агрессивной хлоридсодержащей среды на защитный не армированный слой двойного назначения (полимербетонный слой). Приведены результаты расчета некоторых модельных задач в сопоставлении с экспериментальными исследованиями Г. Баха и О. Графа, В. Гелера и Х. Амоса, представляющих особый интерес для реализации заявленной цели исследования.

Очевидно, что математическая модель определения НДС армированных слоистых пластин должна достаточно точно учитывать специфические особен-

ности взаимодействия сложной среды «бетон-арматура-защитный полимербетонный слой-агрессивная среда» на различных стадиях, быть вполне обозримой и практически реализуемой. Данная модель не может быть полностью свободной от дополнительных технических гипотез, в частности, считается справедливым следующее: 1) нагружение простое, деформация активная, деформации ползучести бетона не рассматриваются; 2) размеры пластин в плане велики по сравнению со средним расстоянием между арматурными стержнями арматура моделируется размазанным слоем с учетом коэффициента армирования слоя; 3) в качестве модели для стальной арматуры принимаем идеальное упругопластическое тело, воспринимающее только нормальные напряжения в поперечных сечениях, а ее коэффициенты Пуассона примем равными нулю; 4) в виду неоднородности конструкции по толщине пластина расчленяется на ряд фиктивных слоев: а) не армированные слои двойного назначения (полимербетонные слои); б) не армированные (бетонные) слои без трещин; в) армированные (железобетонные) слои без трещин; г) не армированные (бетонные) слои с трещинами; д) армированные (железобетонные) слои с трещинами; е) армированные (железобетонные) слои с пересекающимися трещинами. 5) Напряжения в пределах армированных слоев пластины определяются как сумма напряжений в бетоне и арматуре, а за условие совместности бетона и арматуры принимается равенство деформаций этих двух материалов; 6) срединная поверхность слоистых пластин представляется сетью гибридных конечных элементов модификации H12 с учетом разбиения по толщине на ряд фиктивных слоев; 7) жесткостные характеристики, рассчитанные для центра фиктивного слоя данного конечного элемента, распространяются на весь слой; 8) критерий прочности бетона в каждом фиктивном слое принимается согласно условию П.П. Баландина; 9) трещины в области треснувшего фиктивного слоя в пределах КЭ считаются сквозными и параллельными друг другу. Влияние растянутого бетона учитывается коэффициентом В.И. Мурашева и характеристикой поврежденности бетона; 10) при наличии трещин бетон в пределах фиктивного слоя моделируется трансверсально-изотропным телом с плоскостью изотропии, параллельной плоскости трещин; 11) при снижении напряжений учитывается условие разгрузки.

Рассмотрим моделирование фиктивных слоев.

Не армированные (бетонные) слои без трещин. Связь деформаций и напряжений имеет вид:

$$\{e\} = [A]\{\sigma\}, \tag{12}$$

где $[A]$ симметричная квадратная матрица размером 5x5 (при расчете пластин пренебрегаем напряжениями σ_{33}). Матрица «упругости» $[B]$ для каждого из неармированных слоев КЭ выражается через матрицу податливостей:

$$[B] = [A]^{-1}. \tag{13}$$

Армированные (железобетонные) слои без трещин. С учетом принятых гипотез напряжения в железобетонном слое принимаются как сумма напряжений в бетоне и арматуре, откуда получается матрица «упругости» для армированных слоев без трещин:

$$[B]=[A]^{-1}+\left[B_S\right] \tag{14}$$

где $\left[B_S\right]=\begin{bmatrix} B_{S11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & B_{S22} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & sim & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$; $B_{S11}=E_S\mu_{11}$; $B_{S22}=E_S\mu_{22}$; E_S – модуль упругости арматуры; $\mu_{11}=A_{Si}/S_{i11}h_S$, $\mu_{22}=A_{si}/S_{i22}h_S$ – коэффициенты армирования в направлении осей X_1 и X_2 исходной системы координат соответственно; A_{si} – площадь сечения арматурного стержня; S_{i11}, S_{i22} – шаг стержней, параллельных соответственно осям X_1 и X_2; h_S – суммарная толщина армированных слоев. Заметим, что компоненты матрицы $[A]^{-1}$ в выражении (14) определяются по формулам, в которых вместо полных напряжений σ_{ij} должны использоваться напряжения в бетоне – σ_{Bij}.

Не армированные (бетонные) слои с трещиной. Согласно гипотезе 8 трещины будут образовываться, если выполняется условие:

$$\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+3\cdot\left(\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{13}^2\right)-\left(\sigma_{11}\sigma_{22}\right)-\left(R_{bt}-R_b\right)\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)-R_{bt}R_b>0, \tag{15}$$

где $\sigma_{11},\sigma_{22},\tau_{12},\tau_{13},\tau_{23}$ – напряжения в бетоне в момент трещинообразования, рассчитанные для центра фиктивного слоя. Здесь R_{bt},R_b – предел прочности бетона при осевом растяжении и сжатии, соответственно. При моделировании треснувшего не армированного слоя считаем, что с появлением трещины не армированный слой в области данного КЭ не работает, т.е. матрица «упругости» имеет вид:

$$[B]=0. \tag{16}$$

Армированные (железобетонные) слои с трещиной. Появление трещин определяется по срабатыванию условия Баландина в пределах фиктивного слоя КЭ:

$$\begin{gathered}\sigma_{B11}^2+\sigma_{B22}^2+3\cdot\left(\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{13}^2\right)-\left(\sigma_{B11}\sigma_{B22}\right)- \\ -\left(R_{bt}-R_b\right)\left(\sigma_{B11}+\sigma_{B22}\right)-R_{bt}R_b>0\end{gathered} \tag{17}$$

где σ_{Bij} – напряжения в бетоне армированного слоя.

Направление развития трещин определяется величиной угла χ_1 между нормалью к трещине и осью X_1 исходной системы: $\chi_1=arctg[(\sigma_{1t}-\sigma_{B11})/\tau_{12}]$, где σ_{1t} - наибольшие из главных растягивающих напряжений в несущем слое (бетоне).

Рассматривая армированные слои с трещиной необходимо ввести дополнительную гипотезу: приемлемость потенциальных соотношений считается справедливой только для направлений вдоль трещин, где не нарушена целостность бетона. В данном направлении физически нелинейные свойства несущего слоя будем ап-

проксимировать секущим модулем упругости E_B и секущим коэффициентом поперечных деформаций ν_B, определяемыми из уравнения:

$$e_{22}^* = A_{12}^* \sigma_{B11}^* + A_{22}^* \sigma_{B22}^* = \left(\sigma_{B22}^* - \nu_B \sigma_{B11}^*\right) / E_B, \tag{18}$$

т.е. $E_B = 1 / A_{22}^*$; $\nu_B = -A_{12}^* / A_{22}^*$, где A_{12}^*, A_{22}^* – компоненты матрицы податливостей, рассчитываемые по формулам, в которых напряжения σ_{11} и σ_{22} необходимо заменить на напряжения, рассчитанные в ортогональной системе координат $X_1^* O X_2^*$, повернутой относительно исходной системы $X_1 O X_2$ на угол χ_1 – σ_{B11}^*, σ_{B22}^* соответственно напряжения в бетоне в этой системе координат.

Ввод этого условия обуславливается тем, что при возникновении параллельных друг другу трещин в области фиктивного армированного слоя поврежденного КЭ изотропный бетон приобретает свойства ортотропии. В связи с этим утрачивается приемлемость потенциальных определяющих соотношений, ориентированных на нелинейный, разносопротивляющийся изотропный материал.

Тогда зависимости между деформациями и напряжениями в повернутой системе координат примут вид:

$$\left\{e^*\right\} = \left[A^*\right]\left\{\sigma_B^*\right\}, \tag{19}$$

где

$$\left\{e^*\right\} = \begin{Bmatrix} e_{11}^* \\ e_{22}^* \\ \gamma_{12}^* \\ \gamma_{13}^* \\ \gamma_{23}^* \end{Bmatrix}; \left[A^*\right] = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22}^* & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66}^* & 0 & 0 \\ & Sim & & A_{44}^* & 0 \\ & & & & A_{55}^* \end{bmatrix}; \left\{\sigma_B^*\right\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{B11}^* \\ \sigma_{B22}^* \\ \tau_{B12}^* \\ \tau_{B13}^* \\ \tau_{B23}^* \end{Bmatrix};$$

$$A_{11}^* = 1/\left(E_B \omega\right);\ A_{12}^* = -\nu_B / E_B;\ A_{22}^* = 1/E_B;$$

$$A_{44}^* = A_{66}^* = 2\left(1+\nu_B\right)/\left(E_B \omega\right);\ A_{55}^* = 2\left(1+\nu\right)/E_B.$$

где в направлении оси X_1^* секущий модуль упругости (модуль деформации бетона) определяется величиной $E_B \omega$ (ω – функция, с помощью которой учитывается степень повреждения бетона $0 < \omega \le 1$). Тогда в исходной системе координат матрица податливостей для треснувшего бетона примет вид $\left[A^C\right]$:

$$\left[A^c\right] = \begin{bmatrix} A_{11}^c & A_{12}^c & A_{16}^c & 0 & 0 \\ & A_{22}^c & A_{26}^c & 0 & 0 \\ & & A_{66}^c & 0 & 0 \\ & \text{sim} & & A_{44}^c & 0 \\ & & & & A_{55}^c \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Матрица «упругости» для арматуры треснувшего армированного слоя в исходной ортогональной системе координат $X_1 O X_2$ имеет вид:

$$\left[B_S^C\right]=\begin{bmatrix} E_{S11}\mu_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_{S22}\mu_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & Sim & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \qquad (21)$$

где E_{S11}, E_{S22} – секущие модули деформаций арматуры, расположенной вдоль осей X_1 и X_2.

Матрицу «упругости» армированного слоя представим в виде

$$[B]=\left[B_B^C\right]+\left[B_S^C\right], \qquad (22)$$

где $\left[B_B^C\right]=\left[A^C\right]^{-1}$.

Для конкретизации модели треснувшего армированного слоя задается функция поврежденности ω, определяемая с помощью параметра В.И. Мурашева ψ_S, который учитывает работу растянутого бетона на участках между трещинами:

$$\psi_S = E_{sn} / \left(E_B\omega + E_{sn}\right), \qquad (23)$$

где E_{sn} – модуль упругости арматуры в направлении вдоль нормали к трещине,

$$E_{sn} = E_{S11}\mu_{11}\cos^4\chi_1 + E_{S22}\mu_{22}\sin^4\chi_1. \qquad (24)$$

Решая совместно уравнения (23) и (24) относительно функции поврежденности, получаем выражение вида:

$$\omega = \left(E_{S11}\mu_{11}\cos^4\chi_1 + E_{S22}\mu_{22}\sin^4\chi_1\right)\left(1/\psi_s - 1\right)/E_B. \qquad (25)$$

Параметр ψ_S вычисляем, используя эмпирическую формулу, рекомендованную в работах Гениева Г.А., Киссюк В.Н. и Тюпина Г.А.:

$$\psi_S = 1 - 0{,}7R_{bt} / \sigma_{11}^*, \qquad (26)$$

где подразумевается, что $\sigma_{B11}^* = 0{,}7R_{bt}$, а $\sigma_{11}^*, \sigma_{B11}^*$ – нормальные напряжения в железобетоне и бетоне на площадках, совпадающих с трещиной.

Конкретизировав выражение для σ_{B11}^* с учетом правил преобразования координат для напряжений σ_{Bij} получим нелинейное уравнение относительно ω:

$$\begin{aligned}&\left(B_{B11}^C e_{11} + B_{B12}^C e_{22} + B_{B16}^C \gamma_{12}\right)\cos^2\chi_1 + \left(B_{B12}^C e_{12} + B_{B22}^C e_{22} + B_{26}^C \gamma_{12}\right)\sin^2\chi_1 + \\ &+\left(B_{B16}^C e_{11} + B_{B26}^C e_{26} + B_{B66}^C \gamma_{12}\right)\sin 2\chi_1 = 0{,}7R_{bt}.\end{aligned} \qquad (27)$$

Решение этого уравнения строится в рамках метода последовательных приближений. Таким образом, матрица $\left[A^C\right]$ и компоненты матрицы «упругости» $[B]$ определяются по рассчитываемой функции поврежденности и параметра В.И. Мурашева.

Армированные (железобетонные) слои с пересекающимися трещинами. С учетом принятой модели армированного слоя с трещинами и введенных ранее гипотез, имеем что матрица «упругости» в пределах фиктивного слоя принимает вид:

$$\left[B\right]=\left[B_S^C\right], \tag{28}$$

где матрица $\left[B_S^C\right]$ определяется согласно условию (21).

Не армированные слои двойного назначения (полимербетонные слои), контактирующие с агрессивной средой. Моделирование осуществляется по аналогии с работами В.В. Петрова, И.Г. Овчинникова, О.В. Пениной и П.В. Селяева в области исследования влияния агрессивных сред на конструкционные материалы с учетом теории малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина при соответствующих изменениях.

Глубину слоя, пораженного агрессивной средой примем в виде нелинейного закона:

$$\delta\left(t\right)=\alpha\sqrt{t}\,, \tag{29}$$

где t – время воздействия агрессивной среды, α - экспериментальный коэффициент, зависящий от конкретной пары «материал – среда». С учетом процесса деградации материала выражения переменных секущего E_c и касательного модулей E_k примут вид:

$$E_c=E_c^0F(B(z));\;\; E_k=E_k^0F(B(z)), \tag{30}$$

здесь z – координата перпендикулярная срединной плоскости в направлении толщины пластинки; $B(z)$ – концентрация агрессивной среды, $F(B)$ – функция деградации модуля деформаций, тогда функция деградации примет вид:

$$\omega_{pb}=F(B(z))=\exp(-\lambda B(z)), \tag{31}$$

где $-\lambda=\dfrac{F'(B)}{F(B)}$ – относительная скорость изменения секущего и касательного модулей, $F'(B)$ – скорость деградации.

В соответствии с теорией А.А. Ильюшина и с учетом экспериментов В.В. Петрова и П.В. Селяева принимаем коэффициент Пуассона $\nu_b=0{,}5$. Связь деформаций и напряжений запишется следующим образом:

$$\left\{e^s\right\}=\left[A^s\right]\left\{\sigma^s\right\}, \tag{32}$$

$$\left\{e^s\right\}=\begin{Bmatrix} e_{11}^s \\ e_{22}^s \\ \gamma_{12}^s \\ \gamma_{13}^s \\ \gamma_{23}^s \end{Bmatrix};\; \left[A^s\right]=\begin{bmatrix} A_{11}^s & A_{12}^s & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22}^s & 0 & 0 & 0 \\ & & A_{66}^s & 0 & 0 \\ & Sim & & A_{44}^s & 0 \\ & & & & A_{55}^s \end{bmatrix};\; \left\{\sigma^s\right\}=\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^s \\ \sigma_{22}^s \\ \tau_{12}^s \\ \tau_{13}^s \\ \tau_{23}^s \end{Bmatrix}. \tag{33}$$

Здесь компоненты матрицы $\left[A^s\right]$ вычисляются согласно общему модельному представлению:

$$\begin{gathered} A_{11}^s=A_{22}^s=1/\left(E_c\omega_{pb}\right);A_{12}^s=-\nu_b/\left(E_c\omega_{pb}\right); \\ A_{44}^s=A_{66}^s=A_{55}^s=2\left(1+\nu_b\right)/\left(E_c\omega_{pb}\right);E_c=\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \end{gathered}, \tag{34}$$

где σ_i – интенсивность напряжений, ε_i – интенсивность деформаций. Модуль деформации полимербетона определим величиной $E_c\omega_{pb}$, где ω_{pb} – функция, характеризующая степень коррозионного повреждения $0 < \omega_{pb} \le 1$.

Матрицу «жесткости» слоя определим следующим образом: $\left[B^s\right] = \left[A^s\right]^{-1}$.

Численный анализ разработанной модели проводился на примере расчета напряженно-деформированного состояния железобетонных пластин. В качестве основы приняты железобетонные плиты, прошедшие глубокое экспериментальное исследование в опытах O. Bach и O. Graf, W. Gehler и H. Amos. Предложенные плиты были модифицированы добавлением в сжатую зону плит защитного слоя из тяжелого полимербетона, который в рамках предложенной задачи воспринимает внешнее воздействие сред. В табл. 1 приведены исходные данные для изгибаемых слоистых пластин, принятые на основании данных опытов с учетом их модификации.

Модуль упругости арматурной стали был принят равным $E_S = 2\times10^5 МПа$. Полимербетонный слой принят из эпоксидного бетона, начальный модуль упругости которого на основании нормативной литературы равен $E_b = 3,2\times10^5 МПа$. Агрессивная среда – 20% раствор NaCl, с плотностью $\rho = 1,219 г/см^3$. Константы потенциала (1) для материала пластин приняты в соответствии с работами Трещева А.А. для бетона $R^- = 28,4$ МПа.

Таблица 1.

№ плит	Размеры пластин, м	Предел текучести для арматуры, *МПа*	Коэффициенты армирования		Число фиктивных слоев по толщине	Толщина полимербетонного слоя, мм
			μ_{11}	μ_{22}		
771	3×1,5×0,189	320	0,0137	0,0092	32	40
825	2×2×0,152	480	0,0122	0,0122	26	30
844	2×2×0,106	480	0,0146	0,0167	28	20
863	3×2×0,151	428	0,0117	0,0117	34	30

Граничные условия для пластин принимались следующие в соответствии с принятыми в диссертации обозначениями. Для пластины №1 (плита №711): $w_i = 0$ в узлах по осям OX и OY; для пластин №2, №3, №4 (плиты №825, №844, №863): в угловых точках разрешены все перемещения, в других точках: 1) по сторонам параллельным оси OX $w_i = 0, \psi_{1i} = 0$, 2) по сторонам параллельным оси OY $w_i = 0, \psi_{2i} = 0$.

Наиболее характерные результаты расчетов для пластины №1 (плита №711) приведены на рис. 2-5.

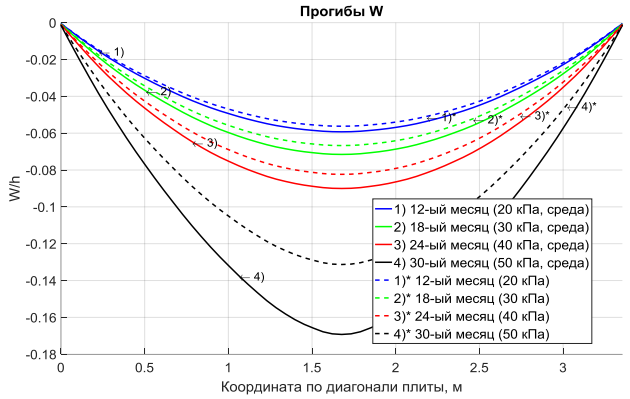

Рис. 2. Прогибы W

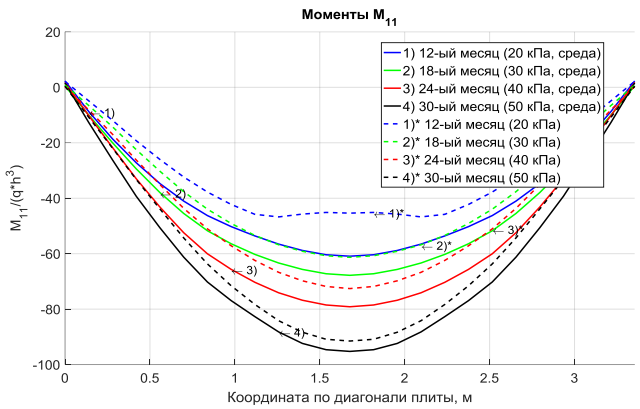

Рис. 3. Моменты M_{11} вдоль диагонали пластины

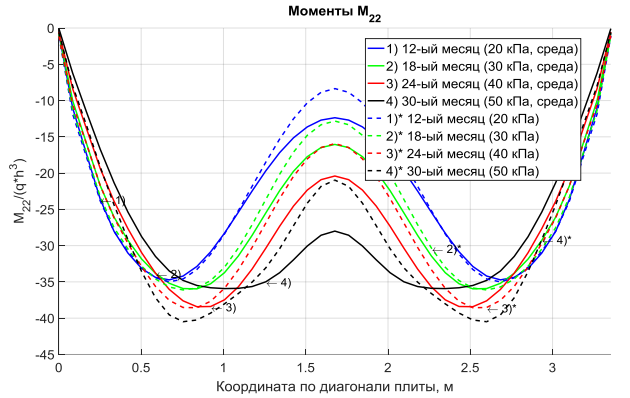

Рис. 4. Моменты M_{22} вдоль диагонали пластины

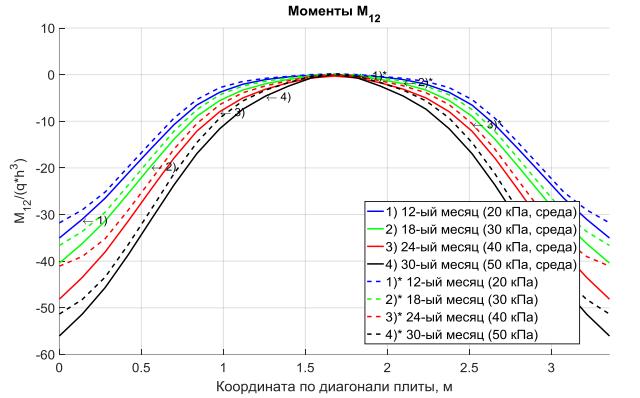

Рис. 5. Моменты M_{12} вдоль диагонали пластины

Приведенные графики моментов показывают наличие качественных эффектов, связанных с учетом разносопротивляемости, чувствительности материала к виду напряженного состояния и учета влияния агрессивной эксплуатационной среды. Из графиков видно, что по мере увеличения концентрации агрессивной среды в материале величина прогиба пластины увеличивается на 24%, а значение моментов, воспринимаемых пластиной, уменьшается на 25-28%.

Полные результаты расчетов слоистых армированных пластин из физически нелинейных материалов с учетом влияния агрессивной эксплуатационной среды представлены в диссертации.

В заключении приведены основные результаты, их анализ и выводы, сформулированные на основе проведенных в диссертации исследований.

В приложениях представлены графические материалы, иллюстрирующие результаты выполненных расчетов, а также акты внедрения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Проведен анализ известных экспериментальных исследований по влиянию агрессивных эксплуатационных сред на изменение физико-механических свойств материалов, существующих теоретических работ по учету влияния агрессивных сред на напряженно-деформированное состояние конструкций из разносопротивляющихся материалов.

2. Впервые разработана и реализована нелинейная математическая модель деформирования армированных слоистых пластин из разносопротивляю-

щихся материалов с учетом деградации слоя защитного материала под воздействием агрессивной эксплуатационной среды, разносопротивляемости и повреждаемости несущих слоев в форме трещинообразования.

3. С использованием предложенной математической модели и ее программной реализации решены прикладные задачи по определению напряженно-деформированного состояния слоистых армированных пластин из разносопротивляющихся материалов с учетом деградации слоя защитного материала под воздействием агрессивной эксплуатационной среды и повреждаемости несущих слоев в форме трещинообразования.

4. Проведенные в диссертации исследования показывают наличие количественных эффектов, связанных с учетом разносопротивляемости материалов, деградации слоя защитного материала под воздействием агрессивной эксплуатационной среды и повреждаемости несущих слоев в форме трещинообразования. Показано, что по мере увеличения концентрации агрессивной среды в полимербетонном слое, происходит перераспределение напряжений и деформаций. В частности, увеличение прогибов пластины до образования трещин, доходит до 17%, а после образования трещин и увеличения периода воздействия агрессивной эксплуатационной среды достигает 35%. Рост максимальных напряжений в железобетоне составляет до 20% при сроке влияния среды до 12 месяцев, при сроке 24 месяца и более, рост напряжений достигает 48%, а значение моментов, воспринимаемых пластиной, уменьшается на 25-28%. Результаты работы показывают, что по мере повреждения слоя защитного материала происходит ускорение процесса трещинообразования и увеличение величины трещин по толщине рассматриваемых пластин.

Таким образом, доказано, что при определении напряженно-деформированного состояния слоистых армированных пластин необходимо совместно учитывать разносопротивляемость их материала и воздействие агрессивной эксплуатационной среды.

Перспективы дальнейшей разработки темы диссертации. В рамках данной диссертационной работы рассмотрен плоский конечный элемент и только один вид конструкции – пластины. В дальнейшем возможно построение объемного конечного элемента, который позволит значительно расширить спектр решаемых задач. Так же, с целью расширения области применимости предлагается рассмотреть новые виды агрессивных сред.

СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

(публикации в изданиях, включенных в перечень ВАК):

1. **Башкатов, А.В.** Определение напряженно-деформируемого состояния комплексной железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды [Текст] / А.В. Башкатов, А.А. Трещев // Строительство и реконструкция. - 2016. - №6-(68). - С. 3-12.

2. **Трещев, А.А.** Определение напряженно-деформирован-ного состояния армированных плит из нелинейного материала с учетом воздействия

агрессивных сред [Текст] / А.А. Трещев, А.В. Башкатов, В.Г. Теличко // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering (Международный журнал по расчету гражданских и промышленных конструкций), Издательство Ассоциации строительных высших учебных заведений /АСВ/ (Россия, г. Москва) и Издательский дом Begell House Inc. (США, г. Нью-Йорк) Volume 12, Issue 4, 2016, - С. 147-152.

3. **Трещев, А.А.** Построение математической модели деформирования комплексной железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды [Текст] / А.А. Трещев, В.Г. Теличко, А.В. Башкатов // Научно-технический журнал по строительству и архитектуре Вестник МГСУ. - 2014. - №3. - С. 126-132.

4. **Башкатов, А.В.** Моделирование напряженно-деформиро-ванного состояния конструкций из железобетона и полимербетона с учетом влияния агрессивной среды [Текст] / А.В. Башкатов, В.Г. Теличко, А.А. Трещев // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. - Чебоксары: ЧувГПУ. 2014. - №4(22). - С. 18-26.

(публикации в других изданиях):

5. **Башкатов, А.В.** К вопросу о математической модели деформирования комплексной железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды / А.В. Башкатов, А.А. Трещев, В.Г. Теличко // Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики. 10-я Международная конференция по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики. Материалы конференции. Т. 2. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. - С. 61–68.

6. **Башкатов, А.В.** Математическая модель деформирования комплексной железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды / А.В. Башкатов, В.Г. Теличко, А.А. Трещев // Сборник научных статей II международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы механики в современном строительстве». - Пенза: Изд-во ПГУАС, 2014. - С. 21-29.

7. **Башкатов, А.В.** Модель расчета слоистых армированных плит под действием агрессивной среды / А.В. Башкатов, А.А. Трещев // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». - Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. - С. 123–131.

8. **Башкатов, А.В.** Определение напряженно- деформированного состояния комплексной железобетонной плиты с полимербетонным слоем под действием агрессивной среды / А.В. Башкатов, В.Г. Теличко, А.А. Трещев // Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики. 12-я Международная конференция по проблемам горной промышленности, строительства и энергетики. Материалы конференции. Т. 1. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. - С. 491-498.

9. **Трещев, А.А.** К расчету железобетонных композитных конструкций с учетом кинетики агрессивных эксплуатационных сред / А.А. Трещев, А.В. Башкатов // Сборник трудов I Международной научно-практической кон-

ференции «Повышение надежности и безопасности транспортных сооружений и коммуникаций» в 2 т. / под ред. Н.Е. Кокодеевой, Э.Ю. Шмагиной, А.В. Панкратовой. – Саратов: Издательский Дом «Райт-Экспо», 2015. – Т.2. – С. 142-148.

10. **Трещев, А.А.** Определение напряженно-деформированного состояния слоистых армированных конструкций с учетом разносопротивляемости и кинетики агрессивной эксплуатационной среды / А.А. Трещев, А.В. Башкатов, В.Г. Теличко // Современные проблемы расчета железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия: сборник докладов Международной конференции, посвященной 85-летию кафедры железобетонных и каменных конструкций 100-летию со дня рождения профессора, доктора технических наук Н.Н. Попова (19-20 апреля 2016 г., Москва) / под ред. А.Г. Тамразяна, Д.Г. Копаницы; М-во образования и науки Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. Гос. строит. ун-т. Москва: НИУ МГСУ, 2016. – С.459-466.

11. **Трещев, А.А.** Определение напряженно-деформирован-ного состояния композитных железобетонных конструкций с учетом воздействия агрессивных сред / А.А. Трещев, А.В. Башкатов, В.Г. Теличко // VI Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооруже-ний» VI International symposium “Actual Problems Of Computational Simulation In Civil Engineering ”, Российская Федерация, г. Владивосток, 15-20 августа 2016 года / Российская академия архитектуры и строительных наук, Дальневосточный федеральный университет, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Научно-исследовательский центр «Строительство», «Научно-исследовательский центр Ста-ДиО». – Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т, 2016. – С. 162 -163.

12. **Трещев, А.А.** Определение НДС композитных железобетонных конструкций с учетом кинетики агрессивных эксплуатационных сред / А.А. Трещев, А.В. Башкатов // Сборник материалов VIII международного симпозиума «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела» посвященного 85-летию со дня рождения заслуженного деятеля науки и техники РФ профессора В.Г. Зубчанинова. – Тверь: Изд-во ТГТУ, 2015. – С. 260-264.

Авторское редактирование

Подписано в печать 03.07.17
Формат бумаги 70х100 1/16. Бумага офсетная
Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 056к

Отпечатано в Издательстве ТулГУ
300012, г. Тула, просп. Ленина, 95