

На правах рукописи

Актуганов Александр Анварович

**РАЗВИТИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА
ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ФОРМЫ
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА
ПЛАСТИНОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

05.23.17 – Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Курск – 2015

Работа выполнена ФГБОУ ВО «Приокский государственный университет»

Научный руководитель: **Коробко Виктор Иванович**
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Шардаков Игорь Николаевич**
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБУН «ИМСС УрО РАН» (г. Пермь), заведующий
лабораторией интеллектуального мониторинга
Филатов Владимир Владимирович
кандидат технических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ» (г. Москва), доцент кафедр
«Строительная механика»

Ведущая организация: **ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет»**
(г. Новосибирск)

Защита состоится «22» декабря 2015 г. в 12-00 на заседании объединенного диссертационного совета ДМ 212.105.11, созданного на базе ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет», ФГБОУ ВО «Приокский государственный университет», ФГБОУ ВО «Брянский государственный инженерно-технологический университет» по адресу: 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» <http://www.swsu.ru>.

Отзывы на автореферат направлять в диссертационный совет по адресу: 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет»

Автореферат разослан « » 2015 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
д.т.н., доцент



Бакаева Наталья Владимировна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень её разработанности.

Пластинки являются одними из наиболее распространенных конструктивных элементов в строительстве и машиностроении. Основным их преимуществом является возможность сочетания легкости и рациональности форм с высокой несущей способностью, технологичностью и экономичностью. В особую группу пластинчатых конструкций входят пластинки на упругом основании, широко используемые в строительстве, авиа- и судостроении.

В настоящее время существуют точные аналитические решения для пластинок на упругом основании лишь для ряда частных случаев (прямоугольные и круглые пластинки с однородными граничными условиями). Расчет пластинок сложного вида с различными комбинациями граничных условий является весьма трудной задачей, которая решается в основном с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Тем не менее, в строительной механике по-прежнему остается актуальной проблема развития аналитических методов расчета данного типа конструкций, позволяющих с помощью достаточно простых функциональных зависимостей проводить анализ их напряженно-деформированного состояния. Одним из таких методов, интенсивно развивающихся в последние десятилетия, является метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ), предложенный профессором А.В. Коробко. Основой МИКФ является установленная аналогия между интегральными физико-механическими характеристиками (ФМХ) пластинок (максимальный прогиб, основная частота колебаний, критическая сила при потере устойчивости) и интегральной характеристикой формы пластинки (коэффициентом формы). Этот метод позволяет:

– свести решение сложных физических задач теории пластинок, описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа второго и четвертого порядков, к решению более простых геометрических задач;

– осуществить двустороннюю оценку результатов расчета;

– представить эти результаты в аналитической форме, а также в виде наглядных графических зависимостей интегральных физических характеристик пластинок F от коэффициента формы: $F - K_f$ (F – искомая ФМХ, K_f – коэффициент формы).

Одной из наиболее важных и сложных задач технической теории пластинок является задача оценки жесткости конструкции (определение максимального прогиба).

С помощью МИКФ решены задачи поперечного изгиба и свободных колебаний изотропных пластинок сложного очертания для различных

комбинаций граничных условий. Сопоставление полученных решений соответствующих краевых задач с известными точными и приближенными решениями, полученными другими способами, показало, что точность МИКФ является вполне удовлетворительной для инженерных расчетов. Однако до настоящего времени этот метод не применялся к расчету пластинок на упругом основании. В связи с этим тема настоящего исследования является актуальной.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются тонкие ($h/a \leq 1/5$, где h – толщина пластинки, a – наименьший размер пластинки в плане) упругие изотропные пластинки с малыми прогибами (не более $h/5$), имеющие форму произвольного треугольника и четырехугольника с выпуклым контуром и комбинированными граничными условиями, лежащие на упругом винклеровском и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, нагруженные равномерно распределенной по всей площади нагрузкой. Предметом исследования являются методы определения жесткости таких пластинок, в частности, с использованием метода интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ).

Целью диссертационной работы является развитие и применение метода интерполяции по коэффициенту формы к решению задач оценки жесткости изотропных пластинок на упругом основании.

Для достижения этой цели требуется решить следующие задачи:

1 Привести доказательство функциональной связи максимального прогиба при поперечном изгибе пластинок на упругом основании с их коэффициентом формы.

2 На основании свойства о двусторонней ограниченности коэффициента формы доказать численными расчетами, что все множество значений максимального прогиба пластинок на упругом основании в виде произвольных треугольников и четырехугольников с выпуклым контуром также ограничено с двух сторон.

3 Используя метод конечных элементов, найти значения максимальных прогибов упругих пластинок в виде равнобедренных треугольников, прямоугольников, ромбов и правильных фигур для двух моделей упругого основания (модели Фаусса-Винклера и П.Л. Пастернака) при различных вариантах граничных условий (комбинация условий шарнирного опирания и жесткого защемления по контуру).

4 Построить по полученным данным аппроксимирующие функции для граничных кривых, необходимые для выбора опорных решений.

5 Разработать методику расчета пластинок на упругом основании с помощью МИКФ.

6 Решить ряд тестовых задач определения максимального прогиба пластинок в форме параллелограммов, произвольных треугольников и равнобедренных трапеций, лежащих на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака с использовани-

ем различных аппроксимирующих функций.

Научная новизна работы определяется следующими результатами:

1) используя интегро-дифференциальные соотношения строительной механики пластинок, записанные в изопериметрическом виде, доказана аналитическая связь максимального прогиба пластинки w_0 , лежащей на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, с коэффициентом формы пластинки, имеющей выпуклый опорный контур;

2) построены кривые $B_w^q - K_f$, $C_w^q - K_f$ и $E_w^q - K_f$, ограничивающие все множество значений максимального прогиба четырех- и треугольных пластинок произвольного вида с комбинированными граничными условиями, лежащими на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, которые являются решениями соответствующих задач для пластинок в виде прямоугольников, ромбов и равнобедренных треугольников;

3) разработаны математический аппарат и методика применения МИКФ для определения максимального прогиба пластинок с комбинированными граничными условиями, лежащих на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, позволяющие без решения сложных дифференциальных уравнений эллиптического типа четвертого порядка определять их максимальный прогиб;

4) получены новые решения целого ряда задач для пластинок в виде параллелограмма, произвольного треугольника и трапеции, которые протестированы с помощью МКЭ.

Теоретическая и практическая значимость работы. В результате исследования была выявлена возможность определения жесткости четырехугольных пластинок с комбинированными граничными условиями, лежащих на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, под действием равномерно распределенной нагрузки, без решения соответствующих дифференциальных уравнений. Использование МИКФ позволяет представить искомые результаты в наглядном виде и оценить их место среди всего множества возможных решений для четырех- и треугольных пластинок.

Результаты работы использованы при проведении исследований по НИР, выполнявшихся в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ на оказание услуг (выполнения работ) по теме «Разработка и развитие инженерных методов решения задач технической теории пластинок на основе принципов симметрии и геометрического моделирования их формы» (2012 – 2014 гг.), регистрационный номер 7.587.2011.

Результаты исследований внедрены в учебный процесс ФГБОУ ВПО «Госунiversитет – УНПК» в рамках дисциплин: «Строительная механика», «Основы теории упругости и пластичности», «Вычислитель-

ные комплексы для расчета строительных конструкций».

Методология и методы исследования. При проведении теоретических исследований задач поперечного изгиба пластинок на упругом основании использовались классические методы технической теории пластинок, включая метод конечных элементов, геометрические методы строительной механики (изопериметрический метод и МИКФ), общенаучный метод аналогий, а также различные способы геометрического моделирования форм пластинок.

Положения, выносимые на защиту:

1 Аналитические зависимости, связывающие максимальный прогиб треугольных, четырехугольных пластинок, лежащих на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, нагруженных равномерно распределенной по всей площади нагрузкой, с коэффициентом формы пластинок.

2 Аналитические и графические зависимости $V_w^q - K_f$, $C_w^q - K_f$ и $E_w^q - K_f$, ограничивающие все множество значений максимального прогиба пластинок в форме равнобедренных треугольников, прямоугольников и ромбов с комбинированными граничными условиями, лежащими на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака.

3 Методика и математический аппарат определения максимального прогиба треугольных и четырехугольных пластинок при двух типах упругого основания с различными комбинациями условий шарнирного опирания и жесткого защемления по их сторонам.

4 Данные сравнительного анализа результатов расчета пластинок на упругом основании, полученных с использованием МИКФ и МКЭ.

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность научных положений и результатов подтверждается использованием фундаментальных методов строительной механики, решением большого количества тестовых задач и сравнением результатов расчета с результатами, полученными с помощью других методов и другими исследователями.

Апробация результатов работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава ФГБОУ ВПО «Госунiversитет – УНПК» (Орел, 2012...2015); на 3-й Всероссийской конференции «Проблемы оптимального проектирования сооружений» (Новосибирск, 2014); на Международных академических чтениях РААСН «Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения» (Курск, 2011, 2014), II международном семинаре «Перспективы развития программных комплексов для расчета несущих систем зданий и сооружений» (Курск, 2015).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 научных работ, в том числе 5 статей в журналах, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки России, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора технических наук.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 196 страницах, включая 177 страниц основного текста, и состоит из введения, 4 глав, основных результатов и выводов, списка литературы, включающего 143 наименования. В диссертации 49 рисунков и 12 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, его цели и задачи, обозначается объект изучения и методы его исследования, представляются основные положения, выносимые автором на защиту, и излагается краткое содержание диссертации.

В первой главе приводится краткий аналитический обзор известных точных и приближенных методов решения задач технической теории пластинок.

Теория упругих пластинок начала разрабатываться еще в 19 веке. Её активное развитие в 20 веке привело к тому, что в настоящее время техническая теория расчета пластинок считается завершённой.

Фундаментальные основы технической теории пластинок были разработаны известными российскими и советскими учеными: С.П. Тимошенко, И.Г. Бубновым, П.Ф. Папковичем, Ю.Н. Работновым, Б.Г. Галеркиным, Н.И. Мухелишвили, В.З. Власовым, А.А. Ильюшиным, М.И. Горбуновым-Посадовым, А.Р. Ржаницыным, Б.Н. Жемочкиным, П.М. Варваком, В.В. Болотиным, П.Л. Пастернаком, Л.В. Канторовичем и др. Иностраные ученые также внесли существенный вклад в развитие теории пластинок. Среди них: Г. Маркус, В. Ритц, В. Прагер, Д. Гильберт, Л. Релей, В. Ольшак, Э. Митчелл, Е. Треффц, Г. Полиа, Г. Сёге и др..

Из современных российских ученых, развивающих это направление исследований, следует выделить работы Трещёва А.А., Зубчанинова В.Г., Л.М. Роотса, В. И. Коробко, А.В. Коробко, Р.Ф. Габбасова и др.

На основании приведенного в диссертации обзора методов расчета пластинок, можно сделать выводы о том, что теоретические основы технической теории пластинок на сегодняшний день проработаны достаточно хорошо. Однако известные прямые методы имеют ограниченный диапазон применения, поскольку получены лишь для ряда частных случаев. Приближенные методы, среди которых наибольшее распространение получили численные, несмотря на очевидные преимущества, обладают

существенным недостатком. Они не дают возможности получения решений в аналитической форме; при их использовании теряется физический смысл полученного результата, трудно оценить его место среди пластинок других форм и другими граничными условиями. Вариационные методы позволяют получать аналитические решения, однако они дают приближение с одной стороны (либо сверху, либо снизу) и недостаточно полно разработаны для расчета пластинок сложной формы и сложными граничными условиями.

В строительной механике по-прежнему остается актуальной проблема развития приближенных аналитических методов для решения задач теории пластинок и, в частности, пластинок на упругом основании. Такую возможность представляют геометрические методы – изопериметрический метод и метод интерполяции по коэффициенту формы. Однако для расчета пластинок, лежащих на упругом основании, они до настоящего времени не применялись. Обобщая результаты проведенного обзора, была высказана *гипотеза* о подобии свойств интегральных физико-механических характеристик изотропных пластинок на упругом основании и их коэффициента формы в задачах поперечного изгиба. На основании этого были определены цели и задачи исследования.

Во второй главе приводятся сведения об интегральной геометрической характеристике формы области – коэффициенте формы. В общем случае его значение определяется контурным интегралом

$$K_{fa} = \oint_L \frac{ds}{h}, \quad (1)$$

где ds – линейный элемент контура области, h – перпендикуляр, опущенный из некоторого полюса внутри области D на линейный элемент контура ds (рисунок 1).

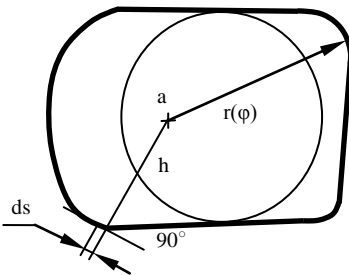


Рисунок 1 – Выпуклая область

Для любой выпуклой области значение данной характеристики имеет экстремум (минимум) в единственной точке «а». В диссертации используются только минимальные значения коэффициента формы.

Для характерных форм четырехугольников и треугольников коэффициент формы определяется по следующим формулам:

– для параллелограммов (рисунок 2) –

$$K_f = 4 \left(\frac{a}{h_1} + \frac{b}{h_2} \right) = 4 \frac{a/b + b/a}{\sin \alpha} = 4 \left(\frac{a}{h_1} + \frac{h_1}{a} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right); \quad (2)$$

– для ромбов –

$$K_f = 4 \frac{8}{\sin \alpha}; \quad (3)$$

– для трапеций (рисунок 4) –

$$K_{fa} = \frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{H - h_1} + \frac{H}{a_1 - h_1} \frac{1/\sin \alpha_1 + 1/\sin \alpha_2}{\text{ctg} \alpha_1 + \text{ctg} \alpha_2}. \quad (4)$$

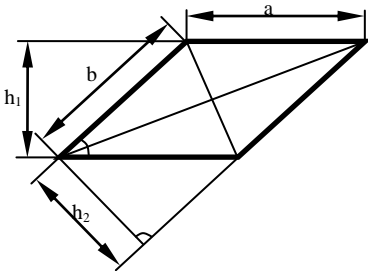


Рисунок 2 – Область в форме параллелограмма

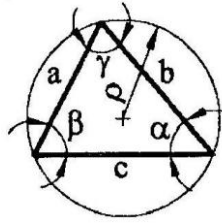


Рисунок 3 – Область в форме треугольника

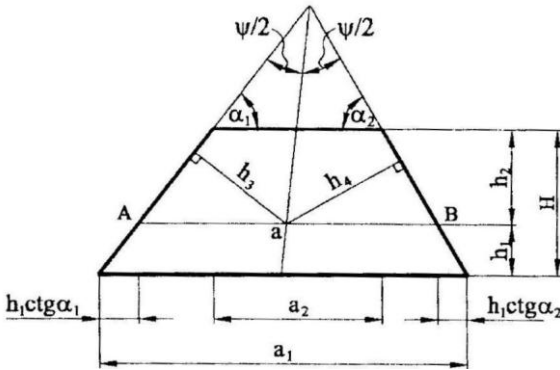


Рисунок 4 – Область в форме трапеции

– для треугольников произвольного вида (рисунок 3) –

$$K_f = 2 \text{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \text{ctg} \left(\frac{\beta}{2} \right) \text{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} \right). \quad (5)$$

В работах А.В. Коробко показано, что для определения максималь-

ного прогиба пластинок можно в общем виде использовать формулу

$$w_0 \approx K_w \frac{qA^2}{D}, \quad (6)$$

где K_w – коэффициент пропорциональности, зависящий от формы пластинки и граничных условий; q – интенсивность равномерной нагрузки; D – цилиндрическая жесткость пластинки; A – её площадь;

$$K_w = \frac{1}{0,5K_f^2 \int_0^1 g^{IV} \rho + 2g^{III} - g''\rho^{-1} + g'\rho^{-2} \, d\rho + K_f \pi \int_0^1 2g''\rho^{-1} - g'\rho^{-2} \, d\rho},$$

$g(\rho)$ – однопараметрическая функция прогибов, линии уровня которой подобны контуру и подобно расположены; ρ – безразмерная полярная координата.

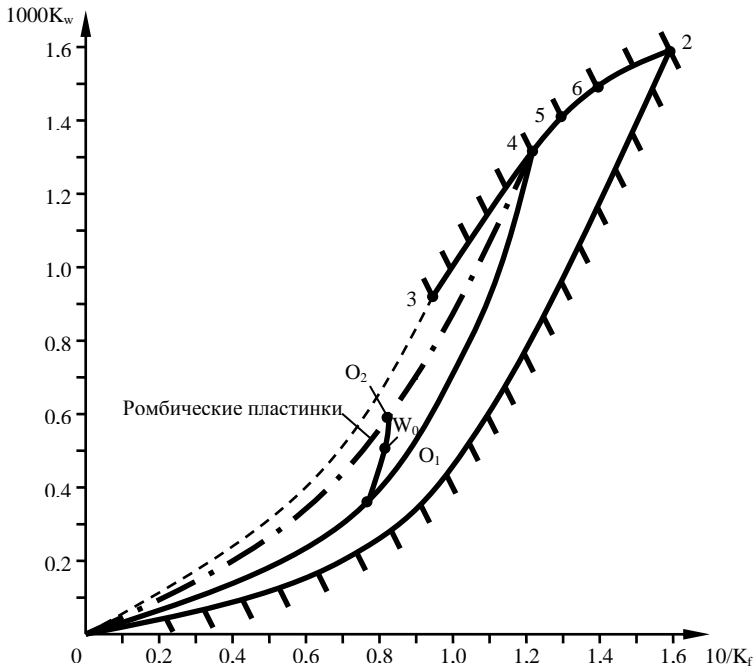


Рисунок 5 – Границы значений w_0 для жестко защемленных по контуру пластинок

При исследовании задач поперечного изгиба пластинок без упругого основания с помощью МИКФ было доказано, что все множество значе-

ний максимального прогиба пластинок ограничено с двух сторон (рисунок 5). На этом рисунке кривые 0-4 соответствуют прямоугольным пластинкам; 3-4-5-6-2 – правильным многоугольникам; 0-3 – равнобедренным треугольникам, 0-2 – пластинкам в виде эллипсов; штрихпунктирная кривая соответствует ромбическим пластинкам.

Аналогичные графики получаются и при шарнирном опирании пластинок, и в случае использования комбинированных граничных условий.

Анализ графиков на рисунке 5 показывает, что значения максимального прогиба для параллелограммных пластинок ограничены соответствующими значениями для прямоугольных и ромбических пластинок; значения максимального прогиба для трапециевидных пластинок ограничены соответствующими значениями прямоугольных и треугольных пластинок.

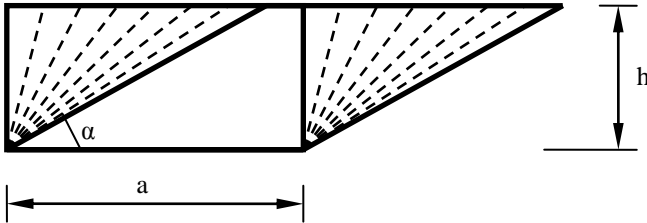


Рисунок 6 – Аффинный сдвиг прямоугольника

Суть метода интерполяции по коэффициенту формы заключается в следующем. Пусть необходимо найти максимальный прогиб параллелограммной жестко защемленной пластинки (точка W_0 на рисунке 5). Эту пластинку можно получить из прямоугольной с помощью её аффинного сдвига вдоль основания (рисунок 6). При таком преобразовании нужно построить аппроксимирующую кривую, объединяющую все решения для выбранного геометрического преобразования (кривая O_1-O_2 на рисунке 5). Если «опорные» (решения, лежащие на граничных кривых) известны, то такую кривую можно легко построить путем интерполяции опорных решений по коэффициенту формы.

Для получения искомых значений исследуемых ИФХ (F) пластинок используются следующие аппроксимирующие функции:

$$F = A_1 + A_2 K_f; \quad (7)$$

$$F = A_1 K_f^{A_2}; \quad (8)$$

$$F = A_1 + A_2 K_f^2. \quad (9)$$

Нами высказана гипотеза о том, что для пластинок, лежащих на упругом основании, рассмотренное свойство максимального прогиба о дву-

сторонней его ограниченности будет проявляться и в задачах поперечного изгиба пластинок на упругом основании. Доказать это можно путем численного решения большого числа задач, включая и пластинки, образующие указанные выше границы.

В третьей главе исследуется возможность применения МИКФ к расчету пластинок, лежащих на упругом винклеровском основании.

Запишем формулу для определения полной потенциальной энергии при поперечном изгибе пластинок на упругом винклеровском основании:

$$\Theta = \iint_A \left[\frac{D}{2} \nabla^2 w^2 - w q - kw \right] dA. \quad (10)$$

В изопериметрическом виде выражение (10) представляется следующим образом:

$$\Theta = \frac{D \cdot w_0^2}{4A} K_f^2 \Phi_g - 2Aq w_0 \int_0^1 g \rho \rho d\rho + 2Ak w_0^2 \int_0^1 g^2 \rho \rho d\rho; \quad (11)$$

$$\text{где } \Phi_g = \int_0^1 g''^2 \rho + 2g''g' + g'^2 \rho^{-1} d\rho.$$

Найдем экстремум этого функционала, продифференцировав полную энергию системы по параметру w_0 :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial w_0} = \frac{D w_0}{2A} K_f^2 \Phi_g - 2Aq \int_0^1 g \rho \rho d\rho + 4Ak w_0 \int_0^1 g^2 \rho \rho d\rho = 0.$$

Из этого выражения получим:

$$w_0 \left[\frac{D}{2A} K_f^2 \Phi_g + 4Ak \int_0^1 g^2 \rho \rho d\rho \right] = 2Aq \int_0^1 g \rho \rho d\rho. \quad (12)$$

Найдем величину, обратную максимальному прогибу:

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{q} K_f^2 \Phi_g / 4 \int_0^1 g \rho \rho d\rho \left[\frac{D}{A^2} + k \frac{1}{K_f^2} 8 \int_0^1 g^2 \rho \rho d\rho / \Phi_g \right]. \quad (13)$$

Поскольку определенные интегралы, входящие в (13), являются выражениями, зависящими от выбора функции $g(\rho)$, то их можно ввести в коэффициенты пропорциональности вместе с коэффициентом формы. В этом случае формула (13) примет следующий вид:

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{q} B_w^q \left[\frac{D}{A^2} + k C_w^q \right]. \quad (14)$$

Здесь

$$B_w^q = K_f^2 \cdot \Phi_g / 4 \int_0^1 g \rho \rho d\rho; \quad C_w^q = \frac{1}{K_f^2} \cdot 8 \int_0^1 g^2 \rho \rho d\rho / \Phi_g.$$

Значения коэффициентов пропорциональности B_w^q и C_w^q можно найти, зная максимальный прогиб пластинки при двух значениях коэффициента постели, причём один из них может быть равен нулю, то есть

соответствовать решению для пластинки без упругого основания, а другой – иметь произвольное отличное от нуля значение.

$$\frac{1}{w_{0\ k \neq 0}} = \frac{D}{qA^2} B_w^q \Rightarrow B_w^q = \frac{1}{w_{0\ k \neq 0}} \frac{qA^2}{D}; \quad (15)$$

$$\frac{1}{w_{0\ k \neq 0}} = \frac{D}{qA^2} B_w^q + \frac{k}{q} C_w^q = \frac{1}{w_{0\ k \neq 0}} + \frac{k}{q} C_w^q,$$

$$\frac{1}{w_{0\ k \neq 0}} - \frac{1}{w_{0\ k = 0}} = \frac{k}{q} C_w^q \Rightarrow C_w^q = \frac{q}{k} \left(\frac{1}{w_{0\ k \neq 0}} - \frac{1}{w_{0\ k = 0}} \right). \quad (16)$$

Значения параметров B_w^q и C_w^q не зависят от площади пластинки, коэффициента постели, цилиндрической жесткости и интенсивности равномерно распределенной нагрузки. Они зависят лишь от коэффициента формы искомой пластинки, а также от типа граничных условий.

Ввиду того, что выбранная поверхность прогибов представляет собой совокупность линий уровня, полученные зависимости будут справедливы только в том случае, если в процессе изгиба прогибы пластинки будут монотонно возрастать. Это ограничивает круг решаемых задач, так как при больших значениях коэффициента постели реакция основания будет весьма большой, что приведет к выгибу пластинки вверх и уменьшению прогибов. В связи с этим было введено ограничительное условие (17):

$$B_w^q \left[\frac{D}{A^2 k} + C_w^q \right] \geq 1. \quad (17)$$

Для применения МИКФ к решению задач поперечного изгиба изотропных пластинок на упругом основании были получены аппроксимирующие функции $B_w^q - K_f$ и $C_w^q - K_f$ для определенных классов форм областей (прямоугольников, ромбов и равнобедренных треугольников) при различных комбинациях граничных условий. Построение аппроксимирующих функций выполнялось путем численного решения соответствующих задач с использованием МКЭ в программном комплексе SCAD.

Для пластинок с однородными граничными условиями их общий вид представлен в формулах (18)...(33):

– прямоугольные пластинки, шарнирно опертые по контуру:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4, \quad (18)$$

$$C_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 \right]^{-1}; \quad (19)$$

– прямоугольные пластинки, жестко защемленные по контуру:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5 + gK_f^6, \quad (20)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5]^{-1}; \quad (21)$$

– ромбические пластинки, шарнирно опертые по контуру:

$$V_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4; \quad (22)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4]^{-1}; \quad (23)$$

– ромбические пластинки, жестко защемленные по контуру:

$$V_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5; \quad (24)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5]^{-1}; \quad (25)$$

– пластинки в форме равнобедренных треугольников с углом при основании менее 60° , шарнирно опертые по контуру:

$$V_w^q = a + bK_f + cK_f^2; \quad (26)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2]^{-1}; \quad (27)$$

– пластинки в форме равнобедренных треугольников с углом при основании менее 60° , жестко защемленные по контуру:

$$V_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4; \quad (28)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5]^{-1}; \quad (29)$$

– пластинки в форме равнобедренных треугольников с углом при основании более 60° , шарнирно опертые по контуру:

$$V_w^q = a + bK_f + cK_f^2; \quad (30)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2]^{-1}; \quad (31)$$

– пластинки в форме равнобедренных треугольников с углом при основании более 60° , жестко защемленные по контуру:

$$V_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3; \quad (32)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2]^{-1}; \quad (33)$$

Методика реализации МИКФ при решении конкретных задач для пластинок на упругом винклеровском основании заключается в следующем.

Максимальный прогиб искомой пластинки определяется по формуле (14). В этой формуле неизвестными являются величины коэффициентов V_w^q и C_w^q . Каждый из них находится независимо друг от друга путем построения аппроксимирующих кривых, соответствующих выбранному непрерывному геометрическому преобразованию. Данная операция возможна, если известны значения параметров V_w^q и C_w^q для «опорных» решений. Таким образом, проведя интерполяцию «опорных» решений V_w^q и

C_w^q по коэффициенту формы, находятся значения этих параметров для искомой пластинки. Подставляя их в (14), определяется максимальный прогиб заданной пластинки.

Нами рассматривались различные варианты использования различных аппроксимирующих функций и их влияние на точность получаемых результатов.

Представлены решения большого числа тестовых задач для пластинок на упругом винклеровском основании в форме параллелограммов, произвольных треугольников и равнобедренных трапеций, демонстрирующие точность результатов расчета с использованием МИКФ. Разница результатов этих расчетов по сравнению со значениями, полученными с применением МКЭ, не превышает 5,4 %.

В четвертой главе МИКФ применяется для расчета пластинок, лежащих на упругом двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака. В этом случае полная потенциальная энергия при поперечном изгибе пластинок на упругом двухпараметрическом основании может быть записана в виде формулы:

$$\Theta = \iint_A \left[\frac{D}{2} \nabla^2 w^2 - w q - C_1 w + C_2 \nabla^2 w \right] dA. \quad (34)$$

В изопериметрическом виде выражение (34) представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta = U + T = & \frac{Dw_0^2}{4A} K_f^2 \Phi_g - 2Aqw_0 \int_0^1 g \rho \cdot \rho dp + 2AC_1 w_0^2 \int_0^1 g^2 \rho \cdot \rho dp - \\ & - C_2 w_0^2 K_f \int_0^1 g \rho \cdot g'' \rho + g' \cdot dp; \end{aligned} \quad (35)$$

Продифференцируем полную потенциальную энергию системы по параметру w_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial w_0} = & \frac{Dw_0}{2A} K_f^2 \Phi_g - 2Aq \int_0^1 g \rho \cdot \rho dp + 4AC_1 w_0 \int_0^1 g^2 \rho \cdot \rho dp - \\ & - 2C_2 w_0 K_f \int_0^1 g \rho \cdot g'' \rho + g' \cdot dp = 0. \end{aligned}$$

Из этого выражения получим:

$$\begin{aligned} w_0 \left[\frac{D}{2A} \cdot K_f^2 \cdot \Phi_g + 4A \cdot C_1 \int_0^1 g^2 \rho \cdot \rho dp - 2C_2 \cdot K_f \int_0^1 g \rho \cdot g'' \cdot \rho + g' \cdot dp \right] = \\ = 2A \cdot q \int_0^1 g \rho \cdot \rho dp. \end{aligned} \quad (36)$$

Найдем величину, обратную максимальному прогибу:

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{q} K_f^2 \Phi_g / 4 \int_0^1 g \rho \rho d\rho \left[\frac{D}{A^2} + C_1 \frac{1}{K_f^2} 8 \int_0^1 g^2 \rho \rho d\rho / \Phi_g - \right. \\ \left. - \frac{C_2}{A} \frac{1}{K_f} 4 \int_0^1 g \rho \quad g'' \rho + g' d\rho / \Phi_g \right]; \quad (37)$$

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{q} B_w^q \left[\frac{D}{A^2} + C_1 C_w^q - \frac{C_2}{A} E_w^q \right]. \quad (38)$$

Здесь

$$B_w^q = K_f^2 \Phi_g / 4 \int_0^1 g \rho \rho d\rho; \quad C_w^q = \frac{1}{K_f^2} 8 \int_0^1 g^2 \rho \rho d\rho / \Phi_g; \\ E_w^q = \frac{1}{K_f} 4 \int_0^1 g \rho \quad g'' \rho + g' d\rho / \Phi_g.$$

Значения коэффициентов пропорциональности B_w^q и C_w^q можно найти, используя формулы (15) и (16), а коэффициента E_w^q – зная максимальный прогиб пластинки при $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ (w_0 $C_1 \neq 0, C_2 = 0$) и при $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ (w_0 $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$):

$$\frac{1}{w_0 C_1 \neq 0, C_2 \neq 0} = \frac{D}{qA^2} B_w^q + \frac{C_1}{q} C_w^q - \frac{C_2}{qA} E_w^q = \frac{1}{w_0 C_1 \neq 0, C_2 = 0} - \frac{C_2}{qA} E_w^q, \\ \frac{1}{w_0 C_1 \neq 0, C_2 = 0} - \frac{1}{w_0 C_1 \neq 0, C_2 \neq 0} = \frac{C_2}{qA} E_w^q \Rightarrow \\ \Rightarrow E_w^q = \frac{qA}{C_2} \left(\frac{1}{w_0 C_1 \neq 0, C_2 = 0} - \frac{1}{w_0 C_1 \neq 0, C_2 \neq 0} \right). \quad (39)$$

Значение параметра E_w^q зависит только от коэффициента формы искомой пластинки и вида граничных условий.

Для применения МИКФ к решению задач поперечного изгиба изотропных пластинок на упругом основании были получены аппроксимирующие функции $E_w^q - K_f$ для определенных классов форм областей: прямоугольников, ромбов и равнобедренных треугольников. Построение аппроксимирующих функций выполнялось путем численного решения соответствующих задач с использованием МКЭ в программном комплексе SCAD.

Полученные выражения будут справедливы только для случаев, когда прогибы пластинки при изгибе монотонно возрастают. В связи с этим было введено ограничительное условие (40):

$$B_w^q \left[\frac{D}{C_1 A^2} + C_w^q - \frac{C_2}{C_1 A} E_w^q \right] \geq 1. \quad (40)$$

Для пластинок с однородными граничными условиями их общий вид представлен в формулах (39)...(46):

– прямоугольные пластинки, шарнирно опертые по контуру:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 \right]^{-1}; \quad (41)$$

– прямоугольные пластинки, жестко защемленные по контуру:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 \right]^{-1}; \quad (42)$$

– ромбические пластинки, шарнирно опертые по контуру:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 \right]^{-1}; \quad (43)$$

– ромбические пластинки, жестко защемленные по контуру:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5 \right]^{-1}; \quad (44)$$

– пластинки в форме равнобедренных треугольников с углом при основании менее 60° , шарнирно опертые по контуру:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 \right]^{-1}; \quad (45)$$

– пластинки в форме равнобедренных треугольников с углом при основании менее 60° , жестко защемленные по контуру:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5 \right]^{-1}; \quad (46)$$

– пластинки в форме равнобедренных треугольников с углом при основании более 60° , шарнирно опертые по контуру:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 \right]^{-1}; \quad (47)$$

– пластинки в форме равнобедренных треугольников с углом при основании более 60° , жестко защемленные по контуру:

$$E_w^q = a + b K_f^{-1} + c K_f^{-2} + d K_f^{-3} + e K_f^{-4} \quad (48)$$

Методика применения МИКФ при решении задач поперечного изгиба изотропных пластинок на упругом двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака заключается в следующем.

Максимальный прогиб искомой пластинки определяется по формуле (37), в которой неизвестными являются значения параметров B_w^q , C_w^q и E_w^q . Их определяют путем построения аппроксимирующих кривых, соответствующих выбранному геометрическому преобразованию при известных значениях параметров B_w^q , C_w^q и E_w^q для «опорных» решений. Проведя интерполяцию «опорных» решений B_w^q , C_w^q и E_w^q по коэффициенту формы, находятся значения этих параметров для искомой пластинки.

Подставляя их в (37), определяется максимальный прогиб искомой пластинки.

Как и при исследовании винклеровского основания рассматривались различные варианты аппроксимирующих функций и их влияние на точность получаемых результатов.

В этой же главе представлены решения тестовых задач для пластинок в виде параллелограммов, произвольных треугольников и равнобедренных трапеций на упругом двухпараметрическом основании, подтверждающих точность результатов расчета с использованием МИКФ. Разница результатов этих расчетов по сравнению со значениями, полученными с применением МКЭ, не превышает 5 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщая результаты проведенных исследований, можно сформулировать следующие выводы.

1. Используя интегро-дифференциальные соотношения задачи расчета на поперечный изгиб упругих изотропных пластинок на упругом основании, были получены зависимости максимального прогиба пластинок от их коэффициента формы при двух типах упругого основания (модель Фаусса-Винклера и двухпараметрическая модель П.Л. Пастернака). Показано, что максимальный прогиб пластинок является величиной инвариантной по отношению к её площади, цилиндрической жесткости, действующей равномерно распределенной нагрузки и коэффициентам постели.

2. Разработан математический аппарат, позволяющий использовать методику метода интерполяции по коэффициенту формы к расчету пластинок на упругом основании.

3. С помощью МКЭ получены решения для определенных видов пластинок (равнобедренных треугольных, ромбических, прямоугольных) и построены в координатных осях $V_w^q - K_f$, $C_w^q - K_f$, и $E_w - K_f$ зависимости, ограничивающие все множество решений задачи о максимальном прогибе четырех- и треугольных пластинок произвольного вида с выпуклым контуром при различных комбинированных граничных условиях по их сторонам.

4. Разработана методика определения максимального прогиба пластинок в форме параллелограмма, произвольного треугольника и равнобедренной трапеции при двух типах упругого основания с различными комбинациями условий шарнирного опирания и жесткого защемления по их сторонам.

5. Решены тестовые примеры, которые показали, что отклонение результатов, полученных при решении рассматриваемых задач с помощью МИКФ и МКЭ, не превышают 5 %.

Полученные в данной работе зависимости $B_w^q - K_f$, $C_w^q - K_f$, и $E_w^q - K_f$ найдут практическое применение при создании программного комплекса по расчету пластинок на упругом основании с использованием МИКФ.

6. Анализ полученных решений позволил установить границы применимости МИКФ к расчёту пластинок на упругом основании. Поскольку принятая поверхность прогибов представляет собой совокупность линий уровня, подобных контуру и подобно расположенных, в ряде случаев из-за большого отпора грунта принятая гипотеза не соответствует реальной работе конструкции. В связи с этим в работе введены соответствующие ограничительные условия.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

Публикации в ведущих рецензируемых журналах и изданиях, входящих в перечень ВАК Минобрнауки РФ:

1. Коробко, В.И. Определение максимального прогиба прямоугольных пластинок на упругом основании с комбинированными граничными условиями [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Строительство и реконструкция. – 2011. №4. – С. 15-20.

2. Коробко, В.И. Определение максимального прогиба ромбических пластинок на упругом основании с комбинированными граничными условиями [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. №5. – С. 25-30.

3. Коробко, В.И. Определение максимального прогиба треугольных пластинок на упругом основании с комбинированными граничными условиями [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. №3. – С. 21-30.

4. Актуганов, А.А. Применение метода интерполяции по коэффициенту формы к расчету пластинок на упругом основании, нагруженных сосредоточенной силой [Текст] / А.А. Актуганов // Строительство и реконструкция. – 2013. №2 – С. 3-11.

5. Коробко, В.И. Применение метода интерполяции по коэффициенту формы к расчету пластинок на упругом основании [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. №1. – С. 18-25.

Публикации в других научных изданиях:

6. Коробко, В.И. Расчет пластинок на упругом основании методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Фундаментальные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2010 году. – Москва-Орел, 2011. – С. 261-267.

7. Коробко, В.И. Определение основной частоты колебаний пластинок на упругом основании методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения: материалы Международных академических чтений. – Курск: Курск. гос. ун-т, 2011. – С.89–96.

8. Коробко, В.И. Определение основной частоты колебаний пластинок на упругом основании с двумя коэффициентами постели методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Доклады 3-й Всероссийской конференции, Новосибирск, 15 – 17 апреля, 2014 г. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2014. – С.207–214.

9. Коробко, В.И. Определение критической силы при равномерном сжатии по контуру пластинок на упругом основании методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения: материалы Международных академических чтений. – Курск: Курск. гос. ун-т, 2014. – С.74–81.

Подписано к печати 08.10.2015 г. Формат 60x84 1/16.

Объем 1,0 усл. п.л. Тираж 100 экз. Заказ № _____

Отпечатано с готового оригинал-макета на полиграфической базе
ФГБОУ ВО «Приокский государственный университет»
302020, г. Орел, Наугорское шоссе, д. 29.