Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Орловский государственный университет имени И.С.Тургенева»

На правах рукописи

ЯРЕМКО Наталия Николаевна

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ КРИТЕРИАЛЬНО-КОРРЕКТНОСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРОВ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

13.00.02 – Теория и методика обучения и воспитания
(математика)

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени
доктора педагогических наук

Научный консультант
доктор педагогических наук, профессор
Селютин В. Д.

ОРЕЛ – 2016

Оглавление

Введение

Актуальность исследования. Современный этап развития высшего образования характеризуется выходом на личностный, метапредметный уровень усвоения содержания образования. Компетентностная парадигма высшего образования, ориентированная на достижение образовательных целей, поставленных обществом и сформулированных в ФГОС ВО, выводит на первый план формирование общекультурных, профессиональных и специальных компетенций, которые в процессе обучения наполняются конкретным предметным содержанием. Предметное математическое знание сегодня должно стать средством получения корректностного критерия любого предметного, межпредметного и метапредметного знаний.

В этих условиях остро встает проблема выделения наиболее общих, метапредметных понятий, которые могли бы служить основой интеграции, выступать в качестве методологии для достижения личностных и метапредпредметных результатов освоения основных образовательных программ, давать единый ориентир для формирования компетенций, как специальных предметных, так и профессиональных, общекультурных.

В качестве одного из таких метапредметных понятий, дающих возможность разрешения названных проблем, выступает понятие корректности в математической области знаний и смежных с ней областях: информатике, физике, методике обучения и воспитания.

Поэтому назрела потребность в **новом научном направлении**, охватывающем построение методических систем обучения математике, которые были бы основаны на понятии «корректность» как на ведущей идее. В частности, это вызвано необходимостью осуществления математической подготовки бакалавров физико-математических направлений на основе корректности.

Степень разработанности проблемы исследования. Вопросы, связанные с понятием корректности, достаточно часто возникают и получают свое решение в научной, практической, общественной сферах нашей жизни, в реальной действительности и в познании.

В математике и связанных с ней областях привычно употребляются понятия: корректность задачи, корректная постановка задачи, корректная формулировка задачи; корректность доказательства, корректность вопроса и ответа, корректность определения понятия, корректность метода, корректность изложения материала, корректность программного обеспечения, корректность алгоритма, корректность математической модели, корректность задания системы и т.п. В работе Б. В. Гнеденко «Математика и математическое образование в современном мире» [38] говорится о важном критерии оценки изложения учебного материала в школьном учебнике по математике – о его корректности. В различных областях знаний требуется оценка проведения экспериментального исследования, математической обработки результатов, сформулированных выводов с точки зрения общего критерия – с точки зрения их корректности.

В научных областях, традиционно считающихся далекими от математики, также нередки вопросы, связанные с корректностью. В общественной жизни широкую известность приобрели вопросы политкорректности; обсуждается корректность определения понятий «общество» – в исторических науках, «недвижимость» – в экономической сфере, «доказательная база» – в юриспруденции; корректность рекламы – одно из наиболее важных требований общественности; корректность программного обеспечения в теоретической информатике – давно принятый и утвердившийся термин. Корректность вопросов и ответов – непреложное требование при создании вопросно-ответных комплексов, проведении научных споров, дискуссий, формировании особого типа мышления, так называемого, интеррогативного, т.е. вопросно-ответного. Эти примеры убеждают в том, что «корректность» является признаком, мерилом, универсальным критерием, с помощью которого могут быть оценены разнообразные объекты как математической, так и нематематической природы.

Имеются смысловые различия в значении научных терминов и в общеупотребительной лексике, связанные с применением понятия «корректность» в качестве критерия. Смысл универсального критерия «корректность», примененного к математической задаче, различается в гуманитарных науках, например в педагогике и психологии, и естественно-научных областях знаний, в частности в математике: понятие «корректная и некорректная математическая задача» трактуется по-разному, имеет место ряд разночтений, несогласованностей в семантике и употреблении этого термина. Но, несмотря на это, в каждой из научных областей термин активно работает. Действительно, в естественно-научных и математических областях знаний особенно в последние десятилетия теория обратных и некорректных задач ввиду множественных приложений «завоевала право называться перспективной областью современной науки» – подчеркивает С. И. Кабанихин [58], развивающий идеи А. Н.Тихонова [142]-[149],[274],М. М. Лаврентьева [80]-[82], В. К. Иванова [56],[57]. Большой вклад в развитие теории обратных и некорректных задач вносят сегодня ученые-математики МГУ А. Г. Ягола [176], Ф. П. Васильев, А. М. Денисов [46], В. В. Морозов, М. М. Потапов, В. А. Садовничий, А. А. Самарский [120]. В педагогике и психологии В. А. Крутецким [75] показано, что некорректные математические задачи служат средством развития математических способностей; И. П. Калошина [59] обращает внимание на важную роль некорректных математических задач в связи с развитием творческой деятельности обучающихся и их дивергентного мышления; Ю.М.Колягин [63]-[65], Л. М. Фридман [157]-[161] используют некорректные задачи при обучении поиску решения задачи; Д. Пойа [105]-[107], [273] говорит о «unreasonable – лишенных смысла» задачах и «правильно поставленных или имеющих смысл – perfectly stated or reasonable». В психолого-педагогических статьях Н. Х. Розова и А. В. Боровских [25],[117] указывается на мировоззренческое значение таких важных математических понятий, как понятия хаоса, теории катастроф, точек бифуркации, некорректных задач; в научно-популярных публикациях В. И. Арнольда говорится об умении, «задавая разные вопросы и обращая внимание на детали, путем нестандартных размышлений прийти к истине» [14],[15], т.е. об умении рассуждать и делать правильные выводы при некорректном условии задач. Ученые-методисты обращают внимание на некорректные задачи, изучают их дидактические возможности: Т. И. Бузулина [163] рассматривает роль и место неопределенных задач, которые являются некорректными, на занятиях по аналитической геометрии; Н. И. Мерлина [86] предлагает открытые задачи; М. А. Родионов [115] – незавершенные задачи; Н. В. Аммосова [8]-[10] – открытые, с неполным, избыточным, противоречивым, неоднозначным составом условия; Т. Е. Демидова, А. П. Тонких [22] вводят типы некорректных задач с неполными, противоречивыми данными, переопределенные; Л. Л.Гурова [41] в типологию задач вводит «задачи, хорошо или плохо определенные»; А. Ф. Эсаулов [173]-[174] называет некорректные задачи средством активизации учебно-познавательной деятельности студентов. О психологических особенностях некорректных задач говорит М. А. Холодная [162]. Обсуждая философские проблемы математики, С. А.Лебедев [153]-[154] указывает на мировоззренческий потенциал обратных и некорректных математических задач, а В. Я. Перминов [94],[95],[154] анализирует строгость математического доказательства, связывая его с корректностью.

В докторских и кандидатских исследованиях по теории и методике обучения математике используется критерий корректности для оценки элементов математического содержания: В. С. Корнилов [67] изучает дидактические возможности обратных и некорректных задач; М. В. Егупова [50] применяет критерий корректности к образовательному продукту; Г. И. Ковалева [61] указывает на важную роль некорректных задач при конструировании систем задач;
Т. А. Безусова [22] провела исследование о роли некорректных задач в развитии культуры математического мышления.

В высшей школе в соответствии с насущными потребностями практики изменяется содержание математической подготовки бакалавров, и теория некорректных задач включается в программы учебных курсов, а сами некорректные и обратные задачи становятся объектом профессиональной деятельности бакалавров, т.к. являются аппаратом исследования и решения профессиональных задач математиков, физиков, программистов – бакалавров и магистров физико-математических направлений подготовки. В ответ на запросы общества методы теории некорректных задач, ее терминология, понятия используются все активнее в практике работы не только высшей, но и средней, и даже начальной школы.

Компетентностный подход, принятый в современной высшей школе и закрепленный во ФГОС ВПО, ФГОС ВО [152] акцентирует внимание на результатах образования, рассматриваемых как совокупность компетенций, освоенных выпускником. Их основной смысл сводится не к сумме усвоенных знаний (информации), а к способности выпускника действовать в различных, в том числе и некорректных условиях, к готовности работать с некорректными объектами, владеть техникой распознавания корректности и некорректности объектов, механизмами преобразования некорректности в корректность при недостатке, переизбытке или противоречивости данных. Методология действий в подобных ситуациях разрабатывается теорией обратных и некорректных задач.

Практические потребности широкого использования понятия «корректность» закреплены во всех версиях Федеральных государственных образовательных стандартов Высшего образования [152]. Во ФГОС ВПО 2010 г. метапредметные образовательные результаты освоения основных образовательных программ и характеристика профессиональной деятельности бакалавров физико-математических направлений:010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки», 010400 «Прикладная математика и информатика» и 010800 «Механика и математическое моделирование» содержат формулировки, связанные с понятием «корректность». Например: «Знание корректных постановок классических задач, понимание корректности постановок задач, умение корректно сформулировать полученный результат». Во ФГОС ВО 2014 г. сформулирован объединенный список компетенций для направлений 010301 «Математика», 010303 «Механика и математическое моделирование», 020301 «Математика и компьютерные науки» в котором присутствуют: «Способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики (ПК-2); способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата (ПК-3)». Для направления подготовки 010302 «Прикладная математика и информатика» обратные и некорректные задачи названы среди объектов профессиональной деятельности, наряду с моделями, методами, к которым критерий корректности может быть применен.

Таким образом, в настоящее время нашли свое выражение на уровне практических педагогических потребностей положения о целесообразности использования универсального критерия «корректность» в практике работы высшей школы; о необходимости выделения специфического вида межпредметной математической подготовки, названной в работе критериально-корректностной математической подготовкой бакалавров физико-математических направлений; о насущной потребности разработки теории и методики такого вида подготовки в качестве отдельной научно-методической проблемы, находящейся в рамках общей проблемы математической подготовки студентов университета.

Общие теоретические основы математической подготовки студентов вуза в разное время разрабатывались такими учеными, как Н. Я. Виленкин, Г. Л. Луканкин, А.Г.Мордкович, А. А. Столяр, В. А. Тестов, М. И. Шабунин, и др. В диссертационных исследованиях рассматривались различные более частные проблемы организации математической подготовки в вузе: теоретико-методологические и методические основы профессиональной направленности образования (А. Г. Мордкович, О. Г. Ларионова); построение дидактических систем математической подготовки (Л. Н. Журбенко, Е. И. Смирнов); гуманитаризации и гуманизации математического образования (Н. В. Набатникова, Г. И. Саранцев); теоретико-методологические основы профессиональной подготовки в вузе (Г. Л. Луканкин, Н. А. Сеногноева, А. В. Ястребов). Многоуровневая историко-математическая подготовка будущего учителя математики рассматривалась Ю. А.Дробышевым [48], мониторинг математической подготовки студентов вуза – Т. А. Табищевым. Научно-педагогические основы интенсификации обучения математическим дисциплинам и принцип разумной логической строгости рассмотрены в докторской диссертации В. Т. Петровой [96]; о воплощении принципа неформальной строгости говорится в докторском исследовании С. А. Розановой [116].

Однако можно констатировать, что в настоящее время отсутствует целостная система, обеспечивающая межпредметную математическую подготовку бакалавров, которая реализует идею корректности при обучении математике, основана на приемах обоснования корректности, распознавания некорректности объектов и преобразования ее в корректность, вооружает механизмами действий в условиях некорректности. Понятие математической корректности ранее не изучалось с методологической и методической точек зрения, не разрабатывались возможности его использования в качестве теоретической основы, в качестве ведущей идеи, универсального критерия в математической подготовке бакалавров. Межпредметную математическую подготовку, нацеленную на освоение студентами критерия корректности элементов математического образования и его дальнейшего переноса в профессиональную и личностную сферы, мы назвали критериально-корректностной. В процессе этого нового вида математической подготовки формируется критериально-корректностная компетентность бакалавров, позволяющая выпускникам эффективно действовать в условиях некорректности, оперировать как корректными, так и некорректными объектами различной природы.

Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью устранения объективно существующих **противоречий** между:

– современными задачами, связанными с реализацией компетентностной парадигмы в высшем образовании, и имеющими место объективными недостатками в реальной системе образования, недостаточно реализующей идею корректности в основных компонентах математического содержания;

– объективной необходимостью широкой интеграции в образовательном процессе на основе метапредметных понятий, к которым относится понятие «корректность», и существующей предметной разрозненностью математической подготовки, разночтениями в трактовках корректности элементов математического содержания, в частности, математической задачи;

– интегративным характером общекультурных, профессиональных, специальных компетенций и существующим опытом предметной математической подготовки, не имеющей общей интегрирующей основы; необходимостью формирования компетенций на метапредметном содержании и недостаточной разработанностью такого математического «мета-содержания», к которому можно отнести универсальный критерий – понятие «корректность»;

– потребностью профессионала в его ежедневной практической деятельности наряду с корректными, решать некорректные задачи, работать с некорректными объектами, объективной необходимостью формирования активной, творческой личности, умеющей действовать в многообразии неоднозначных условий – недостатка, переизбытка и даже противоречивости данных, – и существующей образовательной практикой, в которой отсутствует такой специальный вид подготовки, вооружающей профессионалов универсальным критерием «корректность» и методологией действий в условиях некорректности, действий по обоснованию корректности, распознаванию некорректности и преобразованию ее в корректность.

С учетом противоречий, определивших актуальность исследования, был сделан выбор **темы исследования**: «Теоретико-методические основания критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений».

Проблема исследования: каковы сущность, теоретическое обоснование, конструирование и реализация методики критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений.
В целях решения этой проблемы проведено данное исследование.

Объект исследования: математическая подготовка бакалавров физико-математических направлений

Предмет исследования: теоретические и методические основания критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений: 010301 «Математика», 010302 «Прикладная математика и информатика», 010303 «Механика и математическое моделирование», 020301 «Математика и компьютерные науки» и 010304 «Прикладная математика».

Целью исследования является разработка теоретических основ и создание методики критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений, а также обоснование ее эффективности.

Гипотеза исследования основана на предложении автора использовать понятие «корректность» в качестве стержневой системообразующей идеи в процессе математической подготовки бакалавров физико-математических направлений и состоит в предположении, что рассматриваемая в качестве ее обязательного компонента критериально-корректностная математическая подготовка будет эффективной, если этот вид подготовки

– в ответ на социальный заказ общества обеспечивает с единых позиций формирование профессионала для работы в условиях корректности/ некорректности, умеющего оперировать корректными и некорректными объектами произвольной природы;

– реализует целенаправленный, целостный шестиэтапный процесс формирования критериально-корректностной компетентности, обеспечивающий усвоение содержания соответствующих учебных дисциплин, курсов, спецкурсов, интегрированных межпредметных модулей, видов учебной деятельности;

– основан на сложной, открытой, управляемой методической системе, базирующейся на методологии теории обратных и некорректных задач и дающей возможность преподавателям вузов обеспечивать реализацию государственных образовательных стандартов в условиях обучения бакалавров физико-математических направлений;

– в содержательном плане построен на теории математической корректности, в процессе освоения которой формируются личностные качества (критичность, креативность, чувствительность к деталям, открытость новому), осваиваются приемы деятельности в условиях определенности, неопределенности, переопределенности, противоречивости исходных данных, приемы деятельности с корректными и некорректными объектами, приемы преодоления некорректности;

– осуществляется через интегративные циклы математических профессиональных дисциплин и дисциплин предметной подготовки, имеющих блочно-модульную структуру, реализующих идею корректности и обогащающих состав универсальной деятельности обучающихся действиями по обоснованию корректности/некорректности, распознаванию некорректности и ее преобразованию в корректность;

– гарантирует достижение обучающимися однозначного понимания (без разночтений) и усвоения учебной информации при построении обучения от описания идеи корректности и некорректности с дальнейшим выходом на строгие математические формулировки с детализацией и учетом всех существующих вариантов;

– предполагает постоянный мониторинг уровня сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров физико-математических направлений в условиях университетского образования.

Такая подготовка обеспечит формирование критериально-корректностных компетенций, необходимых для обучения математике в системе высшего образования, и будет способствовать полноценному формированию системы общекультурных, профессиональных и специальных компетенций.

В соответствии с поставленной целью и выдвинутой гипотезой определены следующие **задачи** исследования:

1. Разработать теоретические основы математической корректности. С этой целью провести семантический и логико-дидактический анализ понятия «корректность»: выявить содержание, объем, свойства, сущностные характеристики, функции, инварианты и механизмы деятельности, закономерности и основные направления его использования в образовательном процессе; определить, к какому классу понятий оно относится.

2. Уточнить определения корректности основных элементов математического содержания: задачи, модели, определения понятия, доказательства, формулировки задачи, вопроса и ответа.

3. Охарактеризовать особенности современного состояния математической подготовки бакалавров физико-математических направлений и обосновать необходимость выделения специфического вида межпредметной математической подготовки – критериально-корректностной математической подготовки.

4. Разработать концепцию критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений: обосновать выбор методологической основы, сформулировать основную идею, построить понятийный аппарат, выделить специальные принципы критериально-корректностной математической подготовки, предложить систему критериально-корректностных компетенций, этапы, уровни, критерии сформированности критериально-корректностной математической подготовки.

5. На основе анализа ФГОС ВПО, ФГОС ВО и разработанных положений концепции сконструировать методическую систему критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений, построить ее модель в составе целевого, содержательного и процессуального компонентов, выявить педагогические условия эффективности ее реализации.

6. Разработать методические рекомендации и дидактические материалы по внедрению построенной модели в практику обучения математическим дисциплинам в университете.

7. Экспериментально проверить эффективность разработанной методической системы критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений.

Теоретико-методологическую базу исследования составляют:

– философия и методология науки (А. Г. Асмолов, М. Е. Бершадский, С. Г. Воровщиков, Л. А. Микешина, А. М. Новиков и др.);

– исследования по философии высшего образования и методологии педагогической науки (В.В. Афанасьев, В. П. Беспалько, А. А. Вербицкий, Л. С. Выготский, П. Я. Гальперин, В. И. Загвязинский, И. А. Зимняя, В. В. Краевский, Л. Д. Кудрявцев, И. Я. Лернер, А. М. Новиков, П. И. Пидкасистый, С. Л. Рубинштейн, А. В. Хуторской и др.);

– исследования в области философии математики и естественных наук

(В. С. Владимиров, А. Д. Гетманова, Л. Д. Кудрявцев, С. А. Лебедев, В. Я. Перминов, Н. Х. Розов, А. Н. Тихонов, С. Д. Смирнов, А. А. Столяр и др.);

– идеи системного, деятельностного, модульного, компетентностного, контекстного подходов в высшем образовании (А. Г. Асмолов, Е. В. Бондаревская, А. А. Вербицкий, П. Я. Гальперин, В. В. Давыдов, И.А.Зимняя, М. А. Кубышева, А. Н. Леонтьев, С. Л. Рубинштейн, Н. Ф. Талызина, А. В. Хуторской, Г. П. Щедровицкий, Д. Б. Эльконин, И. С. Якиманская и др.);

– положения системного подхода к обучению и воспитанию (Ю. К. Бабанский, В. П. Беспалько, В. И. Загвязинский, В. В. Краевский, Н. В. Кузьмина, М. А. Лукацкий, И. П. Подласый, В. А. Сластенин, Г. И. Щукина и др.);

– теоретико-методологические и психолого-педагогические основы компетентностного подхода в образовании (А. Л. Андреев, В. И. Байденко, Е. В. Бурцева, Ю. В. Варданян, Ж. Г. Гаранина, И. А. Зимняя, И. И. Легостаев, В. А. Попков, Дж. Равен, А. В. Райцев, Г. П. Скамницкая, Ю. Г. Татур, Л. П. Урванцев, В. Д. Шадриков, Н. В. Яковлева и др.);

– положения интегративного, модульного подходов в обучении (Н. В. Аммосова, В. Г Буданов, Н. С. Подходова, Е. С. Полат, Н. Л. Стефанова, А. В. Хуторской, П. А. Юцавичене и др.);

– разработанные автором научно-теоретические положения, основанные на формальной логике, системогенезе и ведущие к образованию понятия «корректность».

Решение поставленных задач осуществлялось применением следующих **методов и в результате осуществления видов деятельности**.

Теоретические: изучение и анализ философской, психолого-педагогической, методико-математической литературы по проблеме исследования; анализ и обзор научно-методической литературы и нормативных образовательных документов по проблемам корректности в обучении математике в вузе; общенаучные методы теоретического уровня (анализ, синтез, обобщение, систематизация, моделирование, выявление противоречий, выдвижение и теоретическое обоснование гипотезы и т.п.) по проблеме корректности; семантический и логико-дидактический анализ понятия «корректность».

Эмпирические: наблюдение, опрос, беседы, тестирование и анкетирование по вопросам корректности, метод экспертной оценки, констатирующий и формирующий педагогический эксперимент по проверке эффективности предлагаемой методики критериально-корректностной математической подготовки бакалавров, методы статистической обработки опытных данных.

Научная новизна результатов исследования состоит в том, что выдвинута и разработана идея математической корректности при обучении бакалавров, впервые автором проведен комплексный семантический и логико-дидактический анализ понятия «корректность», в результате которого разработаны теоретические основы математической корректности; с учетом требований ФГОС ВО и разработанных теоретических основ математической корректности установлена необходимость выделения нового вида межпредметной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений – критериально-корректностной математической подготовки; разработана концепция такого вида подготовки. При этом автором впервые получены следующие новые научные результаты:

– обоснована необходимость выделения нового вида межпредметной подготовки – критериально-корректностной математической подготовки – в системе профессиональной подготовки бакалавров; основой этому утверждению являются: а) социальный заказ общества на подготовку профессионала, владеющего методологией действий, как с корректными, так и с некорректными объектами, а также владеющего методологией действий в некорректных условиях недостатка, переизбытка, противоречивости исходных данных; б) необходимость осуществления широкой интеграции внутри образовательного процесса, основу которой составляет универсальный критерий – понятие «корректность»; в) авторитетное мнение ученых-математиков и ученых-методистов о введении в содержание математического образования таких важных понятий, как некорректная задача, корректные методы решения некорректных задач; г) авторское утверждение о том, что математическое образование, построенное на подготовке такого вида, обеспечивает формирование системы общекультурных, профессиональных, специальных компетенций;

– выдвинута и разработана идея математической корректности при обучении бакалавров; впервые комплексно и всесторонне проанализировано понятие «корректность»: показано, что с позиций теории и методики обучения и воспитания понятие «корректность» является новым метапонятием, а с позиций формальной логики – новой межпредметной категорией в математике, методике обучения математике, смежных с ними областях знаний; выявлена его многоаспектность (содержательный, деятельностный, дидактический, философский и личностно-мировоззренческий аспекты); результатом такого анализа явилось построение теории математической корректности;

– предложена авторская концепция и модель шестиуровневого процесса критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений, ориентированная на формирование критериально-корректностной компетентности; построен диагностический аппарат и выявлены структура, уровни сформированности, этапы становления критериально-корректностной компетентности; сформулирована система новых специальных принципов критериально-корректностной математической подготовки: принципы математической корректности, незавершенности знания, спиралеобразного развития корректного знания;

– теоретически обоснована, разработана и апробирована новая методическая система критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений и построена ее модель в составе целевого, содержательного, процессуального компонентов. Целевой компонент представлен в виде шести групп целей иерархической структуры: главная (глобальная), этапные, уровневые, фазовые, интегративные, оперативные; содержательный компонент разработан в соответствии с компетентностной концепцией в виде интегрированного межпредметного содержания дисциплин базовой и вариативной части, системы инвариантов деятельности по обоснованию корректности, личностных ориентаций и ценностей на основе понятия «корректность»; процессуальный компонент представлен организационными формами, методами, средствами, в которых в качестве основных средств разработаны система межпредметно-корректностных модулей, авторские межпредметные спецкурсы «Корректные и некорректные задачи математической физики», «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий». Выявлены педагогические условия реализации построенной методической системы.

Теоретическая значимость исследования состоит в следующем:

– в разделах, касающихся корректности основных элементов математического содержания, обогащен понятийный аппарат математики, теории и методики обучения математике, а также ряда смежных дисциплин введением нового метапредметного понятия, новой межпредметной категории «корректность»;

– предложена авторская трактовка корректности основных элементов математического содержания, дано обоснование целесообразности использования определения Ж.Адамара корректной и некорректной математической задачи в качестве основного, выявлены и обоснованы инварианты деятельности с некорректными объектами, разработаны приемы «устранения некорректности», что вносит вклад в развитие таких разделов частной методики обучения математике, как «Задачи в обучении математике», «Формирование математических понятий», «Методика изучения теорем», «Эвристики»;

- совокупность теоретических положений концепции критериально-корректностной математической подготовки и выдвинутые специальные принципы критериально-корректностной математической подготовки: математической корректности, незавершенности знаний, спиралеобразного развития корректного знания, - вносят вклад в дисциплину «Теория и методика обучения математике»; обогащение состава универсальной деятельности обучающихся в условиях некорректности, универсальными действиями по обоснованию корректности, распознаванию некорректности и ее преобразованию в корректность вносят вклад в дисциплину «Теория учебной деятельности»;

– сконструированный на основании сравнительного анализа теоретических представлений и авторских методик шестиуровневый процесс критериально-корректностной математической подготовки конкретизирует сложившиеся в теории и методике обучения математике в вузе теоретические представления о компетентностной образовательной парадигме;

– построенная методическая система критериально-корректностной математической подготовки конкретизирует и дополняет теорию и методику обучения математике в вузе.

Практическая значимость исследования состоит в том, что:

– созданная модель шестиуровневого процесса критериально-корректностной математической подготовки бакалавров обеспечивает эффективное усвоение содержания соответствующих курсов, спецкурсов, интегрированных межпредметных модулей, видов учебной деятельности;

– разработанное содержание спецкурсов, интегрированных межпредметных модулей, видов учебной работы дает возможность преподавателям вузов обеспечивать в условиях реализации государственных образовательных стандартов поэтапный характер формирования критериально-корректностной компетентности бакалавров;

– разработанные спецкурсы «Корректные и некорректные задачи математической физики», «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий» и опубликованное учебное пособие «Математическая корректность» могут рассматриваться в качестве универсальной междисциплинарной базы для создания преподавателями критериально-корректностных учебно-методических комплексов по преподаваемым ими различным учебным предметам и дисциплинам при организации и проведении математической подготовки бакалавров в различных российских вузах.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивается применением научно обоснованных методологических подходов; использованием методов, адекватных целям, предмету и задачам исследования; соответствием полученных в работе результатов как психолого-педагогическим положениям обучения математике в вузе, так и теоретическим положениям ряда математических дисциплин, среди которых: теория обратных и некорректных задач, математическая физика, теория дифференциальных уравнений, алгебра, геометрия; фактом положительной оценки разработанных спецкурсов «Корректные и некорректные задачи математической физики», «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий», системы межпредметно-корректностных модулей, учебного пособия «Математическая корректность» вузовскими преподавателями математики; принятием полученных в исследовании результатов психолого-педагогическим, методическим и математическим научным сообществом.

На защиту выносятся следующие положения, ранее опубликованные в наших работах [179–255]:

1. Критериально-корректностная математическая подготовка бакалавров физико-математических направлений – это особый вид межпредметной математической подготовки, которая в качестве ведущей идеи использует универсальный критерий – понятие «корректность», основана на специальных принципах математической корректности, незавершенности знаний, спиралеобразного развития корректного знания; реализует организационно-деятельностную, содержательную межпредметную и внутрипредметную интеграцию, направлена на:

– формирование универсального критерия «корректность» оценки основных компонентов математического содержания, а также широкого класса объектов личностной и ценностной сферы человека;

– освоение деятельности по обоснованию корректности, распознаванию некорректности и ее преодолению, на овладение деятельности в условиях переизбытка, недостатка и противоречивости данных, т.е. в условиях некорректности.

2. Целесообразность выделения критериально-корректностной математической подготовки в системе профессиональной подготовки бакалавров физико-математических направлений основана на том, что математическое образование, построенное на такого вида подготовке, способствует формированию системы общекультурных, профессиональных, специальных компетенций, а также:

– социальный заказ общества на подготовку профессионала, владеющего методологией действий в условиях некорректности;

– необходимость широкой интеграции внутри образовательного процесса, основу которой составляет универсальный критерий – понятие «корректность»;

– осуществление эффективного целостного учебного процесса, направленного на развитие личности обучающихся, подкрепленное авторитетным мнением ученых-математиков, ученых-методистов, неоднократно указывавших на необходимость введения в содержание образования таких общих и в то же время актуальных понятий, как математическая корректность: корректность математической задачи, модели, определения понятия, доказательства, вопроса, применения метода и т.д.

3. Содержание критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений представляется набором критериально-корректностных компетенций (A) – (D):

- (A) способность работать с математической задачей на основе понятия «корректность»;

– **(B)** способность выявлять некорректность математических объектов: математической модели, формулировки задачи, определения понятия, вопроса и ответа, доказательства, применения метода, результата наблюдений и т.п- и владение способами ее преобразования в корректность;

– **(C)** способность строить устную и письменную речь, вести научную дискуссию, осуществлять мыслительный процесс в форме диалоговой последовательности корректных вопросов и ответов в корректной вопросно-ответной форме;

– **(D)** способность осуществлять анализ философских, мировоззренческих, естественно-научных и личностно значимых проблем с точки зрения понятия «корректность».

Знаниевая составляющая критериально-корректностных компетенций сводится к владению понятием «корректность» в терминологическом и общеупотребительном смыслах; *деятельностная* – к способности применять его в качестве универсального критерия, к владению универсальной деятельностью по выявлению некорректности математических объектов и преобразованию ее в корректность, владению системой УУД: обоснованием однозначной определенности, варьированию, корректировке; *личностная* – к умению реализовывать мировоззренческий, общекультурный потенциал понятия «корректность» в учебно-познавательной, исследовательской, профессиональной деятельности, в формировании мировоззрения, системы ценностей и личностных качеств бакалавров.

В результате критериально-корректностной подготовки формируется критериально-корректностная компетентность, т.е. критериально-корректностная компетентность бакалавров физико-математических направлений – это интегративное свойство личности, показывающее степень овладения студентом критериально-корректностными компетенциями A–D и проявляющееся в профессиональной деятельности, в ценностном отношении к самому себе и к окружающему миру.

4. Концепция критериально-корректностной математической подготовки бакалавров указанных направлений обеспечивает целенаправленный, шестиэтапный процесс формирования критериально-корректностной компетентности бакалавра. Методологической основой концепции являются положения системного, деятельностного, компетентностного подходов; теоретические основы - это положения математической корректности; основную идею концепции составляют универсальный критерий корректности; наряду с дидактическими, приняты специальные принципы этого вида подготовки: математической корректности, незавершенности знания, спиралеобразного развития корректного знания.

5. Понятие «корректность» – это оценочное понятие, универсальный критерий. С точки зрения теории и методики обучения это – метапонятие, с точки зрения формальной логики – межпредметная категория. Системный анализ понятия «корректность» дает основания заключить, что корректность какого-либо объекта может быть зафиксирована на основании рассмотрения свойств как самого объекта, так и свойств той внешней среды, где объект рассматривается. Понятие «корректность» многоаспектно: *содержательный аспект* имеет две составляющие: терминологическую (задача, математическая модель, программное обеспечение и т.д. – с однозначной трактовкой термина в соответствующей предметной области) и общеупотребительную (формулировка задачи, теоремы, доказательство, определение понятия и т.д.- понимаемые как правильность в данных условиях); *деятельностный аспект* представлен системой универсальных учебных действий: обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировка, и приемами деятельности в условиях некорректности; *дидактический аспект* обеспечивает отбор содержания и построение процесса обучения в соответствии с принципами математической корректности, незавершенности знаний, спиралеобразного развития корректного знания; *общекультурный аспект* связан с тем, что понятие «корректность», использованное в качестве универсального критерия, позволяет формировать систему ценностей, личностных качеств, систему философских взглядов и мировоззрение обучающихся.

6. Методическая система критериально-корректностной математической подготовки бакалавров (МС ККМПБ) физико-математических направлений–

это сложная, открытая, управляемая система, включающая в качестве компонентов цели, содержание, методы, средства и организационные формы, ориентированная на развитие личности обучающихся, выделенная из образовательной среды вуза на основе интегрирующего свойства – понятия «корректность», и построенная в соответствии с системой специальных принципов – принципов математической корректности, незавершенности знаний, спиралеобразного развития корректного знания. Запланированный результат достигается обеспечением научно-методических и организационных условий.

7. Эффективными средствами формирования критериально-корректностной компетентности бакалавров физико-математических направлений являются: система межпредметно-корректностных модулей и межпредметные спецкурсы «Корректные и некорректные задачи математической физики», «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий». Межпредметно-корректностный модуль (МКМ) – это структурно-содержательная часть методической системы формирования критериально-корректностной компетентности, представляющая собой сочетание логически завершённого межпредметного теоретического материала и обобщенных практических действий пользования данным материалом в математической и смежных с ней видах деятельности, а также в профессиональной деятельности и реальной жизни. Система межпредметно-корректностных модулей (СМКМ) – это совокупность межпредметно-корректностный модулей, обогащенная внутрипредметными и межпредметными содержанием и связями, как по горизонтали, так и по вертикали, и ориентированная на конечную цель – формирование критериально-корректностной компетентности, и играющая роль одного из ее основных средств формирования.

Личное участие автора выражается в разработке теоретических основ математической корректности, в разработке концепции, специальных принципов, шестиуровневой структурно-функциональной модели критериально-корректностной математической подготовки и модели ее методической системы, в осуществлении педагогического эксперимента и его руководстве, анализе основных этапов исследования.

База и организация исследования. Базой исследования явились вузы г.г. Пензы, Орла, Москвы, Уфы, Тамбова.

Исследования проводились с 2004 по 2016 г. и осуществлялись в несколько этапов:

*I этап (2004–2008).*Анализ психолого - педагогической теории и практики, анализ учебников и учебных пособий по вузовским курсам математических дисциплин, выявление и формулирование проблемы исследования.

*II этап (2008–2010).*Анализ понятия «корректность» с позиций формальной логики, выявление его свойств, функций, основных направлений применения в учебном процессе, обоснование метапредметности и дидактической направленности. Формулирование гипотезы и ведущей идеи исследования, проведение констатирующего этапа эксперимента.

*III этап (2010–2012).*Построение модели критериально-корректностной математической подготовки и модели ее методической системы: разработка целевого, содержательного и процессуального компонентов. Формулирование критериев диагностических уровней формирования критериально-корректностной компетентности. Проведение экспериментальной работы: поисковый этап эксперимента.

IV этап (2012–2016). Уточнение моделей, их корректировка, проведение формирующего этапа эксперимента и анализ его результатов, выявление эффективности критериально-корректностной математической подготовки. Оформление диссертационной работы.

Апробация и внедрение результатов исследования. Результаты исследования были доложены и одобрены на следующих конференциях: на Международных конференциях «Проблемы теории и практики обучения математике – Герценовские чтения» (Санкт-Петербург, РГПУ им. А. И. Герцена, 2009–2016), на Международной научной конференции под эгидой премьер-министра РА Овика Абраамяна «Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство» (г. Горис, Армения, 28 сентября – 2 октября 2015 г.), на XXXIV Международном научном семинаре преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов под руководством А.Г.Мордковича, (г. Калуга, Калужский филиал ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при правительстве РФ, 25–27 сентября 2015); на XXIII Международной конференции МКО 25–30 января 2016 г. в г. Дубна; на II Международной научно-методической конференции «Физико-математическое и технологическое образование: проблемы и перспективы развития» в ФГБОУ ВО МПГУ 1–4 марта 2016 г.; на Всероссийских научно-практических конференциях с международным участием «Артемовские чтения» (Пенза, ПГПУ им. В. Г. Белинского, 2007–2015), на XXI Всероссийском семинаре преподавателей математики университетов и пед. вузов (Санкт-Петербург, РГПУ им. Герцена, 2002), на Федеральной научно-практической конференции «Традиции и современность» (Нижний Новгород, 1997), На Всероссийской конференции «Гуманизация и гуманитаризация математического образования в школе и вузе» (Саранск, 1998), на Всероссийской научно-практической конференции «Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике» (Пенза, 2001, 2007–2014), на Всероссийской научной конференции «Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика» (Саранск, 2002), на 8-й Международной научно-методической конференции «Проблемы повышения качества подготовки специалистов» (Москва, МГТА, 2002), на IV Международной конференции«Математическое образование: концепции, методики и технологии» (Тольятти, ТГУ, 2009, 2011), на Всероссийской заочной научно-практической конференции «Современная математика и проблемы математического образования» (Орел, ОГУ, 2009), на VII Международной конференции «Математика. Образование» (Чебоксары, ЧПУ, ЧГУ, 2008, 2009), на Международной научно-технической конференции, посвященной 70-летию Пензенского педагогического университета им. В. Г. Белинского «Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике» (Пенза, 2009), на XXVII Пленуме Учебно-методического Совета по математике и механике и на Всероссийской научно-методической конференции Адыгейского университета «Актуальные проблемы углубленного математического образования» (Майкоп, АГУ, 2010), на Международной научно-практической конференции «Математика и ее приложения. Экономическое прогнозирование: модели и методы» (Орел, 2011), на Международной научно-практической конференции «Проблемы математического образования: история и современность», посвященной 100-летию со дня рождения педагога-математика В. Л. Минковского (Орел, 2011) на региональных научно-практических конференциях учителей (Пенза, 2009–2013), на научно-методических конференциях преподавателей и сотрудников ПВАИУ и ПГПУ (Пенза, 1989–2013).

Основные результаты исследования опубликованы в 73 трудах, (общее количество публикаций – более 100), в том числе: в двух монографиях, 4 учебных и учебно-методических пособиях, одно из которых имеет гриф УМО, 22 публикациях в журналах Перечня ВАК РФ, 1 публикации в журнале, рецензируемом в базе «SCOPUS», 5 публикациях на английском языке.

Внедрение осуществлялось в ряде российских вузов посредством распространения методических разработок.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, приложений.

Глава I
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОРРЕКТНОСТИ

В первой главе диссертации строятся теоретические основы математической корректности. С этой целью осуществляется логико-дидактический анализ разрозненного эмпирического материала использования понятия «корректность» в математике и ее обучении, в смежных научных областях: физике, математическом моделировании, теоретической информатике, а также в областях, далеких от математики, например в культуре речи, риторике, формальной логике. Затем с использованием аппарата формальной логики, теории и методики обучения математике, сделаны теоретические выводы.

Главный результат первой главы состоит в том, что понятие «корректность» является: с точки зрения формальной логики – межпредметной категорией, с точки зрения методики обучения математике – межпредметным понятием. Логико-дидактический анализ понятия «корректность» дает возможность заключить, что это понятие обладает многоаспектными сущностными характеристиками, в качестве универсального критерия используется не только в научной сфере, но и в реальной жизни, в познании, позволяет выделить содержательную, деятельностную, мировоззренческую составляющие, обладает развивающим потенциалом. На основе этого понятия выявляются закономерности учебного процесса и формулируются специальные принципы критериально-корректностной подготовки. Обнаруженные свойства и выявленные сущностные характеристики понятия «корректность» в последующих главах будут служить теоретической основой для методических построений.

Среди основных элементов математического содержания особую роль играет математическая задача, поэтому при проведении анализа наибольшее внимание (раздел 1.1) отводится этому понятию. В разделе 1.2 анализируются понятия корректности математической модели, правил вывода, определения понятий, вопроса и ответа, математического доказательства. В разделе 1.3 выявляются свойства, функции, дидактические особенности понятия «корректность», сделаны выводы о том, к какому классу понятий относится понятие «корректность», конструируется его схема.

1.1. Универсальность определения Ж. Адамара корректной математической задачи

1.1.1. Анализ различных подходов к определению корректной и некорректной математической задачи

В соответствии с преобладающим большинством научных математических источников [1, 2, 56–58, 142–150, 270, 274] и т.д. корректность и некорректность математической задачи определяются следующим образом.

Математические задачи чаще всего состоят в том, что по исходным данным u ищется решение z. При этом считается, что u и z связны зависимостью $z = R(u)$.

Согласно определению Ж. Адамара математическую задачу называют *корректной или корректно поставленной* (*well-posed problem*), если выполнены условия:

1) задача имеет решение при любых допустимых исходных данных u, (существование решения);

2) каждым исходным данным u соответствует только одно решение z, (единственность решения);

3) решение устойчиво.

Эти условия называются *условиями корректности*.

Смысл первого условия, см. [120, 142–150,176, 270, 274], заключается в том, что среди исходных данных нет противоречащих друг другу условий, что исключало бы возможность решения задачи. Второе условие означает, что исходных данных достаточно для однозначной разрешимости задачи. Третье условие заключается в следующем. Если u_1 и u_2 – два различных набора исходных данных, мера уклонения которых друг от друга достаточно мала, то мера уклонения решений $z_1 = R(u_1)$ и $z_2 = R(u_2)$ меньше любой наперед заданной точности. При этом предполагается, что в многообразии $U = \{u\}$ допустимых исходных данных и в многообразии возможных решений $Z = \{z\}$ установлено понятие меры уклонения $\rho_u(u_1, u_2)$ и $\rho_z(z_1, z_2)$. Третье условие трактуется как физическая определенность задачи. Это объясняется тем, что исходные данные физической задачи, как правило, задаются с некоторой погрешностью; при нарушении третьего условия как угодно малые возмущения исходных данных могут вызвать большие отклонения в решении. В частности, если множества $U = \{u\}$ и $Z = \{z\}$ являются компактами, то решение задачи обладает свойством устойчивости, что означает: «малым изменениям» данных задачи u соответствует «малое изменение» решения $z = R(u)$. Это означает, что решение задачи непрерывно зависит от данных задачи.

Задачи, решение которых не удовлетворяет хотя бы одному из перечисленных трех условий, называются *некорректными или некорректно поставленными* (*ill-posed problem*). Таким образом, термин «*некорректная задача*» «означает, что задача либо не имеет решения (в интересующем нас классе), либо, напротив, имеет много решений (как минимум два), либо процедура нахождения решения неустойчива» [58, с. 14].

Математическая задача называется *математически определенной,* если решение задачи удовлетворяет первым двум условиям, т.е. существует и единственно. В противном случае задача называется *математически не определенной.*

Задача, корректно поставленная на одной паре пространств (U, Z), может уже не быть таковой на другой паре пространств (U_1, Z_1). Задание пространства исходных данных $U = \{u\}$ и пространства возможных решений $Z = \{z\}$ играет большую роль при исследовании задачи на корректность.

Анализируя определение Ж. Адамара корректной и некорректной математических задач, см. работу [232], мы можем заключить:

– понятия «корректная задача» и «корректно поставленная задача» отождествляются, с точки зрения формальной логики такие понятия называются равнозначными, или тождественными. Точно так же «некорректная задача» и «некорректно поставленная задача» в соответствии с определением Ж. Адамара – равнозначные понятия;

– корректность математической задачи не является абсолютным понятием, оно связано со многими условиями. Например, из определения следует, что корректность задачи зависит от того, на каких пространствах (U, Z) она рассматривается;

– классификация задач на «корректные» и «некорректные» проводится на основании *свойств решений задачи*, т.е. основанием, признаком для проведения классификации корректные/некорректные задачи служат свойства 1)-3) решений задачи. Близкая, но не эквивалентная классификация задач может быть проведена на основании *свойств данных задачи*, что в большинстве случаев и делается в теории и методике обучения математике;

– математические задачи, и школьные в том числе, в соответствии с определением Ж. Адамара можно разделить на три класса: корректные, некорректные и те, к которым данное определение не может быть применено. Таким образом, некорректным задачам противопоставляются не «стандартные» и «традиционные», а «те задачи, которые не являются некорректными»;

– с точки зрения формальной логики определение корректной задачи явное, оно дается через ближайший род (задача) плюс видовое отличие (условия корректности 1)-3)). Это определение можно считать номинальным, поскольку определены термины: корректная математическая задача и некорректная математическая задача. Произвольная их трактовка в математике недопустима. В качестве существенных признаков, при помощи которых выделяется определяемое множество объектов из числа объектов, соответствующих родовому понятию, т.е. в качестве видового отличия, выступают три условия корректности математической задачи.

Приведенное определение корректной математической задачи принадлежит Ж. Адамару, оно было дано в начале XX в. (1902–1903) для задач математической физики. Это был период начального активного развития математической физики, из которой впоследствии выделилась теория обратных и некорректных задач. Впервые данное Ж. Адамаром определение было усовершенствовано Д. Гильбертом, другими учеными и распространилось на широкий класс задач не только в математике, но и в других различных научных областях.

По авторитетному мнению Ж. Адамара, долгое время (вплоть до 1940–1960 гг.) в математическом сообществе считалось, что «неустойчивые» задачи, т.е. задачи, не удовлетворяющие третьему условию корректности, не имеют физического смысла и поэтому не могут служить математической моделью для реально протекающих процессов или явлений окружающего мира. В соответствии с этим мнением изучение и попытки решения некорректных неустойчивых задач были надолго приостановлены.

Однако это мнение Ж. Адамара оказалось ошибочным и многократно в дальнейшем было опровергнуто математическими и естественно-научными исследованиями. К тому времени в астрономии, астрофизике, геофизике, теоретической физике был поставлен целый ряд практически важных задач, оказавшихся неустойчивыми, методов решения для которых не существовало. Попытки их численного решения без достаточных теоретических обоснований оказались безуспешными.

Для таких задач А. Н. Тихонов в 1943 г. [147] впервые предложил новый подход, который состоял в том, чтобы в качестве множества решений рассматривать не все пространство, а более узкое его компактное подмножество, где задача становилась корректной. Такую корректность стали называть «корректностью в смысле Тихонова», а задачи – условно-корректными. В это время А. Н. Тихоновым впервые была решена некорректная обратная задача геологоразведки.

Предложенные А. Н. Тихоновым методы регуляризации [143] дали толчок для активного развития теории некорректных задач в различных разделах естествознания. Методы регуляризации А. Н. Тихонова позволяют применять для решения численные методы и современные компьютерные технологии.

Дальнейшее развитие теории некорректных задач связано с именами академиков М. М. Лаврентьева [80–82] и В. К. Иванова [56, 57], которые сформулировали новое определение корректности математической задачи, основанное на дополнительной информации о свойствах решений. М. М. Лаврентьев предложил новый подход к понятию решения математических задач с приближенными исходными данными, что позволило существенно расширить возможности их численного решения.

Итак, на каждом этапе своего развития математическая физика, а впоследствии теория некорректных задач, основывалась на расширении, конкретизации или сужении классических понятий, таких как «решение задачи», «корректная математическая задача», «некорректная математическая задача». Понятие корректной математической задачи прошло свой длительный путь развития от неприятия и обсуждений до полного признания, продемонстрировав, что определение понятия играет важную роль в прогрессе науки: может способствовать ее развитию, быть движущим фактором, а может и препятствовать, тормозить ее развитие, как это произошло в начале и середине XX в. с определением некорректной задачи.

Понятие корректной и некорректной математической задачи в методике обучения математике

В действующих в настоящее время вузовских [7, 16, 26, 156] и школьных [4–6] задачниках и учебниках по математике преимущественно предлагаются задачи математически определенные, т.е. задачи, решение которых существует и единственно. В условия таких задач включено столько данных, сколько требуется для однозначного решения, но не больше того. В то же время внимание педагогов привлекают задачи другого сорта – так называемые некорректные задачи.

Проанализируем определения некорректных задач, предлагаемые различными авторами, и обоснуем, что определение Ж. Адамара является наиболее приемлемым.

В психолого-педагогической и методической литературе понятия «корректная задача», «корректно поставленная задача», «некорректная задача», «некорректно поставленная задача» трактуются неоднозначно, им придается различный смысл, т.е. нет единства в трактовке данных терминов. В психолого-педагогической литературе понятие «некорректная задача» появляется в связи с формированием математических способностей школьников в исследованиях В. А. Крутецкого и М. П. Буловацкого на основе задач с неполными, противоречивыми, избыточными данными [75]. Задачами с недостающими и избыточными данными занимались также Э. Г. Гельфман, Н. В. Метельский, Л. М. Фридман, А. Ф. Эсаулов и др. [157–161] . Авторы выделяют типы задач, среди которых имеются некорректные, приводят их примеры, описывают работу с конкретными задачами, останавливаются на их назначении. Вопросами общего исследования задач в качестве средства обучения в разное время занимались Г. А. Балл [20], Л. Л. Гурова [41], М.В.Егупова [50], В. И. Загвязинский [51], Ю. М. Колягин [63–66], Г.И. Ковалева [61], В.И.Крупич, И. В. Соловьева, Е. И. Машбиц, Д.Пойа, [105]-[107], [273], Л. М. Фридман [157–161] и др. В изучении творческой деятельности человека И. П. Калошина [59] использует обратные некорректные задачи, которые обращают причинно-следственные связи и, вообще говоря, не имеют единственного решения.

Д. Пойа [105, с. 63; 273, p. 97] предлагает выделить «правильно поставленные, или имеющие смысл» – «perfectly stated or reasonable», и «неправильно поставленные, или не имеющие смысла» задачи в зависимости от свойств данных задачи: «Правильно поставленная задача должна содержать все необходимые данные, ни одно из которых не должно быть лишним; ее условие должно быть в точности достаточным, не будучи ни противоречивым, ни чрезмерным». В своей книге Д. Пойа отмечает, что большинство задач в учебниках – «правильно поставленные». Далее в тексте есть указания на варьирование данных задачи. Д. Пойа различает практические и математические задачи. Он пишет, что «практические задачи во многих отношениях отличаются от чисто математических задач, однако основные мотивы и ход их решения по существу одни и те же». Каждая инженерная задача – это пример некорректной задачи ввиду того, что условий избыток, а среди данных возможны и противоречивые. Переход к корректной постановке задачи путем выбора и построения подходящей математической модели – проблема весьма сложная, требующая от инженера-практика соответствующей квалификации и опыта.

С учетом полноты и непротиворечивости условий задач В. А. Крутецкий [75, с. 124–150] приводит такую классификацию:

– задачи с несформированным условием – задачи, в которых имеются все данные, но вопрос задачи лишь подразумевается;

– задачи с избыточным условием – задачи, в которых имеются лишние данные, не нужные для решения, а лишь маскирующие необходимые для решения задачи данные;

– задачи с неполным составом условия – задачи, в которых отсутствуют некоторые данные, необходимые для решения задачи, вследствие чего дать конкретный ответ на вопрос задачи не всегда представляется возможным;

– задачи с противоречивым условием – задачи, содержащие в условии противоречие между данными.

Л. Л. Гурова [41] в типологию задач вводит «задачи, хорошо или плохо определенные». Добавив некоторые уточнения, придем к следующей предварительной классификации:

– задачи, в которых учтены все условия и ответ функционально связан с исходными данными, определен ими однозначно, – математически определенные задачи;

– задачи, на результат решения которых оказывают влияние некоторые случайные факторы, не учтенные в условиях (так называемые задачи с неполными условиями), в силу чего при заданных условиях задачи результат получается неоднозначным: он формулируется для некоторого числа аналогичных случаев. В этом случае решение задачи существует, но не единственно. Такие задачи определим как некорректные, или некорректно поставленные;

– задачи, не имеющие решения при заданных условиях или содержащие противоречия, также отнесем к классу некорректных задач, или некорректно поставленных.

Таким образом, в методической науке термины «корректная задача», «корректно поставленная задача» различаются и используются авторами, работающими по проблемам теории задач в том смысле, что задача имеет решения (одно или несколько) или задача не содержит противоречий. Чаще всего за основу классификации берутся свойства данных задачи. Номинального определения «корректно поставленной задачи» или «корректной задачи» не дается, приводится описание, смысл которого уточняется из контекста. «Некорректная задача» противопоставляется «стандартной задаче», что не совсем правильно. При таком подходе корректность задачи означает ее математическую определенность, что с точки зрения условий задачи означает их полноту и непротиворечивость.

Соответственно этому А. Ф. Эсаулов [173, с. 8] пишет: «Человек, привыкший видеть перед собой четко и корректно сформулированную задачу, просто теряется в незнакомой ситуации, будь то хоть обычная некорректная математическая задача или некая задача, возникшая как следствие из практики (прикладная)».

Существует взгляд на корректность задачи с точки зрения однозначной определенности множества ее решений. При таком подходе если множество решений пустое и решений нет, то задача корректна, так как ее множество решений однозначно определено. В рамках этого подхода задача, имеющая более одного решения, также считается корректной, поскольку множество ее решений однозначно определено. В этом подходе, чтобы избежать полной путаницы в терминах и расхождений с математической терминологией, более целесообразно было бы ввести понятие «корректной формулировки задачи».

В исследовании Т. А. Безусовой [22] предложено: «под корректной (корректно поставленной) задачей понимать такую задачу, для которой выполняются следующие два требования:

1) решение задачи существует;

2) решение задачи единственно и определено однозначно.

Наличие избыточных данных, в том числе и непротиворечивых, приводит к некорректной (некорректно поставленной) задаче».

В том же исследовании выделены следующие типы некорректных задач (Т. Е. Демидова, А. П. Тонких):

– задачи с недостающими данными, решение которых предполагает рассмотрение нескольких случаев;

– задачи с недостающими данными, не имеющие однозначного решения без существенных дополнительных условий;

– задачи с избыточными данными, не противоречащими друг другу;

– задачи с избыточными данными, имеющие противоречивое условие.

Указывается [22], что «предложенное деление не исчерпывает все разновидности некорректных задач».

Следует заметить, что авторы испытывают затруднения, определяя некорректность задачи с точки зрения одних только свойств данных задачи, поскольку не всегда возможно судить о характере данных, не получив и не изучив ее решения. В связи с этим обстоятельством авторы в большей или меньшей степени склоняются к определению Ж. Адамара и для классификации, в конечном счете, используют количество решений задачи и свойства решений.

М. А. Родионов [115] предлагает выделить «незавершенные математические задачи», которые относятся к некорректным задачам, обладающим значительным мотивационным потенциалом.

Н. В. Аммосова [8–10] в связи с формированием творческой личности, а также в контексте реализации методико-математической подготовки будущих учителей математики в соответствии с задачами современности рассматривает задачи с недостающими данными. Формулировка таких задач допускает различные трактовки и различные решения в связи с этим. Кроме того, ею рассматривались задачи с избытком данных, которые требовалось преобразовать в математически определенные задачи.

Некорректные задачи являются предметом обсуждений и в зарубежной литературе [271, 272] в особенности в связи с тестовым характером экзаменов. В работе [271] есть раздел «How to Deal with Ill-Posed Questions» («Как работать с некорректными задачами»).В этой работе приведены характеристики некорректных задач:

– недостаток информации;

– посторонняя информация;

– не очевидно, какие формулы использовать, т.е. не определена предметная область;

– условие задачи неоднозначно (существует несколько «правильных» ответов в зависимости от того, какие предположения сделать);

– данные противоречивы;

– избыток информации, но данные непротиворечивые.

Как указывается в цитируемой работе, для задач такого сорта основными характеристиками являются: *underdetermination, overdetermination, contradiction* – соответственно, недоопределенность, переопределенность, противоречие.

Таким образом, в теории и методике обучения математике, в педагогике и психологии (как Российской, так и зарубежной) общепринятого определения некорректных задач не сложилось, чаще всего некорректные задачи определяются в соответствии со свойствами *данных задачи*, и к некорректным авторы относят задачи:

– с противоречивыми данными;

– с неполным составом условия;

– с избыточным составом условия.

Эта классификация полностью соответствует определению Ж. Адамара, логически следует из него. Такая классификация ближе к классификации задач на «математически определенные и математически неопределенные», поскольку отсутствует исследование задачи на устойчивость, и такие задачи, скорее, можно было бы назвать «математически не определенными задачами». Подчеркнем еще раз, что за основание классификации в методике обучения математике и психолого-педагогических науках, вообще говоря, берутся *свойства данных задачи*, а не *свойства решений*, как у Ж. Адамара. Эти основания для классификации задач тесно связаны, но не равнозначны. В пользу определения Ж. Адамара говорит тот факт, что свойства решений проверять более естественно, так как пока задача не решена, трудно судить о характере данных задачи.

В теории и методике обучения математике существуют достаточно путаные рекомендации по поводу решения задач с противоречиями в условиях. Ответ же здесь однозначен: задача не имеет решения. Другой ответ неприемлем. Можно выявить противоречия, указать на них и предложить варианты для их устранения, но это не изменит ответ о том, что первоначальная задача не имеет решения в классическом понимании. Переходя к *обобщению понятий, т.е. к другой математической модели*, ее решение можно искать в классе квазирешений. Такой вариант решения для задач практического содержания соответствует положениям математической теории обратных и некорректных задач.

В сравнении с существующими в теории и методике обучения математике разнообразными определениями корректных и некорректных задач определение Ж. Адамара представляется, на наш взгляд, наиболее приемлемым: во-первых, оно исторически появилось раньше других определений и к настоящему времени принято в большинстве научных областей (математика, физика, информатика, теория систем и т.п.); во-вторых, оно лаконичное, естественное для понимания и проверки; в-третьих, наиболее общее, емкое, по смыслу включающее в себя те понятия некорректных, «плохо сформулированных задач», «плохо поставленных задач», «задач с неполными данными», «аномальных задач» и т.д., которые встречаются у авторов, работающих по проблемам теории математических задач в методической науке. К достоинствам определения Ж. Адамара можно отнести и такое важное обстоятельство, как доступность для понимания обучающихся (как студентов так и школьников); они легко воспринимают целесообразность определения и смысл трех условий корректности задачи.

В заключение мы приходим к выводу, что определение Ж. Адамара корректной и некорректной задач ввиду общепризнанности в математике, общности и универсальности, представляется приемлемым не только в математической научной среде, но и в теории и методике обучения математике.

Корректная и некорректная формулировки задачи. С целью разграничения понятий «некорректная задача» и задача, плохо сформулированная, плохо поставленная, некорректно сформулированная, т.е. когда условие задачи может трактоваться неоднозначно, целесообразно ввести в рассмотрение понятия «корректная и некорректная формулировки задачи». Это могло бы разграничить использование близких по смыслу понятий в естественно-научных областях знаний, в математике и методике обучения математике. Так, согласно определению Ж. Адамара термины «корректная задача» и «корректно поставленная задача» отождествляются. В то же время выражение «корректная формулировка задачи» может быть принято как общеупотребительное, и его смысл может быть закреплен некоторым соглашением, при этом допускается большая свобода в его употреблении и трактовке. Например, можно принять соглашение: «корректной формулировкой задачи» условиться считать такую формулировку, при которой достигается однозначное понимание текста данной задачи всеми членами математического научного сообщества, в противном случае формулировка задачи некорректна.

Как указано в нашей работе [265], некорректные формулировки задач в математике неоднократно приводили к тому, что для одной и той же задачи допускались «различные правильные решения, в которых получены разные ответы». Выражение стоит в кавычках, потому что за «правильные решения» принимаются решения не одной, а различных – по числу «правильных решений» – задач. Такие задачи в математике чаще всего назывались парадоксами. В парадоксах неоднозначно трактуются условия, и поэтому такие задачи можно отнести к задачам с неполными данными. Широко известные парадоксы теории вероятностей рассмотрены в работах [39, с. 33; 168, с. 25–26].

Один из парадоксов – парадокс Бертрана – связан с геометрической вероятностью и «некорректностью» определения понятия «хорда, проведенная наудачу», а другой – ошибка Даламбера – с различимостью монет одинакового достоинства. По сути, приведенные знаменитые «ошибки» – это задачи с некорректной формулировкой, задачи с неполными данными. Об ошибке Даламбера и парадоксе Бертрана см. раздел 4.1.

Итак, анализ определений корректной и некорректной задач в математике и психолого-педагогических науках, проведенный нами, позволяет сделать выводы, что определение Ж. Адамара:

– обладает наибольшей общностью, так как включает в себя большинство более поздних и существующих в других областях знаний определений;

– признано в большинстве математических и естественно-научных областях знаний;

– исторически сложилось в более ранние сроки;

– активно работает в прикладных областях (теория некорректных задач в настоящее время – широко востребованная, современная ветвь научного знания с обширнейшими приложениями);

– дает ключ к проведению психолого-педагогического анализа компонентного состава задачи, деятельности по ее решению, выделению универсальных действий;

– наиболее естественно и доступно как для понимания обучающихся, так и проведения классификации и исследований.

На основании указанных аргументов определение Ж. Адамара корректной и некорректной задач представляется нам приемлемым и в теории и методике обучения математике.

1.1.2. Анализ содержательного и процессуального компонентов корректной и некорректной математической задачи

В соответствии с принятой в настоящее время компетентностной парадигмой высшего профессионального образования особое значение придается вопросам разработки содержания образования и методических средств, обеспечивающих освоение студентами общекультурных и профессиональных компетенций, реализацию деятельностного подхода в обучении математике, приобретение студентами опыта творческой деятельности. Выделение состава деятельности, универсальных учебных действий, адекватных наиболее общим, так называемым опорным, математическим знаниям, умениям, навыкам и дальнейшее ее освоение обучаемыми – актуальная педагогическая проблема. Существенный вклад в изучение этой проблемы внесен психологами, педагогами, специалистами в области математики, информатики, кибернетики.

Знания о структуре математической задачи и о структуре деятельности по ее решению относятся, по замечанию И. П. Калошиной [59], к категории наиболее общих методологических знаний. Эти знания «носят интер-, меж-, надпредметный характер, позволяющий применять их в разных предметных областях». В соответствии с утверждением Г. И. Саранцева [121, 122] «деятельность по решению задачи соответствует структуре задачи, адекватна структуре задачи, но не совпадает и не эквивалентна ей». Общеизвестно, что ни в теории и методике обучения математике, ни в какой-либо другой области знаний до настоящего времени нет единого определения математической задачи. Но все ученые, методисты, педагоги единодушны во мнении, что в математической задаче нужно выделять две взаимосвязанные стороны: процессуальную и содержательную. Содержательная сторона математической задачи характеризует ее компонентный состав, а процессуальная – деятельность по ее решению, т.е. сам процесс решения задачи.

В настоящем пункте будет выявлена специфика содержательного состава и специфика процесса решения корректных и некорректных математических задач. С этой целью проведем развернутый анализ математической задачи вначале с содержательной, а затем с процессуальной стороны, с позиций системного и деятельностного подходов, т.е. и сама задача, и процесс ее решения будут рассматриваться как единое функционирующее образование в некотором пространстве, называемом внешней средой по отношению к рассматриваемой системе. При проведении анализа задачи обратим внимание на особенности, характерные для некорректных задач.

Анализ содержательного компонента математической задачи основан на теории систем, теории систем с управлением, теории категорий. Выделим содержательные компоненты математической задачи, структуру, взаимодействие, внешнюю среду.

Математическая задача как система. В математической задаче Ю. М. Колягиным [63–66] выделены основные четыре компонента:

1) начальное состояние (A) – условия задачи: данные элементы и связи между ними;

2) конечное состояние (B) – заключения или цели задачи: неизвестные элементы и связи между ними;

3) решение задачи (R) – один из возможных способов перехода от начального состояния к конечному. Для математических задач это способ преобразования условия задачи для нахождения требуемого;

4) базис решения задачи (C) – множество факторов, определяющих некоторое решение, т.е. теоретическая или практическая основа данного решения. Для математических задач базис решения выступает в форме обоснования решения.

Базис решения задачи C включен в D, $C \subset D$, D – предметная область; базис C составляет некоторую часть предметной области D, в которой решается задача. Таким образом, задача представляет собой систему ($ACRB$), отнесенную к предметной области D. Предметная область D для системы ($ACRB$) выступает внешней средой, с которой система тесно взаимодействует, но в то же время задача представляет собой самостоятельное, выделенное из внешней среды образование.

Всякая математическая задача как система характеризуется ее основными компонентами *ACRB*, рассмотренными над предметной областью *D*. Корректность задачи обусловлена не только составом и содержанием всех ее компонентов, но и выбором предметной области, т.е. свойствами внешней среды. Это означает, что, например, в условиях рассмотрения задачи над одной предметной областью может быть констатирована некорректность, а при расширении или сужении этой предметной области задача может превратиться в корректную.

Далее, компоненты *ACRB* внутри некорректной задачи находятся в более тесном взаимодействии, чем внутри корректной задачи. Например, один из алгоритмов решения может приводить к неустойчивости, в то время как другой метод или алгоритм позволит достигнуть требуемой устойчивости.

Приведем еще один пример: известно, что задача отыскания действительных корней алгебраического многочлена пятой степени в радикалах в общем виде неразрешима. Если же требуется найти один из корней, например больший, то выбором соответствующего алгоритма можно прийти к корректно поставленной задаче.

Таким образом, особенности компонентного состава некорректных задач заключаются в следующем:

– на некорректных задачах наиболее ярко проявляется свойство целостности задачи как системы; изменение связей с внешней средой или свойств внешней среды (предметной области) может приводить к изменению корректности задачи;

– некорректные задачи иллюстрируют тесную взаимосвязь компонентов задачи, так как изменение компонентов задачи: условий, требования, базиса решения и алгоритма решения, – может приводить к изменению корректности.

Математическая задача как система с управлением. Следуя определению, предложенному А. А. Емельяновым в работе [12, с. 21], математическая задача может быть описана с помощью понятия системы с управлением. Системы с управлением создаются для достижения конкретных целей, в качестве цели выступает достижение системой, т.е. задачей, некоторого требуемого состояния. Решить задачу означает отобразить заданную модель Ψ_a с некоторыми неизвестными элементами на модель Ψ_b, в которой все элементы определены, посредством преобразования моделей: $\Psi_a \to \Psi_1 \to \ldots \to \Psi_n \to \Psi_b$. С точки зрения системного анализа математическая задача представляет собой совокупность «подвижных» моделей, преобразующихся одна в другую, т.е. задача – это не «застывшее», а «подвижное» образование, развивающееся в процессе управления, т.е. решения, от модели Ψ_a к завершающей модели Ψ_b.

Рассмотренная реализация задачи в виде системы с управлением удовлетворяет системе аксиом [12, с. 23]. Система аксиом определяет пространство состояний, в которых может находиться система, а также обеспечивает способность системы к управлению, т.е. способность задачи переходить в пространстве состояний из текущего состояния (заданная задача) в требуемое под воздействием управления (решенная задача). Одна из аксиом регламентирует: «если цель неизвестна, управление не имеет смысла, а изменение состояний превращается в бесцельное блуждание». Другая из аксиом, известная как принцип необходимого разнообразия Эшби, постулирует: «на каждое возможное состояние управляемого объекта – задачи – имеется свое управляющее воздействие, разнообразие управляющих воздействий на систему с управлением должно быть не меньше разнообразия самой системы».

Для повышения качества управления системой необходимо, [12]:

– уменьшать разнообразие состояний управляемого объекта;

– увеличивать разнообразие управляющих воздействий;

– уменьшать неоднозначность управляющих воздействий.

Таким образом, необходимо, чтобы

– на каждое возможное состояние управляемого объекта – решаемой задачи – имелось свое управляющее воздействие,

– существовала возможность использования управляющих воздействий в зависимости от состояния объекта – решаемой задачи,

– обеспечивался выбор соответствующего воздействия.

Процесс решения математической задачи удовлетворяет аксиомам для систем с управлением, рекомендации по осуществлению управления могут служить руководством при решении математических задач.

Математическая задача как категория. Компонентный состав математической задачи может быть описан в терминах теории категорий. Пусть, как и прежде:

A – условия задачи: данные элементы и связи между ними;

B – заключения, требования, т.е. цели задачи: неизвестные элементы или связи между ними;

R – решение задачи, один из возможных способов перехода от A к B. Для математических задач это способ преобразования условия задачи для нахождения требуемого;

C – базис решения задачи, множество факторов, определяющих некоторое решение, т.е. теоретическая или практическая основа данного решения. Для математических задач базис решения выступает в форме обоснования решения.

Таким образом, задача представляет собой систему (ACRB), отнесенную к предметной области *D*, где базис решения задачи *C* включен в *D*, $C \subset D$, *D* – предметная область; базис *C* составляет некоторую часть предметной области *D*.

Следуя работам Ю. М. Колягина [63–66], А. А. Столяра [133], В. И. Крупича [74], а также положениям теории категорий [99], определим задачу как некоторую категорию, состоящую из объектов и морфизмов-связей. Этот подход мы изложили в нашей работе [221]. Каждой паре объектов из *A* и *B* отвечает множество морфизмов, т.е. связей: *Mor*(*A*,*B*). Элементы этого множества обозначаются символом $f: A \to B$, или $A \xrightarrow{f} B$, или, коротко, буквой f. С рассматриваемой точки зрения задача представляет собой категорию с объектами

A, *B*, *D* и всевозможными морфизмами между ними: $Mor(A,B), Mor(A,D), Mor(D,B)$ (рисунок 1).

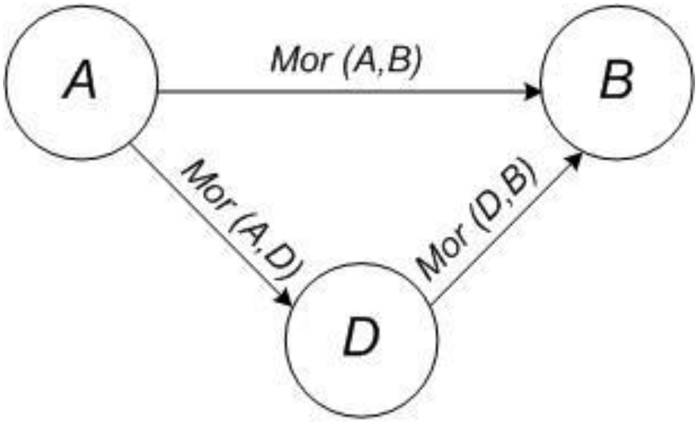


Рисунок 1. Задача как категория

Связи (стрелки) могут быть обратимыми, в этом случае морфизм превращается в изоморфизм. Морфизм f, примененный ко всякому «условию», т.е. к объекту A, дает «решение», т.е. объект *B*.

Рассмотренная система обладает свойством целостности, это означает, что существует предикат целостности, определяющий семантику объектов *A*, *B*, *C*, *D*, а также семантику морфизмов.

С точки зрения теории категорий задачи могут быть двух типов:

– восстановить недостающие элементы объектов *A*, *B*, *D* или какие-либо из связей внутри объектов *A*, *B*, *D*;

– восстановить недостающие морфизмы $Mor(A,B), Mor(A,D), Mor(D,B)$.

В зависимости от вида морфизмов предложим классификацию:

– задача имеет решение, если морфизм $f : A \to B$ является эпиморфизмом;

– решение задачи единственно, если морфизм $f : A \to B$ представляет собой мономорфизм;

– решение задачи существует и единственно, если $f: A \to B$ – изоморфизм, т.е. одновременно эпиморфизм и мономорфизм (в этом случае задача называется математически определенной).

Речь о корректности задачи можно вести только в том случае, когда заданы объекты *A*, *B*, *D* и определены морфизмы. Все три требования в определении корректности задачи: существование решения, его единственность и устойчивость, – относительны в том смысле, что важны условия, при которых эти требования рассматриваются. Кроме того, большая роль в корректной постановке задачи принадлежит формулировке, указанию метода решения и объему предметной области, которой пользуется обучающийся при решении задачи. Даже небольшие изменения внутри категории «задача» могут приводить к изменению ее корректности.

После проведенного анализа компонентного состава задачи сделаем ряд выводов:

1. При каждом из выбранных подходов: теория систем, теория систем с управлением, теория категорий, – анализ компонентного состава корректных и некорректных задач позволяет сделать вывод о том, что задача состоит из компонентов (*ACRB*) и связей между ними, где *A* – условия задачи; *B* – заключения, требования, т.е. цели задачи; *R* – решение задачи, один из возможных способов перехода от *A* к *B*; *C* – базис решения задачи, теоретическая или практическая основа из предметной области *D*.

2. Для некорректных задач связи как внутри задачи, так и с внешней средой – более значимые, чем для корректных.

3. Корректность задачи – понятие относительное. Действительно, корректность задачи обусловлена как свойствами ее компонентов (*ACRB*), так и взаимосвязью задачи с предметной областью *D*. При изменении какого-либо компонента задачи или свойств внешней среды возможно изменение корректности задачи. В преобразовании предметной области *D* заключается один из подходов к решению некорректных задач. В подтверждение этого тезиса обра-

тимся к словам Ж. Адамара: «Не стоит понимать некорректность задачи столь абсолютно» [2].

4. Признание задачи некорректной не означает невозможность ее решения в дальнейшем. Противоречие, обнаруженное в задаче, приводит к необходимости разрешения возникшей проблемы. Это требует развития, варьирования, корректировки всех компонентов задачи: обобщения понятий, развития методов, разработки новой теории, т.е. такого расширения предметной области D и всего компонентного состава задачи ($ACRB$), при котором в этих новых рамках выявленное противоречие, некорректность были бы «сняты».

Анализ процессуального компонента

Проведем *психолого-педагогический* анализ процессуального компонента математической задачи, т.е. проанализируем деятельность обучающихся при решении математических задач; отметим особенности в структуре деятельности, характерные для решения некорректных задач, выявим универсальные учебные действия: обоснование однозначной определенности решения, варьирование, корректировка, – соответствующие требованиям корректности задачи.

Д. Пойа в известной работе [105, 273] обращает внимание на процессуальную сторону задачи, дает наиболее известный и общепринятый анализ процесса решения математической задачи. В этой работе предложена четырехшаговая структура процесса решения, изучены методы поиска решений задачи. Для решения математической задачи, по мнению Д. Пойа, необходимо поступить следующим образом:

– нужно ясно понять задачу;

– составить план решения;

– осуществить план;

– изучить полученное решение, т.е. осуществить «взгляд назад».

Сохраняя смысл четырех этапов этого плана, в работе [219] мы предлагаем более короткий и удобный для запоминания вариант, состоящий из трех шагов (рисунок 2):

– осмысление постановки задачи – ответ на вопрос «Что?»;

– поиск решения и осуществление решения задачи – ответ на вопрос «Как?»;

– завершение задачи – «Взгляд назад».

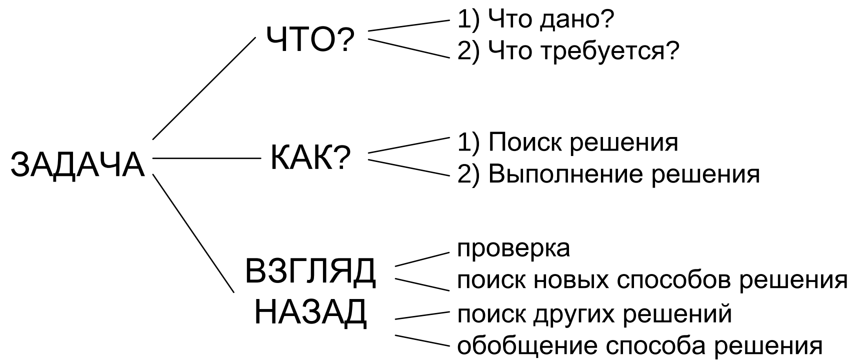


Рисунок 2. Процессуальная схема математической задачи

В свою очередь каждый из этих трех деятельностных этапов может быть разделен на более элементарные действия. Постановка задачи включает деятельность по ответу на два вопроса: что дано? и что требуется? Второй этап состоит из двух моментов: поиск решения (поиск идеи – как решать?) и реализация решения (как реализовать идею? как выполнить решение?). Последний, третий этап «Взгляд назад» – это всесторонняя деятельность: анализ решения; проверка; поиск другого решения, отличного от найденного, или поиск нового способа решения; обобщение метода решения на класс подобных задач и т.д.

Г. И. Саранцев [121, с. 138] последнему этапу придает более глубокий смысл и вместе с «взглядом назад» предлагает рассматривать и «взгляд вперед». Это конструирование новых задач, обобщающих данную задачу; исследование их разрешимости; перенос методов на новую предметную область, превращение приема в метод. «Реализация этого этапа (последнего, «взгляд назад») должна включать, кроме изучения полученного решения, еще и составление задач-аналогов для данной, задачи-обобщения, задачи-конкретизации, задач, решаемых тем же способом, что и основная, поиск различных способов решения данной задачи, их оценку, выбор наиболее простого», [121].

Предложенная процессуальная схема решения задачи соответствует компонентному составу задачи, но не равнозначна ей. К достоинствам предложенной схемы можно отнести ее наглядность и доступность для обучающихся. Кроме того, эта схема универсальна, она может быть рекомендована для решения задач в любой предметной области.

Вопрос о корректности задачи возникает на каждом из этапов реализации процессуальной схемы: при анализе постановки задачи, при осуществлении поиска решения и его выполнения, а также во время выполнения «взгляда назад».

Для анализа данных задачи Д. Пойа предлагает следующие вопросы: «Возможно ли удовлетворить условию? Достаточно ли условие для определения неизвестного? Или недостаточно? Или чрезмерно? Или противоречиво? Все ли решения найдены? Нет ли другого способа решения?». Ответы на эти вопросы позволят судить об однозначной определенности решения задачи.

Другой ряд вопросов выявляет еще одно существенное действие при решении задачи – варьирование: «Нельзя ли изменить неизвестное, или данные, или, если необходимо, и то, и другое, так, чтобы новое неизвестное и новые данные оказались ближе друг к другу?».

Процесс решения некорректной задачи приобретает вид спирали, состоящей из нескольких циклов. Выполнив один из циклов, установив некорректность задачи на этапе «взгляд назад», мы вынуждены возвращаться к началу задачи и осуществлять корректировку. Задача считается решенной после выполнения нескольких циклов: анализ однозначной определенности решения, варьирование, корректировка. В результате фиксируется результат, удовлетворяющий предъявляемым критериям корректности (рисунок 3).

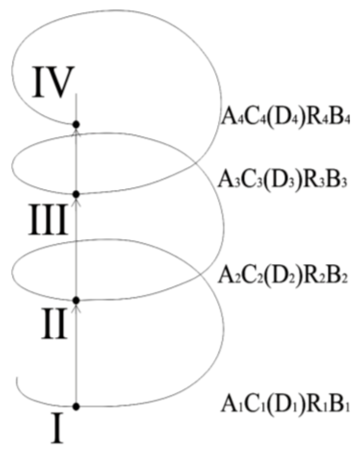


Рисунок 3. Спиралеобразность процесса решения некорректной математической задачи

Первый уровень психологического исследования процессуального компонента математической задачи основан на предложенной академиком П. К. Анохиным психофизиологической теории функциональных систем (ФС) и рассмотрен нами в работе [225]. При функционировании системы выделяют четыре этапа. Выясним, какой смысл этим этапам можно придать при рассмотрении процесса решения задачи.

1. Афферентный синтез (АС). В этой стадии происходит принятие задачи обучающимся, четкое осознание постановки задачи, интегрирование опыта, знаний, формирование мотивации, выбор цели деятельности.

2. Образ предвосхищенного результата деятельности, цель деятельности (Ц) и параметры результата (ПР) – критерии, которым должен удовлетворять результат. При решении задачи это означает четкое представление решающего задачу ее конечного результата и критериев оценки. Требования корректности: существование, единственность и устойчивость решения, – выступают в качестве критериев.

3. Программа (Пр) выполнения деятельности, которая определяет действия (Д) и операции (Оп), приводящие к искомому результату (Р). Для процесса решения задачи – это ее алгоритм, план решения.

4. Контроль (К) и оценка результата по ранее выдвинутым критериям (Кр). На этом этапе осуществляется проверка, анализ решения задачи с точки

зрения корректности, дальнейшее обобщение, перенос результатов или способов действий в новые условия.

Функциональная система дает универсальную архитектуру для описания любой деятельности человека, в частности, для решения задач, а также для выполнения отдельных действий или операций в процессе решения задачи: обоснование однозначной определенности решения задачи, варьирование, корректировка. Деятельность начинается в афферентном синтезе, развивается через образ результата и программу, доходит до контроля и далее завершается в афферентном синтезе нового витка деятельности.

Используя теорию функциональных систем в качестве методологической основы, составим модель деятельности при решении задачи (рисунок 4). Схема имеет вид нескольких колец, поскольку полученный результат оценивается по критериям корректности (существование, единственность, устойчивость решения), выдвинутым на первом и втором этапах; результат оценивается с точки зрения его соответствия предвосхищенному образу. Деятельность по решению задачи начинается с афферентного синтеза и заканчивается в нем. Если на основании обратной связи сделан вывод о том, что полученный результат не удовлетворяет выдвинутым критериям корректности (например, обнаружено еще одно решение или выявлены противоречия, или нет устойчивости решения), то решающий задачу осуществляет корректировку, возвращается к началу задачи и вновь осуществляет весь цикл. Деятельность в этом случае имеет вид нескольких повторяющихся циклов (рисунок 4). Эта цикличность осуществляется до тех пор, пока результат не будет удовлетворять предъявленным критериям корректности.

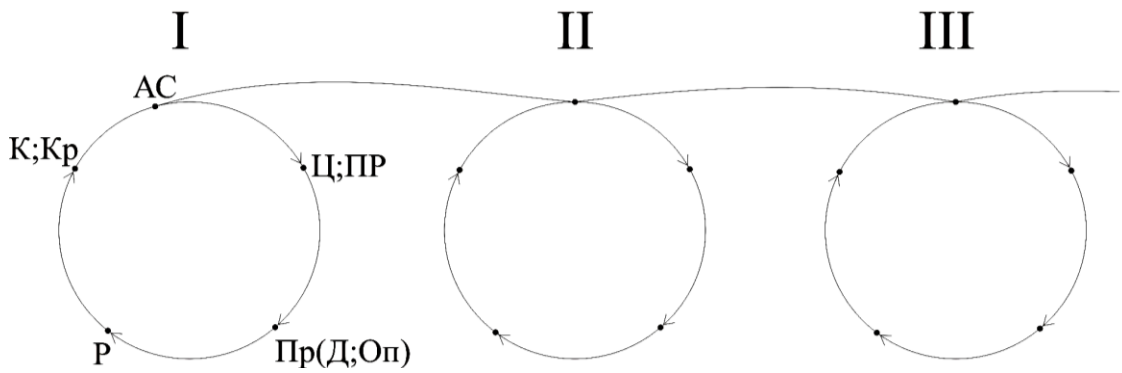


Рисунок 4. Цикличность при решении некорректной задачи

На втором уровне психологического анализа процессуального компонента математической задачи, см. [225], будем исходить из традиционных положений теории деятельности Л. С. Рубинштейна, А. Н. Леонтьева. Проанализируем процесс решения задачи с этой точки зрения, смысл основных компонентов деятельности, особенности ее осуществления для некорректных задач.

Решение задачи, как любая деятельность, осуществляется во внешнем и внутреннем плане, поскольку деятельность – это всегда соединение внутренних и внешних, т.е. психических и поведенческих, функций и операций. При решении задач внешняя деятельность всегда сопровождается внутренней, выполнение внешних действий регулируется посредством психики: восприятия, мышления, памяти, внимания, представления. Результат внешней деятельности может быть легко зафиксирован: задача решена или нет. Внутренняя, психическая деятельность диагностируется сложнее, но она не остается неизменной в этом процессе. При решении некорректных задач для внутренней деятельности характерны особенности: мышление обучающихся приобретает новые черты, становится по преимуществу дивергентным [22]; наблюдается динамика в развитии математических способностей [75], деятельность приобретает творческий характер [59].

Деятельность всегда предметна и субъектна. В рассматриваемом нами случае в роли *предмета деятельности выступает задача,* которая в процессе деятельности преобразуется. Субъектность деятельности находит свое выражение в аспектах активности обучающегося, способах взаимодействия с предметом деятельности – задачей и преподавателем, осуществляющим обучение.

Задача как предмет деятельности является самостоятельным образованием, имеет свою собственную структуру. Элементы в структуре задачи соотносятся с элементами в структуре деятельности по ее решению. *Результат деятельности* связан с требованием задачи, но не всегда совпадает с ним. Результат может быть шире, так как к результату деятельности можно отнести и новый метод решения, открытый в задаче, и новое усвоенное действие, и качественные психические и личностные изменения субъекта, решающего задачу. Средства и способы действий тесно связаны со способом решения задачи, с имеющейся в распоряжении обучающегося предметной областью, с системой знаний, из которой выделяется базис задачи.

В структурно-функциональном отношении важен анализ деятельности по ее единицам. *В качестве такой единицы выступает действие*, определяемое как наименьшее структурно-функциональное образование. Действие первично по отношению к включающей его деятельности. С психологической точки зрения человеческая деятельность представляет собой действие или цепочку действий. В свою очередь действие не является последней структурной составляющей деятельности, оно состоит из операций, состав которых определяется как способ выполнения действия и деятельности в целом. Операционный состав деятельности при решении задач очень разнообразен, и описать его возможно лишь для некоторого класса алгоритмических задач, отнесенных к общему методу.

При решении некорректных математических задач все компоненты деятельности: мотив, цель, предмет, средства, способы действий, результат, – присутствуют, акцент переносится на анализ результата и выбор средств, способов деятельности. Названные особенности позволяют отнести деятельность по решению некорректных задач к разряду творческой [59].

Таким образом, анализ процессуального компонента математической задачи позволяет заключить следующее.

1. Специфика процесса решения некорректной задачи проявляется прежде всего в развернутости деятельности, в прохождении всех ее этапов: анализ данных, поиск решения, осуществление решения, «взгляд назад».

2. Наличие цикличности деятельности для процесса решения некорректной задачи. Происходит возврат к условиям задачи, варьирование и корректировка с целью применения устойчивого алгоритма, или оперирования предметной базой (сужение или расширение), переход к системе корректных подзадач в случае обнаружения не единственности решения, переход к новой модели.

3. Состав универсальных действий, соответствующих решению некорректной задачи: обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировка. Установление корректности задачи не должно становиться самоцелью. Значительно важнее внедрить в практику обучения решению любой задачи методологию теории некорректных задач, т.е. выработать у обучающихся устойчивый навык проведения тех исследований, в результате которых устанавливается:

1) непротиворечивость данных задачи, что обеспечивает существование решения;

2) полнота, независимость данных задачи, что обеспечивает единственность решения;

3) существенность всех этапов решения и компонентов задачи.

4. Корректность задачи может быть установлена только после нахождения решения задачи, после выполнения глубокого анализа всех элементов, составляющих задачу. Некорректность же задачи может быть обнаружена на любом этапе ее решения. Констатация факта некорректности задачи обязывает решающего вернуться к началу задачи и далее действовать в зависимости от причины, вызвавшей некорректность.

5. Распознавание некорректных задач осуществляется в результате выполнения следующих действий:

1) анализ данных задачи на непротиворечивость (для того чтобы выяснить, существует ли решение задачи);

2) анализ данных задачи на полноту (избыток или недостаток данных необходимо установить для обоснования единственности решения задачи);

3) малые варьирования данных задачи и способа ее решения (для установления устойчивости задачи). Устойчивость решения констатирует факт существенности всех требований в условиях задачи, а также существенности каждого шага в процессе решения. Установление непрерывной зависимости решения от исходных данных предполагает варьирование условий задачи, их видоизменение с целью выяснения тех особенностей, которые при этих изменениях могут проявляться, поскольку требуется установить, что «малым» изменениям исходных данных соответствуют «малые» изменения решения.

Таким образом, на основе проведенного структурно-функционального анализа разработаны *критерии оценки сформированности деятельности обучающихся при решении задач* в соответствии с выделенными структурными звеньями задачи и основными компонентами деятельности по ее решению. Разработанные критерии будут использованы для оценки деятельностной составляющей критериально-корректностных компетенций.

1. Характер мотивации: внутренняя – внешняя, познавательная – репродуктивная.

2. Владение знаниями о компонентном (*ABCDR)* и операциональном составе задачи: постановка задачи (данные, требование), поиск решения и осуществление решения, «взгляд назад».

3. Владение анализом данных задачи на полноту и противоречивость.

4. Владение стратегией поиска решения задачи: хаотично – целенаправленно, степень осознанности анализа – синтез, формулирование гипотез, разбиение на подзадачи, рассмотрение частных и предельных случаев, всех возмож-

ных вариантов, выбор рационального способа решения, умение выделить главную, продуктивную идею, которая приводит к решению.

5. Качество выполнения решения: правильность, обоснованность, полнота, свернутость выполнения отдельных простейших операций, затраченное время, характер допущенных ошибок (техническая, логическая).

6. Качество выполнения последнего этапа, «взгляда назад»: проверка правильности решения; проверка условий корректности задачи; поиск решений, отличных от найденного; обобщение метода; формулирование новых задач.

7. Владение средствами решения задач: рисунки, модели, абстракции, краткая запись задачи, представление данных задачи в различных видах, использование компьютера.

8. Владение методами решения задач: выбор теоретического базиса для решения задачи, владение простейшими методами и умение их комбинировать.

1.1.3. Некорректные задачи в обучении математике

Важной составной частью реализации компетентностной образовательной парадигмы и повышения качества математического образования является совершенствование методов, средств и форм обучения, разработка новых приемов математической деятельности. Обучение решению математических задач – один из эффективных путей решения этой проблемы, эффективное средство формирования компетенций, достижения межпредметных результатов образования и овладения математической деятельностью.

Приобретение студентами собственного опыта по решению задач играет одну из ведущих ролей в становлении профессионала, поскольку из грамотного решения практических задач состоит профессиональная деятельность. Необходимость принятия решений в условиях избытка, недостатка данных или их противоречивости требует от профессионала умения работать с некорректными задачами. «Потребность восстановить прошлое по некоторым фактам настоящего, заглянуть в будущее или проникнуть в зону недоступности» [58] приводит человека к необходимости решать некорректные задачи в прикладной сфере. Вооружение обучающихся методологией их решения соответствует реализации компетентностной парадигмы высшего профессионального образования. Обратные и некорректные задачи приближены к реалиям жизни. К ним относится, например, задача восстановления причины по известному следствию, которая, вообще говоря, не разрешима однозначно. Постановка диагноза по результатам обследования, восстановление картины преступления по имеющимся уликам, обнаружение месторождения по данным геологоразведки и т.д. – примеры задач такого сорта. Не единственность решения таких задач не противоречит, а характеризует с различных сторон многообразную картину описываемых явлений, позволяет «обратить» причинно-следственные связи.

Функции некорректных задач в обучении математике

Основные теоретические положения о функциях задач в обучении математике разработаны Ю. М. Колягиным [51–54] и далее развиты Г. И. Саранцевым [121, 122] для систем упражнений. Обширные сведения о месте и роли задач в обучении, об их функциях сообщаются в Хрестоматии, составленной М. И. Зайкиным [163]. Главные выводы состоят в следующем [121, 122]: «представляется правильным говорить о тех или иных функциях задач в зависимости от того, какой вид деятельности проявляется в процессе их решения или в зависимости от того, какая конкретная цель обучения, воспитания или развития реализуется при постановке той или иной задачи в конкретных условиях обучения». И далее: «Важнейшие функции задач направлены на обучение, воспитание и развитие обучаемых и дополняются специфическими функциями, связанными с конкретным содержанием задачи. Одни из задач в большей степени направлены на воспитание, другие – на развитие, третьи – на передачу знаний. Реализуемые функции задачи зависят от конкретного использования задачи, от ее места и роли в процессе обучения».

Так, *обучающие и познавательные функции задач* реализуются при формировании понятий и установлении связей между ними; при формировании основных умений и навыков, при формировании ведущих умозаключений и идей, а также установлении связей между ними. Важная роль некорректных задач проявляется в *мировоззренческой функции*, которая реализуется через то влияние, которое оказывают некорректные задачи на взгляды обучающихся на природу и общество, на формирование единой картины мира. *Развивающие функции задач* реализуются в продуктивной учебно-познавательной деятельности, направленной на формирование и совершенствование психических познавательных процессов, личностных качеств обучающихся. В *воспитательных функциях задач* отражены главные воспитательные цели математического образования: формирование общекультурных взглядов и знаний, формирование активной жизненной позиции. Можно указать еще и *методическую функцию* задач: какие цели обучения могут решаться использованием систем задач, задачного подхода в обучении.

Рассмотрим далее указанные основные функции задач, обращая внимание на роль корректных и некорректных задач.

Реализация обучающих и познавательных функций задач. Важность использования в процессе обучения некорректных задач отмечают многие ученые-методисты в своих исследованиях. Среди них Н.В.Аммосова [8], [9]; Т. И. Бузулина [86], она рассматривает роль и место неопределенных задач на занятиях по аналитической геометрии; Н. И. Мерлина [86] предлагает открытые задачи, М. А. Родионов [115] – незавершенные задачи.

Решение некорректных задач приводит к выявлению существенных сторон понятий, к осознанности и обоснованности методов доказательства, способов решения задач. Некорректные задачи очень часто предполагают слом стереотипов деятельности, приводят к открытию эвристик, к нестандартным приемам деятельности. При реализации деятельностного подхода в обучении математике некорректные задачи служат адекватной предметной базой, так как само содержание задач побуждает к осознанию деятельности по их решению. Понимание, осознание учебного материала при решении некорректных задач должно быть неформальным.

При обучении математике на некорректных задачах проявляется важность и значимость тех факторов, которые при решении корректных задач могут не проявляться.

Так, в теории и методике обучения математике большое внимание уделяется поиску решения задач. Имеется достаточно большое количество работ и публикаций, обучающих поиску решения. Значимость же завершающего этапа решения, а именно проверка решения возвратом к условиям задачи, анализ способа решения, а при необходимости и выработка новых способов решения, особенно ярко проявляются при рассмотрении некорректных задач. Действительно, правильный ответ в корректной задаче может быть получен и без соответствующей проверки, а некорректная задача не может быть правильно решена без этого завершающего этапа.

Обучение лишь на корректных задачах оставляет в стороне большой класс некорректных задач, и студенты прочно утверждаются во мнении, что все задачи имеют единственное решение. Ошибочное мнение, что все задачи однозначно разрешимы, возникает и упрочивается в силу того, что задачи с ответом «Нет решения в данных условиях» недостаточно полно представлены и в школьных, и вузовских учебниках. Потребности практики в решении задач с избыточными данными, среди которых зачастую имеются и противоречивые, удовлетворяются благодаря применению методов теории некорректных задач. Задача с противоречивыми данными в теории некорректных задач может быть решена, например, методом отыскания квазирешения, что вполне удовлетворяет практическим потребностям. Обработка данных при компьютерной томографии, решение задач геологоразведки, интерпретация результатов наблюдений, распознавание образов – это примеры практических некорректных задач.

Некорректные задачи требуют выполнения более сложных умственных действий, более глубокого анализа, чем корректные. Возникает необходимость в осуществлении переноса не только способов решения, но и переноса понятий, обобщения понятий на более широкую область. Так, для того чтобы решить задачи, некорректные в рамках одной теории, возникает потребность в расширении этой теории, обобщении понятий и методов, в построении новых научных теорий. Решение некорректной задачи предполагает осуществление деятельности, более богатой по структуре, чем при решении корректных задач: анализ из одношагового превращается в многошаговый; возникает необходимость рассмотрения полной системы всех возможных вариантов; обобщение, перенос, аналогия получают новое качество выполнения действий; происходит слом стереотипов деятельности; задачи, не имеющие решения в рамках существующих теорий, дают толчок развитию новых научных направлений, приводят к открытию эвристик.

Задачи представляют собой основное средство целенаправленного формирования знаний, умений и навыков. Составление систем математических задач в соответствии с учением П. Я. Гальперина [35] от усвоения содержания приема до самостоятельного его применения и переноса на новые ситуации должно осуществляться с использованием некорректных задач. Формирование знаний, умений, навыков должно осуществляться во всех возможных ситуациях, навыки решения задач должны отрабатываться при рассмотрении как корректных, так и некорректных задач, поскольку чем разнообразнее решаемые задачи, тем более широкое обучающее воздействие эти задачи оказывают.

Мировоззренческие функции некорректных задач связаны с реализацией гуманитарной составляющей обучения, которая ориентирована на то, чтобы обосновывать гуманитарную роль математики, ее общеметодологическое значение для большинства научных дисциплин; математика – не только мощное средство решения прикладных задач, но и элемент общей культуры и мировоззрения современного человека. Теория некорректных задач представляет большие возможности для реализации гуманитарной и мировоззренческой составляющих математического образования.

На некорректных задачах иллюстрируются многие философские закономерности, важные для формирования мировоззрения обучаемых. В соответствии с законами диалектики корректные и некорректные задачи представляют собой две взаимодействующие, тесно взаимосвязанные и взаимодополняющие друг друга стороны реального мира, подобно тому, как соотносятся непрерывные и дискретные величины, конечное и бесконечное, детерминированные и стохастические процессы. С помощью этих двух видов задач (корректных и некорректных) картина окружающего мира может быть описана математическими средствами в более полном виде, чем при использовании лишь корректных задач. Некорректные задачи реализуют философские утверждения о познаваемости мира, неограниченности познания, принципах множественности истины, объективности причинно-следственных связей, неоднозначной обратимости причинно-следственных связей.

Взаимодействие понятий «корректность» – «некорректность» подчинено законам диалектики. Характер внутреннего взаимодействия «корректность – некорректность» имеет диалектическую природу, являя собой пример диалектического единства и противоположности, а потому необходимым образом дополняют друг друга в рамках некоего целого.

О мировоззренческой роли некорректных задач говорится в работе С. А. Лебедева «Философия естественных наук» [155, с. 76]. Решение обратных задач (а они преимущественно некорректны) имеет ряд особенностей мировоззренческого характера:

1) решение «убеждает в том, что свойственное многим ученым-естественникам убеждение в том, что в конечном счете только один вывод, только одно мнение есть истина, не является правильным»;

2) «при решении ряда задач имеет место заметный элемент субъективизма, что приводит к появлению различных взглядов. Однако оказалось, что эти взгляды надо рассматривать не как противоречащие друг другу, а как взаимодополняющие».

В процессе обучения решению некорректных задач осуществляется интеграция философского и естественно-научного знания, дается фактический материал, призванный подтвердить одни философские конструкции или опровергнуть другие: «…мы должны быть готовы к тому, что всестороннее освещение одного и того же предмета может потребовать различных точек зрения, препятствующих однозначному описанию» [155, с. 40].

Гуманитарный потенциал и мировоззренческие функции обратных некорректных задач раскрыты в докторском исследовании В. С. Корнилова [67]. В этой работе обоснована эффективность использования некорректных задач в целях гуманитаризации высшего профессионального образования.

Развивающие функции некорректных задач. Наблюдаются тенденция усиления развивающей функции некорректных задач, это отмечают в своих исследованиях ученые Ю. М. Колягин, В.И.Крупич, Г. И. Саранцев, Д. Б. Эльконин, В.В.Дрозина, Э. Г. Гельфман, А. В. Крутецкий, И. П. Калошина, Л.М.Фридман, М. А. Холодная, и др.

Развивающие функции задач направлены на формирование психических познавательных процессов и личностных качеств обучающихся. В развивающем обучении мышление, внимание, память, восприятие, речь приобретают новые качества, свойственные высокому уровню развития интеллекта и когнитивных структур личности; формируются продуктивные свойства психических познавательных процессов. Некорректные задачи служат учебным материалом, на котором могут успешно фомироваться дивергентность мышления, креативность личности, интеллектуальная активность.

Реализация развивающих функций задач осуществляется подбором задач, приводящих к созданию проблемных ситуаций, к изменению типа познавательной деятельности: от репродуктивной к частично-поисковой, к исследовательской и творческой. Некорректные задачи в силу заложенных в них противоречий, служат основой для создания проблемных ситуаций, для перехода от объяснительно-иллюстративного метода обучения к проблемному. При исследовательском методе обучения в качестве предмета исследования могут выступать некорректные задачи.

Некорректные задачи в системе задач, призванной «побуждать обучаемого к самостоятельной работе и прививать ему целесообразные навыки математического мышления», используют Г. Пойа и Г. Сеге. В их книге [108] «Задачи и теоремы из анализа» приведена система задач по математическому анализу, которая превращает учебно-познавательную деятельность студентов в последовательность открытий. О развитии интуиции на корректных и некорректных (*unreasonable*) задачах говорит Д. Пойа, который в работе [106] утверждает: «Конечно, будем учиться доказывать, но будем также учиться догадываться».

Реализация *воспитательных функций* задач осуществляется при формировании личностных качеств обучающихся, среди них особо выделяются нравственные качества. О воспитании личностных качеств, которое может быть реализовано на обучении решению некорректных задач, говорится в работе [123, с. 7]: «Эйнштейн утверждал, что Достоевский ему дал больше, чем Гаусс. Чему мог научить философ-экзистенциалист Достоевский ученого-физика Эйнштейна? Я полагаю только одному: когнитивному личному мужеству, т.е. умению принимать решения и осуществлять научный выбор в условиях неполной определенности, умению «переступать черту» и нести за совершенный выбор тяжелый груз ответственности».

При обучении математике необходимо отмечать, что математика является неотъемлемой частью цивилизации, существенным элементом культуры, языком научного восприятия и познания мира. Об этой стороне математики говорит Н. Х. Розов в своей статье [117]. При обучении математике, когда для каждого из основных понятий описывается его история: предтеча, зарождение, начальное формирование, постепенное развитие, содержательное обогащение, современное состояние, – формируется общая культура человека, реализуется гуманитарная составляющая обучения математике. История решения некорректных задач дает фактический материал для практики работы вуза в этом направлении.

Нельзя строго разграничить мировоззренческие, воспитательные и образовательные функции некорректных задач, они переходят, взаимно обогащают и дополняют друг друга.

Методическая функция некорректных задач реализуется в процессе подготовки будущих учителей математики к конструированию систем задач. В исследовании, проведенном Г. И. Ковалевой, эта функция выявлена и обоснована [61]. Среди правил конструирования систем задач указано правило противопоставления, которое означает обязательное включение в систему тех задач, которые не имеют решения, а также контрпримеров. Чтобы избежать неверных ассоциаций при составлении систем однотипных задач, должны быть использованы некорректные задачи. В процессе варьирования условия могут получиться нестандартизированные (неопределенные, вариативные, переопределенные, противоречивые, провоцирующие) задачи, в отличие от стандартизированных, или определенных, содержащих в условии необходимое количество данных для получения единственно возможного ответа. Системы задач для формирования определенных способов действий должны содержать некорректные задачи.

Роль и место некорректных задач в обучении

Обучение математике ориентировано на признание задач в качестве основы образования, воспитания и развития. В процессе решения задач происходит усвоение знаний (понятий, теорем, суждений), а также формируются и осваиваются действия, способы деятельности, эвристики, т.е. задачи являются носителем содержания образования. В процессе обучения математике задачи выступают, [121],[122]:

1) носителем действий, адекватных содержанию обучения;

2) средством целенаправленного формирования знаний, умений и навыков;

3) способом организации и управления учебно-познавательной деятельностью;

4) одной из форм реализации методов обучения;

5) средством связи теории с практикой.

Задачи являются средством и целью обучения, воспитания и развития обучающихся, способом организации учебного процесса, формой реализации методов обучения. Таким образом, задачи в обучении математике – это многоаспектное явление. Многообразное назначение задач в процессе обучения в более полной мере и более успешно может быть реализовано, если использовать как корректные, так и некорректные задачи. Порой на некорректных задачах существенные стороны математических методов или понятий проявляются более ярко.

Следуя сформулированным положениям о месте и роли задач в обучении математике, проиллюстрируем, что использование некорректных задач оптимизирует и обогащает процесс обучения.

1. Задачи являются носителем действий, адекватных содержанию обучения. Действительно, в содержание образования включаются не только предметные знания, но и сама деятельность, в результате которой осуществляется приобретение, усвоение, применение этих знаний. При решении некорректных математических задач все основные компоненты деятельности: мотив, цель, предмет, средства, способы действий, результат, – присутствуют, акцент переносится на анализ результата и выбор средств, способов деятельности, адекватных структуре некорректных задач. Эта деятельность включает логические, эвристические действия, действия контроля и самоконтроля, учебные действия.

Некорректные задачи требуют выполнения более сложных умственных действий, более глубокого анализа, чем корректные. Возникает необходимость в осуществлении переноса не только способов решения, но и переноса понятий, обобщения понятий на более широкую область. Так, для того чтобы решить задачи, некорректные в рамках одной теории, возникает потребность в расширении этой теории, обобщении понятий и методов, в построении новых научных теорий или научных направлений. Таким образом, решение некорректной задачи предполагает осуществление более богатой по структуре деятельности. Анализ из одношагового превращается в многошаговый. При решении некорректных задач возникает необходимость рассмотрения полной системы всех возможных вариантов; обобщение, перенос, аналогия получают новое качество выполнения действий; происходит слом стереотипов деятельности; задачи, не имеющие решения в рамках существующих теорий, дают толчок развитию новых научных направлений, приводят к открытию эвристик. Да и само знание рассматривается как «деятельность, оцененная с точки зрения ее результата» [121, с. 34].

2. Задачи представляют собой основное средство целенаправленного формирования знаний, умений и навыков. Составление систем математических задач от усвоения содержания приема до самостоятельного его применения и переноса на новые ситуации должно осуществляться с использованием некорректных задач. Формирование знаний, умений, навыков должно осуществляться во всех возможных ситуациях, навыки решения задач должны отрабатываться при рассмотрении как корректных, так и некорректных задач, поскольку чем разнообразнее решаемые задачи, тем более широкое обучающее, развивающее и воспитательное воздействие эти задачи оказывают.

3. Задачи выступают способом организации и управления учебно-познавательной деятельностью. Располагать задачи нужно таким образом, чтобы «побуждать обучаемого к самостоятельной работе и прививать ему целесообразные навыки математического мышления» [121].

4. Задачи представляют одну из форм реализации методов обучения. Использование некорректных задач при проблемном, частично-поисковом, исследовательском методах обучения дает успешный результат. Заложенные в некорректных задачах противоречия облегчают создание проблемных ситуаций, побуждают обучаемых к творчеству.

5. Задачи служат средством связи теории с практикой. Некорректные задачи очень часто возникают из практики, когда имеется избыток условий, а среди данных возможны и противоречивые.

Целесообразность включения некорректных задач в содержание образования обосновывается следующими факторами:

– нацеленностью образовательного процесса на формирование компетенций, так как методология решения как корректных, так и некорректных задач – это надпредметные, межпредметные знания связанные, во-первых, со структурными особенностями некорректных задач, отражающих все многообразие математических задач; во-вторых, развернутостью математической деятельности по их решению;

– потребностями практики, поскольку существует реальная необходимость в практической деятельности принятия решений в условиях недостатка, избытка, противоречивости данных, при этом решение задачи (в классическом понимании) может быть не единственным, неопределенным или даже отсутствовать;

– богатым развивающим и мировоззренческим потенциалом, которым обладают в совокупности корректные и некорректные задачи: иллюстрируют идею незавершенности знания, поэтапности и бесконечности познания, неоднозначную обратимость причинно-следственных связей, дают пример диалектического взаимодействия двух взаимосвязанных, не противоречащих, а взаимодополняющих сторон реального мира;

– целесообразным сочетанием корректных и некорректных задач в обучении математике, которое позволяет успешно реализовывать обучающие, воспитательные и развивающие функции задач, а также роль и место задач в обучении математике.

Таким образом, в заключение раздела 1.1 мы приходим к выводам:

– появление в середине XX в. нового математического научного направления – теории некорректных задач – приводит к необходимости изменения содержания высшего образования; некорректные задачи включаются в содержание образования и становятся объектом профессиональной деятельности бакалавров физико-математических направлений;

– отвечая на запросы общества по изучению и использованию в образовательном процессе, в естественно-научных областях знаний корректных и некорректных математических задач, ученые-методисты, психологи, педагоги с середины XX в. обращаются к их исследованию. В теории обучения математике, в педагогике и психологии (как Российской, так и зарубежной) нет общепринятого определения как корректных, так и некорректных задач. В этих науках, в отличие от математики и близких к ней областей знаний, наиболее общей является точка зрения, при которой некорректными называются задачи с противоречивыми, неполными или избыточными данными; в то же время определение корректной математической задачи не дается, оно следует из контекста или противопоставлением к понятию некорректной задачи. Определение Ж.Адамара корректной и некорректной математической задачи обладает не только наибольшей общностью, включает в себя определения, которые используются в методике, психологии и педагогике, но и дает пути к распознаванию корректных и некорректных математических задач, позволяет построить механизмы преодоления некорректности в самых общих случаях. Ввиду этих фактов, определение Ж.Адамара представляется нам универсальным, общим и наиболее пригодным, как в математике, так и в психолого-педагогических и методической науках. В дальнейшем в нашей работе это определение Ж.Адамара принято в качестве основного.

– использование в методической науке определения Ж.Адамара приводит к выводам, которые характеризуют дидактические возможности корректных и некорректных задач: целесообразное сочетание корректных и некорректных задач в обучении математике позволяет успешно реализовывать обучающие, воспитательные и развивающие функции задач; в целях реализации многообразного назначения задач в обучении математике некорректные задачи существенно дополняют возможности корректных; в адекватном сочетании корректных и некорректных задач в обучении математике кроется способ успешного достижения обучающих, воспитательных и развивающих целей математического образования; использование некорректных задач оптимизирует и обогащает процесс обучения.

1.2. Корректность основных элементов математического содержания и их дидактический анализ

В разделе 1.1 был проведен анализ корректной и некорректной математических задач, нами было выявлено, что понятие «корректность» служит критерием оценки свойств математической задачи, а также свойств внешней среды по отношению к задаче. В данном разделе мы проанализируем, как критерий «корректность» применяется к оценке свойств основных элементов математического содержания, выявим наиболее употребительные трактовки корректности математической модели, правил вывода, определения понятий, вопроса и ответа, доказательства; определим существенные признаки понятия «корректность», инварианты деятельности и механизмы по установлению корректности основных элементов математического содержания, по преобразованию выявленной некорректности в корректность, а также возможности, целесообразность использования этого понятия в учебном процессе. В данном разделе представлен эмпирический материал для проведения в разделе 1.3 логико-дидактического анализа понятия «корректность» с целью получения основных выводов по его реализации в образовательном процессе.

1.2.1. Корректность математической модели

Понятие «корректность» используется для оценки основных свойств математической модели, оно представляет ряд требований к свойствам математических моделей. Корректность математической модели определяется аналогично корректности задачи и включает три требования [21, 31, 120, 129, 238]: однозначную определенность образа объекта моделирования (включающую существование и единственность) и устойчивость модели. Другими словами, корректность модели означает ее полноту, непротиворечивость и устойчивость (робастность). Речь идет о математической модели реального процесса или явления окружающего мира.

Первой проверкой математической модели на адекватность является установление ее корректности. «Установление корректности математической модели представляет собой самостоятельную достаточно сложную задачу, поэтому в моделировании корректность часто доказывается опосредованно, т.е. выполняются исследования, косвенно подтверждающие корректность модели. Это ряд контрольных проверок размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций, физического смысла и математической замкнутости», [129, с. 22]. В соответствии с этим, корректность математической модели означает получение положительных результатов всех перечисленных контрольных проверок.

Построение и исследование математических моделей физических явлений составляет предмет математической физики. В математической физике модель изучаемого процесса или явления представляет собой чаще всего совокупность дифференциального уравнения и начальных, краевых или граничных условий. Среди задач математической физики – математических моделей – выделяют важный класс корректно поставленных задач (моделей), для которых решение, во-первых, существует; во-вторых, единственно; в-третьих, непрерывно зависит от данных задачи, т.е. устойчиво. Эти требования необходимо доказать в рамках принятой математической модели. В соответствии с этим, [31, с. 8] «корректность модели означает выполнение ряда требований:

– модель непротиворечива (решение существует),

– модель однозначно описывает физический процесс (решение единственно);

– модель малочувствительна к погрешностям измерений физических величин (решение непрерывно зависит от данных задачи)».

Эти определения сформулированы в терминах классических решений. Для класса обобщенных функций или для приближенных решений требуются другие подходы, в частности, необходимо обобщение классического понятия решения задачи. В современной математической физике большое значение имеет понятие обобщенного решения. Определение обобщенного решения опирается на понятие обобщенной функции, обобщенной производной. Для изучения линейных краевых задач математической физики используются теоретические положения для обобщенных функций. Корректность модели в этом случае интерпретируется несколько по-другому.

Далее в работе мы будем рассматривать корректность математической модели в предложенном выше варианте, см.[31, с. 8], в терминах классических решений.

Таким образом, с точки зрения формальной логики определение корректности математической модели номинальное, явное [36], т.е. определен термин «корректная математическая модель». Способ определения понятия: ближайший вид (математическая модель) плюс родовое отличие (условия корректности).

При исследовании математической модели на корректность осуществляются действия:

1) обоснование однозначной определенности модели: решение модели существует и однозначно описывает физический процесс;

2) варьирование;

3) корректировка.

1.2.2. Корректность правил вывода

В математической логике понятие «корректность» служит для оценки свойств логических правил вывода [7, 86]: «правило вывода называется корректным, если для каждого примера этого правила, посылки которого являются тождественно истинными, его заключение также тождественно истинно». Далее в математической логике доказывается, что «корректны следующие правила вывода: правило заключения, правило отрицания, правило контрапозиции, правило силлогизма».

На основе корректных правил вывода определяется понятие правильного рассуждения [7]: «рассуждение считается правильным, если с его помощью из истинных посылок нельзя получить ложное заключение. Или, другими словами: рассуждение правильно, если заключение истинно, когда истинны все посылки». Таким образом, неправильное рассуждение – это рассуждение, позволяющее получить ложное заключение из истинных посылок.

Впервые о корректности правил вывода заговорил Р. Декарт [68]. Он же ввел это понятие в том виде, в каком оно существует до сегодняшнего дня: «Во избежание логических ошибок вывод должен быть не только логически правилен, т.е. получен путем правильных рассуждений, но и должен быть основан на истинных, а не на любых посылках». Тем самым математическая строгость, правильность рассуждений (доказательств) приобретает, по мнению Декарта, обоснование: «она нужна не сама по себе, а в качестве инструмента, работающего на материале истинного знания» [135, гл. IX].

Логическая правильность действий на основе принятых посылок приводит к истинным выводам, если все использованные посылки были истинными. Надо сказать, что проблема правильных рассуждений на основе корректных правил вывода из математической логики выходит далеко за границы математической деятельности и принадлежит уже сфере формальной логики, которой подчинены способы деятельности во многих областях: юридической, политической, экономической, общебытовой.

Мы можем заключить, что с точки зрения формальной логики приведенные выше определения корректности правил вывода и правильности рассуждений представляют собой номинальные явные определения [36]. В них однозначно определяются термины «корректное правило вывода», «правильное логическое рассуждение», а их произвольная трактовка недопустима. Понятия «правильность» и «корректность», примененные в качестве критерия к правилам вывода и логическим рассуждениям, являются равнозначными, или эквивалентными.

1.2.3. Корректность определения понятия

Понятие «корректность» в качестве критерия позволяет оценить определение понятий, такая оценка играет важную роль как в познании, построении понятийного аппарата, так и в процессе обучения при введении новых понятий, их определении, обобщении. Вначале рассмотрим, что называется понятием, а затем сформулируем требования корректности для явных и неявных определений понятий.

«Понятием в логике и философии называют форму мышления, отражающую существенные и несущественные свойства, признаки объектов реального мира», [40, 43, 44]; в психологии понятие рассматривается как «многоуровневая, иерархически организованная структура, включающая образы разной степени обобщенности. Понятие наряду с суждением и умозаключением является одной из логических форм мышления», [136], [137]. Понятие характеризуется объемом (множеством объектов, выделяемых и обобщаемых в понятии) и содержанием (существенными свойствами понятия).

Определение понятий раскрывает сущность определяемого предмета, хорошо известно, «что за первой, поверхностной сущностью просматривается и вторая, более глубокая сущность, за ней – третья, и этот процесс углубления и все более полного познания бесконечен, как бесконечен путь к абсолютной истине. А это значит, что, какое бы определение предмета мы ни давали, оно неизбежно будет неполным, т.е. всегда его можно уточнить или углубить», [137]. При определении понятий необходимо выбирать наиболее эффективные и уместные в конкретной ситуации формы. Таким образом, на каждом этапе определение понятия должно быть корректным, охарактеризуем это качество как однозначную определенность определяемого класса объектов в сложившихся условиях.

С помощью определения понятий раскрывается содержание понятия. «Определение понятия – это логическая операция, которая раскрывает содержание понятия либо устанавливает значение термина», [43, 44]. В процессе определения понятий придается строго фиксированный смысл языковым выражениям, выделяются существенные признаки понятия.

Способы предъявления определений:

– ближайший род плюс видовое отличие;

– перечисление свойств (для генетического определения указан способ получения предмета и никакого другого);

– формула.

Чтобы определения были логически корректными, к ним предъявляется ряд требований, некоторые из этих требований носят всеобщий характер, а некоторые действуют лишь для определений специального вида, [40].

Проанализируем, какой смысл придается корректности явных и неявных определений, выясним требования, предъявляемые к корректному определению понятия.

Корректность явного определения понятия. Различают несколько видов определения понятий. В математике в основном имеют дело с явными и генетическими определениями.

В явном определении понятие, содержание которого надо раскрыть, называется определяемым, а то понятие, посредством которого оно определяется, называется определяющим. Явными являются определения, построенные с помощью приема: род плюс видовое отличие. Например: «Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные сторон попарно параллельны», «Трапеция – это четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие – не параллельны». Понятие функции в математическом анализе определяется через родовое понятие – соответствие, к которому добавлены видовые отличия.

При генетическом определении понятия указывается способ получения или конструирования понятия. Генетические определения являются частным случаем явных определений. В курсе математического анализа определения производной, определенного интеграла являются генетическими, так как определение осуществляется с помощью процедуры построения этих понятий.

Определение модуля действительного числа происходит с помощью формулы или словесной формулировки, в точности повторяющей формулу, поэтому оно генетическое.

В логике, в методике обучения математике именно для явных определений сформулированы правила, которые предъявляются к определениям: соразмерность, отсутствие логического круга, использование ближайшего рода, четкость и ясность. Во многих научно-педагогических источниках, например, см. [7, 29, 100, 101], эти требования называют требованиями корректности явного определения понятия, а сами определения, удовлетворяющие перечисленным условиям, – корректными.

Итак, для явных и генетических определений *формально-логические требования корректности* состоят в следующем:

1) определение должно быть соразмерным, что предполагает равенство объемов определяемого и определяющего понятий;

2) определение не должно содержать круга;

3) целесообразно определять объект через ближайший род;

4) определение должно быть четким и ясным, раскрывающим определенный набор свойств понятия.

В методике обучения математике иногда эти требования называют правилами правильного определения понятий, например [86, 100].

Корректные определения однозначно задают класс определяемых объектов, и такая однозначная определенность класса определяемых объектов может служить эквивалентом для формально-логических требований корректности. За каждым корректным определением стоит не единичный объект, а целый класс объектов, однозначно определенный сущностными характеристиками данного класса объектов.

Как отмечено в нашей работе [238], «при введении научных понятий и терминов должно быть гарантировано их неотъемлемое качество – однозначная определенность рассматриваемого класса объектов, единое понимание определения научным сообществом, отсутствие необходимости корректировок, исправлений самого текста определения. Эти качества определения понятий соответствуют формально-логическим требованиям корректности, и мы будем их рассматривать в качестве требований корректного определения понятий».

В школьном курсе математики «встречаются ситуации, когда после определения понятия доказывается теорема существования и единственности для определяемого класса объектов, т.е. обосновывается корректность определения. В школе обосновывается корректность определения операции деления на число, отличное от нуля; корректность определения разности двух чисел», [233]. «В школьном курсе геометрии обосновывается корректность введенного определения расстояния между параллельными прямой и плоскостью, между параллельными плоскостями, между скрещивающимися прямыми», [233].

В вузовском курсе математики обосновывается корректность определения предела функции в точке: доказываются существование, единственность предела, обосновывается обобщение ранее изученного понятия – значения функции в точке [156, ч. 1]. Если определяемое понятие обобщает ранее известное, то это ранее известное понятие является частным случаем вновь вводимого понятия. В математическом анализе при введении элементарных функций комплексного переменного: sinz, cosz, expz, – доказывается их корректность. С этой целью доказывается существование и единственность определенных функций, а также совпадение на действительной оси со значениями соответствующих функций действительного переменного, т.е. понятие функции комплексного переменного содержит ранее изученное понятие функции действительного переменного как частный случай. В курсе вузовской математики доказываются корректность определений вычета аналитической функции в изолированной особой точке, абсолютно сходящегося ряда, фактор-пространства, групповых операций с элементами фактор-пространства.

Таким образом, однозначная определенность вводимого понятия является эквивалентом корректности явного формально-логического определения понятия.

Корректность неявного определения понятия. Невозможно всем понятиям дать явные определения, поэтому в науке и в процессе обучения используются приемы, сходные с определением: аксиоматический подход, описание, определение из контекста, характеристика, разъяснение посредством примеров или демонстрации, [36],[40],[45]. Такие определения называют неявными. К неявным определениям относятся остенсивные определения – это определение понятия путем показа, демонстрации, описаний.

В школьном и вузовском курсах математики неявные, описательные определения – достаточно частое явление. Корректность такого сорта определений будет означать однозначную определенность класса вводимых объектов, их всестороннее рассмотрение, соответствующее условиям обучения.

Аксиоматическое определение понятий логика также относит к неявным определениям. При аксиоматическом введении понятий должны быть удовлетворены требования полноты, непротиворечивости, независимости системы аксиом. Эти требования обеспечивают однозначность определяемого понятия и также означают корректность вводимых определений. Этот уровень корректности в полной мере может быть реализован в вузовском курсе математики. В школьном курсе математики иллюстрируется целесообразность аксиоматического определения понятий, т.е. обоснование корректности вводимых аксиоматически понятий осуществляется на интуитивном уровне, соответствует условиям обучения математике в средней школе.

Не будут корректными следующие определения: «Точка – это то, что не имеет длины и ширины», «Прямая – это то, что имеет лишь длину, но не имеет ширины». Понятия «точка», «прямая», «плоскость» в геометрии относятся к основным и не могут быть определены с помощью каких-либо других более простых понятий. Их корректное определение можно дать аксиоматически.

Таким образом, корректность определения понятия, как явного, так и неявного, означает однозначную определенность вводимого класса объектов в конкретных условиях.

Однозначная определенность определяемого класса объектов, соответствующая сложившимся условиям, характеризует ***корректность определения понятия*** *и носит всеобщий характер. Правила формально-логической корректности относятся к явным определениям и имеют силу лишь для этого способа определения понятий. При выполнении формально-логических требований корректности класс определяемых объектов задан однозначно, и сформулированное выше понятие корректности определения распространяется как на случай явного, так и на случай неявного определения понятий.*

Корректность определения понятия играет важную роль в процессе обучения и в процессе научного познания. Если понятие используется не одной, а несколькими областями знаний, то необходимо обосновывать корректность определений таких определений. Например, декартова система координат вводится в курсах математического анализа и геометрии, эти определения традиционно различны. Для обеспечения корректности необходимо обосновывать эквивалентность введенных определений.

Корректность определения понятия является фундаментальным научным требованием при введении понятий и терминов. При определении научных понятий и терминов должно быть гарантировано их их однозначная определенность, единое понимание. Недопустимо смешение, разночтения в понятиях и терминах при их некорректном определении. С учетом требований корректности строится вся научная терминология. Нарушив корректность определения понятия, нельзя реальный фрагмент действительности представить в идеальной форме. Только после корректного определения изучаемого объекта в идеализированной форме можно сформулировать перечень вопросов о функционировании и развитии этого объекта в рамках рассматриваемой теории, оперировать с объектом.

«Роль корректного определения понятий в науке многообразна и связана с тем, что определения являются существенным моментом в познании мира», [233]. Корректное определение понятий в различных областях математики позволяет добиваться значительных новых результатов и, в конечном итоге, способствует научному прогрессу.

Корректность определения математических понятий является требованием при организации учебного процесса. Работа с понятиями состоит из нескольких этапов [121, 122]:

– профессионального (выполнение логико-математического анализа);

– подготовительного (актуализация знаний, мотивация, связь с субъективным опытом обучающихся);

– основного (обучающего);

– этапа закрепления.

Каждый из указанных этапов целесообразно организовывать таким образом, чтобы обеспечить корректность вновь вводимого определения. Это означает, что в процессе обучения учитываются педагогические условия: цели обучения, уровень подготовки обучающихся, их возрастные особенности. При введении понятия осуществляется его всестороннее изучение с возможностью дальнейшего обобщения и развития, учет критериев практики и принципа конкретности истины. Полезна иллюстрация целесообразности введения понятия. Определяя понятие, необходимо приводить примеры объектов, ему не удовлетворяющих, а также показывать, что определение не является бессодержательным, т.е. иллюстрировать однозначную определенность класса определяемых объектов. Если имеется несколько определений, то доказывается их эквивалентность. Кроме того, если вводимое понятие обобщает какое-либо ранее известное понятие, то это ранее известное понятие должно следовать из более общего как частный случай. Данные требования находится в русле реализации корректности определения понятий в учебном процессе.

Завершая наш анализ корректности определения понятия, мы выводим, что «корректность» выступает в качестве универсального критерия при введении понятий, работе с ними и дальнейшем обобщении как в образовательном процессе, так и в научном познании, в реальной жизни. На основе анализа деятельности по выполнению этапов работы с понятием и в соответствии со сформулированными требованиями корректного определения понятий мы выделим универсальные учебные действия:

1) обоснование однозначной определенности определяемого класса объектов (отсутствие противоречий в определении);

2) варьирование и корректировка, выбор наиболее оптимального словесного выражения для определения понятия.

1.2.4. Корректность вопроса и ответа

Вопросы и ответы могут быть оценены с точки зрения их корректности. Формально-логическая корректность вопросов и ответов относится к сфере формальной логики, культуры речи, риторики. Используя ряд учебных пособий по логике для вузов [36, 37, 43, 44, 139], проанализируем суть требований к свойствам вопросов и ответов, которые предъявляет критерий корректности. Раздел логики, в котором изучается корректность вопросов и ответов, называется эротематической логикой (от греч. *erotematikos* – в форме вопроса) или интеррогативной (от лат. *interrogativus* – вопросительный).

В интеррогативной логике [44, с. 69–81] семантическая и синтаксическая корректность вопроса определяются следующим образом: «вопрос семантически корректен, если все его логические предпосылки, как явные, так и неявные, истинны; если вопрос нельзя понять однозначно, он неправильно построен, то такой вопрос синтаксически некорректен».

В пособии И.В.Демидова «Логика» вопрос трактуется как «логическая форма, включающая исходную информацию с одновременным указанием на ее недостаточность с целью получения новой информации в виде ответа» [44]. В то же время «ответ – это суждение, вызванное вопросом; ответ уменьшает информационную неопределенность, заключенную в вопросе. Ответ на вопрос есть утвердительное предложение, дающее информацию, затребованную вопросом», [44].

В философской литературе отмечается, что вопрос и ответ – «две противоположности единого целого: вопрос есть обращение, требующее ответа; ответ есть высказывание, вызванное вопросом», [36, 40, 44].

В логической структур вопроса выделяются три компонента:

1) искомое знание(искомое знание; то, что требуется выяснить);

2) исходное знание (известное знание; базис или предпосылка вопроса);

3) требование перехода от незнания к знанию, от непонимания к пониманию, от исходного к искомому знанию.

Искомое знание не является абсолютно неизвестным; оно фиксируется в вопросе как неполное, незавершенное, имеющее порой обобщенный характер. В вопрос включена вполне определенная информация.

Логические предпосылки вопроса – это предшествующая информация, содержащаяся в вопросе. Логические предпосылки бывают явные и неявные. Явные логические предпосылки – это знание, которое явно звучит в вопросе. Неявные логические предпосылки – это знание, которое предполагается известным о том предмете, о котором идет речь в вопросе. В предпосылках явно или скрытно заключена исходная информация. Вопрос является требованием найти, сообщить или уточнить некоторые неизвестные сведения. Вопрос отражает осознание человеком разницы между сущим и должным и потребности в устранении этой разницы.

Например, в вопросе: «Какова сумма внутренних углов треугольника в геометрии Евклида?»- явными посылками являются: треугольник, внутренние углы, их сумма. К неявным посылкам относится тот факт, что в геометрии Евклида эта сумма существует и постоянна для любого треугольника. Требование вопроса состоит в том, чтобы указать величину этой суммы. Ответ: 180 градусов.

При постановке вопроса исходят из того, что хотя бы один истинный ответ существует. Такое убеждение – позитивная предпосылка вопроса.

С точки зрения логики любой вопрос не является суждением, и поэтому о нем нельзя сказать, истинным или ложным он является; вопрос можно охарактеризовать с позиций его корректности или логической правильности постановки.

Классификация вопросов осуществляется по разным основаниям, [40].

1. Вопросы могут быть явными и скрытыми по степени выраженности в тексте.

2. Вопросы различаются на простые и сложные по своей структуре.

3. Вопросы бывают узловыми и наводящими по отношению к познавательной цели.

4. Вопросы подразделяются на *корректные и некорректные* по правильности постановки. «*Корректный вопрос* – это вопрос, предпосылками которого является истинное и непротиворечивое знание. *Некорректный вопрос* основан на предпосылке ложного или противоречащего суждений или суждения, смысл которого не определен», [44].

Для логически некорректных вопросов различают два вида: тривиально некорректные и нетривиально некорректные. «Вопрос является *тривиально (или синтаксически) некорректным*, или бессмысленным, если он выражается предложениями, содержащими неясные, не определенные полностью слова или словосочетания. Вопрос называется *нетривиально* (*или семантически*) *некорректным*, если его предпосылка, явная или неявная, представляет собой ложное утверждение. На такие вопросы нельзя дать истинного ответа», [44].

Подводя итог, можем констатировать, что логически корректные или правильно поставленные вопросы содержат в качестве предпосылок, как явных, так и неявных, только истинные суждения; у логически некорректных вопросов предпосылки ложные или не определенные по смыслу. Таким образом, корректность вопроса определяется его истинным базисом или посылками.

Полный перечень видов некорректных вопросов отражен в философской энциклопедии [89]:

– в формулировке вопроса содержатся выражения, смысл, значение которых неизвестны;

– выражения, входящие в формулировку, имеют определенный смысл, но они не согласованы;

– содержание вопроса недоопределено, т.е. недостаточно данных для однозначного ответа;

– предпосылка вопроса ложная;

– на вопрос нельзя дать ответ, снижающий познавательную неопределенность, поскольку неопределенности нет (тавтологический вопрос).

При постановке вопросов следует соблюдать следующие правила, [44, 139]:

1. Необходимо вопросы ставить корректно. Они должны быть правильно сформулированы по содержанию и форме.

2. В соответствии с вопросом следует предусмотреть ответы на уточняющие вопросы.

3. Вопрос формулируется кратко и ясно.

4. Вопрос должен быть простым. Сложный вопрос лучше разбить на несколько простых.

5. В сложных разделительных вопросах необходимо перечисление всех альтернатив.

6. Следует избегать риторических вопросов, которые являются суждениями, так как в них содержится утверждение или отрицание.

Среди правил постановки вопросов, наряду с краткостью, ясностью, простотой, в обязательном порядке указывается корректность. Логическая корректность вопроса означает возможность однозначного ответа ввиду истинности его базиса или предпосылок. На логически некорректный вопрос нельзя дать однозначный ответ.

Таким образом, корректность – это критерий для оценки правильности, логичности вопросов и одно из правил, требований к постановке вопросов. Лишь корректно поставленный вопрос выполняет свое назначение.

«Ответ – это суждение, вызванное вопросом. Основными функциями ответа являются:

а) уменьшение неопределенности, заключенной в вопросе;

б) указание на неправильную постановку вопроса», [40].

При этом один и тот же вопрос может иметь много разных ответов, не равнозначных по своим логико-информационным характеристикам.

Знание правил постановки вопроса и его связей с ответом позволяет сформулировать следующие правила формулирования ответа, [40]:

1. Ответ должен быть ясным, однозначным и кратким.

2. Ответ должен уменьшать неопределенность вопроса, быть информативнее его.

3. При некорректной постановке вопроса ответ должен содержать указание на эту некорректность: «На предложенный вопрос нет однозначного ответа ввиду некорректности вопроса».

Если вопрос и ответ в математической области трактовать как задачу, то в этом случае явные предпосылки вопроса представляют собой данные задачи, неявные предпосылки – это знания человека из предметной области и сведения из предметной области, к которой вопрос относится. При такой трактовке вопроса и ответа корректность вопроса можно связать с непротиворечивостью и полнотой данных задачи, а также с существованием и единственностью решения, т.е. ответа. Таким образом, корректный вопрос может быть связан с корректной математической задачей, а некорректный вопрос – с некорректной.

Подводя итог, мы можем констатировать, что корректность выступает критериально-оценочным понятием для вопросов и ответов, служит теоретической основой при построении логически правильной устной и письменной диалоговой речи, при осуществлении коммуникации: общении, дискуссии, спорах. Корректность вопроса играет большую роль в развитии мышления, рефлексии, в учебном и научном познании, в реальной жизни. Корректность вопросов и ответов затребована различными областями знаний и реальной жизни. Философия, юриспруденция, кибернетика, русский язык, психология, педагогика используют это понятие. Известно, что интеррогативная (вопросно-ответная) логика – это отдельная область философии и риторики; в кибернетике корректные вопросно-ответные комплексы являются основой для конструирования компьютеров; вопросно-ответное мышление – необходимый компонент любого познавательного процесса («Кто хочет мыслить – должен спрашивать!» [34, с. 429]); корректные вопрос и ответ – основа рефлексивной деятельности, научно-исследовательской деятельности; с помощью вопросов и ответов осуществляется организация учебно-познавательного процесса: создание проблемных ситуаций, поиск решения задач, проведение тестов, опросов, дискуссий, обсуждений. Корректность вопросов в тестовых заданиях – непреложное требование контрольно-измерительных материалов.

Корректность вопросов обсуждается в иностранных научно-методических источниках, формулируются рекомендации, как поступать с некорректным вопросом [271]: «Получая вопрос, проверьте, является ли он корректным. Если заданный вопрос некорректен, то отвечать на него не нужно. Необходимо аргументированно обосновать некорректность вопроса и далее либо затребовать дополнительную информацию, либо описать все возможные варианты, либо использовать приближения, либо попросить переформулировать вопрос и т.д. Но в любом случае нельзя давать однозначный ответ на некорректно поставленный вопрос!». И там же далее есть практическая рекомендация: «Никогда не попадайте в ситуацию, когда на некорректно поставленный вопрос от вас требуется однозначный ответ!».

Математические головоломки и парадоксы поставляют множественные примеры некорректных вопросов. Ввиду недостаточной полноты посылок, к некорректным можно отнести следующие вопросы:

1. Сколько дней между Новым годом и Рождеством?

2. Как объяснить, что 17 + 23 = 16?

3. Поездка началась 14 числа, а закончилась 21-го числа этого же месяца. Сколько дней длилась поездка?

4. Можно ли сложить из 6 спичек 4 одинаковых треугольника?

5. Чему равно 1 + 1?

Таким образом, заключаем, что понятие корректности служит критерием оценки вопросов и ответов в любой предметной области, в познании, в реальной жизни. Знания о структуре корректного вопроса и ответа могут служить методологической основой формирования ключевых компетенций: коммуникативной и учебно-познавательной. Критерий корректности вопросов и ответов может использоваться в психологии для формирования вопросно-ответного мышления, рефлексии, устной и письменной речи.

Действия по анализу корректности вопросов и ответов носят универсальный характер:

– обоснование однозначной определенности вопроса;

– варьирование;

– корректировка.

Механизмы устранения некорректности вопроса:

– затребовать дополнительную информацию;

– описать все возможные варианты;

– использовать приближения;

– переформулировать вопрос.

На основе проведенного анализа вопросов и ответов с точки зрения их корректности укажем основные направления применения в учебно-воспитательном процессе:

– построение вопросно-ответных дидактических комплексов;

– создание комплексов вопросов и ответов для тестовых заданий;

– проведение различного рода опросов;

– построение устной и письменной диалоговой речи в процессе коммуникации, при осуществлении речи «про себя»;

– организация и проведение обсуждений, научных дискуссий, споров (см. § 2. Логические аспекты спора [119];

– развитие вопросно-ответного типа мышления (см. гл. II. Методология вопросно-ответного мышления [97]).

1.2.5. Корректность доказательства

Проблема оценки математического доказательства с точки зрения его корректности относится к философским проблемам математики. «Необходимо констатировать, что в математике имеется много нерешенных или не до конца решенных, или по-разному решаемых философских проблем. К их числу относятся как традиционные для философии математики вопросы о ее предмете, природе математического знания, так и более современные: проблема критериев строгости разных видов математического знания и математических методов» [154, с. 5]. Понятие «корректность» в математике служит оценочным понятием, критерием и отражает строгость математического знания, имеет непосредственное отношение к решению проблемы нахождения тех общих необходимых и достаточных признаков, которым должно удовлетворять любое знание, претендующее на статус математического.

Понятие корректности математического доказательства дается с опорой на формальную логику. Это понятие непосредственно связано со строгостью математического доказательства, современная трактовка которой обусловлена наличием в философии математики двух противоположных концепций: релятивистской и фундаменталистской – о достижимости абсолютной строгости математического доказательства. Первая – релятивистская – предполагает абсолютную строгость доказательства недостижимой, в связи с развитием науки возможно лишь неограниченное приближение к ней как к абсолютному идеалу; вторая – фундаменталистская – в качестве основного положения утверждает, что абсолютная строгость математического доказательства в исторически ограниченный промежуток времени достижима.

Известно, что критерии строгости математического доказательства исторически непостоянны и критерий корректности доказательства появился в XX в. В XVII–XVIII вв. строгость математического доказательства отождествлялась с ясной логической конструкцией и противопоставлялась невнятной, путаной аргументации или индуктивному обобщению. К XIX–XX вв. были разработаны две различные концепции, о которых говорилось выше.

К настоящему времени не существует единого определения понятия строгости математического доказательства, корректность является не единственным критерием для ее оценки. Строгость математического доказательства – это описательное понятие философии математики, педагогики, теории и методики обучения математике, выработанное на основе различных воззрений математики и логики. Корректность математического доказательства определяет меру строгости математического доказательства. Обсуждая вопрос о строгости доказательства и оценки его с точки зрения корректности, нельзя не учитывать проблему самой возможности проведения доказательства для некоторых утверждений. Иллюстрацией служит теорема Геделя о полноте аксиоматической теории. Ее смысл состоит в том, что в аксиоматической теории существуют утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть, находясь в рамках этой аксиоматической теории. Поэтому нельзя утверждать, что в математике любое предложение находится в одном из двух состояний: доказано оно или нет. Доказательство некоторого утверждения может просто не существовать в рассматриваемой аксиоматической теории, а само утверждение или его отрицание может быть постулировано в виде аксиомы.

Проанализируем основные точки зрения о критериях строгости и корректности доказательства, которые сложились в логике, философии математики, методике обучения математике.

Доказательство с точки зрения логики

С формально-логической точки зрения [44] «доказательство – это логическое рассуждение, в процессе которого обосновывается истинность или ложность какой-либо мысли с помощью других положений, проверенных наукой и конкретной практикой».

В формальной логике «доказательство является особым логическим способом обоснования истины. Всякое доказательство включает: тезис, аргументы, демонстрацию…Тезисом доказательства называется то суждение, истинность или ложность которого требуется доказать. …Аргументами (или основаниями) доказательства называются те суждения, которые приводятся для подтверждения или опровержения тезиса. Доказать тезис – значит привести такие суждения, которые были бы достаточными для обоснования истинности или ложности выдвинутого тезиса», [139].

В качестве аргументов при доказательстве тезиса может быть приведена любая истинная мысль, если только она связана с тезисом, обосновывает его. Основными видами аргументов в математике являются: аксиомы, ранее доказанные теоремы, понятия и их определения, свойства и взаимосвязь понятий.

Демонстрацией (или формой доказательства) называется способ логической связи тезиса с аргументами. В логике демонстрация основана на правилах вывода. Доказательство является логической основой аргументации. Структура доказательства полностью входит в структуру аргументации, но не исчерпывает ее полностью.

В логике при оценке строгости доказательства с точки зрения его корректности исходят из истинности посылок и из проведения демонстрации на основе правильных рассуждений или корректных правил вывода.

Строгость математического доказательства, его корректность

В. Я. Перминов в книге «Философия математики и технических наук», [154, с. 46] отмечает, что «в математике существует только один метод обоснования утверждений, а именно доказательство. Важнейшим вопросом философской теории математического доказательства является вопрос о его строгости».

Здесь существуют *две гипотезы: релятивистская и фундаменталистская*.

Как сказано в работе [154], с точки зрения релятивистской гипотезы в математике могут существовать более надежные и менее надежные доказательства, но не существует и не может существовать доказательств окончательных, завершенных и абсолютно строгих, абсолютно корректных. Фундаменталистская гипотеза состоит в том, что процесс математического доказательства конечен и что математики имеют дело с завершенными, окончательно строгими доказательствами. «Будем называть доказательство *строгим*, если оно не содержит в себе неявных (неоговоренных в условиях) предпосылок» [154, с. 47]. Там же отмечается, что «не являются строгими почти все доказательства у Евклида: эти доказательства подтверждаются как *корректные* во всех последующих более строгих изложениях геометрии, но они, очевидно, не являются *строгими*, поскольку часто опирались на предпосылки, не содержавшиеся в оговоренных условиях». Строгость доказательства связана с обоснованиями математической теории и однозначностью используемых при доказательстве правил вывода. Далее [154, с. 56] отмечается, что историческое совершенствование математического доказательства «может быть представлено в виде конечной последовательности состояний, упорядоченных по возрастанию *корректности*».

Анализируя приведенные цитаты, мы можем заключить, что корректность выступает мерой или исторически обусловленным признаком строгости математического доказательства. Корректность характеризует уровень строгости, обусловлена определенными обстоятельствами и может рассматриваться как необходимая строгость, соответствующая историческим условиям, уровню развития математики, логики, уровню разработанности аксиоматической теории, а также конкретным теоретическим и практическим целям.

Ярким выразителем взглядов релятивистской концепции строгости математического доказательства является И. Лакатос, который в серии статей обосновал точку зрения ряда математиков, в соответствии с которой «математическое доказательство никогда не становится абсолютно строгим и надежным». «*Строгость* доказательства всегда относительна, она зависит от исторически изменяющегося уровня строгости анализа доказательства, т.е. от критериев строгости, которые не остаются неизменными» [154, с. 60]. Строгость доказательства теоремы обусловлена строгостью его обоснований. «Однако окончательная «достоверность» никогда не может быть достигнута, «основания» никогда не могут быть обоснованы», [154, с. 60]. При доказательстве утверждений абсолютная строгость не может быть достигнута, доказательство лишь постоянно приближается к ней, при этом критерий корректности выступает мерой строгости.

Проведенный краткий обзор по вопросу строгости математического доказательства позволяет нам заключить, что понятие строгости математического доказательства признается относительным, зависящим от ряда условий, и рассмотрение некоторой характеристики в качестве критерия уровня строгости соответствует рассмотренной концепции. В качестве критерия уровня строгости используется оценочное понятие «корректность математического доказательства». Корректность математического доказательства характеризует уровень математической строгости доказательства, соответствующий ряду исторических и других условий: уровню развития математики, логики, разработанности аксиоматической теории, целям, задачам и перспективам развития науки. Корректность математического доказательства в учебном процессе обусловлена еще и дидактическими требованиями, целями обучения, психологическими особенностями обучающихся.

Таким образом, в нашем исследовании будем придерживаться той точки зрения, при которой *корректность математического доказательства* – это критерий, определяющий уровень строгости математического оказательства, соответствующий сложившимся на момент доказательства условиям и откорректированный в соответствии с ними. В качестве условий, в соответствии с которыми должен быть обеспечен необходимый уровень строгости, выступают, с одной стороны, уровень развития математики, возможности IT- технологий для их применения при проведении доказательств, разработанность аксиоматической теории и т.п., а с другой– логика образовательного процесса, цели, задачи обучения, уровень знаний и развития обучающихся.

Итак, в разделе 1.2 мы проанализировали эмпирический и теоретический материал о том, как критерий «корректность» применяется к оценке свойств основных элементов математического содержания: модели, правил вывода, определения понятий, вопроса и ответа, доказательства. Этот анализ можно было бы продолжить другими примерами практического применения критерия «корректность» к элементам математического содержания, в частности, рассмотреть корректность тестовых заданий – вопрос, представляющий большой интерес для теории и методики обучения, не только математике, но и другим предметам. Но для наших выводов и обоснований, к которым мы перейдем в следующем разделе 1.3, достаточно рассмотренного материала.

Проведенный в настоящем разделе 1.2 анализ эмпирического материала позволит сделать теоретические выводы, провести дальнейшие построения теории математической корректности, см.раздел 1.3, а именно, применяя научно-теоретический аппарат формальной логики, деятельностного, системного подходов, выполнить действия, ведущие к образованию понятий: провести обобщение, абстрагирование, определить сущностные характеристики понятия «корректность» и его структуру, главные признаки, инварианты и механизмы деятельности, а также возможности, целесообразность использования этого понятия в учебном процессе.

1.3. Теоретические основы математической корректности для построения концепции критериально-корректностной математической подготовки

В этом разделе, основываясь на материале раздела 1.1, 1.2, выполним семантический и логико-дидактический анализ понятия «корректность», сделаем ряд выводов: обоснуем, что понятие «корректность» является универсальным критерием, с точки зрения теории и методики обучения математике – метапонятием, а с точки зрения формальной логики – межпредметной категорией. В рамках логического анализа понятия «корректность» выявим свойства, содержание, объем, диапазон смысловых значений, функции, сущностные характеристики, закономерности образовательного процесса, описываемые с помощью этого понятия. Полученные в данном разделе результаты мы будем использовать в наших дальнейших теоретико-методических построениях концепции критериально-корректностной математической подготовки бакалавров.

1.3.1. Корректность как метапонятие

В научно-методической науке утверждается [29, 87, 100, 101], что к числу «метапонятий относятся те наиболее общие понятия, которые используются не в одной, а в нескольких различных областях знаний, при этом метапонятия обозначаются одним и тем же термином и, при наличии различий, обнаруживают ряд общих свойств». Докажем, что понятие «корректность» обладает названными свойствами и поэтому может быть отнесено к их числу. Кроме того, обоснуем, что понятие «корректность» в качестве метапонятия играет роль универсального критерия оценки основных элементов математического содержания, а также большого числа объектов нематематической сферы.

Проведенное исследование в разделе 1.1, 1.2 показало, что понятие «корректность» используется в различных предметных областях, в ряде учебных предметов и дисциплин: математическом анализе, алгебре, геометрии, численных методах, математической физике, теории некорректных и обратных задач, педагогике, моделировании, теории систем, философии, логике, теоретической информатике, юриспруденции и т.д. – а также в реальной жизни, не связанной с научной сферой. Научные термины: корректность математической задачи, математической модели, правил вывода, частичная и полная корректность программного обеспечения, логическая корректность вопроса, – трактуются в своей предметной области однозначно, при этом в их содержании имеются как общие черты, так и различия. В общеупотребительном смысле оценочное понятие «корректность» в различных предметных областях также обнаруживает как общие свойства, так и проявляет свою специфику. В математике привычно говорить о корректном определении понятий, например: о корректности определения степени с произвольным действительным показателем, вычета аналитической функции в изолированной особой точке, кольца вычетов по простому модулю *p,* о корректности построения фактор-пространства, о корректном определении отображений [32, с. 161], функций. Привычны суждения о корректности доказательства или решения, или, напротив, некорректности применения метода, о некорректном выводе.

Этот перечень можно продолжать и вряд ли найдется научная область, где бы оценочное понятие «корректность» не использовалось. В общежитейском смысле мы привычно говорим о корректном и некорректном поведении, корректности банковского договора, корректности проведения теледебатов.

К общим свойствам, которые обнаруживает понятие «корректность» в различных областях знаний и общеупотребительном применении, относятся однозначная определенность объекта, т.е. существование и единственность предмета, о котором идет речь, а также правильность, адекватность, соответствие сложившимся обстоятельствам, условиям, в которых данный предмет рассматривается. Различия в содержании понятия «корректность» связаны с уникальностью предметных областей, а также исторически обусловлены.

Разделяя мнение ряда авторов о том, что метапонятия – это «понятия, являющиеся целью или средством изучения не менее двух различных учебных предметов или дисциплин» [29, 87, 100, 101], и следуя утверждениям этих же авторов, что «к метапонятиям относятся понятия разных учебных предметов при наличии у них общих свойств и обозначенных одним общим термином», – мы можем заключить, что понятие «корректность» относится к числу метапонятий.

По замечаниям ряда авторов [29, 87, 100, 101] метапонятиям отводится большая дидактическая роль, в частности, метапонятия являются средством межпредметной и внутрипредметной интеграции. Поэтому, являясь метапонятием, понятие «корректность» в дальнейших наших построениях будет служить интегрирующей основой при построении критериально-корректностной математической подготовки.

1.3.2. Корректность как универсальный критерий

Метапредметность понятия «корректность» проявляется также и в том, что оно играет роль критерия при оценке целого ряда математических и других объектов, так как описывает требования, предъявляемые к свойствам как самих объектов, так и внешней среды, в которой эти объекты рассматриваются.

Толковый словарь иностранных слов дает ссылку: «критерий (от греч. *criterion* – средство для суждения) – признак, на основе которого производится оценка, определение, классификация чего-либо» [150], т.е. критерий выступает как мерило, некоторый эталон, с помощью которого выполняется оценка объектов. Понятие «корректность» позволяет оценить как свойства самого предмета, так и внешней среды, т.е. понятие «корректность» представляет собой признак для оценки свойств и самого объекта, и его внешней среды. Для объекта «быть корректным» означает иметь соответствующие свойства и самому объекту, и внешней среде. И с этой точки зрения понятие «корректность» может считаться критерием.

К определению содержания понятия «критерий» исследователи подходят с различных точек зрения. Так, в педагогической литературе [85] понятие «критерий» характеризуется как «средство, с помощью которого измеряются уровни, степени проявления того или иного явления». В математике же понятие «критерий» означает теорему, в которой сформулированы необходимые и достаточные условия. Известны критерий Коши сходимости числовой последовательности, критерий Кронекера – Капелли совместности систем линейных уравнений, критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. С философской точки зрения критерий определен как норма или правило, которые позволяют судить о правильности, рациональности суждений.

Таким образом, понятие «критерий» в современной научной литературе трактуется неоднозначно. Будем придерживаться той точки зрения, согласно которой критерий – это не только признак, но и мерило, с помощью которого осуществляется оценка свойств различных предметов, явлений, процессов. В нашем исследовании примем точку зрения тех ученых, которые считают, что критерий является мерилом для оценки свойств предмета или явления; признаком, положенным в основу классификации предметов, явлений, понятий [24, с. 430]. Понятие «корректность» позволяет провести классификацию большого числа объектов на «корректные и некорректные», оценить свойства рассматриваемого объекта, свойства внешней среды и их взаимное соответствие, поэтому ввиду принятого толкования понятия «критерий», понятие «корректность» может быть отнесено к числу универсальных критериев.

1.3.3. Логическая характеристика понятия «корректность».

Семантический анализ, проведенный в разделе 1.1, 1.2, позволяет выделить *терминологический, или номинальный,* смысл понятия «корректность», когда за понятием закрепляется термин, который не может трактоваться произвольно в рамках рассмотрения его в выбранной предметной области, и *общеупотребительный* смысл – с более свободным смыслом, значением и использованием.

К номинальным, или терминологическим, относятся: корректность математической задачи, математической модели, правил вывода, вопроса и ответа, определения понятия. Корректность метода, решения, доказательства, корректность формулировки задачи, обработки данных, корректность интерпретации результатов наблюдений – это выражения с *общеупотребительным* значением понятия «корректность», которое допускает более свободное употребление и смысловое значение, т.е. возможна неоднозначность, произвольность в трактовке этих понятий. Такое употребление связано с принятыми соглашениями, не имеющими строгой регламентированности.

Если обратимся к толковым словарям русского языка, к словарям иностранных слов, то обнаружим, что «корректный – это правильный, точный, строгий. Например, корректность перевода, доказательства, поведения». И, с другой стороны: «точный, откорректированный, выправленный». Возникает вопрос: в соответствии с чем – выправленный, откорректированный? Анализируя общеупотребительную семантику понятия «корректность», его общеупотребительное использование, можно заключить, что «корректировка, исправление» осуществляются в соответствии с некоторыми требованиями или условиями: требованиями, относящимися как к самому предмету, к его качествам, свойствам, внутренней структуре, так и предъявляемыми к внешней среде, в которой данный предмет рассматривается. Анализ использования понятия «корректность» в математических, психолого-педагогических, методических текстах и общеупотребительных выражениях позволяет заключить, что свойство «быть корректным» рассматриваемому предмету придают как свойства самого предмета (назовем их внутренними условиями корректности), так и свойства внешней среды, в которую предмет помещен (назовем их внешними условиями корректности). Таким образом, в общеупотребительном смысле «корректный» – это правильный, откорректированный, выправленный в соответствии с некоторыми требованиями, предъявляемыми к самому предмету и к внешней среде, в которую предмет помещен.

Итак, делаем окончательный вывод о том, что ***в общеупотребительном смысле «корректный»*** *– это правильный, однозначно определенный, приведенный в соответствие с некоторыми условиями (внутренними и внешними), исправленный, безукоризненный, лишенный недостатков, противоречий или неопределенности в процессе корректировки, призванной привести рассматриваемый предмет в соответствие с требованиями, заданными внутренними и внешними условиями.* ***В терминологическом смысле понятие «корректный»*** *всегда однозначно трактуется в соответствующей области знаний и закреплено с помощью термина.*

Сказанное выше можно рассматривать как описательное определение понятия «корректность» с точки зрения его семантики и употребления. Приведенное выше утверждение не является явным определением, но в то же время оно и не контекстное. Наиболее распространенный способ определения понятий через род и видовое отличие в данном случае неприемлем: не представляется возможным указать ближайший род из-за разнородности объектов, подпадающих под это понятие.

Приведем ряд примеров для пояснения. Выражение «корректная математическая задача» является термином, его смысл однозначно заключен в трех условиях корректности: существование, единственность и устойчивость решения. Словосочетание «корректная формулировка задачи» является общеупотребительным, оно принято как однозначное понимание смысла сформулированной задачи некоторым сообществом. Формулировка конкретной задачи может быть корректной для студентов университета, и эта же формулировка будет некорректной для учеников школы ввиду недостаточности их знаний. Корректность определения понятий также обусловлена как самой структурой определения, так и той внешней средой, в которой дается это определение. Например, определение понятия предела функции в точке в школе дается на интуитивно-иллюстративном уровне, с помощью нестрогого понятия «стремится», введенного на интуитивном уровне, – и это определение в школьном курсе нужно признать корректным. Предел функции в точке в вузовском курсе определяется со всей строгостью: дается определение «по Коши», «по Гейне», доказывается их эквивалентность, существование и единственность предела. Такое определение – корректно в условиях обучения бакалавров физико-математического направления. Для нематематических направлений подготовки это определение понятия предела уже нельзя назвать корректным, поскольку оно «тяжеловесно», сложно для «нематематиков», т.е. не соответствует ряду внешних условий: целям и задачам подготовки, уровню знаний, способностей, мотивации студентов.

Методы обработки результатов наблюдений также могут быть корректными в одних условиях и те же методы будут некорректными в других.

О некорректной интерпретации данных наблюдений говорится в статье [92] «О соблюдении 10 правил корректности в научных исследованиях»: «Сделаны обобщения с выходом за пределы той выборки, которая не отражает генеральную совокупность. Результаты, верные для конкретных условий неправомерно распространяются на другие режимы воздействия». О пяти этапах, обеспечивающих корректность математической обработки результатов эксперимента, говорится в руководстве для аспирантов по выполнению диссертационного исследования [171], подчеркивается необходимость учета всех условий проведения таких исследований.

Перейдем к логическому анализу понятия «корректность» и на его основе приведем еще одно определение этого понятия. С точки зрения формальной логики провести логический анализ понятия – это значит: определить его объем, содержание; установить, к какому виду оно принадлежит; выявить его существенные свойства. Для описания свойств понятия сопоставим его особенности с теоретическими положениями формальной логики.

Объем понятия «корректность» включает число элементов, большее единицы. Поэтому оно относится к *общим* понятиям [45]. Число понятий, относящихся к понятию «корректность», невозможно точно определить, пересчитать, оно неограниченно большое, поэтому понятие «корректность» является *нерегистрирующим* понятием, в отличие от регистрирующих.

Абстрактными [45] называются те понятия, в которых «отражен какой-либо из признаков предмета, взятый отдельно от самого предмета. Например, белизна, несправедливость, честность». Так, понятие «корректность», а также и его противоположность – «некорректность» – реально в окружающем мире не существуют отдельно от математических и других объектов, а выражают их общее качество «быть корректными» или «быть некорректными».

Корректность – понятие *относительное*, так как констатация факта корректности какого-либо объекта строго зависит от свойств и условий как внешней среды, в которых объект рассматривается, так и свойств самого объекта. Так, например, математическая задача в одних условиях, над одной предметной областью является некорректной. Но, оперируя предметной областью, т.е. внешней средой по отношению к задаче, сужая, расширяя ее или переходя в новую предметную область, мы можем фиксировать корректность той же самой математической задачи. Другой пример: для определения производной в школе в классах гуманитарного или физико-математического профиля и в вузе мы будем иметь три различные формулировки, каждая из которых корректна – понятие однозначно определено – в соответствии с условиями обучения и свойствами самого понятия производной. То есть мы должны учитывать и условия внешней среды, и свойства самого понятия, чтобы в каждой из рассмотренных ситуаций его определение было корректным. Таким образом, корректность предполагает рассмотрение математического или какого-либо другого объекта реальной жизни в тесной взаимосвязи его внутренней структуры, содержания со свойствами и условиями внешней среды. При установлении корректности предполагается рассмотрение предмета во всем богатстве, многообразии его внутреннего содержания и внешних связей. Варьируя, изменяя внутреннюю структуру, внутренние свойства объекта или условия внешней среды, можно управлять корректностью объекта, т.е. преобразовывать некорректность в корректность и наоборот. Констатация корректности объекта тесно связана с теми условиями внешней среды, куда помещен данный предмет, корректность проявляется во взаимодействии объекта, его внутреннего содержания и внешней среды.

Понятие «корректность» обладает свойством *универсальности*, так как применяется к широкому кругу частных понятий, используется в реальной действительности и в познании. Как показано в наших работах [232], [234], [235], [247] в педагогических науках данное понятие применяется чаще всего в общеупотребительном значении: «правильный, верный, точный»; к этому значению добавляется смысловое уточнение: «улучшенный, откорректированный» в соответствии с условиями или требованиями. Отдельные вопросы проблемы корректности в математике изучались в работах, касающихся некорректных задач. Корректность определения, корректность формулировки теоремы, корректность вопроса, корректность алгоритма, корректность выполнения действий и т.д. – эти словосочетания означают, что исключаются разночтения или двусмысленность; объект, о котором идет речь, определен единственным образом и может быть понят однозначно, математическое утверждение имеет единственный смысл, лаконично, строго доказано или определено.

Понятие «корректность» является *фундаментальным*, так как относится к базовым теоретико-методологическим положениям, выражает фундаментальное требование к элементам математического содержания, дает основу для формирования понятийного аппарата математики и смежных с ней дисциплин.

Оно обладает свойством *системности*, что означает наличие интегративного качества, выделенность из внешней среды, зависимость от внешних и внутренних условий, от их взаимодействия. Наиболее эффективный метод изучения корректности – с точки зрения системного подхода, что означает учет всех внешних и внутренних факторов.

Понятие «корректность» является *положительным* в противоположность некорректности, оно взаимосвязано с понятием «некорректность» – со своей противоположностью. В нашем исследовании мы выделяем приемы устранения «некорректности» преобразованием ее в «корректность». Оба понятия: корректность и некорректность, – находятся в диалектической взаимосвязи. В процессе учебного и научного познания «некорректность» и «корректность» преобразуются одна в другую.

Абстрагируясь от контекста и устойчивых словосочетаний, понятие «*корректность» мы определим как общее свойство соподчиненных математических понятий* – элементов математического содержания, рассмотренных ранее в разделе 1.1, 1.2. *Объем понятия* «корректность» задается перечислением соподчиненных понятий: корректная математическая задача, корректная математическая модель, корректные вопрос и ответ, корректные правила вывода, корректное решение задачи, корректный метод, корректное доказательство, корректная трактовка результатов наблюдения и т.п. *Содержание понятия* «корректность» задается его существенными свойствами: однозначной определенностью, правильностью в данных условиях, – и с точки зрения формальной логики характеризуется основными свойствами: общностью, универсальностью, относительностью, фундаментальностью. Ввиду наличия указанных свойств с точки зрения философии (формальной логики) понятие «корректность» относится к межпредметным категориям.

1.3.4. Дидактические аспекты понятия «корректность»

В этом разделе мы выявим возможности использования понятия «корректность» для оценки свойств учебно-познавательной деятельности и компонентов организации учебного процесса.

Вначале сформулируем инварианты математической деятельности, адекватные понятию «корректность», а затем опишем механизмы деятельности по обоснованию корректности, распознаванию некорректности и преобразованию ее в корректность. В конце раздела обоснуем закономерности, связанные с применением универсального критерия – понятия «корректность» – в учебном процессе. Полученные результаты будут использованы для конструирования в разделе 2.1 деятельностной составляющей критериально-корректностных компетенций, а на основе закономерностей мы выведем в разделе 2.2 специальные принципы критериально-корректностной математической подготовки.

Проведенный в разделах 1.1, 1.2 анализ деятельности по установлению корректности различных объектов, структуры деятельности по решению корректных и некорректных задач, показал, что представляется возможным выделить инварианты, присущие такому виду деятельности. Инварианты деятельности, адекватные понятию «корректность», представляют собой универсальные учебные действия учебно-познавательного и оценочного характера. К ним относятся:

– установление существования, единственности предмета;

– оценивание, подбор, видоизменение тех условий, внутренних и внешних, которые могут повлиять на корректность, назовем эти действия варьированием и корректировкой.

Итак, деятельность, адекватная понятию «корректность», направленная на установление корректности и выявление некорректности математических и нематематических объектов, содержит инварианты:

– доказательство существования предмета;

– анализ его единственности (однозначной определенности);

– анализ качественных характеристик, варьирование, «возмущение»;

– исправление или уточнение в соответствии с требованиями корректности, выполнение корректировки.

Первые два действия можно объединить общим названием: обоснование однозначной определенности предмета. Эти действия: обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировка, – составляют систему, так как тесно взаимосвязаны, активно взаимодействуют, могут быть выделены из внешней среды как самостоятельное образование. В дальнейшем эти действия составят деятельностную составляющую критериально-корректностных компетенций, которые мы определим в разделе 2.1 при построении концепции исследования.

Обобщая приемы преодоления некорректности вопроса и ответа, а также математической задачи, которые были выявлены в разделах 1.1.2 и 1.2.4, заключаем, что общими приемами деятельности в условиях некорректности с целью преобразования некорректности в корректность являются:

– изменение свойств, как самого объекта, так и внешней среды;

– обобщение /ограничение /уточнение понятий;

– переход к новой (внешней по отношению к объекту) среде или предметной области;

– декомпозиция некорректного объекта на корректные составляющие;

– рассмотрение приближений, аппроксимирующих некорректный объект;

– запрос дополнительных данных о некорректном объекте.

Выясним далее, какие закономерности образовательного процесса характеризуют применение критерия корректности в образовательном процессе.

Требование корректности применяется ко всем компонентам учебного процесса: к содержанию, формам, методам, средствам. Выполнение этого требования отражает ряд закономерностей как в отборе содержания, так и при организации учебного процесса.

Закономерности, обусловленные понятием «корректность», тесно связаны с обеспечением необходимого уровня строгости, который обсуждался в ряде работ [38, 47, 96, 116, 140]. В этих работах подчеркивается, что достижение необходимого уровня строгости представляет собой закономерность при интенсификации учебного процесса, при его ориентации на достижение развивающих целей обучения. Строгое, логически корректное изложение материала – закономерность, обнаруженная Б. В. Гнеденко [38, с. 46–47].

Выявленный философский смысл понятия «корректность» позволяет сформулировать еще одну закономерность учебного процесса. Учебное и научное познание развивается по спирали, неоднократно проходит через «преодоление некорректности». Закон диалектики «отрицания отрицания» иллюстрируется при корректном расширении понятий, решении некорректных задач, когда выявленная некорректность преодолевается на начальном этапе, чтобы превратиться вновь в некорректность на новом витке развития научного знания. Безграничность и незавершенность научного познания получает свое подтверждение в теории обратных и некорректных задач. Обучение решению некорректных задач обнаруживает связь с философским положением о множественности истины, ее неоднозначности.

Таким образом, к закономерностям учебного процесса, обусловленным понятием «корректность», относятся:

– подчинение процесса обучения требованию корректности всех его компонентов;

– зависимость процесса обучения, его взаимосвязь с философскими положениями о неограниченности познания, множественности истины, неоднозначной обратимости причинно-следственных связей, с законами диалектики.

1.3.5. Многоаспектность понятия «корректность»

Анализ математической, методической и другой научной литературы показывает, что понятие «корректность», являясь универсальным критерием оценки объектов различных предметных областей, рассматривается с различных позиций. Будучи богатым по содержанию, универсальный критерий – понятие «корректность» – может характеризоваться с различных точек зрения и представляет собой многоаспектное явление. Ранее мы обосновали, что, с одной стороны, с точки зрения методики обучения математике – это метапонятие; с другой стороны, с позиций формальной логики – это межпредметная категория.

Как показывает проведенный в разделе 1.1, 1.2 семантический анализ, языковой формой выражения критерия «корректность» являются термины и общеупотребительные выражения рисунок 5:

– термин однозначно определен в соответствующей предметной области его терминологическим значением (номинальная или терминологическая корректность);

– в общеупотребительном смысле «корректность» означает правильность, однозначную определенность в соответствии с внешними и внутренними свойствами (общеупотребительная корректность).

Основные результаты проведенного в этом разделе исследования отражены на рисунке 5.

Проведенный анализ показал многоаспектность понятия «корректность», представляется возможным выделить его сущностные характеристики: содержательный, деятельностный, дидактический, общекультурный аспекты.

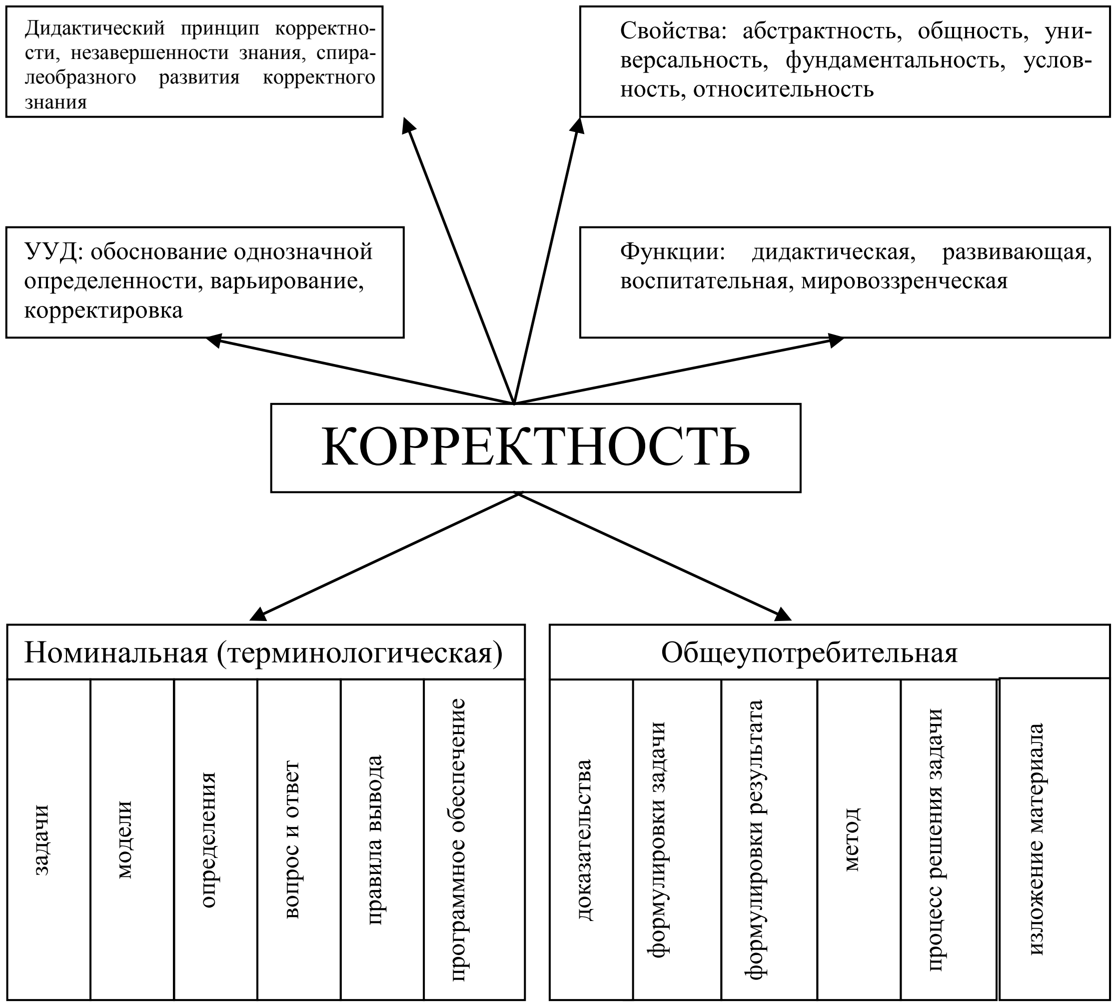


Рисунок 5. Понятие «Корректность»

Итак, корректность, как любое понятие, характеризуется своими содержанием и объемом; в содержании выделяются две стороны: терминологическая (номинальная) и общеупотребительная составляющие; объем этого понятия не ограничен.

Понятие «корректность» многоаспектно.

Содержательный аспект сводится к тому, что выделяются номинальное (терминологическое) и общеупотребительное содержание данного понятия.

Деятельностный аспект состоит в том, что на основе понятия «корректность» выделяются универсальные учебные действия, адекватные данному понятию, – обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировка.

Дидактический аспект означает, что на основе понятия «корректность» формулируются требования и закономерности к отбору содержания и к организации учебного процесса.

Общекультурный аспект сводится к тому, что на основании понятия «корректность» возможно формирование мировоззренческой, личностной и ценностной сфер человека, его отношения к окружающему миру, общекультурных и моральных ценностей, философского осмысления математических фактов.

Функции понятия «корректность» следуют из его многоаспектности:

– дидактическая: осуществляется отбор содержания и организуется математическая подготовка студентов вуза, ориентированная на формирование компетенций;

– развивающая: строится математическая, учебно-познавательная и рефлексивная деятельность студентов при решении задач, овладении понятиями, построении и исследовании математической модели, в диалоговой речи (вопрос-ответ); осуществляется процесс научного и учебного познания (от некорректности к корректности и далее по спирали к новой некорректности);

– мировоззренческая и воспитательная: формируется активная жизненная позиция и мировоззрение студентов, так как корректные и некорректные математические модели служат для описания наиболее полной и содержательной картины окружающего мира, дают методологию действий в условиях противоречивости, переопределенности и недоопределенности исходных данных.

Таким образом, понятие «корректность» выступает как:

– *универсальный критерий*, *оценочное понятие*;

– *метапонятие* (с точки зрения теории и методики обучения и воспитания);

– *межпредметная категория* (с точки зрения формальной логики);

– *требование* к отбору содержания образования и к организации учебного процесса (с точки зрения теории обучения).

Основные выводы и результаты главы I

1. Поиск и описание «межпредметных, надпредметных, общепредметных» [59] понятий, способных стать ведущей идеей в математической подготовке студентов университета и взять на себя роль основы для межпредметной интеграции, рассматривается как необходимое условие реализации компетентностного, системного, деятельностного подходов в высшем образовании.

2. Разработаны теоретические основы математической корректности, которые играют роль частной методологии проводимого научно-методического исследования. Применением теоретического аппарата формальной логики, теории систем, положений онтогенеза, теории деятельности проведенный семантический и логико-дидактический анализ эмпирического материала позволяет заключить:

1) понятие «корректность» является:

– критерием, оценочным понятием для широкого круга объектов математической и нематематической природы;

– метапредметным понятием (с точки зрения теории и методики математики);

– межпредметной категорией (с точки зрения формальной логики);

2) понятие «корректность» многоаспектно, его сущностные характеристики многообразны, отражают различные его стороны:

– *содержательный аспект* выражается в том, что выделяются две содержательные стороны данного понятия: номинальная (терминологическая) и общеупотребительная корректность;

– *деятельностный аспект* состоит в том, что построены механизмы распознавания корректности и некорректности объектов различной природы и приемы их преобразования в корректность: варьирование свойств, как самого объекта, так и нешней среды; обобщение/ограничение/уточнение понятий; переход к новой предметной области/новой внешней среде; декомпозиция некорректного объекта на корректные составляющие; рассмотрение приближений, аппроксимирующих некорректный объект; запрос дополнительных данных о некорректном объекте. Выявлены инварианты деятельности универсального характера: обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировка;

– *дидактический аспект* – состоит в том, что на основе понятия «корректность» сформулированы требования и выявлены закономерности учебного процесса;

– *общекультурный аспект* сводится к тому, что на основании понятия «корректность» формируется мировоззренческая, личностная и ценностная сферы человека, личностные качества, его отношение к самому себе и окружающему миру, общекультурные и моральные ценности, философское осмысление математических фактов; общекультурная составляющая этого понятия связана также с формированием грамотной устной и письменной речи в виде последовательности корректных вопросов и ответов.

3. Уточнены определения корректности основных элементов математического содержания: задачи, формулировки задачи, математической модели, определения понятия, доказательства, вопроса и ответа. Доказана целесообразность принять в качестве основного широко распространенное и утвердившееся в естественно-научных и математических областях знаний определение Ж. Адамара корректной и некорректной математической задачи также в теории и методике обучения математике.

Глава II
КОНЦЕПЦИЯ КРИТЕРИАЛЬНО-КОРРЕКТНОСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРОВ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

На основе проведенного в главе I разностороннего анализа эмпирического материала по использованию понятия «корректность» были сделаны выводы о многоаспектности этого понятия, выявлены его содержательный, деятельностный, дидактический и общекультурный компоненты. В главе II, руководствуясь этими результатами, положениями компетентностного, деятельностного, системного подходов, ФГОС ВО, социальным заказом общества, мы начнем построение концепции исследования: осуществим разработку теоретико-методических оснований критериально-корректностной математической подготовки; определим систему взглядов и подходов, основную идею, понятийный аппарат: уточним понятие критериально-корректностной математической подготовки, введем понятия критериально-корректностных компетенций и критериально-корректностной компетентности бакалавра; разработаем систему специальных принципов для этого нового вида математической подготовки; сконструируем шестиуровневую модель и диагностический аппарат критериально-корректностной математической подготовки.

2.1. Критериально-корректностная компетентность бакалавров физико-математических направлений подготовки

Компетенции – это требования к личности профессионала, к его знаниям, личностным качествам, к готовности и способности выполнять различные виды деятельности, в том числе профессиональной [51, 53, 54, 164, 165].

Компетентность – это владение компетенцией, которое включает личностное отношение к этой компетенции и к предмету деятельности.

Проведем анализ Стандартов высшего образования с целью выделения компетенций, связанных с понятием «корректность», с его терминологическим и общеупотребительным смыслом, сформулируем понятие критериально-корректностных компетенций, затем выявим их состав и определим сущность критериально-корректностной компетентности.

Необходимая работа проводится в три этапа [49]:

– из множества общекультурных и профессиональных компетенций, а также видов деятельности, которыми на основании ФГОС ВПО и ФГОС ВО должен владеть выпускник вуза, выбираются те, которые связаны с понятием «корректность»;

– выявляется сущность и формулируется список критериально-корректностных компетенций;

– для каждой компетенции из списка критериально-корректностных компетенций определяется ее состав, т.е. знаниевая, деятельностная и личностная составляющие.

Основные результаты исследований в этом направлении изложены в наших работах [254],[256],[179]. Начнем с первого этапа, проведем анализ требований к результатам освоения основной образовательной программы бакалавриата и характеристики профессиональной деятельности бакалавров с точки зрения использования в них понятия «корректность». Из общего списка компетенций и видов деятельности на основе этого признака выделим те, в которых используется понятие «корректность». Во ФГОС ВПО [152] для направлений подготовки 01.01.00 «Математика», 01.02.00 «Математика и компьютерные науки», 01.04.00 «Прикладная математика и информатика», 01.08.00 «Механика и математическое моделирование» в требованиях к результатам освоения ООП бакалавриата указаны следующие общекультурные и профессиональные компетенции:

– умение на основе анализа увидеть и *корректно* сформулировать математически точный результат (ПК1);

– знание *корректных* постановок классических задач (ПК2);

– понимание *корректности* постановок задач (ПК3);

– самостоятельное построение алгоритма и анализ его *корректности* (ПК4);

– способность *корректно* выражать и аргументированно обосновывать имеющиеся знания (ПК5);

– способность *логически верно*, *аргументированно* строить устную и письменную речь (ОК1);

– умение понять поставленную задачу (ПК6);

– умение формулировать результат (ПК7);

– умение строго доказать утверждение (ПК8);

– умение на основе анализа увидеть и корректно сформулировать результат (ПК9);

– умение самостоятельно увидеть следствия сформулированного результата (ПК10);

– умение грамотно пользоваться языком предметной области (ПК11);

– умение ориентироваться в постановках задач (ПК12);

– умение самостоятельно математически корректно ставить естественно-научные и инженерно-физические задачи (ПК13);

– умение точно представить математические знания в устной форме (ПК14);

– владение проблемно-задачной формой представления научных знаний (ПК15);

– способность анализировать мировоззренческие, социально и личностно значимые философские проблемы, место человека в историческом процессе (ОК2);

– способность использовать знания о современной естественно-научной картине мира в образовательной и профессиональной деятельности (ОК3);

– владение методами математической обработки информации, количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ПК16);

– способность использовать навыки публичной речи, ведения дискуссии и полемики (ОК4);

– владение культурой математического мышления, способностью понимать общую структуру математического знания, видеть взаимосвязь между различными математическими дисциплинами, реализовывать основные методы математических рассуждений (ОК5);

– способность понимать универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности, роль и место математики в системе наук, значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике, общекультурное значение математики (ОК6);

– владение математикой как универсальным языком науки, средством моделирования явлений и процессов, способность пользоваться построением математических моделей для решения практических проблем, понимание критериев качества математических исследований, принципы экспериментальной и эмпирической проверки научных теорий (ОК7);

– владение основными положениями истории развития математики, эволюции математических идей и концепциями современной математической науки (ОК8).

Характер компетенции: ПК или ОК – указан такой же, как в ФГОС ВПО, это же касается и формулировки компетенции; номер компетенции присвоен другой, в порядке их перечисления в нашей работе.

В стандартах ФГОС ВО 2014–2015 гг. для направлений подготовки: 01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 01.03.03 «Механика и математическое моделирование», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки» указаны:

– способность математически *корректно* ставить естественно-научные задачи, знание постановок классических задач математики (ПК-2);

– способность *строго* доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата (ПК-3).

Для направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» среди объектов профессиональной деятельности названы *обратные и некорректные задачи*.

Характеристика профессиональной деятельности бакалавров указанных направлений подготовки включает такие виды деятельности, как решение различных задач с использованием математического моделирования, разработка эффективных методов решения задач естествознания, техники и управления; объектами профессиональной деятельности бакалавров являются понятия, гипотезы, теоремы, методы и математические модели.

Проведенный обзор позволяет заключить, что понятие «корректность» является оценочным понятием для достаточно большого количества требований к результатам освоения основных образовательных программ, т.е. компетенций, и представляет собой критерий оценки как объектов профессиональной деятельности, так и самой профессиональной деятельности.

С целью выявления сущности критериально-корректностных компетенций и формирования их перечня дальнейший анализ проведем уже в выделенном классе компетенций и видов деятельности. Выполним упорядочивание компетенций в соответствии со ФГОС ВПО и ФГОС ВО.

Ряд компетенций выражает требования к деятельности специалиста по решению задач, по работе с задачей или с отдельными ее частями, а потому их можно объединить в одну общую профессиональную компетенцию: (А) способность работать с математической задачей на основе понятия «корректность», – обеспечивающую успешное решение задач.

Профессиональная компетенция (А), обеспечивающая успешное решение задач, – это перечень требований к знаниям, умениям, опыту деятельности и к личным качествам индивида, обладание которыми обеспечит успешное решение математических задач как корректных, так и некорректных.

Выявление корректности всех других математических объектов, которая основана на терминологическом и общеупотребительном смысле понятия «корректность», включено в компетенцию (B): способность обосновывать корректность, выявлять некорректность математических объектов (математической модели, формулировок задач, доказательств, применения методов и т.п.) и владеть способами ее преобразования в корректность. К этой же компетенции могла бы быть отнесена и работа с математической задачей, но ввиду особо важной роли математических задач, требования к работе с задачей выделены ранее в отдельную компетенцию (A).

Ряд общекультурных компетенций выражает требования к построению устной и письменной речи, к коммуникативным умениям, к навыкам вести научную дискуссию, к культуре мышления. Известно, что и устная речь, и дискуссия, и мышление могут строиться в форме диалога, поэтому мы выделяем следующую критериально-корректностную компетенцию (C): способность строить устную и письменную речь, вести научную дискуссию, осуществлять мыслительный процесс и коммуникацию в форме диалоговой последовательности корректных вопросов и ответов.

Общекультурные компетенции, связанные с философскими мировоззренческими вопросами корректности, выделены в компетенцию (D): способность осуществлять анализ философских, мировоззренческих, естественно-научных и личных проблем с точки зрения понятия «корректность».

Таким образом, получаем следующий перечень критериально-корректностных компетенций,[255],[259] :

– (A) способность работать с математической задачей на основе понятия «корректность»;

– (B) способность выявлять некорректность математических объектов (математической модели, формулировок задач, доказательств, применения методов, интерпретации результатов наблюдений и т.п.) и владеть способами ее преобразования в корректность;

– (C) способность строить устную и письменную речь, вести научную дискуссию, осуществлять мыслительный процесс в форме диалоговой последовательности корректных вопросов и ответов (в корректной вопросно-ответной форме);

– (D) способность осуществлять анализ философских, мировоззренческих, естественно-научных и личностно значимых проблем с точки зрения понятия «корректность».

Содержание критериально-корректностных компетенций - трехкомпонентное - и включает владение понятием «корректность», способность применять его в качестве универсального критерия, реализовывать познавательный и философский потенциал в учебно-познавательной, исследовательской, профессиональной деятельности и личностной сфере. Выделение компетенций (A)–(D) связано с различными предметами деятельности для каждой из этих определенных выше компетенций.

Проанализируем, к какому уровню компетенций относятся критериально-корректностные компетенции (A)–(D). В педагогической литературе [166, с. 142–143] выделяют три уровня компетенций: ключевые, общепредметные, предметные. Следуя [166], можно утверждать, что учебно-познавательная компетенция относится к разряду ключевых и среди ряда других умений включает:

– умение ставить цель и организовывать ее достижение;

– умение осуществлять анализ, рефлексию, самооценку;

– умение задавать вопросы;

– умение видеть проблему и формулировать задачу, выдвигать гипотезы, характеризовать результат, формулировать и анализировать выводы;

– умение представлять в устной и письменной формах результат проведенного исследования,

– наличие опыта восприятия картины мира.

Коммуникативная компетенция, которая также относится к ключевым, включает:

– умение представлять себя устно и письменно;

– владение способами взаимодействия с окружающими, умение задавать вопросы, корректно вести диалог;

– владение диалогом как одним из видов речевой деятельности.

Сопоставляя содержание учебно-познавательной, коммуникативной компетенций и выделенных критериально-корректностных компетенций (A)–(D), можно заключить, что компетенции (A)–(D) обладают чертами ключевых компетенций.

В то же время, следуя классификации ФГОС ВО, мы можем заключить, что компетенции (A)–(D) обладают чертами общекультурных компетенций, относятся к числу профессиональных компетенций.

Выделим составляющие каждой из критериально-корректностных компетенций, а также определим критерии, по которым можно судить об их сформированности. При определении состава компетенций руководствуемся выводами Первой главы о многоаспектности понятия «корректность». Знаниевая составляющая компетенций основана на содержательном компоненте понятия «корректность», основа деятельностной составляющей – это выявленные приемы, инварианты, механизмы деятельности при работе с корректными и некорректными объектами, конструирование личностной составляющей компетенций осуществляется в соответствии с общекультурным смыслом понятия «корректность».

Компонентный состав критериально-корректностной компетенции (*A*): способность работать с математической задачей на основе понятия «корректность».

Знаниевая (когнитивная, содержательная) составляющая:

а) межпредметные знания:

– знания о структуре задачи (данные, требование, решение, обоснование, предметная область);

– знания об этапах решения задачи (осмысление условий и требования задачи, поиск решения, осуществление решения, «взгляд назад»);

– знания о структуре деятельности по решению задачи (предмет, цель, средства, способы действий, результат);

б) предметные математические знания: понятия, основные утверждения (теоремы, свойства, взаимосвязь между ними), знание методов решения ключевых задач, знание трех требований корректности задачи.

Деятельностная (операционно-деятельностная, технологическая) составляющая:

– умение выделять структурные звенья задачи;

– умение выполнять анализ данных и требования задачи;

– умение осуществлять целенаправленный поиск решения задачи, составлять алгоритм решения;

– умение правильно реализовывать алгоритм решения;

– умение осуществлять «взгляд назад»;

– владение универсальной деятельностью и приемами преобразования некорректности в корректность;

– владение методами решения ключевых задач.

Личностная составляющая:

– высокий уровень познавательной мотивации;

– математические способности;

– черты характера: критичность, креативность, открытость новому, чувствительность к деталям;

– особенности психических познавательных процессов: критичность и продуктивность мышления, чувствительность к деталям, математическая интуиция, острота восприятия, развернутость и корректность речи.

Компонентный состав критериально-корректностной компетенции (*B*): способность выявлять некорректность математических объектов (математической модели, формулировок задач, доказательств, применения методов и т. п.) и владеть способами ее преобразования в корректность.

Знаниевая составляющая:

– знания о понятии «корректность» в терминологическом и общеупотребительном смысле;

– знания о структуре рассматриваемых математических объектов;

– знания о структуре деятельности с рассматриваемыми объектами.

Деятельностная составляющая:

– умение выполнять анализ и синтез;

– умение осуществлять проверку на однозначную определенность, непротиворечивость объектов, вырьирование, корректировку;

– умение оценивать адекватность внешних и внутренних условий, определяющих корректность.

Личностная составляющая:

– высокий уровень познавательной мотивации;

– математические способности;

– черты характера: критичность, креативность, открытость новому, чувствительность к деталям.

Компонентный состав критериально-корректностной компетенции (*C*): способность строить устную и письменную речь, вести научную дискуссию, осуществлять мыслительный процесс в форме диалоговой последовательности корректных вопросов и ответов.

Знаниевая составляющая:

– знания из области формальной логики, культуре речи о структуре вопроса и ответа;

– знания о понятии корректности вопроса и ответа.

Деятельностная составляющая:

– умение выделять в структуре вопроса его компоненты (явные и неявные посылки, требование);

– умение корректно формулировать вопрос и ответ;

– умение корректировать вопрос;

– умение правильно реагировать на некорректный вопрос.

Личностная составляющая:

– критичность;

– креативность;

– чувствительность к деталям.

Компонентный состав критериально-корректностной компетенции (*D*): способность осуществлять анализ философских, мировоззренческих и естественно-научных проблем с точки зрения понятия «корректность».

Знаниевая составляющая:

– знания о законах диалектики, относительности истины, неограниченности познания, о незавершенности знаний.

Деятельностная составляющая:

– умение применять понятие «корректность» к исследованию общественных и личностно-значимых проблем;

– умение осуществлять деятельность, адекватную данному понятию: обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировку.

Личностная составляющая:

– культура мышления, критичность мышления;

– высокий уровень познавательной мотивации;

– математические способности;

– черты характера: целеустремленность, настойчивость, критичность, открытость новому, высокая работоспособность.

В работе А. Г. Асмолова [17] говорится о проектировании личностных, регулятивных, познавательных и коммуникативных универсальных действий. В этой работе выделяются УУД «моделирующе-преобразующего характера», логические, корректирующие, направленные на оценку и саморегуляцию; общеучебные, включающие постановку и решение проблем; логические УУД, в состав которых входит анализ и синтез, умение правильной постановки вопросов и т.п. Сопоставляя состав и характер УУД, описанных в работе [17], и деятельностные компоненты построенных критериально-корректностных компетенций (A)–(D), можно заключить, что деятельностные компоненты критериально-корректностных компетенций (A)–(D), относятся к числу универсальных учебных действий.

Набор критериально-корректностных компетенций, обладая целостностью, возможностью выделения из внешней среды, внутренними и внешним взаимодействиями, может быть рассмотрен как система. В качестве системообразующего признака (эмерджентности) выступает понятие «корректность».

Определим критериально-корректностную компетентность на основе общепринятого понимания термина «компетентность» [53, 112, 166, 167].

Критериально-корректностная компетентность – это интегративное свойство личности, в котором выделены три составляющие: знаниевая, деятельностная, личностная; это свойство показывает степень овладения человеком системой критериально-корректностных компетенций (A)–(D) и проявляется в профессиональной деятельности, в ценностном отношении к самому себе и к окружающему миру, т.е. критериально-корректностная компетентность – это владение:

– понятием «корректность» в терминологическом и общеупотребительном смыслах (знаниевая составляющая);

– деятельностью по исследованию объектов на корректность, по выявлению некорректности, т.е. умениями обосновывать существование объекта (отсутствие противоречий), его однозначную определенность (достаточность требований) и соответствие условиям (внутренним – характеризующим объект, и внешним – характеризующим условия внешней среды), умениями выполнять варьирование и корректировку (деятельностная составляющая);

– способностью выполнять универсальную деятельность по «преодолению некорректности», т.е. умениями преобразовывать некорректность объектов в корректность в результате сужения или расширения предметной области, варьирования элементами объекта и внешней среды, перехода к подсистеме корректных компонентов, обобщения понятий, перехода к приближениям, использованием дополнительной информации (деятельностная составляющая);

– общекультурным, философским смыслом понятия «корректность»; личностными качествами: креативностью, критичностью, открытостью новому, высоким уровнем познавательной мотивации, математическими способностями и интуицией, чувствительностью к деталям (личностная составляющая).

Итак, критериально-корректностная компетентность относится к числу профессиональных компетентностей, в то же время обладает чертами, присущими общекультурным компетентностям. Формирование критериально-корректностной компетентности преследует общекультурные, профессиональные образовательные цели.

2.2. Концепция критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений

В данном разделе мы опишем основные составляющие концепции нашего исследования, в частности, наиболее полно определим понятие критериально-корректностной математической подготовки бакалавров.

В соответствии с трактовками понятия «концепция» в философском энциклопедическом словаре и современном словаре по педагогике, мы примем, что концепция – это «основная, руководящая идея, ведущий замысел, система взглядов отдельного ученого или группы исследователей», [93], [85], [90].

Педагогическое исследование описывает многокомпонентный процесс (образования, воспитания, развития), следовательно, концепция педагогического исследования всесторонне характеризует этот процесс – его генеральную идею, систему взглядов и подходов, сущность, цель, принципы, содержание, формы и методы организации обучения, критерии и показатели его эффективности. Мы согласуемся с мнением С. А. Розановой, которая разделяет такое понимание сущности и содержания концепции педагогического исследования: «Концепция состоит из теоретической модели, методической системы и методики их реализации», см. [116, с. 66].

Основная идея критериально-корректностной математической подготовки состоит в следующем: универсальный критерий оценки основных элементов математического образования – понятие «корректность» – используется в качестве системообразующей основы математической подготовки бакалавров, нацеленной на усвоение как самого критерия на математическом содержании, так и деятельности по его применению; этот критерий переносится из математической в профессиональную и личностную сферы, в обыденную жизнь и используется для оценки общественно значимых, личностных проблем, для формирования мировоззрения, системы ценностей, личностных качеств, механизмов деятельности; в результате формируется критериально-корректностная компетентность бакалавров.

В качестве методологической базы разрабатываемой концепции критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений в нашей работе используются идеи системного, деятельностного и компетентностного подходов. Системный подход – это общенаучный методологический подход; компетентностный и деятельностный подходы принадлежат к частно-научной педагогической методологии.

Системный подход применяется при исследовании сложных объектов, представляющих собой органичное целое. В педагогических исследованиях системный подход раскрывается в работах практически всех методологов, а также в специальных работах таких ученых, как Ю.К.Бабанский, В. П. Беспалько, В.И.Загвязинский, В.В.Краевский, Н. В. Кузьмина, И.П.Подласый, В.А.Сластенин, и др. Анализ педагогического объекта с точки зрения системного подхода предполагает рассмотрение объекта как целостной совокупности составляющих его подсистем, элементов, связей, свойств, которые имеют место как внутри самого объекта, так и в отношениях с внешней средой.

Изучить объект с позиций системного подхода означает описать в развитии и движении все его элементы, подсистемы, связи, функции, выделить главенствующие из них, проанализировать и выявить те интегративные свойства и отношения, которые придают системе целостность, эмерджентность. Целью применения системного подхода является построение моделей, имитирующих исследуемые объекты как системы.

Реализация системного подхода основана на таких принципах, как:

– принцип целостности,

– принцип учета всесторонних связей и развития,

– принцип историзма.

В нашей работе с позиций системного анализа анализируются методико-математические объекты:

– математическая задача,

– понятие «корректность»;

– критериально-корректностная математическая подготовка.

Необходимость анализируются с позиций системного анализа использования системного подхода к исследованию указанных объектов обосновывается их целостностью, многообразием элементов, свойств, взаимосвязей, взаимодействий компонентов, составляющих объекты, наличием устойчивых взаимосвязей с внешней средой, взаимозависимостью свойств объектов и внешней среды.

При исследовании математической задачи в контексте системного подхода, см. раздел 1.1, применен многоуровневый анализ: рассмотрены содержательный и процессуальный компоненты корректных и некорректных математических задач, их свойства, функции, место и роль в образовательном процессе; изучен системогенез понятия «корректная и некорректная математическая задача»; прояснена неразрывная связь между задачами такого сорта; выявлено, что корректные и некорректные задачи лишь во взаимодействии и единстве могут давать эффективный образовательный результат.

Системный подход применяется для определения понятия «корректность», см. раздел 1.3. Выделяются объем и содержание этого понятия, смысловая дифференциация. Описываются нормы и механизмы его применения, выявляются инварианты деятельности при работе с корректными и некорректными объектами. Определяется категориальная принадлежность понятия «корректность». Формулируются закономерности процесса обучения в соответствии с требованиями корректности. Анализируются факторы и условия внешней среды, оказывающие влияние на корректность объектов. В результате анализа выявляется многоаспектность и мультифункциональность понятия «корректность» как системного явления.

С позиций системного подхода анализируется методический феномен – критериально-корректностная математическая подготовка бакалавров физико-математических направлений, строится модель ее методической системы. С этой целью дается определение этого понятия, выделяются структурные компоненты, свойства, подсистемы, функции, развитие; выявляется наличие управления системой. Формулируются критерии, показатели сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров. Обосновываются свойства системы, взаимодействие с внешней средой и педагогические условия ее успешного функционирования.

В настоящее время российская педагогика переходит от парадигмы человека, владеющего знаниями, умениями, навыками (ЗУН – парадигма), к парадигме человека, подготовленного к жизнедеятельности, вооруженного компетенциями, состоявшегося как личность. Воплощение таких идей связано с реализацией деятельностного и компетентностного подходов в практике работы высшей школы.

Психологические основы деятельностного подхода заложены в трудах С. Л. Рубинштейна, А. Н. Леонтьева, Л. С. Выготского, П. Я. Гальперина, В. В. Давыдова, Л. В. Занкова, Н. А. Менчинской, Д. Б. Эльконина и др.

Деятельностный подход в педагогических науках развит в исследованиях таких ученых- дидактов, как Ю. К. Бабанский, М. А. Данилов, П. И. Пидкасистый, Г. И. Щукина, Л. В .Жарова и др.

Деятельностный подход постулирует, что деятельность – это основа, средство и главное условие развития и формирования личности;

– в процессе творческого труда для успешного формирования личности должна сформироваться ее субъектность;

– важная роль в организации деятельности с целью развития личности принадлежит оптимальным условиям ее выполнения.

Основными структурными компонентами деятельности выступают мотив, цель, содержание, предметные действия и результат.

Деятельность является ведущей категорией деятельностного подхода; реализация этого подхода предполагает рассмотрение исследуемого педагогического объекта в рамках системы деятельности, ее развития и становления, превращения обучающегося в субъект учебно-познавательной деятельности.

В нашей работе с позиций деятельностного подхода осуществляется конструирование всех элементов методической системы критериально-корректностной математической подготовки и анализ ее внешней среды, производится исследование процесса решения задачи, выделяется инвариантный состав деятельности с корректными и некорректными объектами, формируются приемы преодоления некорректности математических объектов.

В соответствии с реализацией деятельностного подхода в содержание критериально-корректностной математической подготовки включена деятельностная (операциональная) составляющая критериально-корректностных компетенций: состав УУД, приемы преодоления некорректности. Выбор форм, средств и методов указанного вида подготовки должен обеспечить перевод студента в позицию субъекта познания; формы, методы, средства обучения должны обеспечить приобретение навыков целеполагания, планирования, контроля, самоанализа и оценки результатов. Разработка критериев для определения уровней сформированности критериально-корректностной компетентности выполнена на основе деятельностного подхода: для деятельностного критерия показателем служат характеристики действия по П. Я. Гальперину и Н. Ф. Талызиной, усвоение содержания оценивается в соответствии с деятельностным характером усвоения обучения по В. П. Беспалько, личностный критерий связан с оценкой деятельности по применению критерия корректности в личностной сфере, по выраженности личностных качеств, которые проявляются в деятельности.

Анализ операционального состава некорректной математической задачи с позиций деятельностного подхода позволил выявить ряд особенностей. Мы выяснили, что деятельность циклична, носит творческий характер, проходит все четыре этапа Г.Пойа от анализа данных к поиску решения, его осуществлению и «взгляду назад». На основе деятельностного подхода выявлены универсальные учебные действия познавательного и оценочного характера: обоснование однозначной определенности математического объекта, варьирование, корректировка, а также приемы преодоления некорректности: варьирование свойств; обобщение /ограничение /уточнение понятий; переход к новой среде или предметной области; декомпозиция некорректного объекта; переход к приближениям; описание всех возможных вариантов; запрос дополнительной информации.

Копетентностный подход в качестве центральных категорий оперирует с понятиями «компетенция» и «компетентность». В российской педагогической науке эти термины появились после присоединения России к Болонскому соглашению, необходимость вхождения России в Болонский процесс продиктована современными условиями. В работах таких ученых, как И. А. Зимняя, Е. О. Иванова, Е. Я. Коган, А. А. Вербицкий, О. Е. Лебедев, В. В. Сериков, А. П. Тряпицына, А. В. Хуторской, В. Д. Шадриков и др. разрабатываются проблемы модернизации высшего образования на компетентностной основе.

Компетентностный подход ориентирован на приобретение студентами значимых компетенций, которые рассматриваются как основной образовательный результат. Овладение компетенциями, т.е. формирование компетентности, происходит в процессе учебной деятельности и ради будущей профессиональной деятельности. Деятельностный, компетентностный и контекстный подходы в высшем образовании реализуются в неразрывной связке.

При компетентностном подходе результатом образования выступают не разрозненные предметные знания, умения и навыки, а способность и готовность выпускника вуза к осуществлению результативной деятельности в различных социально-значимых ситуациях, в быстро меняющихся не только корректных, но и некорректных условиях. В связи с этим при компетентностном подходе речь идет не просто о наращивании знаний, а о приобретении разнообразного опыта деятельности.

В нашей работе рассмотрение критериально-корректностной математической подготовки бакалавров с точки зрения компетентностного подхода соответствует современным тенденциям развития высшего образования. Такой подход требует концептуальной разработки целей, содержания, методов, средств, форм обучения и его составляющих. Основные компоненты методической системы критериально-корректностной математической подготовки формулируются в терминах компетентностного подхода.

Основным конструктом с позиций компетентностного подхода при построении понятийного аппарата нашей концепции выступают критериально-корректностные компетенции и критериально-корректностная компетентность бакалавра. Критериально-корректностные компетенции определены как требования к совокупности знаний, умений, навыков, опыта и личностных качеств человека, необходимых для осуществления деятельности как в корректных, так и в некорректных условиях, деятельности по распознаванию некорректности и ее преодолению. В работе принят трехкомпонентный состав компетенций, по характеру компетенций они отнесены к профессиональным, но с наличием черт ключевых. В соответствии с терминологией компетентностного подхода критериально-корректностная компетентность бакалавра определена как интегративная характеристика личности, характеризующая степень владения этими компетенциями, включающая личностное отношение к объектам деятельности.

При моделировании критериально-корректностной математической подготовки одной из характеристик этого процесса будем использовать знаковые средства предметного содержания будущей профессиональной деятельности. В технологии, разработанной А. А. Вербицким,[30], учебная деятельность, весь процесс обучения осуществляются в «контексте будущей специальности». «Выделяются три базовые формы деятельности студентов: учебная деятельность академического типа с ведущей ролью лекции и семинара; квазипрофессиональная деятельность (игровые формы); учебно-профессиональная деятельность», см. [30]. При контекстном обучении органически сочетаются новые и традиционные формы, их многообразие представлено в концепции критериально-корректностной математической подготовки.

Перейдем к описанию понятийного аппарата разрабатываемой концепции. Вначале уточним понятие критериально-корректностной математической подготовки, см.[259], которое было ранее дано во введении.

Критериально-корректностной математической подготовкой бакалавров физико-математических направлений будем называть межпредметную математическую подготовку, основанную на специальных принципах математической корректности, незавершенности знаний, спиралеобразного развития корректного знания; использующую в качестве ведущей идеи понятие «корректность», на этой основе реализующую организационно-деятельностную, содержательную межпредметную и внутрипредметную интеграцию; этот вид подготовки направлен на:

– формирование универсального критерия «корректность» оценки основных компонентов математического содержания, а также широкого класса объектов личностной и ценностной сфер человека;

– освоение деятельности по обоснованию корректности, распознаванию некорректности и ее преодолению; овладение деятельностью в условиях избытка, недостатка и противоречивости данных, т.е. в условиях некорректности.

Системообразующий компонент критериально-корректностной математической подготовки – понятие «корректность» – включается в содержание образования, представляет собой как знаниевую ценность, так и выступает в качестве организующего конструкта: служит универсальным критерием для оценки элементов математического содержания, построения методик и технологий процесса обучения, является основой общекультурного и интеллектуального развития и воспитания студентов.

Содержание критериально-корректностной математической подготовки бакалавра физико-математических направлений представляется набором критериально-корректностных компетенций (A)–(D). Критериально-корректностная подготовка направлена на обретение студентами критериально-корректностной компетентности при обучении дисциплинам математического цикла.

Как показано в ряде наших работ, [250],[247],[259], [181] целесообразность выделения особого вида межпредметной подготовки – критериально-корректностной математической подготовки – в системе профессиональной подготовки бакалавров физико-математического направления основана на том, что математическое образование, построенное на такого сорта подготовке, способствует формирование системы общекультурных, профессиональных, специальных компетенций; кроме того, целесообразность обусловлена:

– социальным заказом общества, на подготовку профессионала, владеющего методологией действий в условиях недостатка, избытка, противоречивости данных, выраженным и сформулированным во ФГОС ВО о приобретении выпускниками межпредметных результатов образования, имеющих характер межпредметных личностных образований, названных компетенциями;

– необходимостью осуществления широкой интеграции внутри образовательного процесса, основу которой для критериально-корректностной математической подготовки составляет универсальный критерий – понятие «корректность»;

– авторитетным мнением ученых-математиков, ученых-методистов, неоднократно указывавших, что введение в содержание образования таких общих и в то же время актуальных понятий, как математическая корректность (корректные и некорректные математические задачи, модели, определения понятия, доказательства, вопросы, применения метода и т.д.), способствует осуществлению эффективного целостного учебного процесса, направленного на развитие личности обучающегося;

– современным уровнем развития науки, в частности, теории обратных и некорректных задач, потребностями практики.

Целью критериально-корректностной математической подготовки является формирование критериально-корректностной компетентности бакалавров на математическом содержании.

Разработка принципов критериально-корректностной математической подготовки осуществляется в трех направлениях, [224]:

1) изучаются возможности использования общепедагогических принципов (научность, активность и сознательность обучения, интегративность, развивающе-воспитывающий характер обучения и т.п.), а также их специфика в вузе (профессиональная ориентация, единство научной и учебной деятельности, междисциплинарные связи и т.п.);

2) конкретизируются основные дидактические принципы обучения математике для критериально-корректностной математической подготовки;

3) на основе выявленных в разделе 1.3 закономерностей учебно-воспитательного процесса, основанного на понятии «корректность», нами вводятся специальные принципы критериально-корректностной математической подготовки.

Принципы обучения отражают зависимость между объективными закономерностями учебного процесса и целями, которые стоят в обучении. Принципы указанных направлений взаимодействуют, дополняют и конкретизируют друг друга. В каждом из направлений можно указать группы принципов, относящихся: к цели; к отбору содержания; к организации целостного процесса обучения, т.е. к выбору методов, форм и средств обучения.

Построение целостного учебно-воспитательного процесса критериально-корректностной математической подготовки бакалавров на основе общепедагогических принципов обучения, воспитания и развития вполне оправдано. В таком подходе реализуется методология решения педагогических проблем с общих позиций. Специальные принципы позволяют более детально, конструктивно, с учетом особенностей подойти к решению конкретной методической задачи.

Принцип научности означает, что содержание обучения должно соответствовать уровню развития математики в ее современном состоянии, отражать новые научные факты, формировать у обучаемых научное мировоззрение. В контексте критериально-корректностной математической подготовки это означает освещать на доступном для обучаемых уровне (тут и принцип доступности) современное состояние теории некорректных задач, показывать, что некорректные задачи являются объективными моделями состояний и процессов реального мира, формировать в мышлении обучаемых такие понятия, которые в настоящее время признаны научными, использовать три требования корректности при составлении и изучении математических моделей, использовать критерий корректности в устной и письменной речи при формулировании вопросов и ответов.

Принцип сознательности и активности в обучении означает требование превращения обучаемого в активный субъект процесса обучения, с выраженной инициативой и самостоятельностью, со сформированной познавательной мотивацией, развитой способностью к саморегуляции, продуктивно взаимодействующего с обучающим и внешней средой. В контексте критериально-корректностной математической подготовки это означает следующее. Обучаемый вовлечен вначале в репродуктивную деятельность, он копирует образцы деятельности обучающего. Далее происходит переход на более высокий уровень взаимодействия с педагогом, когда сам студент осознает цель обучения, анализирует математические объекты с точки зрения условий корректности: устанавливает полноту и непротиворечивость или обнаруживает противоречия, осознает необходимость дальнейшего расширения предметной области, осваивает методы регуляризации; самостоятельно применяет понятие математической корректности в качестве оценочного критерия. В процессе активного получения знаний происходит и формирование деятельности, обучающийся усваивает методологию понятия «математическая корректность», овладевает простейшими умственными действиями: варьированием, анализом, переносом. Лишь в процессе активного усвоения учебного материала происходит формирование деятельности, собственной позиции студента в процессе обучения; проявляется интерес к математике, инициатива.

Принцип интегративности или внутрипредметной, межпредметной, междисциплинарной интеграции, означает достижение целостности процесса математической подготовки за счет установления горизонтальных и вертикальных связей, направленность на закрепление межпредметных, междисциплинарных знаний, способов деятельности и личностных качеств. В соответствии с этим принципом математические дисциплины не должны изучаться каждая изолированно от других, они должны быть связаны между собой и с другими учебными предметами, учебными дисциплинами и обогащаться их содержанием.

Принцип интегративности изучения материала означает постепенное овладение понятием математической корректности, тесное межпредметное взаимодействие. Математический анализ, геометрия, алгебра, дифференциальные уравнения, а далее – численные методы, уравнения математической физики, спецкурсы по некорректным и обратным задачам, – составляют единую предметную базу.

Вузовское обучение имеет свои особенности и при выделении системы принципов обучения в высшей школе [166] необходимо их учитывать. «Особенности и закономерности вузовского процесса обучения связанны с тем, что в высшей школе изучается наука в ее развитии; сближаются самостоятельные и исследовательские виды студенческих работ с научно-исследовательской деятельностью преподавателей; учебно-познавательная деятельность студентов на младших курсах превращается в квазипрофессиональную и собственно профессиональную к старшим курсам; цели обучения напрямую связаны с потребностями общества; имеет место усиление межпредметных связей, особенно это касается профильных учебных дисциплин», [224].

Требования, основанные на закономерностях обучения в условиях высшей школы и обеспечивающие необходимую эффективность обучения студентов в вузе, становятся принципами обучения. К их числу отнесем [165, 166]:

– принцип ориентированности высшего образования на развитие личности будущего специалиста;

– принципы фундаментализации, гуманизации и гуманитаризации;

– принцип соответствия содержания вузовского образования современным и прогнозируемым тенденциям развития науки (принцип фундаментализации);

– принцип прикладной и профессиональной направленности обучения;

– принцип модульности, рационального применения современных методов и средств обучения на различных этапах подготовки специалистов.

«В совокупности содержание всех принципов отражает ведущие инвариантные требования к процессу обучения, вытекающие из его целей, закономерностей и других детерминирующих факторов, чтобы они в совокупности обеспечивали осуществление полного цикла деятельности: от целеполагания до анализа результатов. Все принципы нацелены на осуществление ведущего принципа: принципа воспитывающего и развивающего обучения», [166].

В соответствии с высказанным ведущим дидактическим принципом (принципом воспитывающего и развивающего обучения) обучение в вузе ориентировано на развитие личности обучаемого и его воспитание. Принцип ориентированности на развитие личности обучающегося предполагает применение личностно-ориентированного подхода в процессе математической подготовки студентов.

Развитие психики определяется реальной деятельностью, в нашем случае – деятельностью по освоению и применению понятия «корректность» в образовательном процессе. Включение вопросов, связанных с корректностью, в содержание образования обеспечивает развитие психических познавательных процессов студентов. Мышление, внимание, память, восприятие, речь приобретают новые качества, свойственные более высокому уровню развития интеллекта и когнитивных структур личности; формируются продуктивные свойства психических познавательных процессов, новые формы мышления. Корректные и некорректные задачи, модели, методы, вопросы и ответы служат учебным материалом, в деятельности с которыми формируются креативность личности, речь, дивергентность познавательных процессов и мышления, интеррогативный тип мышления. Учебно-познавательная деятельность студентов проходит все этапы – от целеполагания до анализа результатов и переноса в новые условия.

Для воспитания активной мировоззренческой позиции обучающихся на основе понятия «математическая корректность» необходимо раскрывать действие законов диалектики, в соответствии с которыми «корректность» и «некорректность» представляют два взаимодействующих философских понятия, корректные и некорректные задачи и модели представляют собой тесно взаимосвязанные и взаимодополняющие друг друга стороны реального мира, с помощью этих двух видов моделей (корректных и некорректных) картина окружающего мира может быть описана математическими средствами в более полном виде, чем при использовании лишь корректных моделей. Философские утверждения о поэтапности и неограниченности познания иллюстрируются на понятии «корректность», конкретизируется идея незавершенности знания. Философский тезис о спиралеобразности развития понятий подтверждается на примерах неоднократного прохождения через «преодоление некорректности».

Принципы фундаментализации, гуманизации и гуманитаризации – ориентирующие на активное использование полифункциональности фундаментальных современных научных знаний, предполагающие применение ценностно-мотивационного и личностно-ориентированного подходов, способствующих формированию у студентов общечеловеческих ценностей, ценностей личностной значимости фундаментального математического образования.

В соответствии с высказанными принципами обучение на основе понятия «математическая корректность» в вузе должно быть профессионально ориентировано. Это означает, что при обучении студентов – будущих учителей, необходимо реализовывать в первую очередь методическую функцию понятия «корректность», его общеупотребительный и терминологический смысл. Для студентов, обучающихся по физико-математическому направлению подготовки, корректные и некорректные задачи, модели, методы выступают в качестве математического аппарата исследования естественно-научных процессов. Для студентов-программистов некорректные и обратные задачи представляют научный и профессиональный интерес в плане разработки устойчивых алгоритмов, например, для обратных задач; понятие устойчивости системы используется при изучении экономических вопросов, связанных с описанием рынков, спроса и потребления, процессов инфляции и курсов валют.

Следуя принципу практической направленности, обучение математике на основе понятия «корректность» необходимо строить таким образом, чтобы наглядно демонстрировалась связь некорректных моделей, задач, вопросов и ответов с реальной жизнью. Можно сказать, что человек постоянно сталкивается с некорректностью. «В самом деле, каждый понимает, как легко ошибиться, пытаясь восстановить прошлое по некоторым фактам настоящего (воссоздать картину преступления по имеющимся прямым и косвенным уликам, выявить причины возникновения болезни по результатам обследования и т.п.); или заглянуть в будущее (предсказать стихийное бедствие или хотя бы погоду через неделю); или «проникнуть» в зону недоступности (недра Земли – геофизика, мозг человека – ЯМР-томография) и понять, что там происходит» [58]. Любой профессионал достаточно хорошо знает, что большинство задач и проблем, возникающих в жизни, некорректны, и часто в практике своей работы имеет дело именно с решением такого сорта задач [46, 58, 80–82, 114, 142–151, 176]. Принятие решения в условиях некорректности требует от специалиста владения методологией понятия «математическая корректность».

Принцип соответствия содержания вузовского образования современным и прогнозируемым тенденциям развития науки – принцип фундаментальности – означает требование осуществлять обучение на основе понятия «корректность», «демонстрируя проникновение некорректных задач во все сферы математики, включая арифметику, алгебру, анализ, геометрию, дифференциальные уравнения, математическую физику, вычислительную математику, теорию распознавания образов и т.п.» [58]. К настоящему времени обратные и некорректные задачи превратились в бурно развивающуюся область знаний, проникающую практически во все сферы математики и те отрасли научных знаний, которые используют математический аппарат.

Принцип модульности состоит в том, что построение системы подготовки осуществляется в ее развитии, где каждый последующий модуль отражает определенный этап организации учебного процесса, при этом логически завершенный теоретический материал, практические умения пользования данным материалом проектируются к изучению в отдельный блок – модуль.

Специальными принципами критериально-корректностной математической подготовки будем называть:

– принцип математической корректности;

– принцип незавершенности знания;

– принцип спиралеобразного развития корректного знания.

При обосновании этой группы принципов будем опираться на выявленные в главе I закономерности, на дидактический аспект понятия «корректность», на высказанную Д.Гильбертом идею о разрешимости любой математической задачи и придерживаться общепринятой в методологии науки последовательности действий:

– дать название принципу;

– определить основные понятия, входящие в формулировку принципа;

– сформулировать сам принцип, определить его место среди других принципов;

– обосновать его истинность, показать его применимость для решения научно-практических педагогических задач.

Принцип математической корректности относится к отбору содержания и организации учебного процесса. Его суть состоит в том, что отбор содержания и организация учебного процесса должны осуществляться так, чтобы обучающийся гарантированно достигал однозначного понимания (без разночтений) и усвоения учебной информации; при этом учебный процесс обусловлен, строго соответствует ряду внешних (цели, задачи обучения, характер обучения), внутренних причин (особенности самого обучающегося: характерные свойства восприятия, понимания, мотивация, уровень развития, возраст).

Принцип корректности логически связан с принципом логической строгости проведения доказательств, введенного в докторской диссертации И. Л. Тимофеевой «Совершенствование дедуктивной подготовки студентов математических факультетов педвузов при обучении основам теории доказательств» [140], с принципом разумной логической строгости, введенного в докторской диссертации В. Т. Петровой «Научно-методические основы интенсификации обучения математическим дисциплинам в высших учебных заведениях» [96], с принципом методически необходимого уровня строгости, предложенного в работах Г.В.Дорофеева. Строгость определения математических понятий рассматривалась Г. В. Дорофеевым в работе «Строгость определений математических понятий школьного курса математики» [47]. В работе С. А. Розановой [116, с. 72] говорится о «воплощении принципа неформальной строгости с помощью геометрической иллюстрации, математической, физической интуиции».

В названных источниках обсуждается вопрос о необходимом уровне строгости проведения математических доказательств, введения понятий, обосновывается, что уровень строгости должен быть обусловлен рядом внешних и внутренних причин и может быть описан с помощью понятия «корректность». Соотнеся принципы логической строгости, разумной строгости с требованиями, которые отвечают понятию «корректность», можно сделать вывод, что принцип корректности логически следует из них, конкретизирует, дополняет и обобщает ранее сформулированные требования на основе выделенных закономерностей. Корректность выступает как определенный в соответствии с условиями обучения уровень логической строгости.

В работе Б. В. Гнеденко «Математика и математическое образование в современном мире» [38, с. 46–47] говорится о требованиях корректного изложения материала школьной программы, выдвигаются семь требований, среди которых доступность, взаимосвязь известного с тем, что предстоит изучить, необходимость выработки навыков самостоятельных умственных действий, укрепление межпредметных и внутрипредметных связей, необходимость включения мировоззренческих и исторических материалов, соответствие изучаемого материала уровню развития учащихся. Эти требования можно разделить на три большие группы: требования к содержанию, к процессу обучения и к уровню развития учащихся. Эти требования относятся ко всем компонентам целостного учебно-познавательного процесса: содержанию, процессуальному компоненту, готовности обучающихся. Корректность изложения математического материала, по Б. В. Гнеденко, означает тесную взаимосвязь и взаимообусловленность всех компонентов учебного процесса и уровня развития ученика. В этом состоят закономерности использования понятия «корректность» в образовательном процессе.

Принцип математической корректности относится к отбору содержания, к организации учебного процесса и отражает обусловленность отбора содержания и средств обучения в соответствии с уровнем развития обучающихся, их целевых установок, мотивации. Его суть состоит в том, что обучение строится на основании реализации идеи корректности. Принцип математической корректности требует рассмотрения математических объектов, математической деятельности, организации учебного процесса с точки зрения их корректности предполагает осуществлять математическую деятельность в строгом соответствии с требованием ее корректности. Следование принципу корректности означает:

– в содержание образования включаются понятие математической корректности и деятельность, адекватная этому понятию, корректность математических объектов становится предметом изучения;

– математическая корректность становится критерием для оценки, способом исследования математических объектов;

– математическая корректность представляет собой требование к выполнению математической деятельности (корректность применения математических методов, корректность обработки результатов эксперимента, корректность интерпретации результатов наблюдения) и применению математического аппарата;

– процесс обучения строится в соответствии с «преодолением некорректности», иллюстрируется мировоззренческая идея безграничности познания, закон диалектики «отрицания отрицания»;

– организация учебного процесса осуществляется в соответствии с требованиями корректности изложения учебного материала, обучающийся гарантированно достигает однозначного понимания, без разночтений, усвоения учебной информации;

– построение учебного процесса отвечает требованию корректности, т.е. обусловлен, строго соответствует ряду внешних (цели, задачи обучения, характер обучения и т.п.) и внутренних условий (особенности самого обучающегося: особенности восприятия понимания, мотивация, уровень развития, возраст и т.п.).

Следуя принципу спиралеобразного развития корректного знания и принципу незавершенности знания, мы должны строить обучение начиная с описания идеи корректности и некорректности и далее выходить на строгие математические формулировки с детализацией и учетом всех существующих вариантов. Яркая тому иллюстрация – понятие устойчивости, оно может развиваться от простейших наглядных образов и интуитивных представлений до строгих математических абстракций. Каждый раз возвращаясь к одному и тому же понятию, мы используем имеющийся научный, психо-физиологический потенциал обучающегося, детализируем, конкретизируем, формируем понятие на более высоком уровне строгости, что и соответствует требованию корректности, осуществляем его «логическое развертывание», корректное расширение понятия. Каждая задача, не имеющая решения на раннем этапе обучения, приобретает свое решение в дальнейшем.

Для соблюдения принципа спиралеобразного развития корректного математического знания и принципа незавершенности знания необходимо так строить учебный процесс, чтобы обучающиеся при решении задач, введении понятий, составлении моделей прочно усваивали навык: если нет решения задачи в выбранной предметной области, на определенном уровне развития знаний – надо переходить в другую, новую область и получать решения с помощью другого математического аппарата, на более высоком уровне развития знаний.

Таким образом, основой построения критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений подготовки являются следующие принципы.

Общепедагогические принципы критериально-корректностной математической подготовки:

– принцип научности;

– принцип сознательности и активности;

– принцип интегративности.

Специальные принципы критериально-корректностной математической подготовки в рамках вузовского обучения (первая группа специальных принципов):

– принцип ориентированности высшего образования на развитие личности будущего специалиста;

– принципы фундаментализации, гуманизации и гуманитаризации;

– принцип соответствия содержания вузовского образования современным и прогнозируемым тенденциям развития науки (принцип фундаментализации);

– принцип прикладной и профессиональной направленности обучения;

– принцип модульности, рационального применения современных методов и средств обучения на различных этапах подготовки специалистов.

Специальные принципы критериально-корректностной математической подготовки как особого вида межпредметной математической подготовки (вторая группа специальных принципов):

– принцип математической корректности;

– принцип незавершенности знания;

– принцип спиралеобразного развития корректного знания.

Совокупность указанных выше принципов может быть расширена, конкретизирована или, наоборот, сокращена, более кратко сформулирована. Но основное, инвариантное содержание принципов, относящихся к ведущей идее использовать понятие математической корректности в качестве основы математической подготовки и ее реализации, должно сохраняться.

Совокупность выделенных принципов образует систему с внутренней взаимосвязью, взаимодействием, взаимодополнением. Следуя деятельностно-компетентностной парадигме высшего образования, в качестве центральных, системообразующих выделим принципы развивающего, воспитывающего обучения и принцип интеграции. На каждом из этапов обучения (I, II, III, IV курсы) доминирует какой-либо ведущий принцип или, точнее, группа ведущих принципов. В начальный период обучения на I и II курсах к ведущим принципам следует отнести научность, доступность, наглядность. На старших курсах вузовского обучения приоритет переходит к принципам профессиональной и практической направленности, единства научной и учебной деятельности. В соответствии с уровневыми целями и задачами обучения, формами и методами акцент переносится на те или иные принципы, которые и выполняют роль ведущих.

Выделенная система принципов представляет собой руководящие идеи, требования к процессу обучения, основанному на понятии «корректность», к отбору содержания образования, к его построению. На них основывается модель критериально-корректностной математической подготовки, методы и средства обучения, проектируется целостный процесс обучения. Эти положения определяют требования к модели математической критериально-корректностной математической подготовки бакалавров, к методической системе в целом и ее отдельным компонентам, к построению которых мы перейдем в следующем разделе.

Итак, в данном разделе 2.2 обоснованы концептуальные положения критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений. Центральными из них являются основоплагающие идеи и утверждения системного, деятельностного, компетентностного подходов; ведущая идея концепции базируется на теории математической корректности, построенной в главе I; система принципов нового разрабатываемого вида межпредметной математической подготовки содержит, в качестве специальных, принципы математической корректности, незавершенности знания, спиралеобразного развития корректного знания.

В следующем разделе 2.3 мы продолжим построение концепции критериально-корректностной математической подготовки, обоснуем, что этот процесс – неоднородный, допускающий структурирование, благодаря характерным признакам выделим 5 уровней и 6 этапов этого процесса.

2.3. Критериально-корректностная математическая подготовка бакалавров как динамический шестиуровневый процесс педагогического взаимодействия

Формирование критериально-корректностной компетентности бакалавров физико-математических направлений – процесс неоднородный, он носит характер взаимодействия преподавателя и обучающегося, поэтому укладывается в рамки модели системы педагогического взаимодействия, которую предлагает О. В. Краснова [72, 73]. Описание основных характеристик формирования критериально-корректностной математической подготовки оубликовано в работах [247],[255], [256].

На основании структурно-динамических и функциональных характеристик выделим значимые *уровни* в процессе критериально-корректностной математической подготовки:

I – неопределенный;

II – дезорганизованный;

III – манипулятивный;

IV – прагматический;

V – оптимальный;

VI – автономный.

Межуровневые переходы представляют динамику развития критериально-корректностной математической подготовки. Эти переходы-*этапы* характеризуются появлением новых качеств во взаимодействии субъектов системы или совершенствованием уже имеющихся:

$\mathrm{I} \to \mathrm{II}$ ориентационный,

$\mathrm{II} \to \mathrm{III}$ адаптационный,

$\mathrm{III} \to \mathrm{IV}$ функционализации,

$\mathrm{IV} \to \mathrm{V}$ оптимизации,

$\mathrm{V} \to \mathrm{VI}$ автономизации.

Применение выбранного подхода потребовало разработки критериев для диагностики уровней сформированности критериально-корректностной компетентности, которая является результатом критериально-корректностной математической подготовки, а затем разработки на этой основе комплектов интегрированных диагностических заданий для их идентификации. Обратим внимание на отсутствие в настоящее время общепринятых методик оценки сформированности компетентности. Чаще всего в российских вузах формы и методы контроля позволяют оценивать уровень знаний, умений, навыков, что не достаточно для оценки уровня сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров физико-математических направлений подготовки.

В нашем исследовании в основу измерения уровня сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров положена разработанная в разделе 2.1 модель критериально-корректностных компетенций (A)–(D), включающая три составляющие: знаниевую, деятельностную, личностную.

Критерии и диагностические признаки освоенности компетенций будем формулировать в терминах освоенных знаний, умений, навыков, приобретенного опыта деятельности, а также сформированных на основе понятия «корректность» личностных качеств и мировоззрения студентов (Таблица 1).

Критериально-корректностная компетентность как интегративное качество личности проявляется в деятельности, и, следовательно, оценку уровня ее сформированности целесообразно осуществлять по правильности, развернутости, успешности ее выполнения, а также по проявлению тех качеств личности, благодаря которым эта деятельность эффективно выполнялась. Таким образом, для определения уровня сформированности критериально-корректностной компетентности будем использовать три критерия: знаниевый, деятельностный и личностный.

Критериально-корректностная компетентность связана с осуществлением действий, поэтому в качестве показателей деятельностного критерия выберем характеристики действия по П. Я. Гальперину и Н. Ф. Талызиной, [136, 137]: обобщенность, развернутость, освоенность, прочность, осознанность.

Показателями для знаниевого критерия служит академическая успеваемость студентов, усвоение содержания обучения по В. П. Беспалько: знания-знакомства, знания-копии, знания-умения, знания-трансформации.

Показатели личностного критерия характеризуют степень выраженности изменений в психологической и мировоззренческой сфере студентов: критичность мышления, креативность, чувствительность к деталям, открытость новому, готовность к уходу от стереотипов, характер мотивации, личностные ориентации, эмоции, готовность использовать понятие «корректность» в качестве критерия в различных сферах жизнедеятельности.

Таблица 1

Критерии уровня сформированности критериально-корректностной компетентности

№	**Название уровня**	**Критерии**		
		знаниевый	**деятельностный**	**личностный**
1	2	3	4	5
I	**Неопределенный**	*знания-знакомства*: – общебытовое представление о корректности; – отсутствие научных взглядов по вопросам корректности	отдельные неразвернутые *действия* по обоснованию корректности математических объектов, по варьированию	субъектность студента по проблеме корректности не сформирована, мотивация отсутствует

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5
II	**Дезорганизованный**	*знания-узнавания:* – первичные представления о математической корректности в общеупотребительном и терминологическом смыслах, – знакомство с философскими взглядами, представления о целостной картине мира и принципе незавершенности знаний на основе математической корректности	попытки ориентации, *понимания*: – студенты начинают разграничивать общебытовое, общеупотребительное и терминологическое понятия математической корректности; – студенты знакомы с составом деятельности по выявлению некорректности, по однозначной определенности единичных математических объектов, по их варьированию	– эмоциональные реакции ориентационного этапа: «непонятно», пугающе, страхи, раздражение, непринятие; – внешняя мотивация
III	**Манипулятивный**	*знания-копии:* – знание терминологической корректности математической задачи по Адамару, по Тихонову и т.д., определения понятия, правил вывода, программного обеспечения, вопроса и ответа; – представления об общеупотребительной корректности: корректности доказательства, метода, изложения материала, формулировки задачи; – знание постановок основных корректных и некорректных задач, знание требований корректности к диалоговой речи, к методам, доказательству, формулировкам	развернутые *действия* по образцу, недостаточная освоенность действий: – студенты перечисляют три требования корректности, знают определения условно-корректных задач, воспроизводят решение некорректных задач, могут доказать устойчивость вычислительного алгоритма в стандартных, привычных случаях, обосновать корректность доказательства, изложения материала, вопроса и ответа по имеющемуся образцу; – студенты владеют структурой деятельности и механизмами по обоснованию однозначной определенности математических объектов, по их варьированию	– снятие негативных эмоций предшествующего уровня, появление положительных эмоций – интереса, удовлетворенности первыми успехами, уверенности; – учебно-познавательная мотивация; – осознание философских взглядов, целостной картины мира и принципа незавершенности знаний на основе математической корректности

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5
IV	**Прагматический**	*знания-умения*: – стабильные умения по обоснованию корректности на основе ООД, деятельность «во внешнем плане; – умения исследовать и решать модельные некорректные задачи, владение методами теории некорректных задач в стандартных ситуациях, умение обосновывать номинальную математическую корректность в стандартных случаях; – умение обосновывать корректность доказательства, метода, формулировки задачи, изложения материала – общеупотребительная математическая корректность	*освоенные действия*: – по прочному и осознанному распознаванию и решению типовых задач и их комбинаций, осознанному и обоснованному выбору методов исследования математических объектов на корректность; – по распознаванию и решению типовых некорректных задач и их комбинаций, сознательный обоснованный выбор методов, механизмов исследования математических объектов на корректность, владение методами теории некорректных задач и их отдельными приложениями	– осознание взаимосвязей и понимание сущностного смысла требований корректности; – учебно-познавательная мотивация; – принятие философских взглядов, целостной картины мира и принципов незавершенности знаний, спиралеобразного развития знаний на основе математической корректности
V	**Оптимальный**	*знания-умения, методы сотрудничества*: – владение методами теории некорректных задач, умение применять методологию этой теории при работе с любой задачей, владение терминологической корректностью на уровне применения в стандартных условиях; – способность применять основы общеупотребительной математической корректности в практической квазипрофессиональной деятельности	–опыт совместной с преподавателем учебно-познавательной с элементами исследования *деятельности* в процессе решения некорректных задач, обобщения понятий, при анализе корректности доказательств, методов, диалоговой устной и письменной речи; – прочность, освоенность и осознанность операционного состава *деятельности* по обоснованию математической корректности, деятельность «во внутреннем плане», применение знаний и умений в практических исследовательских целях	– потребность в систематическом общении с преподавателем и коллегами на предмет решения проблемных вопросов, исследования нестандартных случаев; – учебно-познавательная мотивация; – оперирование понятием корректности в философском плане для создания целостной картины мира, деятельностное освоение принципа незавершенности знаний

Окончание таблицы 1

1	2	3	4	5
VI	**Автономный**	*знания-трансформации*: – умение реализовывать методологию некорректных задач в практических условиях недостатка, избытка и противоречивости данных, владение основами теории математической корректности; – дальнейшая разработка теории математической корректности; – опыт автономного решения нетривиальных задач, связанных с понятием корректности. Студент употребляет знания теории корректности в практической деятельности и личной жизни, проводит аргументацию и строит свою диалоговую речь в соответствии с требованиями корректности	– *исследовательская деятельность*, опыт самостоятельного решения нетривиальных задач, связанных с понятием корректности: студент употребляет знания теории корректности в практической деятельности и личной жизни, проводит аргументацию и строит диалоговую речь (устную и письменную) в соответствии с требованиями корректности, владеет философскими основами теории некорректных задач, принципом незавершенности знаний, осознанно применяет их в практической деятельности; – творческое осмысление, *переработка состава деятельности* по обоснованию корректности математических объектов и ее перенос в практическую и личную сферы	– осознание компетентности в сфере математической корректности, способность оценить компетентность другого в данной сфере, философское осознание вопросов математической корректности, построение единой картины мира в соответствии с математической корректностью; – мотивация к творчеству; – развитие философских взглядов, критическая оценка и создание собственного взгляда на картину окружающего мира, развитие понятия «корректность» в естественно-научной, юридической, общественной и других сферах жизни

Динамика системы представляет собой последовательность межуровневых переходов. Цели, формы, методы и средства взаимодействий на каждом переходе обусловлены разницей структур наличного и следующего уровней,[247],[255], [256] , [259].

Формирование критериально-корректностных компетенций начинается [255] с *ориентационного* этапа ($\mathrm{I} \to \mathrm{II}$). Его исходный уровень – **неопределенный** (I), который характеризуется отсутствием у студентов научных знаний по вопросам корректности математических объектов, общебытовым эпизодическим употреблением этого понятия, представлением о некорректной задаче как о «неправильной», которую не нужно решать. Практически вся активность – в руках преподавателя, его организационно-управляющие функции играют ведущую роль в процессе. Методы – объяснительно-иллюстративные и контролирующие. Форма взаимодействия в силу взаимной позиции по предметной осведомленности скорее авторитарная (традиционно-педагогическая). Основная задача этапа – ввести понятие корректности и первые представления о сфере его применения в математике, первые примеры и правила определения корректности – метода, решения.

Большие сложности, как показывает практика, вызывают у студентов оперирование правилами и определениями в курсе высшей алгебры, где рассматривается теория групп (начало семестра). Более наглядно, но не менее строго, плюс очень объемно выглядят аксиомы и теоремы математического анализа, пугающие студентов новыми требованиями к мыслительным операциям, к распределению внимания и организации запоминания (окрестность точки, признаки монотонности, непрерывности, беглое оперирование этими понятиями в процессе рассмотрения задач и доказательств). Наглядно, но фантастически по манипуляциям с объектами в пространстве и на плоскости, воспринимается студентами курс аналитической геометрии. Здесь малейшая алгебраическая некорректность приведет к совсем другой фигуре, т.е. к ошибочному распознаванию объекта. Сложность составляют терминология, чертежи и процедуры преобразований (понятие аффинного репера и преобразований, запоминание основных канонических форм, методов приведения к ним и т.д.) Не меньшую сложность для восприятия представляет ассоциативность групповой операции, не вызывающая затруднений для привычных сложения и умножения. Свойство ассоциативности становится камнем преткновения уже для операции возведения в степень на множестве рациональных чисел, не говоря уже о более абстрактных операциях на множествах элементов произвольной природы.

Начало изучения любой предметной сферы объективно приводит к кризисному моменту [255] – кризису интеграции системы (**дезорганизованный** уровень – II). Его проявления: студенты чувствуют рассогласование их возможностей с темпом и языком объяснения нового материала, формами контроля и требованиями преподавателя, необходимостью запоминания многочисленных незнакомых терминов, производных от иноязычных слов.

Его преодоление, а оно требует пройти с волевым усилием момент непонимания, возможно, заучивания на память, когда важно не опустить руки, не бросить сразу, – «переводит» субъекта на следующий – **адаптационный** – этап (II$\rightarrow$III).

На этом этапе [255] происходит знакомство с номинальным употреблением понятия «корректность», студенты знакомятся с корректностью в смысле Ж. Адамара математической задачи, математической модели. Это также происходит на I курсе математического факультета. Новые приемы и правила интериоризируются хотя бы на уровне запоминания и различения – по предметам, смысловым единицам, объектам, к которым применяются. Этот процесс связан с началом практического применения элементарных теоретических законов, правил и формул. Многочисленные повторения единообразных примеров-упражнений обеспечивают интериоризацию начал вузовских математических дисциплин. Это дает первую уверенность, чувство стабильности и посильности предстоящей учебы, пополнение багажа знаний – о правилах, подходах, типах, различиях ситуаций. Почти монотонное многократное повторение простых действий, алгоритмов, правил, применение их в типичных ситуациях, знакомство со «стандартными», типологизированными исключениями приводит студента на **манипулятивный** уровень, завершающий *адаптационный* этап.

Манипулятивный [255] уровень обнаруживается у студентов при обучении на I (идеально) либо ко II курсу. Студенты осваивают здесь межпредметные модули, затрагивающие корректность математической задачи, модели, метода, определения понятия. Студенты демонстрируют при этом знания-копии, умения действовать «по образцу»: усвоены на уровне действий по образцу исследование существования и единственности решения математической задачи; студенты имеют представление и могут исследовать в модельных случаях устойчивость решения, устойчивость алгоритма. Студент способен сформулировать требования корректности математической модели и исследовать ее в простейших случаях, привести примеры и обосновать корректность определения математического понятия, вопроса и ответа, знакомы с алгоритмами действий в простейших стандартных случаях недоопределенности, переопределенности и противоречивости исходных данных задачи.

Переход к следующему (**прагматическому** – IV**)** [255] уровню – самое сокровенное действо всего процесса: от запоминания-копирования к пониманию, а значит, к субъектности, самоуправлению, самостоятельности в постановке текущих задач индивидуальной траектории развития в сфере математической корректности. Это уровень реальных практически значимых задач и результатов. На прагматическом уровне студент владеет понятием «корректность» в терминологическом и общеупотребительном смыслах, распознает корректные и некорректные математические объекты в приближенных к практическим условиях, умеет с ними работать, выбирать и обосновывать методы, объяснять основания своих решений, находить и исправлять некорректности в решениях других. Основой этого является богатый запас знаний (определений и свойств объектов, теорий, подходов, методов, алгоритмов, правил, типов задач, приводимых к типовым, экстремальным случаям, граничных ситуаций) и опыта, приобретенного в процессе изучения множества учебных курсов: «Численные методы», «Теория вероятностей», «Математическая физика», «Корректные и некорректные задачи математической физики», «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий». Здесь начинает значимо влиять на эффективность процесса спланированная межпредметная интеграция:

1) обычное применение умений из дисциплин математического цикла в других курсах, где эти умения приобретают статус инструментов;

2) интегрированный подход к курсовым и творческим, конкурсным, исследовательским заданиям;

3) критериально-корректностные модули;

4) комплексное владение знаниями и методами из различных разделов математики и информатики и демонстрация этого в процессе вычислительных практик (требуется идентифицировать проблему, построить адекватную/корректную модель, реализовать алгоритмически и на языке программирования, отладить / выявить систематические / принципиальные – ошибки в алгоритме, модели, программе, синтаксические/языковые ошибки в программных модулях);

5) оттачивание критериально-корректностных навыков в процессе практики: распознавание, идентификация, поисковая работа по выявлению и преодолению некорректности;

6) проведение деловых игр с отбором заданий на применение критериально-корректностных компетенций в практических ситуациях в различных предметных сферах: оптимизация затрат предприятия, расчет рабочих циклов производственных процессов, моделирование критических ситуаций и прогнозирование сценариев их развития.

Этап III$\to$IV перехода к прагматическому уровню в модели носит название *функционализации*. Процесс обучения приобретает здесь большую разнообразность: появляются вычислительные практикумы, курсовые работы, индивидуальные инициативные творческие работы (решение открытых проблем математики), педагогическая практика с проведением учебных занятий и проверкой домашних и контрольных работ.

Пятый и шестой уровни (**оптимальный** – V и **автономный** – VI, соответственно этапы движения к ним: *оптимизации* IV$\to$V и *автономизации* V$\to$VI) [255] в критериально-корректностной подготовке, по нашим наблюдениям, достигаются отдельными студентами к IV курсу и далее проявляются в профессиональной деятельности математиков – исследователей и практиков – и математиков-педагогов. Они предполагают переход к «знаниям-трансформациям»: владение понятием «корректность» на творческом уровне, освоение методологии. Студенты могут рассматривать практические вопросы, связанные с применением понятия и усвоенных методов на **оптимальном** уровне – во взаимодействии с преподавателями, и на **автономном** уровне – самостоятельно. Констатируется сформированность у студентов знаниевой, деятельностной и личностной составляющих критериально-корректностных компетенций.

Для большинства математиков уровень **автономности** в сфере корректности достигается в процессе применения знаний, умений и навыков в практической профессиональной деятельности, он связан с накоплением опыта самостоятельной деятельности, в которой сформированные знания, умения и навыки выступают в качестве инструмента. Для субъектов профессионального развития, достигших данного уровня, характерно свободное творческое владение предметом, самодостаточность, автономность, способность самостоятельного выбора, освоения и практической оценки новых IT-продуктов и методов для решения профессиональных задач, способность поделиться опытом с другими. Отдельные профессионалы-исследователи на этом уровне способны реализовать не только самостоятельное и в команде применение, обучение и консультирование других (атрибуты уровня **автономности**), но и критическую оценку и развитие философских и математических взглядов на проблемы корректности, методов и критериев ее оценки, развитие понятия «корректность» в прикладных и научно-исследовательских аспектах естественно-научной, юридической, общественной и других сфер, – т.е. самоактуализироваться в данной сфере. Результаты изложенных построений приведены в таблице 2.

Динамика деятельности студента и педагога при переходе от одного этапа к последующему выражается в том, что возрастает состав деятельности и ответственности студента, а педагог постепенно и закономерно уходит на позиции внешнего наблюдателя.

Таблица 2

Шестиуровневая структура критериально-корректностной математической подготовки: начальные и конечные знания, формы, методы, средства, специфические для каждого уровня

№	Уровень	Начальные знания для заданного уровня	Цели (результат) следующего уровня	Формы /методы/средства
I	Неопределенный	*отсутствие знаний, умений, навыков по проблеме*	*первичные представления*	лекция, беседа: знакомство, рассказ, демонстрация
II	Дезорганизованный	*первичные представления*	*знания-узнавание*	лекции, практические занятия: требования, правила, межпредметно-корректностные модули
III	Манипулятивный	*знания-узнавание*	*знания-копии*	лекции, практические занятия: объяснение, упражнения, межпредметно-корректностные модули
IV	Прагматический	*знания-копии*	*знания-умения*	межпредметные лекционные, практические и лабораторные занятия, IT-технологии
V	Оптимальный	*знания-умения*	*знания-трансформации*	межпредметные спецкурсы, спецсеминары, конференции, рефераты, курсовые работы, IT-технологии
VI	Автономный	*знания-трансформации – креативный уровень*		самостоятельная теор. и экспериментальная работа, консультации, IT-технологии

В разделе 2.3 на основе теории педагогических взаимодействий [72, 73] и разработанных критериев (см. Таблицу 1, [247],[255], [256]) было выполнено структурирование процесса критериально-корректностной математической подготовки бакалавров. Были выделены

уровни: I – неопределенный; II – дезорганизованный;III – манипулятивный; IV – прагматический; V – оптимальный; VI – автономный;

этапы: $\mathrm{I} \to \mathrm{II}$ ориентационный, $\mathrm{II} \to \mathrm{III}$ адаптационный, $\mathrm{III} \to \mathrm{IV}$ функционализации, $\mathrm{IV} \to \mathrm{V}$ оптимизации, $\mathrm{V} \to \mathrm{VI}$ автономизации.

В соответствии с трехкомпонентной структурой критериально-корректностной компетентности бакалавров для ее диагностики были выбраны три критерия: знаниевый, деятельностный и личностный. Критерии характеризуются следующими показателями. Показатели знаниевого критерия (по В. П. Беспалько): знания-знакомства, знания-копии, знания-умения, знания-трансформации; показатели деятельностного критерия (характеристики действия по П. Я. Гальперину и Н. Ф. Талызиной): обобщенность, развернутость, освоенность, прочность, осознанность; показатели личностного критерия характеризуют степень выраженности изменений в личностной, психологической и мировоззренческой сферах студентов.

Из вышеизложенного следует, что сконструированный на основании сравнительного анализа теоретических представлений и авторских методик шестиуровневый процесс критериально-корректностной математической подготовки конкретизирует сложившиеся в теории и методике обучения математике в вузе теоретические представления о компетентностной образовательной парадигме.

Основные выводы и результаты главы II

В главе II разработаны основные положения концепции критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений: определены методологические и теоретические основы, сформулирована основная идея проводимого исследования, построен понятийный аппарат, сконструирована шестиуровневая модель критериально-корректностной математической подготовки, разработана система диагностики: указаны критерии, показатели, уровни, этапы.

1. Методологическую основу концепции составляют положения системного, деятельностного и компетентностного подходов; теоретические основы концепции - это положения теории математической корректности, разработанные в главе I.

2. Основная идея концепции - идея корректности - состоит в том, что понятие «корректность» выполняет роль системообразующей основы математической подготовки бакалавров. На ее базе вырабатываются приемы обоснования корректности, распознавания и преодоления некорректности для объектов как математической, так и нематематической природы; этот критерий переносится в различные сферы жизнедеятельности человека, используется для оценки общественно значимых, личностных проблем, при формировании мировоззрения, системы ценностей, личностных качеств.

3. Специальными принципами критериально-корректностной математической подготовки являются принципы математической корректности, незавершенности знаний и спиралеобразного развития корректного знания.

4. Понятийный аппарат концепции составляют:

4.1) система профессиональных с чертами общекультурных критериально-корректностных компетенций трехкомпонентного состава: содержательная, деятельностная и личностная составляющие. *Содержательную* составляющую системы критериально-корректностных компетенций представляют знания о задачах, теоремах, понятиях, методах, математических моделях, вопросах и ответах, рассмотренных на основании понятия «корректность». *Деятельностная* составляющая – это универсальные учебные действия познавательного и оценочного характера: обоснование однозначной определенности математического объекта, варьирование и корректировка; а также механизмы, приемы деятельности по распознаванию корректности, обоснованию некорректности и преобразованию ее в корректность. *Личностная* составляющая характеризуется чертами, такими как критичность, креативность, открытость новому, чувствительность к деталям, высокий уровень познавательной мотивации, и связана с тем, что:

– понятие «корректность» участвует в формировании мировоззрения, личностных качеств, целостной картины мира, поскольку корректные и некорректные модели дают полное представление об окружающей реальности;

– процесс учебного и научного познания безграничен, развивается по спирали, неоднократно проходит через «преодоление некорректности», иллюстрирует идею незавершенности знания.

4.2) критериально-корректностная компетентность как владение системой критериально-корректностных компетенций, включающая личностное отношение к предмету деятельности. Критериально-корректностная компетентность бакалавра проявляется в способности применять критериально-корректностные компетенции в учебно-познавательной, профессиональной деятельности, личностной сфере, ценностном отношении к самому себе и окружающему миру и представляет собой интегративное свойство личности, имеющее трехкомпонентный состав:

– знанивая составляющая: владение понятием «корректность» в терминологическом и общеупотребительном смыслах, знания об использовании этого понятия в качестве универсального критерия для объектов различной природы;

– деятельностная составляющая: владение деятельностью, как в корректных, так и в некорректных условиях, владение механизмами распознавания корректности и некорректности разнообразных объектов, механизмами преобразования некорректности в корректность, владение составом УУД;

– личностная составляющая: владение философским смыслом понятия «корректность», сформированность личностных качеств (критичность, креативность, чувствительность к деталям, открытости новому).

4.3) критериально-корректностная математическая подготовка бакалавров физико-математических направлений, как особый вид межпредметной математической подготовки, которая

– реализует идею корректности при обучении математике в вузе;

– направлена на формирование умений бакалавров обращаться как с корректными, так и с некорректными объектами; действовать в быстро меняющихся, зачастую некорректных, условиях; применять критерий корректности к широкому кругу объектов произвольной природы;

– основана на специальных принципах (математической корректности, незавершенности знаний, спиралеобразного развития корректного знания).

Содержание критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений представляется системой критериально-корректностных компетенций. Поэтому целью критериально-корректностной математической подготовки является формирование критериально-корректностной компетентности бакалавров.

4.4) диагностический аппарат этого вида подготовки описывает уровни и этапы.

Уровни:

I – неопределенный, соответствующий «знаниям-знакомству»;

II – дезорганизованный, соответствующий «знаниям-узнаванию»;

III – манипулятивный, соответствующий «знаниям-копиям»;

IV – прагматический, соответствующий «знаниям- умениям»;

V – оптимальный, соответствующий «знаниям-умениям» плюс опыт деятельности; методы сотрудничества;

VI – автономный, самодостаточный, соответствующий «знаниям-трансформации»;

Этапы, характеризующие переход от одного уровня, нижестоящего, к следующему, вышестоящему: I$\rightarrow$II ориентационный, II$\rightarrow$III адаптационный, III$\rightarrow$IV функционализации, IV$\rightarrow$V оптимизации, V$\rightarrow$VI автономизации.

5. Необходимость выделения в профессиональной подготовке бакалавров физико-математических направлений нового вида межпредметной математической подготовки – критериально-корректностной - базируется на социальном заказе общества, современном уровне развития математической науки, в частности, теории обратных и некорректных задач, а также обусловлена практическими потребностями профессионалов решать как корректные так и некорректные задачи, работать как в корректных, так и в некорректных условиях, уметь обращаться как с корректными, так и с некорректными объектами окружающего мира.

Глава III МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КРИТЕРИАЛЬНО-КОРРЕКТНОСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРОВ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

В главе III будет продолжено построение концепции критериально-корректностной математической подготовки, а именно, сконструирована модель методической системы этого вида подготовки. Будут раскрыты в развернутом виде целевой и содержательный компоненты, описан процессуальный компонент, т.е. определены ведущие организационные формы, методы и средства критериально-корректностной математической подготовки.

Компонентный состав методической системы обучения математике предложен А. М. Пышкало [111] (цели, содержание, методы, формы и средства) и усовершенствован Н. В. Кузьминой [78]. Эта система реализует задачи обучения, воспитания и развития личности в единстве и взаимосвязи. Методические системы обучения математике исследовались в работах А. М. Пышкало, В. П. Беспалько, В. А. Гусева, Н. В. Кузьминой, Г. Л. Луканкина, А. Г. Мордковича, Г. И. Саранцева и др.

В целях реализации системного подхода при описании методической системы будем исходить из аксиом и научных суждений теории систем.

В качестве «рабочего» определения в научной литературе [12] под системой в общем случае понимается совокупность элементов и связей между ними, обладающая определенной целостностью в противопоставление с внешней средой. Для описания системы предлагается аксиоматический метод. В качестве одной из наиболее важных названа аксиома функциональной эмерджентности (целостности). Это свойство системы, которое принципиально не сводится к сумме свойств объектов, составляющих систему, и не выводится из них. Другими словами, [12] «система – это совокупность взаимосвязанных объектов, обладающая интегративными свойствами, придающими системе целостность, т.е.

система – это совокупность объектов, обладающая эмерджентностью (целостностью)».

Обучение математике на основе понятия «корректность» может быть выделено из общего образовательного процесса как единое целое, поэтому используемый термин «система» вполне оправдан. В качестве внешней среды рассматриваемой методической системы выступает образовательная среда вуза. Роль интегративного свойства, обеспечивающего целостность, эмерджентность конструируемой методической системы, возможность выделения системы из образовательной среды вуза, выполняет понятие математической корректности.

Система обладает возможностью декомпозиции на компоненты и позволяет установить и изучать связи между компонентами, выявлять главенство какого-либо компонента или группы компонентов. В соответствии с этим требованием методическая система содержит в своем составе отдельные, но взаимосвязанные компоненты: цели, содержание, методы, формы, средства, – ведущая роль среди которых принадлежит целевому компоненту. Методическая система взаимодействует с внешней средой – образовательным пространством вуза, поэтому является открытой. Методическая система управляема, в качестве цели управления системой выступает цель методического исследования: формирование критериально-корректностной компетентности бакалавров физико-математических направлений – она играет ведущую, подчиняющую роль по отношению ко всем остальным компонентам системы: содержанию и процессуальному компоненту.

Будем рассматривать традиционный пятикомпонентный состав методической системы [111]: цели, содержание, методы, формы и средства.

Таким образом, методическая система критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений подготовки (МС ККМПБ) – это сложная, открытая, управляемая система, включающая в качестве компонентов цели, содержание, методы, средства и организационные формы, ориентированная на развитие личности обучающихся, выделенная из образовательной среды вуза с помощью интегрирующего свойства – понятия «корректность» – и построенная в соответствии с целью формирования критериально-корректностной компетентности бакалавров на основе системы специальных принципов: математической корректности, незавершенности знаний, спиралеобразного развития корректного знания.

3.1. Цели критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений

В принятом «Законе об образовании» 2012 г. в ст. 69 указывается, что общей целью высшего профессионального образования является:

– «обеспечение подготовки высококвалифицированных кадров… в соответствии с потребностями общества и государства;

– удовлетворение потребностей личности в интеллектуальном, культурном и нравственном развитии».

Сформулированные цели обучения характеризуют те результаты, которые должны быть достигнуты в совместной деятельности преподавателей и студентов в рамках образовательного процесса и всей образовательной среды вуза: высокая профессиональная квалификация выпускников и их интеллектуальное, культурное, нравственное развитие. Высшее образование имеет целью профессиональное и личностное развитие студента в процессе его общей и профессиональной подготовки. Математическая подготовка студентов вуза, которая является одним из видов профессиональной подготовки, конкретизирует общие цели высшего профессионального образования и, таким образом, ставит своей целью профессиональное образование, воспитание и развитие студентов на математическом содержании и средствами математики в математических и смежных с ними дисциплинах.

Цели обучения математике характеризуют стратегические ориентиры, которыми руководствуются все субъекты образовательного процесса. Они представляют программу развития студентов средствами математики и основаны, кроме Закона об образовании, на требованиях, сформулированных в ФГОС ВО к видам деятельности, к знаниям, способностям и готовности выпускников выполнять будущую профессиональную деятельность, к способности и готовности ориентироваться в быстро меняющемся современном информационном обществе.

Цели критериально-корректностной математической подготовки лежат в контексте общих целей высшего профессионального образования, указанных в Законе об образовании, требований ФГОС ВПО и ФГОС ВО, и конструируются в соответствии с разрабатываемой концепцией, которая основана на теоретических положениях математической корректности и содержит определения понятий критериально-корректностной компетентности и критериально-корректностной математической подготовки, а также специальные принципы критериально-корректностной математической подготовки. Следование системному подходу и закономерностям процесса целеполагания обязывает конструировать иерархическую структуру целей исследования: главная (глобальная) цель разделяется на подцели (этапные, уровневые), а они, в свою очередь, на более детальные составляющие (фазовые, интегративные, оперативные). Главная (глобальная) цель педагогического исследования – формирование критериально-корректностной компетентности – разделяется на подцели (уровневые цели) в соответствии с рассмотренной в главе II шестиуровневой моделью критериально-корректностной математической подготовки. Далее разделение подцелей на более детальные составляющие (фазовые, оперативные) происходит на уровне дидактического модуля, учебного занятия, спецкурсов, интегративные – на уровне ряда взаимосвязанных предметов или учебных дисциплин.

В соответствии с утвердившимися в психолого-педагогических науках, в теории и методике обучения математике [48, 127, 129, 164, 165] взглядами на целеполагание, определим шесть групп целей главной (глобальной) цели исследования: развивающие, общекультурные, общеобразовательные, научные, прикладные, воспитательные. Соотнося общие целевые установки обучения математике в вузе, декларированные в образовательных документах и разрабатываемые в педагогической литературе, дидактические принципы и сущность критериально-корректностной компетентности, охарактеризуем каждую из шести групп целей.

1. Развивающие цели критериально-корректностной математической подготовки основаны на принципах гуманизации и личностно-ориентированного высшего профессионального образования. В настоящее время педагогическая наука отказывается от представлений о человеке как средстве достижения результата и обращается к концепции человека как цели, к идее гуманизации образования. Реализация этих идей означает совершенствование в процессе обучения черт личности студента, свойств и качеств его психики.

Одной из ведущих для вузовского математического образования, как указывает Селютин В.Д. [124],[125], становится задача интеллектуального развития студентов «идея приоритета развивающей функции обучения математике над его образовательной функцией….Центром всей системы обучения математике становится не изучение математической науки как таковой, а познание окружающего мира средствами математики и, как следствие, динамичная ориентация человека в этом мире, социализация личности, развитие качеств личности и свойств психики обучающегося».

В первую очередь это относится к умственному совершенствованию. В процессе обучения математике происходит формирование различных форм математического мышления: абстрактного, логического, алгоритмического, критического, дивергентного, интеррогативного. Некорректные задачи традиционно используются в качестве средства их формирования. Некорректные задачи также используются для развития математических способностей обучающихся, в качестве средства формирования их творческой деятельности. Обучение решению некорректных задач способствует развитию интеллекта, таких его черт, как креативность, чувствительность к деталям, математическая интуиция.

Развитие деятельностной сферы обучающихся происходит при овладении ими универсальных учебных действий познавательного и оценочного характера, основанных на понятии «корректность». К таким действиям относятся обоснование однозначной определенности и варьирование. Владение деятельностной схемой решения задач расширяет методологические знания студентов, имеет общенаучный характер. Деятельностная схема включает четыре этапа: анализ условий, поиск решения и осуществление решения, «взгляд назад», – и в полной мере реализуется и усваивается обучающимися лишь на совокупности корректных и некорректных задач. Развитию деятельностной сферы личности способствует решение некорректных задач, так как, во-первых, они дают способы действий в условиях противоречивости, переопределенности и недоопределенности исходных данных, и, во-вторых, при решении некорректных задач обучающийся проходит все этапы деятельности – от анализа условий до анализа полученного решения.

Изучение понятия корректности обогащает систему взглядов на мир осознанными представлениями об относительности и условности фактов, содействуют формированию современного научного мировоззрения, особых философских взглядов, овладению специфической методологией преодоления некорректности, характерной для многих разделов современной науки.

Особая роль в формировании научного мировоззрения, адекватных представлений об окружающем мире принадлежит корректным и некорректным математическим моделям. Корректные модели отражают непрерывные поступательные процессы в природе и обществе, а некорректные служат для описания скачкообразных изменений, катастроф. Кроме того, диалектическая связь понятий «корректность – некорректность» иллюстрирует философскую идею об относительности истины, незавершенности знаний, неограниченности и спиралеобразности научного и учебного познания: от некорректности к корректности и далее по спирали к новой некорректности. Решение некорректных задач, в особенности обратных задач математической физики, является иллюстрацией философских положений об объективности причинно-следственных связей и неоднозначной их обратимости. Изучая некорректные задачи, студент приходит к важному мировоззренческому выводу, что, вообще говоря, нет неразрешимых, абсолютно некорректных задач, речь идет только о том, когда и какими средствами, в результате каких научных исследований это решение осуществится.

Совершенствование коммуникативных навыков обучающегося может быть основано на усвоении требований корректности вопросов и ответов. Способность к ведению дискуссии, научного спора в форме корректной вопросно-ответной диалоговой речи имеет в своей основе владение основами речевой корректности. Известные вопросно-ответные комплексы используют в своей основе выполнение требований корректности.

Воспитание интереса к математике как основному инструменту и универсальному языку для всех специальностей тесно связано с применением корректных методов наблюдений и обработки их результатов. Не только естественные науки (биология, химия, физика) используют математический аппарат, но и традиционно далекие от математики общественные и гуманитарные науки прибегают к математическим средствам, руководствуясь в числе прочих и соображениями корректности применяемых методов. Корректность определения понятий – проблема, активно обсуждаемая в гуманитарных и общественных науках в связи с необходимостью строгого построения понятийного аппарата названных наук.

Формирование профессионально-значимых качеств, активной жизненной позиции осуществляется на основе понятия «корректность».

2. Общекультурные цели обусловлены тем, что в современных условиях позитивная роль высшего образования может быть обеспечена только при культурообразующем характере содержания образования. Общекультурные цели критериально-корректностной математической подготовки основаны на реализации принципа гуманитаризации математического образования и вытекают из того факта, что математика представляет собой выдающийся элемент общечеловеческой культуры. Реализация общекультурных целей связана с формированием представлений у студентов о роли математики в построении материальной и духовной основы общества. Математика является уникальным способом

познания объективного мира, демонстрирует глубину абстракции, позволяет делать прогнозы и открывать новые пути развития науки и общества.

Гуманитарная ориентация обучения математике побуждает по-новому взглянуть на тот высокий общекультурный потенциал понятия «корректность», который для развития личности трудно переоценить. Как сказано в работе [124], «в сферу интересов современной личности входит умение адаптироваться к новым условиям жизни: добывать и использовать информацию, анализировать ситуацию, критически оценивать и находить корректные пути решения возникших проблем, осмысленно действовать в ситуации выбора, адекватно в соответствии с условиями изменять организацию своей деятельности, уметь владеть средствами коммуникаций». В этом отношении неиспользуемые пока еще резервы критериально-корректностной математической подготовки достаточно велики. Включение элементов корректности в вузовское обучение дает возможность использовать математику в жизни. Действительно, изучение элементов теории корректности позволяет овладеть компетенциями, способствующими восприятию и оценке с точки зрения корректности тех сведений, которые встречаются человеку в средствах массовой информации, дают возможность на их основе делать выводы и принимать решения в некорректных ситуациях. Как элемент общей культуры оно способствует развитию личности, совершенствованию коммуникативных способностей, умению ориентироваться в общественных процессах.

Введение понятия корректности решает задачу гуманитаризации математики и разрушает сомнения в гуманитарных возможностях математики.
Знакомство с понятием «корректность» и анализ предметов с точки зрения общеупотребительной и номинальной корректности существенно обогащает общекультурные взгляды обучаемых. Они открывают для себя, что многие факты, корректные в одних условиях, перестают быть таковыми в других условиях; большинство практических задач не имеют однозначного правильного ответа, а «из одних и тех же данных можно сделать разные выводы, которые будут корректными в зависимости от обстоятельств»,[125].

3. Общеобразовательные цели критериально-корректностной математической подготовки вытекают из принципа интегративности и основаны на том, что математика необходима для познания других наук и используется в повседневной жизни. Терминологическая и общеупотребительная корректность межпредметна, поскольку в любой предметной области есть место определениям понятий, задачам, обоснованиям логических выводов или доказательствам, применению методов, научным спорам, дискуссии, – т.е. всем тем объектам, для которых корректность выступает критерием. Построение математических моделей и проверка их корректности необходимы в любой профессиональной сфере, при решении большинства прикладных задач.

Корректность в математике давно и привычно используется в различных предметах: алгебре, геометрии, математическом анализе, численных методах, математической физике, моделировании. Употребляются термины: корректность задачи, корректность вопроса и ответа, определения, метода, программного обеспечения, алгоритма, математической модели, задания систем и т.п. В общеупотребительной практике используются выражения: корректность формулировки тестовых заданий, корректная постановка задачи, корректность доказательства, вывода и т.п. Принципиальны вопросы корректности экспериментальных исследований и обработки их результатов в естественных науках. Но и в общественных и гуманитарных науках понятие «корректность» также востребовано. Из средств массовой информации мы узнаем о политкорректности, слышим о корректности рекламы, о корректности определения понятия «общество» в обществознании, о корректности доказательной базы в юриспруденции.

Реализация общеобразовательных целей означает формирование у студентов представлений о роли математики во всех областях знаний, о связи математики с другими науками и выбранной специальностью, о природе и универсальности математических абстракций, методов, моделей. На языке общеобразовательных целей рассматриваемого вида математической подготовки это предполагает необходимость формирования у студентов знаний о межпредметности понятия «корректность» и возможностях его использования при обучении дисциплинам, как смежным с математикой, так и далеким от нее, о применении межпредметного содержания понятия «корректность».

4. Научные цели критериально-корректностной математической подготовки основаны на принципе фундаментализации высшего профессионального образования. Научные цели реализуются в научной деятельности студентов, как самостоятельной, так и совместной с преподавателем. Эти цели актуальны для тех, кто занимается научными исследованиями профессионально, обучаясь в вузе, и предполагает свою жизнь посвятить развитию математической науки. Реализация научных целей кроме участия в научной деятельности предполагает изучение математики с наибольшей степенью строгости. Некорректные и обратные задачи – современный, востребованный раздел математической науки. Благодаря исследованиям в этой области стало возможным решение многих важных практических задач, среди которых создание современных томографов, проведение геологоразведочных работ, распознавание образов и т.д. Обучаясь в университете, студент может участвовать в развитии вузовской науки, одним из направлений которой являются некорректные и обратные задачи. Теория некорректных задач выступает математическим аппаратом решения задач гравиразведки, теплопереноса, аналитического продолжения потенциальных полей, интерпретации граничных данных.

Таким образом, научные цели критериально-корректностной математической подготовки означают следующее: изучение математики с наибольшей строгостью, знакомство с лучшими современными образцами математической науки, теории некорректных и обратных задач, участие совместно с преподавателями в научных исследованиях коллективов кафедр, факультетов.

5. Прикладные цели критериально-корректностной математической подготовки основаны на принципе прикладной направленности высшего профессионального образования и связаны с широким спектром приложений корректности в различных практических областях. Выпускник вуза должен быть подготовлен к практическому применению корректных математических методов

для построения моделей, решению профессиональных задач корректным применением математического аппарата, должен владеть методологией решения корректных и некорректных математических задач и применять ее в профессиональной деятельности. Кроме того, реализация прикладных целей означает: формирование умений применять понятие «корректность» в процессах управления, принятии решений; воспитание стремления к выбору корректных эффективных методов исследования профессиональных задач; воспитание самостоятельных приемов изучения современных математических методов, необходимых для решения прикладных задач.

6. Воспитательные цели критериально-корректностной математической подготовки означают воспитание у студентов морально-этических норм, нравственности, профессиональной этики, критичности, политкорректности, толерантности, коммуникативности, умений вести научный спор и дискуссию. Воспитательные цели реализуются при обучении математике и формировании черт характера, таких как, критичность, открытость новому, креативность, познавательная мотивация. Воспитательные действия направлены от усвоения студентами общеупотребительной и терминологической математической корректности к воспитанию морально-этических норм, т.е. к воспитанию политкорректности, толерантности, нравственности студентов.

Модернизация системы высшего профессионального образования может быть успешной только тогда, когда в целевом компоненте в качестве ориентиров представлены в единстве общекультурные и морально-этические ценности, современные достижения науки, коммуникативная культура. Свою позитивную роль в этом процессе может сыграть метапонятие «корректность» ввиду наличия у него содержательного, деятельностного, личностно-мировоззренческого и общекультурного потенциала.

Из сказанного следует, что включение понятия «корректность» в содержание вузовского математического образования усиливает возможности достижения общих целей обучения математике в вузе. Главная цель критериально-корректностной математической подготовки состоит в обогащении вузовской математики и усилении ее познавательного, развивающего, общекультурного, философского потенциала рассмотрением вопросов на основе понятия «корректность». Это означает:

– совершенствование личностной сферы обучающихся путем формирования у студентов личностных качеств, деятельности, мировоззрения, качеств психических познавательных процессов на основе понятия «корректность»;

– выработка знаний о корректности основных элементов математического содержания и выработка у студентов устойчивых навыков работы с корректной и некорректной математической задачей, моделью, методом, доказательством и т.д.; владение умениями исследовать их на корректность и «преодолевать» некорректность;

– владение общекультурными ценностями с использованием понятия «корректность»: владение философским смыслом понятия «корректность», развитие умений анализировать жизненные ситуации и принимать решения в условиях недостатка, избытка или противоречивости данных, обогащение системы воззрений на мир;

– совершенствование коммуникативных способностей студентов, речи, умений ведения дискуссий и умений ориентироваться в общественных процессах с использованием понятия «корректность».

На основе выявленных и сформулированных целей критериально-корректностной математической подготовки определено адекватное им содержание подготовки. Его характеристика представлена в следующем разделе.

3.2. Содержание критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений

Теоретические основы проблемы содержания образования разрабатывались такими учеными, как Ю. К. Бабанский, В. В. Краевский, И. Я. Лернер, Н. Н. Нечаев, М. Н. Скаткин и др. Проблема формирования содержания математического образования в высшей и средней профессиональных школах рассматривалась такими педагогами-математиками, как Б. В. Гнеденко, В. В. Давыдов, А. Н. Колмогоров, Ю. М. Колягин, Л. Д. Кудрявцев, С. М. Никольский, Н. Х. Розов, А. А. Столяр, В. М. Тихомиров, Д. Пойа, А. Пуанкаре и др. В их исследованиях содержание образования и, в частности, математического образования рассматривается как один из факторов личностного развития обучающихся.

Содержание критериально-корректностной математической подготовки отражено не в одной, а в совокупности учебных дисциплин, и достижение целей такого вида подготовки возможно лишь при реализации метапредметного подхода в вопросе отбора содержания образования. Простое перечисление учебных тем, подлежащих изучению, форм, методов и средств организации учебного процесса не даст гарантированной возможности достижения целей подготовки. Необходима межпредметная интеграция, соблюдение метапредметности прежде всего в отборе содержания обучения. Под содержанием критериально-корректностной математической подготовки мы будем понимать содержание, отражаемое не в одной, а в совокупности дисциплин, и состоящее из совокупности учебных тем, вопросов, раскрывающих ее сущность.

Следуя компетентностной парадигме высшего образования, определим содержание критериально-корректностной подготовки в виде системы критериально-корректностных компетенций (A)–(D):

– знания о терминологической и общеупотребительной корректности;

– УУД: обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировка;

– приемы действий в условиях некорректности;

– личностные ориентации, качества, ценности на основе понятия «корректность».

Учебные курсы, на которых осуществляется формирование критериально-корректностной компетентности, представлены:

– программным базовым компонентом: дисциплины математического цикла (высшая математика, математический анализ, алгебра, геометрия, уравнения математической физики, численные методы, история математики и информатики);

– вариативным компонентом: функциональный анализ, теория функций комплексного переменного, история математики и информатики, непрерывные математические модели, математическая теория массового обслуживания, интегрированные спецкурсы «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий», «Корректные и некорректные задачи математической физики». Таким образом, содержание критериально-корректностной математической подготовки включает систему научных знаний и практических умений (умений действовать «по образцу» и творческих), основанных на понятии «корректность», а также относящиеся к этому понятию мировоззренческие и нравственно-этические идеи, оценочные суждения, отношения.

Основываясь на принятой шестиуровневой модели формирования критериально-корректностной компетентности, рассмотренной в разделе 2.3, и руководствуясь целями, принципами исследования, определим составные части содержания образования: знания, навыки, умения, творческую деятельность, ценностные отношения, личностные качества, мотивацию – для каждого из уровней.

Содержание обучения будем конструировать в составе трех блоков: теоретического, практического и личностно-мировоззренческого. В теоретический блок включен материал по проблеме корректности, это задачи, теоремы, понятия, методы, приемы деятельности, математические модели, вопросы-ответы, рассмотренные на основании понятия «корректность». Практический блок включает материал, способствующий формированию у студентов умений по исследованию корректности основных элементов математического содержания, а также распознаванию некорректности и ее преодолению, и универсальные учебные действия познавательного и оценочного характера (обоснование однозначной определенности и варьирование), навыки творческой деятельности.

Личностно-мировоззренческий блок содержит материал по формированию личностных качеств и мировоззрения обучающихся на основе корректности.

Формирование критериально-корректностной компетентности начинается с *ориентационного* этапа (I$\rightarrow$II). Этот этап соответствует началу обучения и характеризуется отсутствием у студентов научных знаний по вопросам корректности. Задания этого этапа:

– приведите примеры из Вашего жизненного опыта использования слова «корректность», «корректный», «некорректный», «некорректность»;

– объясните смысл выражений: «корректное поведение», «некорректное доказательство», «некорректный банковский договор», «некорректное завершение программы «Yandex», «корректная и некорректная задача».

На втором этапе, *адаптационном* (II$\rightarrow$III), студенты знакомятся и усваивают понятие «корректность» в общеупотребительном и терминологическом смыслах, используя рисунок 5, выполняют задания:

– проведите анализ корректности математической задачи и корректности ее формулировки;

– докажите, что задача противоречива и не имеет решений;

– исследуйте, сколько решений имеет задача;

– обоснуйте однозначную определенность решения;

– проведите анализ своей деятельности по решению задач;

– составьте вопросы и предполагаемые ответы по заданной теме, проанализируйте их корректность;

– проведите варьирование условий задачи, составьте «возмущенную задачу», найдите все ее решения;

– объясните, как связана корректность математической модели и описываемое ей явление;

– обоснуйте корректность (вычислительную устойчивость) применяемого алгоритма;

– объясните, как нужно действовать в случае некорректности задачи, метода, модели, вопроса, определения понятия.

Этап III$\rightarrow$IV, названный функционализацией, направлен на формирование критерия «корректность» в стандартных случаях, когда требуется исследовать корректность модельных математических задач, простейших математических моделей, определения понятий, вопросов и ответов. На этом этапе решаются задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, краевые задачи, ставятся обратные задачи, студенты должны освоить исследование их корректности в простейших, стандартных случаях: обосновывать существование, единственность и устойчивость решения для математических моделей и задач, анализировать свойства, как самого объекта, так и внешней среды. Обучение нацелено на формирование навыков обращения с корректными и некорректными математическими объектами в регламентированных, классических условиях. Студенты должны освоить деятельность по образцу, уметь формулировать и обосновывать требования корректности для рассмотренных объектов, в отдельных случаях приводить свои примеры.

В соответствии с принципом профессиональной ориентации на этом этапе бакалавры получают задания исследовать соблюдение корректности:

– проведите анализ корректного определения понятий, корректной формулировки задач, тестовых заданий, вопросов, вычислительных алгоритмов, изложения материала;

– приведите примеры из школьных учебников некорректного изложения учебного материала, формулировок задач, вопросов;

– предложите свои варианты для устранения некорректности;

– исследуйте корректность задачи Коши;

– проведите анализ устойчивости вычислительного алгоритма;

– исследуйте корректность алгоритмов численного суммирования ряда Фурье, численного дифференцирования и интегрирования; предложите регуляризацию;

– проанализируйте возможности компьютерных технологий в решении некорректных задач.

Прагматичный этап (IV): «знания – копии» трансформируются в «знания-умения». Этот момент соответствует обучению на III курсе и представляет уровень реальных практически значимых задач и результатов. Студент освоил понятие «корректность» в терминологическом и общеупотребительном смыслах. Этот этап реализуется при обучении численным методам, элементам функционального анализа, уравнениям математической физики, элементам теории функции комплексного переменного, непрерывным математическим моделям, математической теории массового обслуживания.

Пятый и шестой уровни (оптимальный – V и автономный – VI, соответственно этапы движения к ним: оптимизации IV$\rightarrow$V и автономизации V$\rightarrow$VI) в критериально-корректностной подготовке соответствуют обучению на IV курсе и предполагают «знания-трансформации». Обучение на этих уровнях реализуется через спецкурсы, спецсеминары, курсовые и дипломные работы, вычислительную и педагогическую практики. Понятие «корректность» служит математическим аппаратом исследования, оценки, прогноза. Студенты выполняют задания:

– проанализируйте корректность понятия «предел функции в точке» по учебной литературе начиная со школьных учебников;

– проиллюстрируйте корректность определения понятий производной дробного порядка и интеграла дробного порядка;

– составьте устойчивый алгоритм решения квадратного уравнения с малым старшим коэффициентом;

– изучите эффект пограничного слоя на примере дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром при производной;

– докажите некорректность ретроспективной задачи для уравнения теплопроводности, обратной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге, в полуплоскости, рассмотрите их мировоззренческое значение;

– рассмотрите устойчивые методы решения плохо обусловленных систем линейных уравнений;

– обоснуйте корректность основных математических моделей для процессов механики.

Оптимальный и автономный этапы характеризуются владением понятия «корректность», студенты освоили методологию и могут решать практические вопросы, связанные с применением понятия «корректность». Эти этапы характеризуются сформированностью у студентов содержательной, деятельностной и личностной составляющих критериально-корректностных компетенций. Шестой этап достигается в процессе применения знаний, умений и навыков в практической квазипрофессиональной деятельности при написании курсовых, дипломных работ, прохождении практик. Он связан с накоплением опыта самостоятельной деятельности, в которой сформированные знания, умения и навыки выступают в качестве инструмента. Для студентов, достигших данного этапа развития, характерно свободное творческое владение критериально-корректностной компетенцией, самодостаточность, автономность, способность самостоятельного выбора, освоения и практической оценки новых продуктов, способность поделиться опытом с другими. Этот уровень достигается при написании курсовых, дипломных работ.

Анализируя межпредметное содержание, соответствующее корректности основных математических объектов (математическая задача, модель, вопрос-ответ, определение понятия, доказательство, метод и т.д.) приходим к выводу, что наиболее адекватной для рассмотренного содержания является блочно-модульная модель, когда межпредметное содержание формируется в соответствующие дидактические блоки-модули.

Кроме того, процесс обучения спиралеобразен: к известному на уровне первичных представлений, на «уровне идеи», содержанию осуществляется неоднократный возврат на более высоком уровне знаний; критерий корректности применяется как к известным математическим объектам, так и к все большему числу математических объектов и объектов окружающего мира. На последнем, завершающем этапе усвоенное понятие «корректность» является аппаратом исследования профессиональных и квазипрофессиональных практических задач.

Таким образом, содержание критериально-корректностной математической подготовки - система критериально-корректностных компетенций – формируется с учетом целей и принципов этого вида подготовки. Центральное место в содержании занимают понятия корректности/некорректности и умения соблюдения корректности в математических действиях, распознавания и исправления некорректности. Содержание образования: знаниевая, деятельностная и личностная составляющие критериально-корректностной компетентности, - формируются в расширяющейся системе межпредметных связей с блочно-модульной структурой. Содержание критериально-корректностной математической подготовки бакалавров обеспечивает развитие от «знаний-знакомств, знаний-копий» к «знаниям-умениям, знаниям-трансформации», а умения студентов работать с понятием «корректность» стремятся к универсализации как к результату, а впоследствии на этой базе – к специализации умений и навыков из области критериально-корректностной математической подготовки.

3.3. Процессуальный компонент критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений

Критериально-корректностная математическая подготовка осуществляется в рамках лекционно-семинарских организационных форм обучения. Основными средствами формирования критериально-корректностной компетентности бакалавров являются система межпредметно-корректностных модулей (СМКМ) и межпредметные спецкурсы «Корректные и некорректные задачи математической физики», «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий».

На лекциях используются продуктивные методы обучения: проблемное изложение, эвристический и исследовательский методы. Практические занятия строятся в различных формах активного взаимодействия студентов с преподавателем, студентов между собой и направлены на формирование, систематизацию и обобщение знаний по проблеме корректности в математике и смежных дисциплинах. Выполнение курсовых, дипломных работ, научно-исследовательских проектов завершает формирование критериально-корректностной компетентности выпускника, выводя уровень владения указанной компетенцией на оптимальный. В соответствии с принципами активности и профессиональной ориентации во всех формах организации занятий большая роль отводится самостоятельной исследовательской или квазипрофессиональной деятельности студентов.

Центральное звено в разработке процессуального компонента занимает система межпредметно-корректностных модулей.

Целесообразность и эффективность применения модульной технологии обусловлена следующими соображениями:

– имеет место единая целевая установка: формирование критериально-корректностной компетентности на математическом содержании;

– на основе понятия «корректность» осуществляется внутрипредметная и межпредметная интеграция математических и связанных с ними учебных курсов;

– структурированность материала определила четкое и естественное выделение смысловых блоков-модулей: корректность задачи, модели, правил вывода, вопроса-ответа, программного обеспечения и т.д.;

– межпредметность понятия «корректность» приводит к необходимости и определяет естественную логичность объединения в общем блоке разрозненных предметных знаний, способов деятельности, специфичных для различных учебных предметов или дисциплин, соответствующих понятию «корректность».

Теоретико-методологические основы интегративно-модульной технологии профессионального обучения в высшей школе заложили в своих работах В. П. Беспалько, П. Я Гальперин, Е. О. Иванова, Е. Н. Кабанова-Меллер, И. М. Осмоловская, Г. К. Селевко, П. А. Юцавичене и др. Используя теоретические положения интегративно-модульного обучения, мы сконструировали методику критериально-корректностной математической подготовки студентов вуза. Она представляет собой систему взаимосвязанных компонентов-модулей: локальное модульное структурирование (межпредметные интегрированные модули) на начальном этапе обучения (I, II, III курсы) и дальнейший переход к глобальной блочно-модульной технологии при обучении на спецкурсах (IV курс). Корректность реализует межпредметные и внутрипредметные связи, позволяет объединить элементы учебного материала различных учебных предметов и способы действий на основе использования общего критерия.

Реализация на практике критериально-корректностной математической подготовки бакалавров в виде интегративно-модульной системы основана на ряде принципов: межпредметной, междисциплинарной интеграции, модульности, ориентированности на развитие личности, фундаментализации, гуманизации и гуманитаризации, профессиональной ориентации.

Межпредметно-корректностный модуль (МКМ) – это структурно-содержательная часть методической системы формирования критериально-корректностной компетентности бакалавра, представляющая собой сочетание логически завершенного межпредметного теоретического материала и обобщенных практических действий пользования данным материалом в математической и смежных с ней видах деятельности, а также в профессиональной деятельности и реальной жизни.

Отдельный модуль системы основан на одном из соподчиненных понятий, относящихся к понятию «математическая корректность». Каждый из них представляет самостоятельную дидактическую единицу, и в то же время модули взаимосвязаны, взаимодействуют, обогащают друг друга, образуют целостность, так как соответствуют всей совокупности соподчиненных понятий, относящихся к общему понятию «корректность». Ввиду этих обстоятельств можно заключить, что совокупность модулей образует систему, которая функционирует, развивается. В процессе усвоения каждым студентом критериально-корректностная математическая подготовка вместе с системой межпредметно-корректностных модулей проходит ряд этапов – уровней (I–III), см. раздел 2.3.

Разработка системы межпредметно-корректностных модулей потребовала провести отбор и синтезирование необходимого содержания из разных предметов, дисциплин математического цикла и связанных с ними учебных курсов по проблеме математической корректности, которая основывается на интеграции внутриматематических (внутрипредметных) и межпредметных, междисциплинарных связей. Содержание системы межпредметно-корректностных модулей представляет не механическое соединение нескольких математических предметов или дисциплин, а является продуктом межпредметного, междисциплинарного синтеза. Все содержательно значимые компоненты взаимосвязаны и образуют целостную систему. СМКМ ориентирована на взаимодействие математических курсов между собой и с профессиональными, специальными, призвана унифицировать, интегрировать, расширить базовые знания и выработать у студентов обобщенные метапредметные знания и способы действий, применимые в профессиональной деятельности и реальной жизни.

Система межпредметно-корректностных модулей (СМКМ) – это совокупность дидактических модулей. Ее состав:

1. Понятие математической корректности.

2. Корректность математической задачи.

3. Корректность формулировки математической задачи.

4. Корректность математической модели.

5 Корректность определения понятий.

6. Корректность вопроса и ответа.

7. Корректность доказательства, применения метода, изложения материала, интерпретации результатов наблюдений, вычислительного алгоритма.

8. Корректность постановки задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Понятие о постановке краевых и обратных задач.

Определим трехкомпонентный состав модуля:

1) актуализация;

2) теоретическая часть;

3) практикум.

Приведем состав модуля 1 (модули 2–8 будут описаны в разделе 4.1).

Модуль 1. «*Понятие математической корректности*»

Актуализация основана на том, что анализ объектов на установление корректности дает единый подход к формированию универсальной познавательной и рефлексивной деятельности, универсальных действий. Частота словоупотребления «корректность»: 60 раз на 300 млн слов. В теоретической части этого модуля приводится рисунок 5. В практической части предлагается обсудить номинальную и общеупотребительную корректность, привести примеры из личного опыта, примеры употребления понятия «корректность» в нематематических областях. Например, объяснить, как понимаются следующие выражения: «некорректное поведение», «некорректный вопрос», «некорректное завершение работы Yandex» и т.д.

Знаниевая составляющая: понятие «математическая корректность», его объем, содержание, номинальный и общеупотребительный смысл, логическая характеристика.

Деятельностная составляющая представлена системой универсальных действий на основе понятия «корректность»:

– обоснование существования объекта (отсутствие противоречий);

– обоснование единственности или однозначной определенности;

– анализ объекта на наличие качественных характеристик, откорректированности в соответствии с внутренними и внешними условиями.

Личностнно-мировоззренческая составляющая основана на общекультурном, философском и мировоззренческом аспекте понятия «математическая корректность» и включает личностные качества: креативность, интеллект, критичность мышления.

Система интегрированных межпредметных модулей реализуется при обучении студентов, начиная со II и заканчивая III курсом.

Изучение материала начинается на втором курсе с Модуля 1 в виде обзорной лекции проблемного характера. Далее Модули 2–8 включаются в учебный процесс. Для активизации учебно-познавательной деятельности студенты получают задания по сбору, анализу и систематизации информации по вопросам корректности с использованием материалов учебников, учебно-методических пособий, научной литературы, с помощью средств информационно-коммуникационных технологий. Далее на практических занятиях в процессе обсуждений информация формируется в виде знаний, готовых к использованию. На практических и лабораторных занятия путем создания проблемных ситуаций студенты вовлекаются в исследовательскую деятельность, у них формируются навыки работы с корректными и некорректными математическими объектами, отрабатываются приемы творческой деятельности по «преодолению» некорректности. В период обучения на II–III курсах студенты осваивают понятие «корректность» в общеупотребительном номинальном смысле, знакомятся с корректностью математической задачи в смысле Ж. Адамара, корректностью математической модели, причем устойчивость решения определяется нестрого, иллюстрируется с помощью средств наглядности. Понятие корректности вопросов и ответов усвоено студентами на уровне владения.

Модули 7, 8 включаются в обучение на втором- третьем курсах. На лекционных, практических и лабораторных занятиях студенты осваивают корректность интерпретации результатов эксперимента, результатов наблюдений, корректность постановки задач Коши и Штурма – Лиувилля, обратных задач, корректность вычислительного алгоритма, его устойчивость. Формируются «знания-копии», умения действовать «по образцу». Студенты знают классические примеры исследования вычислительных алгоритмов «на сходимость, на устойчивость», умеют обосновать в простейших случаях однозначную определенность решения, могут обосновать выбор подходящего с точки зрения корректности вычислительного алгоритма.

На четвертом курсе при изучении спецкурсов, на спецсеминарах, при написании курсовых и выпускных квалификационных работ «знания-копии» трансформируются в «знания-умения». Этот момент характеризуется прочными знаниями студентов по применению критерия «корректность» к основным элементам математического содержания, студенты распознают корректные и некорректные объекты, владеют стандартными приемами деятельности по преобразованию некорректности в корректность, знают о составе УУД в простейших случаях. Переход к «знаниям-трансформации» осуществляется при самостоятельном и под руководством преподавателя выполнении исследовательских задач, при написании курсовых, выпускных квалификационных работ, участии в обсуждениях и дискуссиях на учебных занятиях, при прохождении учебно-исследовательских практик. Этот период характеризуется тем, что понятие «корректность» в качестве критерия применяется к все более широкому кругу объектов, учебно-познавательная деятельность при этом носит творческий, поисковый характер.

Модули 1–8 осваиваются в процессе применения знаний, умений и навыков в практической квазипрофессиональной и творческой деятельности при написании курсовых, дипломных работ, прохождении практик. Он связан с накоплением опыта творческой самостоятельной деятельности, в которой сформированные знания, умения и навыки выступают в качестве инструмента. Для студентов, достигших данного этапа развития, характерно свободное творческое владение критериально-корректностной компетентностью, самодостаточность, автономность, способность самостоятельного выбора, освоения и практической оценки новых продуктов, способность поделиться опытом с другими.

Процессу обучения присуща спиралеобразность, содержание модулей 1–8 студенты изучают неоднократно начиная с нестрогих понятий, освоенных на уровне «идеи», и завершая на более высоком уровне знаний с применением знаний смежных дисциплин, а также при изучении спецкурсов «Корректные и некорректные задачи математической физики» и «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий».

В работе выделен существенный компонент внешней среды для данной модели – *педагогические условия* формирования критериально-корректностной компетентности бакалавров. Достижение запланированного результата обеспечивается созданием научно-методических и организационных условий:

– интеграция учебных дисциплин, тесная взаимосвязь и согласованность обучения математическим дисциплинам: математическому анализу, дифференциальным уравнениям, алгебре, геометрии, методам вычислений, математической физике, спецкурсам, спецсеминарам;

– последовательное, поэтапное межпредметное введение элементов математического содержания, основанных на понятии «корректность»: от понятий, усвоенных на интуитивном уровне, к строгим определениям и оперированию ими;

– реализация принципов математической корректности, незавершенности знаний, спиралеобразного развития корректного знания, фундаментальности, научности изложения материала, связи с современным состоянием теории обратных и некорректных задач.

Проведенные в этой главе построения и полученные результаты отражены на рисунке 6.

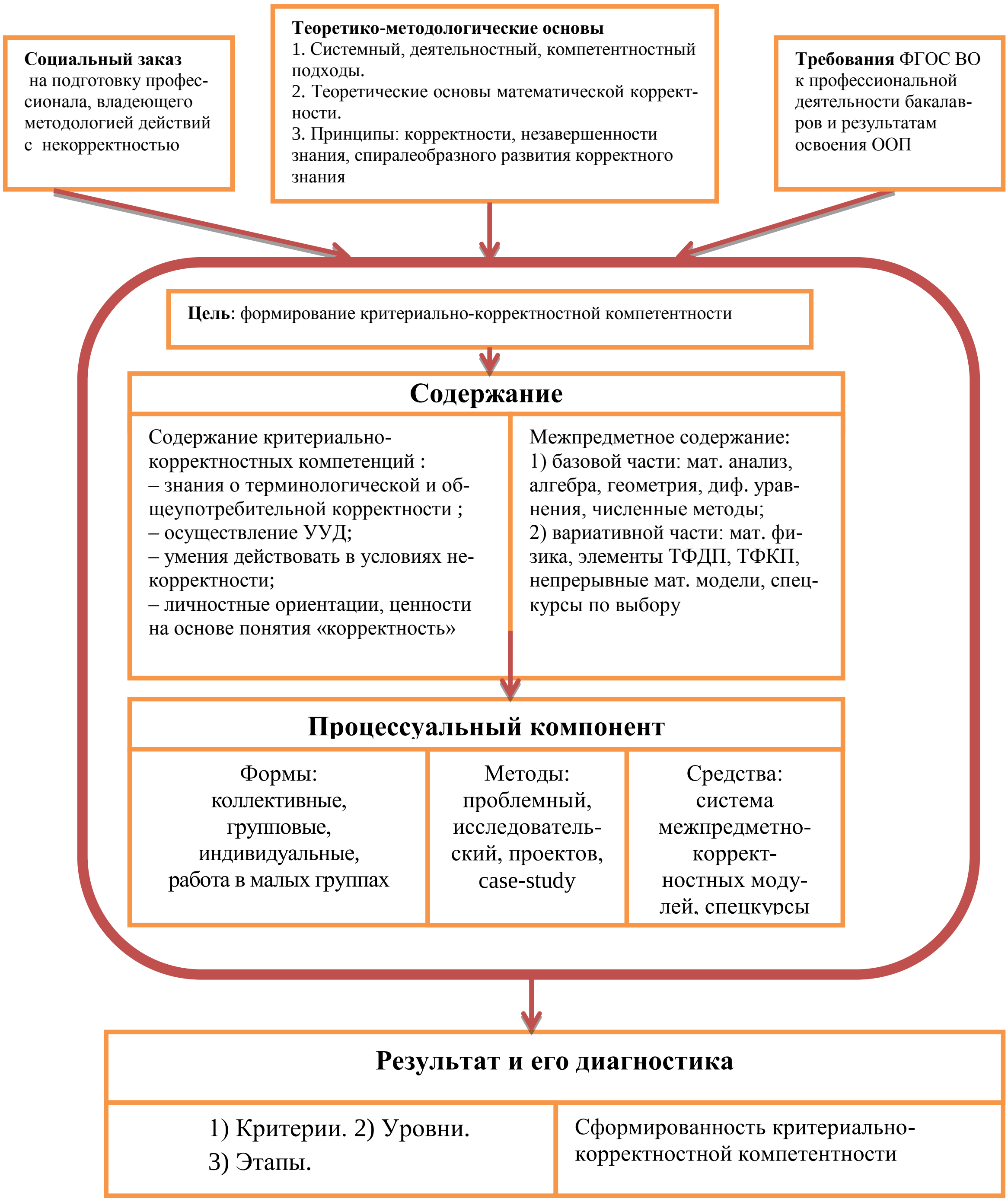


Рисунок 6. Модель методической системы критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений

Основные выводы и результаты главы III

1. Построение методической системы критериально-корректностной математической подготовки бакалавров характеризуется следующими особенностями:

– в качестве системообразующего интегрирующего компонента методической системы выступает понятие «корректность»;

– отбор содержания проводится на основании целей высшего профессионального образования и целей критериально-корректностной математической подготовки;

– процесс обучения строится на основе общих дидактических и специальных принципов: математической корректности, незавершенности знания, спиралеобразного развития корректного знания;

– центральное место в качестве средств обучения отводится системе межпредметно-корректностных модулей, интегрированным спецкурсам «Корректные и некорректные задачи математической физики», «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий», которые построены в соответствии с принципом интеграции.

2. Методическая система критериально-корректностной математической подготовки бакалавров – это сложная, открытая, динамическая система с управлением, включающая цели, содержание, методы и средства, организационные формы и ориентированная на формирование профессиональной с чертами общекультурной критериально-корректностной компетентности бакалавров. При построении методической системы реализованы системный, компетентностный, деятельностный подходы и восполнена недостаточно разработанная сторона межпредметной математической подготовки студентов вуза.

3. Межпредметно-корректностный модуль – это структурно-содержательная часть методической системы формирования критериально-корректностной компетентности бакалавров, представляющая собой сочетание

логически завершенного межпредметного теоретического материала и обобщенных практических действий пользования данным материалом в математической и смежных с ней видах деятельности, а также в профессиональной деятельности и реальной жизни.

4. Система межпредметно-корректностных модулей – это совокупность межпредметно-корректностный модулей, обогащенная внутрипредметными и межпредметными содержанием и связями, как по горизонтали, так и по вертикали, и ориентированная на конечную цель – формирование критериально-корректностной компетентности бакалавров, и играющая роль ее одного из основных средств формирования.

5. Запланированный результат достигается обеспечением научно-методических и организационных условий: интеграция учебных дисциплин; последовательное, поэтапное межпредметное введение элементов математического содержания, основанных на понятии «корректность»; реализация принципов математической корректности, незавершенности знаний, спиралеобразного развития корректного знания.

6. Результативность применения методической системы на основе разработанной концепции может быть оценена по показателям сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров.

Глава IV
ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ КРИТЕРИАЛЬНО-КОРРЕКТНОСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРОВ И ЕЕ ДИАГНОСТИКА

В предыдущих главах мы разработали теоретические и методические основания критериально-корректностной математической подготовки бакалавров, в соответствии с которыми в главе IV будет раскрыто ее осуществление. Вначале (в разделе 4.1) выясним основные направления реализации идеи математической корректности в образовательном процессе и опишем применение системы межпредметно-корректностных модулей; раздел 4.2 отведен межпредметным спецкурсам «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий», «Корректные и некорректные задачи математической физики»; в разделе 4.3 опишем экспериментальную работу.

В соответствии с разработанными в предыдущих главах теоретическими основами критериально-корректностной математической подготовки предложим основные направления реализации идеи корректности в учебном процессе.

1. Использование в содержании образования корректных и некорректных задач.

2. Решение задач, в которых проявляются свойства некорректных задач:

- деятельность по ее решению проходит все этапы, обладает спиралеобразностью;
- системные свойства задачи – взаимодействие компонентов задачи между собой и с внешней средой, изменение корректности при варьировании;
- потенциальная (существующая в будущем) и реальная (существующая в настоящее время) возможность «преодоления некорректности»;
- преодоление некорректности варьированием предметной области (сужение или расширение), переходом к новой предметной области, к обобщению понятий, к корректной системе подзадач, к приближениям.

3. Использование естественно-научных задач, составление их математической модели и исследование ее корректности.

4. Иллюстрация корректности методов и их применения при исследовании и обработке результатов наблюдений.

5. Включение в содержание математических парадоксов, контрпримеров, софизмов, головоломок и их разрешение на основе анализа корректности их формулировки, применения методов, обоснований, рассуждений.

6. Освоение универсальных учебных действий познавательного и оценочного характера, соответствующих понятию «корректность»: обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировка. Освоение приемов «устранения некорректности».

7. Организация диалогов, обсуждений, дискуссий, вопросно-ответной формы коммуникаций в виде последовательности корректных вопросов и ответов.

8. Формирование у студентов интеррогативного типа мышления, основанного на последовательности корректных вопросов и ответов.

9. Решение задач из реальной жизни студентов на основе общеупотребительного смысла понятия «корректность».

10. Формирование на основе требований корректности умений работать с информацией, осуществлять ее поиск, представлять данные в различных видах.

11. Формирование мировоззрения студентов, личностной сферы, ценностного отношения к окружающему миру и к самому себе в этом мире, целостной картины окружающего мира, иллюстрация идеи незавершенности знания, осуществление научного и учебного познания на основе философского смысла понятия «корректность».

Как же практически поступать, встретившись с некорректностью математической задачи? Какие действия надо предпринять, если

– $RgA \neq Rg\overline{A}$ система линейных уравнений несовместна?

– несобственный интеграл расходится?

– функция, имеющая конечный разрыв в точке, не имеет производной в этой точке?

– ограниченная функция, имеющая бесконечное число точек разрыва, не интегрируема в смысле Римана?

– числовой ряд расходится?

– задача не имеет единственного решения?

– условия задачи противоречивы?

– вычислительный алгоритм неустойчив?

В рамках классической математики, классических математического анализа, линейной алгебры на эти поставленные вопросы необходимо давать ответ: «Задача не имеет решения». Но такой ответ не удовлетворит ни математиков-теоретиков, ни практиков, применяющих математические методы. Д.Гильберт на II Международном конгрессе математиков в Париже 8 августа 1900 г. в докладе «Математические проблемы» высказал твердое убеждение о разрешимости любой математической задачи: «В математике не может быть Ignorabimus! (В математике не может быть «мы не будем знать! мы не узнаем!»)». Следуя этой идее Д. Гильберта о разрешимости любой математической задачи, в каждом из приведенных выше вопросов нужно «преодолеть некорректность» и в каком-либо новом смысле получить ответы на поставленные вопросы.

В книге авторов А. Г. Ягола, Ван Янфей, И. Э Степанова, В. Н.Титаренко [176, с. 9] говорится о том, что «в некоторых случаях удается добиться выполнения условий 1 и 2 корректности математической задачи, (т.е. 1)существования и 2)единственности решения) с помощью уточнения понятия решения и введения различных обобщенных решений». Кроме того, там же: «нужно отметить, что устойчивость и неустойчивость решения связаны с тем, как определяется пространство решений». Выбор пространства решений (в том числе и нормы в нем) обычно определяется требованиями прикладной задачи. Это означает, что перейти от некорректной задачи к корректной можно путем обобщения понятий, сужением или расширением множества поиска решения задачи. Подтверждает вышесказанное следующая цитата: «Сужение класса допустимых решений позволит в некоторых случаях перейти к корректной задаче», [120, с.23]. Условная корректность задачи, т.е. корректность по Тихонову, достигается именно сужением множества поиска решения задачи, например, до множества ограниченных или убывающих функций. В то же время, для достижения устойчивости решения требуется, чаще всего, перейти к более общим функциональным пространствам.

Таким образом, дальнейшее развитие математики, теория обратных и некорректных задач для ответа на поставленные выше вопросы предлагают: перейти от классического понятия решения системы алгебраических линейных уравнений к понятию, например, квазирешения; ввести определение несобственного интеграла «в смысле главного значения, (P.V.)»; перейти к обобщенным функциям; ввести и использовать интеграл Лебега; обобщить классическое понятие суммы ряда; доопределить условия задачи и найти все ее решения; сузить или расширить множество поиска решений задачи; перейти в новую предметную область; провести регуляризацию; построить новый устойчивый вычислительный алгоритм.

4.1. Система межпредметно-корректностных модулей

Критериально-корректностная математическая подготовка основана на принципах межпредметной интеграции и целостности. В соответствии с выделенными принципами в процессе критериально-корректностной математической подготовки осуществляется широкая межпредметная интеграция содержания различных дисциплин математического цикла: математического анализа, алгебры, геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории аналитических функций, функционального анализа, численных методов, математической физики, теории вероятностей. Для такого межпредметного объединения была выбрана форма межпредметно-корректностных модулей, в каждом из модулей выделяется общее межпредметное содержание математических дисциплин, соответствующее названию модуля. В разделе 3.3 модульное построение обучения было обосновано.

На основе принципов математической корректности, незавершенности знания, спиралеобразного развития корректного знания при построении обучения ведущая роль отводится тезису: задачи, которые не имеют решения на данном этапе обучения, необходимо будут решены в дальнейшем. Этот тезис распространяется не только на обучение в рамках критериально-корректностных модулей, но и на обучение на спецкурсах.

Целевые установки на период обучения в рамках системы критериально-корректностных модулей: в результате изучения модулей 1–8 студенты должны

– освоить терминологический и общеупотребительный смысл понятия «корректность»;

– освоить свойства понятия «корректность»: абстрактность, общность, относительность;

– овладеть универсальными учебными действиями познавательного и оценочного характера: обоснованием однозначной определенности, варьированием, корректировкой;

– овладеть приемами «преодоления некорректности»: расширение или сужение множества поиска решения, обобщение понятий, запрос дополнительной информации, декомпозиция некорректного объекта на корректные составляющие;

– ознакомиться с методологией теории некорректных задач;

– уметь в стандартных случаях обосновывать корректность и устанавливать некорректность математических объектов, а также ее «преодолевать».

Достижение названных целей соответствует выходу на манипулятивный уровень критериально-корректностной компетентности бакалавров.

В работе принято трехкомпонентное содержание каждого модуля: актуализация, теоретическая часть, практикум [55].

Модуль 1 «Понятие математической корректности» подробно рассмотрен в разделе 3.3.

Модуль 2 «Корректность математической задачи»

В качестве *актуализации* необходимо сообщить студентам, что в жизни человеку постоянно приходится решать задачи, которые не всегда имеют математическую формулировку. Решение практических задач часто происходит в условиях неопределенности, переопределенности или даже противоречивости исходных данных. Но, тем не менее, решение задач в реальной жизни и в любой предметной области (математике, физике, информатике, биологии, химии, и т.д.) подчинено единым закономерностям, проходит одни и те же этапы: от анализа данных и требования задачи к поиску решения, его осуществлению и, далее, к «взгляду назад». Какова методология решения задач, какова структура самой задачи и каковы этапы ее решения?

В теоретической части дается определение корректной и некорректной задач. Корректная – это задача, решение которой существует, единственно, устойчиво; некорректная – если хотя бы одно из трех условий не выполнено. Устойчивость решения означает, что «малым» изменениям данных задачи соответствует «малое» изменение решения. Любая задача состоит из четырех компонентов (данные, требование, решение, базис), рассмотренных над предметной областью, которая играет роль внешней среды по отношению к задаче.

Процесс решения задачи сводится к выполнению четырех этапов: уяснение задачи, поиск решения, осуществление решения, анализ полученного решения.

Знаниевая составляющая этого модуля:

а) межпредменые знания:

– знания о структуре задачи (данные, требование, решение, базис, предметная область);

– знания об этапах решения задачи (осмысление условий и требования задачи, поиск решения, осуществление решения, «взгляд назад»);

– знания о структуре деятельности по решению задачи (мотив, предмет, цель, средства, способы действий, результат);

б) предметные математические знания: понятия, основные утверждения (теоремы, свойства, взаимосвязь между ними);

– знание методов решения ключевых задач;

– знание трех требований корректности задачи.

Деятельностная составляющая этого модуля – универсальные учебные действия познавательного и оценочного характера: обоснование однозначной определенности решения задачи, варьирование, корректировка, – и приемы устранения некорректности. Операционный состав действий может быть развернут и представлен в каждой задаче более детально.

Личностнно-мировоззренческая составляющая связана с тем, что:

а) понятие «корректность» участвует в формировании целостной картины мира, поскольку корректные и некорректные задачи дают полное представление об окружающей реальности;

б) процесс учебного и научного познания безграничен, развивается по спирали и неоднократно проходит через «преодоление некорректности».

При изучении Модуля 2 будем исходить из следующих предпосылок:

– методология теории некорректных задач применяется для работы с любой, как корректной, так и некорректной, задачей, а также с ее отдельными частями. Под методологией понимаются понятийный аппарат теории, концептуальные положения, принципы, основные идеи, методы, средства. Для теории некорректных задач – это три требования корректности приемы преодоления некорректности, специальные приемы и методы;

– три требования корректности проверяются на каждом этапе решения задачи, параллельно выполнению самих этапов.

В практикуме формулируются задания следующего вида,[265].

I этап. Проверка первых двух условий корректности задачи: *существование и единственность решения.* На этом этапе: формируем у школьников устойчивый навык исследования задачи на разрешимость; обосновываем целесообразность выяснения количества решений и формируем навык правильного ответа «Задача не имеет решения»; утверждаем необходимость обоснования, что все решения найдены и других решений задача не имеет; изучаем вопросы потери решений и приобретения посторонних решений.

II этап. *Первичные представления о неустойчивости* даются на примере уравнений с параметром, через изучение бифуркационных процессов в геометрии, о неустойчивых алгоритмах – на основе формул для решения квадратных уравнений с малым первым коэффициентом.

III этап. *Обратные задачи.* Определим обратные задачи так, как это сделано в математической физике, в теории некорректных и обратных задач: известно решение задачи или его фрагменты, необходимо восстановить данные задачи или компоненты решения. Такие обратные задачи можно трактовать как задачи восстановления причины по известному следствию, т.е. требуется «обратить» причинно-следственные связи. Чаще всего задачи такого сорта некорректны, поскольку их решение, вообще говоря, не единственно [46; 58; 120, с. 25; 144; 176] «С общей методологической точки зрения прямыми задачами мы можем назвать задачи, для которых заданы причины, а искомые величины являются следствиями. При таких предпосылках обратными будут задачи, в которых известны следствия, а неизвестными выступают причины», [120].

На I этапе рассматриваются задачи со следующими формулировками.

1. Обосновать, что задача не имеет решения.

2. Выявить противоречие в задаче.

3. Доказать, что задача имеет единственное решение.

4. Подбором найти решение задачи и обосновать, что оно единственно, т.е. других решений нет.

5. Найти решения задачи и обосновать, что все решения найдены и других решений задача не имеет.

6. Исследовать вопрос о потере решений, [211].

7. Исследовать способ решения задачи с точки зрения потери решений и приобретения посторонних решений; рассмотреть проблему равносильности

уравнений, проанализировать переходы в процессе преобразования уравнения к его следствию или к равносильному уравнению, [211].

На II этапе при изучении устойчивости целесообразно рассмотрение бифуркационных процессов. Основная идея таких задач: нахождение бифуркационных значений, т.е. таких значений, при которых свойства решений задачи существенным образом меняются. Изучая эти значения, можно получить полное представление о свойствах решений. Если задача стационарная, не предполагает наличие бифуркационного процесса, то его можно создать, варьируя данные задачи. В своей статье [117] Н. Х. Розов говорит о важности рассмотрения общеобразовательных понятий, одним из которых можно назвать понятие бифуркации: раздвоение, ветвление, нарушение устойчивости решений в процессе изменения параметра. «Наиболее уместно знакомить с этим понятием уже в школьном курсе математики. Примеры бифуркаций в изобилии можно найти и в алгебре, и в геометрии». Решение задач на построение сечений при различных положениях секущей плоскости, решение задач с параметром дают представления о бифуркационных процессах, о неустойчивости.

На III этапе в ходе решения обратных задач студенты овладевают навыками обратимости действий, самоконтролем. При этом формируется навык проверки «обратным ходом»: от конца решения задачи к его началу.

К положительным моментам решения подобных задач относится и еще один факт. В традиционных заданиях школьникам чаще всего приходится выполнять, назовем условно, «прямые действия»: сложение дробей, логарифмирование, упрощение выражений, решение уравнений, дифференцирование или интегрирование (в школе – нахождение первообразной) и т.п. Действия, обратные к указанным: представление дроби в виде суммы слагаемых, потенцирование, проверка дифференцирования и интегрирования, составление уравнений по его корням, – чаще всего не формируются, хотя их положительный обучающий эффект очевиден.

Приведем примеры задач *I этапа,* ранее опубликованные в наших работах [206],[211-213], [265].

Задача 1. Решите уравнение. Сколько корней имеет уравнение? Ответ обоснуйте:

1) $\sin x = \dfrac{\pi}{2}$; 2) $\cos x = \dfrac{\pi}{6}$; 3) $\arccos x = \dfrac{1}{2}$;

4) $\sqrt{-x} = 2$; 5) $-\sqrt{-x} = 2$; 6) $\sqrt{-x} = -2$;

7) $\left(\sqrt{x}\right)^2 = 4$; 8) $\left(\sqrt{-x}\right)^2 = 4$; 9) $\left(-\sqrt{x}\right)^2 = 4$.

Задача 2. Докажите, что уравнение не имеет решения.

1) $\sqrt{5-x} + 2 = 0$; 2) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x^2-3} = 0$; 3) $\dfrac{\sqrt[4]{x^4-16} + \sqrt[6]{x^3-8}}{3x - x^2 - 2} = 0$.

Задача 3. Докажите, что уравнение имеет единственное решение. Найдите его:

1) $x^{\log_2 3} + x^2 = 7$; 2) $x + \dfrac{1}{x} = 2cos^2 \dfrac{\pi x}{2}$; 3) $2\sqrt{3-x} = x$.

Задача 4. Можно ли утверждать, что $x = 5$ – единственное решение уравнения: $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt{5-x} = 2$?

(Ответ: нет, функция в левой части уравнения не является монотонной. Можно заметить, что $x = -4$, $x = -11$ также удовлетворяют уравнению.)

Задача 5. Проанализируйте рассмотренные задачи. Сделайте выводы о разрешимости уравнения $f(x) = A$ в зависимости от значения правой части A и свойств функции f:

1) если $x \in D(f), A \in E(f)$, то уравнение имеет решения;

2) если выполнены требования 1) и кроме того функция f непрерывна и монотонна на D, то решение единственно;

3) если функция f непрерывна, но не является монотонной на D, $A \in E(f)$, то возможно существование более одного решения.

Задачи с противоречивыми данными нельзя давать с формулировкой «Решить задачу». Необходимо сразу отметить, что задача не имеет решения и подробно выяснить, обосновать, почему. Например, задача 6.

Задача 6. Известна задача, которую в качестве тестового задания успешно решали американские школьники много лет, до тех пор, пока «не приехали русские, которые объявили, что эта задача не имеет решения»,В. И. Арнольд, [103]. Гипотенуза прямоугольного треугольника – 10 дюймов, а опущенная на нее высота – 6 дюймов. Найдите площадь этого треугольника.

Задача 6 некорректна, так как содержит противоречивые данные: высота, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, не может быть больше половины гипотенузы. Задача 6 не имеет решения, т.к. треугольник с такими данными не существует.

Задача 7. Докажите, что следующая задача некорректна.

Даны стороны треугольника ABC: $AB = 1, AC = 2, BC = 8.$

Найдите его периметр.

Задача 8. Вершины B, C равнобедренного треугольника $\Delta\ ABC,\ AB = AC,$ лежат на параболе $y = x^2$. Точка A имеет координаты $(0,2)$. Угол A в треугольнике равен $120°$, сторона BC параллельна оси OX. Найдите площадь треугольника ΔABC.

Задача сводится к полной системе подзадач, состоящей из двух математически определенных задач в зависимости от положения ΔABC:

1) сторона BC лежит *выше* вершины A;

2) сторона BC лежит *ниже* вершины A.

Рассматривая эти два случая, получаем ответ: задача имеет два решения

$$S_1 = \frac{4}{9}\sqrt{3}\ \textit{кв.ед.} \quad \text{и} \quad S_2 = \sqrt{3}\ \textit{кв.ед.}$$

Задача 9. Решите уравнения: $2^x = 4$, $2^x = 3$, $2^x = -4$, $2^x = 0$.

Первое уравнение имеет единственное решение: $x = 2$.

Второе уравнение, рассмотренное на множестве рациональных чисел, не имеет решений. Если область поиска решений расширить, перейти к множеству иррациональных чисел, то задача становится разрешимой и ее решение

$x = \log_2 3$. Решение стало возможным благодаря расширению предметной области: переходом к множеству иррациональных чисел.

Третье уравнение не имеет решений на множестве действительных чисел и задача некорректна. На множестве комплексных чисел задача имеет бесконечное число решений $x = Log_2(-4) = \dfrac{\ln 4 + i \cdot (1+2n)\pi}{\ln 2}, n \in Z,$ и единственность достигается выделением однозначных ветвей многозначной аналитической функции $w = Log_2 z$.

Задача 9 служит иллюстрацией того факта, что разрешимость задачи достигается переходом в новую предметную область – в комплексный анализ.

На II этапе решаются следующие задачи, см. [206],[211-213], [265].

Задача 10. Дан куб с ребром a. Исследуйте форму сечений куба плоскостью, перпендикулярной диагонали куба. Сделайте рисунки.

1) Задайте площадь сечения как функцию расстояния от одного из концов диагонали куба до сечения. Укажите бифуркационные значения переменной, при которых форма сечения существенным образом меняется.

2) Найдите максимальную площадь сечения.

Задача 11. В правильной треугольной призме все ребра равны a. Через сторону основания под углом α к плоскости основания проводится сечение. Исследуйте форму сечения в зависимости от α. Укажите бифуркационное значение α. Найдите площадь сечения при: а) $\alpha = 60°$; б) $\alpha = 30°$.

Задача 12. Изучите взаимное расположение кривых $y = x^2$ и $y = 2x + k$ в зависимости от параметра k. При каком значении параметра k кривые

а) не имеют общих точек; б) касаются;

в) имеют две общие точки; г) имеют более двух общих точек?

Задача 13. Решите уравнение, найдите приближенное значение корней:

$$0,0001x^2 - 20x + 10 = 0.$$

Имеем:

$$x_{1,\,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 0{,}001}}{0{,}0001}.$$

Воспользуемся калькулятором для дальнейшей работы. Проведем вычисления с точностью 10^{-4}, вычисляем значение квадратного корня, удерживая цифры до четвертого десятичного знака:

$$x_{1,\,2} = \frac{10 \pm 9{,}9999}{0{,}0001}.$$

Далее получим: $x_1 = 1;\ \ x_2 = 199999$, что неверно. Особенно большая погрешность допущена при вычислении меньшего корня x_1, так как приходится вычитать близкие числа и выполнять деление на малое число, на «ноль». Происходит «накопление ошибок». Этот алгоритм иллюстрирует вычислительную неустойчивость.

Построим новый алгоритм для вычисления корня x_1, умножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное:

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{100 - 0{,}001}}{0{,}0001} = \frac{0{,}001}{0{,}0001 \cdot \left(10 + \sqrt{100 - 0{,}001}\right)} =$$

$$\frac{0{,}001}{0{,}0001 \cdot 19{,}9999} = \frac{1}{1{,}99999} = 0{,}5000.$$

Эта задача о нахождении меньшего корня данного квадратного уравнения с малым первым коэффициентом корректна, но плохо обусловлена. Вычислительную устойчивость можно добиться, подбирая подходящий алгоритм.

Задачи III этапа, см. [206],[211-213], [265].

Задача 14. На доске сохранилась часть записи от решенной задачи.

$$\lim_{x \to \ldots} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - \ldots\ldots} = \lim_{x \to \ldots} \frac{(x-1)^2}{(x+1)(\ldots\ldots)} = 0.$$

1. Восстановите записи. Можно ли это сделать однозначно?

2. Будет ли ответ на первый вопрос утвердительным, если известна некоторая дополнительная информация об утраченных записях, например:

– в знаменателе стоял приведенный многочлен второй степени;

– известно, что число 1 – корень знаменателя?

3. Какие свойства конечных пределов использовались? Сформулируйте их.

Задача 15. На доске частично сохранились записи решения задачи.

$$\left(\ldots.e^{\sin x}\right)' = 2xe^{\sin x} + x^2\ldots$$

Восстановите записи. Можно ли это сделать однозначно? Какую дополнительную информацию необходимо запросить с этой целью? Приведите один из возможных вариантов.

Приведем примеры из практической части модулей 3 и 8.

Модуль 3 «Корректность формулировки математической задачи»

Корректность формулировки задачи означает, что ее данные допускают лишь однозначную трактовку, однозначное понимание. Если данные задачи допускают неоднозначное понимание, то такая формулировка некорректна. Некорректные формулировки задач в математике неоднократно приводили к тому, что для одной и той же задачи допускались «различные правильные решения, в которых получены разные ответы». Это выражение стоит в кавычках, потому что за «правильные решения» принимаются, в действительности, решения не одной, а различных – по числу «правильных решений» – задач. Такие задачи в математике достаточно часто называются парадоксами. Фактически, это задачи с неполными данными. Примеры таких задач с «различными правильными решениями» приведены ниже.

Задача 1 [168, с. 25–26]. **Ошибка Даламбера.** Одновременно подбрасываются две монеты одинакового достоинства. Найдите вероятность того, что обе монеты выпали одинаковыми сторонами.

Решение в модели 1 (монеты неразличимы). Полная система равновозможных событий Ω имеет вид $\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\right\}$, где элементарное событие ω_1 означает, что обе монеты выпали гербами вверх, ω_2 – обе монеты выпали решетками вверх, ω_3 – монеты выпали разными сторонами. Вероятность события $A=\{\omega_1,\omega_2\}$, состоящего в том, что монеты выпали одинаковыми сторонами, равна $P_1(A)=\dfrac{2}{3}$.

Решение в модели 2 (монеты различимы). Пусть $\Omega=\{\text{ГГ},\text{ГР},\text{РГ},\text{РР}\}$ - полная система равновозможных событий, где знак Г означает, что выпал герб, а знак Р – решетка. Для события $A=\{\text{ГГ},\text{РР}\}$ получим вероятность

$$P_2(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Обсуждение. Получили две различные вероятности одного и того же события. Практика показывает, что экспериментальные частоты наступления события *A* группируется вокруг числа 0,5. Это означает, что на практике реализуется модель 2, т.е. монеты одинакового достоинства ведут себя как различимые.

Из формулировки задачи не следует, какую из моделей следует выбрать. Для того чтобы сразу использовать модель 2, реализующуюся на практике, необходимо в формулировку задачи добавить, например, следующие слова: «Монеты одинакового достоинства ведут себя в данных испытаниях как *различимые*». С таким добавлением формулировка задачи становится корректной, в отличие от первоначальной формулировки – некорректной, допускающей рассмотрение обеих моделей.

Рассмотренная задача известна в истории математики как «ошибка Даламбера». Даламбер считал, что вероятность описанного события равна 2/3, т.е. рассматривал монеты одинакового достоинства как неразличимые.

Очевидный факт, что все монеты одинакового достоинства, тем не менее обладают различиями, т.е. различимы, оказывается неверным для некоторых типов частиц. Так, Бозе и Эйнштейн показали, что некоторые типы частиц ведут себя как неразличимые. Вопрос о различимости элементарных частиц носит принципиальный характер для задач статистической физики. В зависимости от того, как образуется полная группа равновероятных событий, приходят к той или иной физической статистике: Больцмана, Бозе – Эйнштейна, Ферми – Дирака [39, с. 29–31].

В теории вероятностей достаточно часто встречаются некорректные формулировки задач, так как условия проведения испытаний не всегда полностью описаны в данных задачи. Например, в задачах не указывается, возвращается ли шар (экзаменационный билет, выбираемая для проверки деталь и т.д.) обратно. Другие примеры: ограничен или нет выбор одного или нескольких предметов из некоторого объема, выбор предметов возможен с повторениями или без и т.д. Это касается чаще всего школьных учебников по теории вероятностей, методических пособий, изданных внутри вуза.

Весь состав системы универсальных действий, адекватных понятию «корректность», при решении задачи 1 актуализируется: попытка обоснования единственности решения завершается констатацией факта о наличии двух различных решений; варьирование приводит к выяснению вопроса о том, различимы монеты или нет; корректировка осуществляется добавлением необходимой информации в текст задачи. Затем вновь весь состав деятельности реализуется теперь уже в выбранной модели с откорректированным условием.

Задача 2 (Парадокс Бертрана) [39, с. 33–35]. Наудачу берется хорда в круге. Чему равна вероятность того, что ее длина превосходит длину стороны вписанного равностороннего треугольника?

В пособии приведены три различных решения. Получено, что вероятность $P(A)$ наступления события A, описанного в задаче, может быть равна $P_1(A)=\frac{1}{2}$, $P_2(A)=\frac{1}{3}, P_3(A)=\frac{1}{4}$. Автор поясняет: «Происходит это из-за того, что в условии задачи не определено понятие проведения хорды наудачу».

Вопрос о корректной формулировке математической задачи тесно связан с вопросом корректности тестовых заданий. В тестологии, и отечественной [3], и зарубежной [272], особенно в последнее время, определилось и прочно вошло в теорию и практику одно из требований к тестовым заданиям – его корректность.

«Корректным считается задание, содержащее один предмет измерения и один правильный ответ», [3]. Или в англоязычном варианте: «Every problem we give can be solved strictly by using the information within the problem, no more and no less. No hidden agenda», [272]. В отличие от некорректных заданий, имеющих более одного предмета измерения или несколько вариантов правильных ответов. В работе [3] отмечается, что «Параметр «логическая корректность тестового задания» относится к его формулировке». И в том случае, если формулировка задания двусмысленна, неоднозначна, тестовое задание считается некорректным. В нашей терминологии это непосредственно связано с корректностью формулировки математической задачи.

Задача 3, [272]. Используя нижеприведенную таблицу, ответьте на вопрос.

Неизвестное	3	4	5	6	…	n
Результат	10	13	16	19	…	?

Какую из перечисленных ниже формул нужно вписать в таблицу, чтобы получился верный ответ?

A. $n+3$

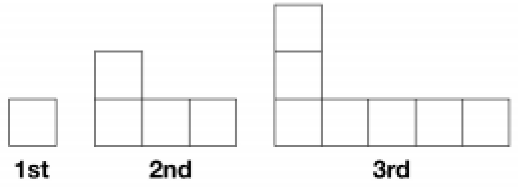
B. $n+7$

C. $3(n-1)+4$

D. $3n+1$

Верными являются два ответа: C и D. Формулировка задания 3 не корректна, ее следует изменить: укажите ВСЕ правильные ответы, - и предоставить возможность для оформления двух правильных ответов в бланке ответов.

Задача 4, [272]. Рассмотрите рисунок ниже. Каждый из шаблонов состоит из определенного количества квадратиков:



Сколько квадратиков будет расположено в шестом шаблоне?

Это задание 4 некорректно, т.к. нельзя указать, каким образом будет создан 6-ой шаблон и в качестве правильного ответа можно привести несколько вариантов.

Вопрос о включении в тест некорректных тестовых заданий является дискуссионным, но, на наш взгляд, если в тест включены некорректные тестовые задания, то должна быть предоставлена возможность развернутого ответа и экспертная проверка заданий такого сорта. Некорректно сфомулированные тестовые задания недопустимы.

Межпредметное содержание модуля 3 – это тестовые задания по математике; деятельностная составляющая модуля – это УУД: действия по обоснованию однозначной определенности, варьирование, корректировка. Личностная составляющая связана с формированием личностных качеств бакалавров, таких как, критичность, креативность, чувствительность к деталям, открытость новому.

Модуль 8 «Корректность математической модели. Корректность постановки задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Понятие о постановке краевых и обратных задач».

При отборе содержания этого модуля мы использовали ряд источников: [16, 19, 143, 46, 176].

Задача 1. Исследуйте на корректность задачу Коши:

1. $\begin{cases} \left(2y - x^2\right)dx = 2xdy, \\ y(2) = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy' + y = 3, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \left(2y - x^2\right)dx = 2xdy, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} xy' + y = 3, \\ y(2) = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \left(2y - x^2\right)dx = 2xdy, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} xy' + y = 3, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Сколько решений имеет задача? В случае некорректности, поменяйте начальные условия так, чтобы задача Коши стала корректной.

Задача 2. Рассмотрите и сравните две задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений: линейную краевую задачу и задачу Коши; выясните причину возникновения вычислительной неустойчивости задачи Коши.

Краевая задача:

$$y'' - p^2 y = 0,\ 0 < x < 1,$$

$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1,\ p - \text{const}.$$

Решение $y(x)$ краевой задачи имеет вид

$$y(x) = \frac{e^{-px} - e^{-p(2-x)}}{1 - e^{-2p}} y_0 + \frac{e^{-p(1-x)} - e^{-p(1+x)}}{1 - e^{-2p}} y_1 .$$

На отрезке $0 \le x \le 1$ коэффициенты при y_0, y_1 ограничены при $p > 0$, поэтому «малые» изменения данных y_0, y_1 вызовут «малые» изменения решения $y(x)$.

Задача Коши:

$$y'' - p^2 y = 0,\ 0 < x < 1,$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$$

Решение $y(x)$ задачи Коши имеет вид

$$y(x) = \frac{py_0 + y'_0}{2p} e^{px} + \frac{py_0 - y'_0}{2p} e^{-px}.$$

Если y'_0 имеет приращение ε, то в точке $x = 1$ решение $y(x)$ имеет приращение

$$\Delta y(1) = \frac{\varepsilon}{2p} e^{p} - \frac{\varepsilon}{2p} e^{-p} .$$

При возрастании р эта величина может становиться как угодно большой, и, следовательно, число обусловленности будет значительно превосходить единицу. Если р=100, то число обусловленности имеет порядок 10^{41}.

Система критериально-корректностных модулей является средством перехода от знаний-знакомств к знаниям-копиям, которые характеризуются следующими чертами: обучающиеся имеют

1) знания терминологической корректности математической задачи, логических рассуждений, определении понятий, программного обеспечения, вопроса и ответа;

2) представления об общеупотребительной корректности: корректности доказательства, метода, изложения материала, формулировки задачи;

3) знание модельных корректных и некорректных задач, владение требованиями корректности к диалоговой устной и письменной речи, методам, доказательствам, формулировкам задач.

В деятельностном плане освоение системы критериально-корректностных модулей приводит к овладению в стандартных привычных случаях развернутыми действиями по образцу при установлении трех требований корректности, к воспроизведению решений некорректных задач, освоению примеров неустойчивого вычислительного алгоритма, к умениям обосновать корректность доказательства, изложения материала, вопроса и ответа.

В психологическом плане освоение системы критериально-корректностных модулей обеспечивает переход от негативных эмоций предшествующего уровня к положительным: интересу, удовлетворенности первыми успехами, уверенности, учебно-познавательной мотивации.

Таким образом, освоение системы критериально-корректностных модулей обеспечивает манипулятивный уровень сформированности критериально-корректностной компетентности.

4.2. Построение спецкурсов «Корректность определения и регулярное обобщение математических понятий» и «Корректные и некорректные задачи математической физики»

Продолжая построение критериально-корректностной математической подготовки, мы переходим к конструированию специальных курсов, [19, 218, 229, 230, 241, 260, 262, 263, 266, 267, 268]. В соответствии с целями и задачами проводимого исследования обучение на спецкурсах, выполнение обучающих и контролирующих мероприятий соответствует прагматическому, оптимальному, автономному уровням критериально-корректностной математической подготовки. Организация учебного процесса, отбор содержания основываются на системе принципов, составляющих основу концепции и сформулированных ранее в разделе 2.2, ведущая роль принадлежит специальным принципам - принципам математической корректности, незавершенности знания, спиралеобразного развития корректного знания.

Оба спецкурса содержат по 11 лекций, каждая из которых имеет единообразный состав:

– основные понятия и теоремы;

– контрольные вопросы и задания;

– примеры решения задач;

– задачи и упражнения для самостоятельной работы.

4.2.1. Спецкурс «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий»

В математике достаточно часто возникает ситуация, когда практические задачи не могут быть решены из-за ограниченности объема понятий при их классическом определении. Это относится к отысканию решения несовместных систем, дифференцированию разрывных функций, интегрированию неограниченной функции и по неограниченному промежутку, суммированию расходящихся рядов и т.п. Подобные ситуации приводят к мысли, что для решения прикладных задач такого сорта следовало бы иметь более общие математические понятия, чем это имеет место в традиционной классической математике, составляющей основу вузовских курсов. О таких обобщениях классических математических понятий пойдет речь в этом спецкурсе.

В конце XIX в. и XX в. сформировались различные подходы для разрешения создавшихся противоречий между потребностью решения практических задач и отсутствующим математическим аппаратом для их решения. Это задачи квантовой механики, теории распознавания образов, приближенных методов, теории обратных и некорректных задач и т.д. Обобщение математического понятия, которое позволяет решать более широкий круг задач и содержит в себе, как частный случай, ранее известное понятие, было названо регулярным [26, 131, 156]. В терминологии, принятой в нашей работе, такое обобщение называется корректным. Корректно обобщенные понятия с более широким объемом, чем классические, позволяют решать те задачи, которые ранее считались неразрешимыми, т.е. были некорректными.

В рамках этого спецкурса должны быть раскрыты:

– содержание корректного обобщения классических понятий решения систем линейных уравнений, предельных переходов, суммирования рядов, производной, интеграла;

– мировоззренческий потенциал осуществленных обобщений;

– возможности применения понятия «корректность» к анализу философских, личностно-значимых проблем, месту человека в историческом процессе, к формированию способности корректно выражать и аргументированно обосновывать имеющиеся знания;

– назначение математики в качестве универсального языка науки, средства моделирования явлений и процессов; построение корректных и некорректных математических моделей для решения практических проблем;

– содержание критериев качества, одним из которых является корректность, в математических исследованиях.

При отборе содержания и построении учебного процесса мы руководствовались принципами математической корректности, незавершенности знания, спиралеобразного развития корректного знания, т.е. проводим идею о возможности корректного обобщения понятий, иллюстрируем эту идею примерами, даем ссылки на учебную и научную литературу и предлагаем осуществить ее поиск и отбор (работа с информацией) для выполнения самостоятельной работы, обращаемся к имеющимся знаниям студентов.

Внутри каждого из фрагментов спецкурса сохранена принятая в спецкурсе четырехкомпонентная структура:

1) основные понятия и теоремы;

2) контрольные вопросы и задания;

3) примеры решения задач;

4) задания и упражнения для самостоятельной работы.

Фрагмент 1. Решение несовместных систем линейных уравнений. Квазирешение.

В этом фрагменте мы выполним корректное обобщение классического понятия решения системы линейных уравнений – введем квазирешение, покажем способ его нахождения. Кроме того, проиллюстрируем дальнейшие возможные обобщения классического понятия решения.

Основные понятия и теоремы

Дана система m линейных уравнений с n неизвестными, причем число уравнений больше числа неизвестных, т.е. $m > n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

или в векторной форме:

$$Ax = B. \tag{2}$$

Вообще говоря, такая система линейных уравнений не имеет решений, т.е. не существует ни одного такого набора $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при подстановке которого в (1) или (2) получаются верные числовые равенства. Задача не имеет решения, следовательно, задача некорректна.

Для того чтобы устранить затруднения, связанные с отсутствием решения системы линейных уравнений, вводится понятие квазирешения. С этой целью ставится задача отыскания таких значений неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, при которых левые части уравнений системы (1) были бы «возможно близки» к соответствующим правым частям. В качестве «меры близости» берется квадратичное отклонение левых частей уравнений от их правой части, т.е. величина

$$\sum_{k=1}^{m} \left(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{1k}x_n - b_k \right)^2 \tag{3}$$

должна принимать минимальное значение.

Набор чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, минимизирующий величину (3), называется *квазирешением* системы (1). Если система (1) имеет единственное точное решение, то оно совпадает с квазирешением, так как величина (3) в этом случае равна нулю.

Таким образом, переход от поиска точных решений системы линейных уравнений к поиску приближенных решений позволяет «снять некорректность», при этом понятие точного решения системы линейных уравнений корректно обобщается до понятия квазирешения. Дальнейшие обобщения приводят к регуляризированному и нормальному решениям системы линейных уравнений, см. [58, 131, 142], [176]. Возможен и ряд других обобщений.

Нахождение квазирешений осуществляется различными способами, рассмотрим один из них. Чтобы найти квазирешение, нужно систему (2) умножить слева на матрицу, транспонированную к матрице A, т.е. на A^T , и решить получившуюся систему, [131].

Контрольные вопросы и задания

1. Какая система линейных уравнений называется совместной; несовместной; неопределенной; противоречивой?

2. Какие существуют методы решения систем линейных уравнений?

3. Дайте определение квазирешения системы линейных уравнений.

4. Перечислите, какие Вы знаете обобщения понятия решения системы линейных уравнений.

***Примеры решения задач*, см. [267]**

Пример 1. Необходимо убедиться, что система линейных уравнений несовместна, и найти ее квазирешение:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ \quad x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Выпишем матрицы A и A^T :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножим данную систему слева на матрицу A^T :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Получим:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ или } \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 3x_2 = 2 \end{cases},$$

откуда получаем квазирешение: $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Пример 2. Необходимо убедиться, что система линейных уравнений несовместна, и найти ее квазирешение:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + y = 3 \\ x + 4y = 4 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = \dfrac{111}{150} \\ y = \dfrac{131}{150} \end{cases}$

Пример 3. Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки определенное количество питательных веществ B_1, B_2, B_3. Используется два вида продуктов. Содержание питательных веществ в единице продукта, суточная норма их потребления и цена единицы продукта указаны в таблице.

Таблица

Питательные вещества	Суточная норма	Содержание питательных веществ в единице продукта	
		n_1	n_2
B_1	14	2	1
B_2	10	1	2
	20	2	4

B_3			
Цена единицы продукта		1	2

Найдите вариант диеты стоимостью N денежных единиц, которая содержит в точности суточную норму питательных веществ.

Решение. Обозначим через x_1, x_2 число единиц продуктов. Условия задачи приводят к системе уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 14, \\ x_1 + 2x_2 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 = 20, \\ x_1 + 2x_2 = N. \end{cases}$$

Задача имеет единственное решение лишь для стоимости диеты $N = 10$. При этом имеем вариант диеты: $x_1 = 6$, $x_2 = 2$. Любое, сколь угодно малое изменение стоимости диеты N приводит к противоречивости системы уравнений и отсутствию решений.

Рассмотрим случай несовместности системы, например, $N = 11$. Для несовместных систем определяют так называемое квазирешение (псевдорешение [143]) которое задается как пара чисел (x_1, x_2), минимизирующих невязку:

$$\left((2x_1 + x_2 - 14)^2 + (x_1 + 2x_2 - 10)^2 + (2x_1 + 4x_2 - 20)^2 + (x_1 + 2x_2 - 11)^2\right).$$

Получим квазирешение: $x_1 = \dfrac{107}{18} \approx 5{,}94, \quad x_2 = \dfrac{38}{18} \approx 2{,}11.$

Проведем экономический анализ полученного результата. Для этого подставим квазирешение в систему. При данной диете происходит превышение суточного потребления веществ B_2, B_3 и затраты на питание будут менее 11 денежных единиц.

***Задания и упражнения для самостоятельной работы,* [267]**

1. Найдите точное решение системы линейных уравнений и квазирешение. Убедитесь, что они совпадают:

$$\begin{cases} x+y=3; \\ 2x-y=0; \\ -x+2y=3. \end{cases}$$

Ответ: (1, 2).

2. Убедитесь, что система линейных уравнений несовместна, и найдите ее квазирешение:

$$\begin{cases} 2x+y=-1, \\ -3x+y=-2, \\ -x+y=1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5},\ \frac{3}{2}\right)$.

3. Изучите понятие нормального решения системы линейных уравнений [142, с. 112] и найдите нормальное решение системы:

$$\begin{cases} x+y-z=1, \\ x-2y=0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{3}{7},\ \frac{3}{14},\ -\frac{5}{14}\right)$.

4. Найдите регуляризированное решение несовместной системы линейных уравнений [142]:

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ x+2y=2. \end{cases}$$

Фрагмент 2. Обобщение понятия производной

Как отмечается в работе Я. Б. Зельдовича [52, с. 562], «дельта-функция Дирака – это типичное дитя XX века», так как в более ранние времена свойственно было облекать многие суждения – и правильные, и ложные, и не совсем правильные – в форму «невозможностей», среди которых имеет место и такое: «невозможно найти производную разрывной функции». В настоящее время найдено много конструктивных решений для того, что казалось невозможным ранее. Так, в частности, дельта-функция решает вопрос о производной функции в точке разрыва, имеющего вид конечного скачка.

Обобщенная функция является обобщением классического понятия функции. Как отмечено в исследовании Корнилова В.С. [67] «Это обобщение дает возможность выразить в математической форме такие идеализированные понятия, как, например, плотность материальной точки, плотность точечного заряда, интенсивность мгновенного источника». Введение обобщенных функций расширяет класс функций, в котором выполняются основные операции математического анализа: предельный переход, дифференцирование, интегрирование.

Основные понятия и теоремы, **[267].**

Пусть дана фундаментальная последовательность функций $\left\{ f_{\gamma}\left(x\right)\right\}$, каждая из которых определена и непрерывна на множестве действительных чисел *R*. Тогда возможны два варианта: последовательность $\left\{ f_{\gamma}\left(x\right)\right\}$ имеет предел $f\left(x\right)$ в смысле поточечной сходимости

$$\lim_{\gamma\to 0} f_{\gamma}\left(x\right) = f\left(x\right),$$

и последовательность $\left\{ f_{\gamma}\left(x\right)\right\}$ не имеет предела в этом смысле. Тогда в этом втором случае говорят об обобщенном пределе, который представляет собой обобщенную функцию [52, 58].

Определим теперь понятие обобщенной производной непрерывной, но не обязательно дифференцируемой, функции $f\left(x\right)$. Пусть последовательность функций $\left\{ f_{\gamma}\left(x\right)\right\}$, каждая из которых определена и непрерывна на множестве действительных чисел *R,* имеет предел $f\left(x\right)$:

$$\lim_{\gamma\to 0} f_{\gamma}\left(x\right) = f\left(x\right).$$

Естественно предположить, что в некотором смысле должно выполняться равенство

$$\lim_{\gamma \to 0} f'_{\gamma}(x) = f'(x).$$

[44, 50], которое и определяет обобщенную производную.

Последовательность функций $\{f_{\gamma}(x)\}$ называется δ-образной последовательностью, если

$$\lim_{\gamma \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\gamma}(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$$

для каждой непрерывной в R функции $\varphi(x)$. Принята сокращенная запись:

$$\lim_{\gamma \to 0} f_{\gamma}(x) = \delta(x),$$

$\delta(x)$ не является функцией в классическом понимании, это обобщенная функция, ее называют дельта-функцией.

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что последовательность функций

$$f_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, |x| < \varepsilon, \\ 0, |x| > \varepsilon \end{cases}$$

является δ-образной последовательностью, т.е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_{\varepsilon}(x) = \delta(x)$.

2. Докажите, что операция обобщенного дифференцирования линейна.

3. Докажите, что $\delta(x) = \lim\limits_{\gamma \to 0} \dfrac{1}{\gamma} \sin \dfrac{x}{\gamma}$.

4. Докажите, что $\lim\limits_{\gamma \to 0} \dfrac{1}{2} \dfrac{\gamma^2}{\left(x^2 + \gamma^2\right)^{3/2}} = \delta(x)$.

5. Докажите, что $\delta(tx) = t\delta(x), t > 0$.

6. Докажите, что $a(x)\delta'(x)=a(0)\delta'(x)-a'(0)\delta(x)$ для любой бесконечно дифференцируемой в R функции $a(x)$.

***Примеры решения задач,* [267].**

Пример 1. Найдите значение $a(x)\delta(x)$ для любой бесконечно дифференцируемой в R функции $a(x)$, у которой $a'(0)=0$.

Решение. При решении задания 1 мы убедились, что последовательность функций $f_\gamma(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\gamma},|x|<\gamma,\\ 0,|x|>\gamma\end{cases}$ является δ-образной последовательностью. Поэтому наша задача равносильна доказательству равенства

$$\lim_{\gamma\to 0} f_\gamma(x)a(x)=a(0)\lim_{\gamma\to 0} f_\gamma(x),$$

которое, в свою очередь, равносильно следующему:

$$\lim_{\gamma\to 0} f_\gamma(x)\big(a(x)-a(0)\big)=0.$$

По формуле Тейлора имеем:

$$a(x)=a(0)+\frac{1}{2}a''(c)x^2,$$

где $|c|<\gamma$.

Так как $a''(c)$ ограничено константой, не зависящей от γ, а $x^2<\gamma^2$, то

$$\lim_{\gamma\to 0} f_\gamma(x)\big(a(x)-a(0)\big)=0.$$

Таким образом,

$$a(x)\delta(x)=a(0)\delta(x).$$

Пример 2. Найти обобщенную производную функции Хевисайда

$$\theta(x)=\begin{cases}1,\ x\ge 0,\\ 0,\ x<0.\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим последовательность функций

$$f_\gamma(x)=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+\gamma^2}}+\frac{1}{2}.$$

Справедливо: $\lim\limits_{\gamma\to 0} f_\gamma(x)=\theta(x)$. Тогда

$$\theta'(x)=\lim_{\gamma\to 0} f'_\gamma\ (x)=\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\left(x^2+\gamma^2\right)^{3/2}}=\delta(x).$$

Таким образом, $\theta'(x)=\delta(x)$.

Пример 3. Найдите обобщенную производную функции

$$f(x)=\begin{cases} x,\ x\in[0,1],\\ 0,\ x\notin[0,1].\end{cases}$$

Решение. Преобразуем функцию к виду $f(x)=x\big(\theta(x)-\theta(x-1)\big)$. По правилу дифференцирования произведения имеем:

$$f'(x)=x'\big(\theta(x)-\theta(x-1)\big)+x\big(\theta'(x)-\theta'(x-1)\big)=$$
$$=\big(\theta(x)-\theta(x-1)\big)+x\big(\delta(x)-\delta(x-1)\big).$$

Далее получим

$$x\delta(x)=0 \text{ и } x\delta(x-1)=(x-1)\delta(x-1)+\delta(x-1)=\delta(x-1).$$

Следовательно, $f'(x)=\theta(x)-\theta(x-1)-\delta(x-1)$,

$$f'(x)=-\delta(x-1)+\begin{cases}1,\ x\in(0,1),\\ 0,\ x\notin[0,1].\end{cases}$$

Пример 4. Найдите обобщенную производную функции

$$f(x)=\begin{cases}\sin x,\ x<0,\\ 4+x^2,\ x>0.\end{cases}$$

Решение. Преобразуем функцию к виду $f(x)=\sin x\theta(-x)+\left(x^2+4\right)\theta(x)$.

Применяя правила дифференцирования , получим:

$$f^{/}(x)=\cos x\theta(-x)+2x\theta(x)-\sin x\delta(-x)+$$
$$+\left(x^2+4\right)\delta(x)=\cos x\theta(-x)+2x\theta(x)+4\delta(x),$$

$$f'(x)=4\delta(x)+\begin{cases}\cos x, x<0,\\ 2x, x>0.\end{cases}$$

***Задания и упражнения для самостоятельной работы,* [267].**

1. Найдите обобщенную производную функции $f(x)=\begin{cases}x^3, x\le 0,\\ e^x+1, x>0.\end{cases}$

2. Проверьте, что функция $u(x)=-\delta(x)+c\theta(x)+c_1$ при любых постоянных c, c_1 удовлетворяет уравнению $xu'(x)=\delta(x)$. Указание: воспользуйтесь тем, что

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{x^2+\gamma^2}=\delta(x) \text{ и } \lim_{\gamma\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{x^2\gamma}{\left(x^2+\gamma^2\right)^2}=\delta(x).$$

3. Воспользовавшись значением предела $\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{x^2+\gamma^2}=\delta(x)$, найдите значение интеграла $\int_{-\infty}^{x}\delta(x)\,dx$.

4. Найдите обобщенную производную функции $f(x)=\begin{cases}x, x\in[0,1],\\ (x+1)^2, x\notin[0,1].\end{cases}$

Фрагмент 3. Регулярные обобщения несобственных интегралов 1-го и 2-го рода

***Основные понятия,* [267]**

Несобственный интеграл первого рода $\int_a^\infty f(x)dx$ определяется соотношением

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{\gamma\to 0+}\int_a^{1/\gamma} f(x)\,dx.$$

Несобственный интеграл второго рода $\int_a^b f(x)\,dx$ для функции, не ограниченной на правом конце $x=b$, определен при помощи предельного перехода:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma\to 0+}\int_a^{b-\gamma} f(x)\,dx\,.$$

Стоит обратить внимание, что для случая функции, интегрируемой на $[a,b]$ в традиционном смысле (в смысле Римана), значения определенного интеграла и несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ совпадают, т.е. переход от определенного интеграла к несобственному обладает свойством регулярности [136, т. 2, с. 395].

Существуют регулярные методы [136, т. 2, с. 595], позволяющие в некоторых случаях расходящимся интегралам придать «обобщенные значения».

В случае расходящегося несобственного интеграла первого рода можно предложить регулярное обобщение по правилу:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\gamma\to 0+}\int_a^{\infty} e^{-\gamma x} f(x)dx. \tag{1}$$

Для функции f не ограниченной в окрестности точки $x=b$, в случае расходящегося несобственного интеграла второго рода возможно регулярное обобщение по правилу:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma\to 0+}\int_a^b (x-a)^{\gamma} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Регулярным обобщением несобственных интегралов 1-го и 2-го рода является их определение в смысле «главного значения», соответственно:

$$(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c} f(x)\,dx, \tag{3}$$

$$(\text{v.p.})\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma\to 0+}\left(\int_a^{\tilde{n}-\gamma} f(x)\,dx + \int\limits_{\tilde{n}+\gamma}^{b} f(x)\,dx\right), \tag{4}$$

См. [156, т. 2, с. 596].

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определения несобственного интеграла 1-го рода и 2-го рода.

2. Докажите, что для функции, заданной в соответствующем промежутке, значения несобственных интегралов 1-го и 2-го рода и интегралов в смысле главного значения (v.p.), совпадают.

3. Докажите, что для функции, интегрируемой на $[a,b]$ в смысле Римана, классически определенный интеграл (в смысле Римана) $\int_a^b f(x)\,dx$ и его обобщение в смысле (2) совпадают.

4. Докажите, что для функции, интегрируемой и неотрицательной на $[a,\infty)$, значение несобственного интеграла 1-го рода $\int_a^\infty f(x)dx$ и его обобщение в смысле (1) совпадают.

***Примеры решения задач*, [267].**

Пример 1. Покажите, что в метрике $C[0,\infty)$ задача вычисления несобственного интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$ некорректна (неустойчива).

Решение. Рассмотрим последовательность функций

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}\alpha, & 0<x<1/\alpha,\\ 0, & 1/\alpha<x.\end{cases}$$

В метрике $C[0,\infty)$ выполнено: $\rho\big(f_\alpha(x),0\big)=\sup\limits_x\left|f_\alpha(x)\right|=\alpha$. Вместе с тем

$$\int_0^\infty f_\alpha(x)\,dx=\int\limits_0^{1/\alpha}\alpha dx=1,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^\infty f_\alpha(x)\,dx=1.$

Итак, рассматриваемая задача не обладает свойством устойчивости.

Пример 2. Покажите, что регуляризирующий оператор для задачи вычисления несобственного интеграла 1-го рода $\int_a^\infty f(x)\,dx$ может быть выбран в виде

$$R(f,\alpha)=\int_a^{1/\alpha} f(x)dx+\int_{1/\alpha}^{\infty} e^{-\alpha x} f(x),$$

если брать $\alpha=\dfrac{\delta}{\eta(\delta)}$, где $\eta(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.

Решение. Пусть вместо точных значений функции $f(x)$ мы имеем приближенные значения $f_\delta(x)=f(x)+g(x)$, где $|g(x)|\le\delta$ для каждого x. Тогда

$$R(f_\delta,\alpha)=\int_a^{1/\alpha} f_\delta(x)dx+\int_{1/\alpha}^{\infty} e^{-\alpha x} f_\delta(x)dx=$$
$$=\int_a^{1/\alpha} f(x)dx+\int_{1/\alpha}^{\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx+\int_a^{1/\alpha} g(x)dx+\int_{1/\alpha}^{\infty} e^{-\alpha x} g(x)dx=$$
$$=\int_a^{\infty} f(x)dx+\int_{1/\alpha}^{\infty}\left(e^{-\alpha x}-1\right) f(x)dx+\int_a^{1/\alpha} g(x)dx+\int_{1/\alpha}^{\infty} e^{-\alpha x} g(x)dx.$$

При $\alpha\to 0$ второй интеграл стремится к нулю. Оценим третий и четвертый интегралы:

$$\left|\int_a^{1/\alpha} g(x)dx\right|\le\left|\int_a^{1/\alpha}\delta dx\right|=\delta\left(\frac{1}{\alpha}-a\right)\le\frac{\delta}{a};$$
$$\left|\int_{1/\alpha}^{\infty} e^{-\alpha x} g(x)dx\right|\le\left|\int_{1/\alpha}^{\infty} e^{-\alpha x}\delta dx\right|=\frac{\delta}{e\alpha}.$$

Если параметр регуляризации α выбирать из условий: $\alpha=\dfrac{\delta}{\eta(\delta)}$, где $\eta(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$, то

$$R\big(u_\delta,\alpha(\delta)\big)\to\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

при $\alpha=\dfrac{\delta}{\eta(\delta)}$.

Пример 3. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^{\infty}\sin x dx$.

Решение. По определению несобственного интеграла

$$\int_0^{\infty}\sin x dx=\lim_{\gamma\to 0}\int_0^{1/\gamma}\sin x dx=\lim_{\gamma\to 0}\left(1-\cos\frac{1}{\gamma}\right).$$

Так как последний предел не существует, то несобственный интеграл расходится.

Изучим интеграл $\int_0^\infty \sin x dx$ на сходимость в смысле рассмотренного обобщения (1).

Имеем

$$\int_0^\infty \sin x dx = \lim_{\gamma\to 0}\int_0^\infty e^{-\gamma x}\sin x dx = \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{1+\gamma^2} = 1.$$

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^\infty e^{-x}dx$.

Решение. По определению несобственного интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{\gamma\to 0+}\int_0^{1/\gamma} e^{-x}dx = \lim_{\gamma\to 0+}\left(1-e^{-1/\gamma}\right) = 1.$$

Так как последний предел существует, то несобственный интеграл сходится.

Изучим интеграл $\int_0^\infty e^{-x}dx$ на сходимость в смысле (1). Имеем:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{\gamma\to 0}\int_0^\infty e^{-\gamma x}e^{-x}dx = \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{1+\gamma} = 1.$$

Как и следовало ожидать, оба значения оказались равными.

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \ln x dx$.

Решение. По определению несобственного интеграла

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \ln x dx = \lim_{a\to 0+}\left(x\ln x - x\right)\Big|_{x=a}^{x=1} = \lim_{a\to 0+}\left(-1-a\ln a + a\right) = -1.$$

Так как последний предел существует, то несобственный интеграл сходится.

Изучим интеграл $\int_0^1 \ln x dx$ на сходимость в смысле (2). Имеем

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\gamma\to 0+}\int_0^1 x^\gamma \ln x dx = \lim_{\gamma\to 0+}\left(\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1}\ln x - \frac{x^\gamma}{(\gamma+1)^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = -\lim_{\gamma\to 0+}\frac{1}{(\gamma+1)^2} = -1.$$

Как и следовало ожидать, оба значения оказались равными.

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$.

Решение. По определению несобственного интеграла

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx = \lim_{a\to 0+}\int_a^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx = -\lim_{a\to 0+}\left(\sin\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=1} = -\lim_{a\to 0+}\left(\sin 1 - \sin\frac{1}{a}\right).$$

Так как последний предел не существует, то несобственный интеграл расходится.

Изучим интеграл $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$ на сходимость в смысле (2). Имеем

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx = \lim_{\gamma\to 0+}\int_0^1 x^\gamma \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx.$$

Выполним дважды интегрирование по частям:

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx = -\lim_{\gamma\to 0+}\left(\left(x^\gamma \sin\frac{1}{x} - \alpha x^{\alpha+1}\cos\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \alpha(\alpha+1)\int_0^1 x^\alpha \cos\frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= -\lim_{\gamma\to 0+}\left(\sin 1 - \alpha\cos 1 + \alpha(\alpha+1)\int_0^1 x^\alpha\cos\frac{1}{x}dx\right) = -\sin 1.$$

При этом мы воспользовались существованием интеграла $\int_0^1 \cos\frac{1}{x}dx$ как несобственного.

Таким образом, интеграл $\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$ не существует как несобственный, однако допускает обобщение в смысле (2).

Задания и упражнения для самостоятельной работы

1. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^{\infty} \cos x dx$.

2. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^{\infty} x^{\alpha} dx, \alpha > 0$.

3. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx$.

4. Исследуйте на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$.

Фрагмент 4. Суммирование расходящихся рядов, [267].

Для заданного числового ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

в качестве его суммы S выступает предел его частных сумм S_n, т.е. $S = \lim_{n \to \infty} S_n$, при условии, что этот предел существует и конечен. Различные факты из математического анализа и ряда других наук выдвинули вопрос о возможности суммирования расходящихся рядов в некотором новом смысле, [156, т. 2. с. 394–418], отличном от общепринятого. Первые идеи такого «метода обобщенного суммирования» принадлежат Леонардо Эйлеру. По словам Л. Эйлера, законность введения обобщенного понятия оправдывается его практической целесообразностью [156, т. 2, с. 394].

В математической практике расходящиеся ряды встречались ранее, до того, как Коши создал теорию предела последовательности и функции. Хотя их применение и оспаривалось, тем не менее, их применение не было лишено определенной целесообразности. Так, со времен Лейбница, известен парадокс, когда для расходящегося в классическом смысле числового ряда

$$1+1-1+1-1+...$$

в качестве «суммы» выступало число $\frac{1}{2}$. Л. Эйлер обосновывал это тем, что из разложения

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3..., \qquad |x|<1,$$

при подстановке $x=1$ получалась нужная сумма.

Известен также парадокс, носящий имя Гранди, состоящий в «вычислении суммы ряда» различными способами:

1) $1-1+1-1+1-1+...=(1-1)+(1-1)+...=0$,

2) $1-1+1-1+1-1+...=1-(1-1)-(1-1)-...=1$,

3) $1-1+1-1+1-1+...=\frac{1}{2}$ («обоснование» Эйлера: $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...$ при $x=1$).

В современном анализе классическое понятие суммы ряда обобщается и в основу кладется некоторое обобщение понятия суммы ряда, удовлетворяющее двум требованиям:

1) сохраняется свойство линейности суммы ряда,

2) объем вновь вводимого обобщенного понятия должен быть шире объема классически определенного понятия и содержать в себе, как частный случай, объем классического понятия, т.е. ряд, сходящийся в классическом смысле к сумме S, должен и в обобщенном смысле сходиться и иметь суммой то же самое число S.

Такие методы суммирования Г. М. Фихтенгольц в работе [156, т. 2, с. 394] называет регулярными. Приведем два возможных обобщения классического суммирования числовых рядов: обобщение Чезаро и Пуассона.

Основные понятия и теоремы

Теорема Чезаро [156, т. 2]. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}=s,$$

где s_n – n-я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Заметим, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = s$ может существовать и в том случае, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится в классическом смысле.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Предположим, что для каждого $0 < r < 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$$

сходится.

Теорема Пуассона [156, т. 2]. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{r\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n.$$

Однако правая часть может существовать и в том случае, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится в классическом смысле.

Контрольные вопросы и задания.

1. Сравните классический метод суммирования и методы Пуассона, Чезаро.

2. Какие методы суммирования называются регулярными?

3. Приведите пример ряда, не имеющего обычной суммы, но имеющего сумму в смысле обобщенного суммирования.

4. Существуют ли ряды, не имеющие обычной суммы и не имеющие обобщенной суммы в смысле Чезаро или Пуассона?

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите обобщенную (в смысле Пуассона) сумму ряда $1-2+3-\ldots+(-1)^{n-1}n+\ldots$

В рамках классического определения суммы ряда задача некорректна. Однако можно найти обобщенную в смысле Пуассона сумму:

$$1-2+3-\ldots+(-1)^{n-1}n+\ldots=$$
$$=\lim_{r\to 1-0}\left(1-2r+3r^2-\ldots+(-1)^{n-1}nr^n+\ldots\right)=\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{(1+r)^2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 2. Найдите сумму ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$

Обратим внимание на то, что в рамках классического определения задача вычисления суммы ряда корректна. Однако вычислить эту сумму легче всего по теореме Пуассона:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots=$$
$$\lim_{r\to 1-0}(r-\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{r^n}{n}+\ldots)=\lim_{r\to 1-0}\ln(1+r)=\ln 2.$$

Пример 3. Исследуйте ряд $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ на сходимость в смысле Пуассона и Чезаро.

1. В смысле Чезаро имеем: $s_n=\frac{n(n+1)}{2}$,

тогда

$$\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6n}=\frac{(n+1)(n+2)}{6},$$

следовательно ряд расходится в смысле Чезаро.

2. В смысле Пуассона:

$$1+2+3+\ldots+n+\ldots=\lim_{r\to 1-0}\left(1+2r+3r^2+\ldots+nr^n+\ldots\right)=\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{(1-r)^2}=\infty.$$

следовательно ряд расходится в смысле Пуассона.

Задания и упражнения для самостоятельной работы

1. Найдите сумму ряда $1-2+3-\ldots+(-1)^{n-1}n+\ldots$, пользуясь методом Пуассона.

2. Найдите обобщенную сумму ряда $1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}n^2+\ldots$, пользуясь методом Пуассона.

3. Найдите обобщенную сумму ряда $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$, пользуясь методом Чезаро.

4. Приведите примеры других способов суммирования, обобщающих методы Пуассона и Чезаро [156, т. 2].

Таким образом, построенный спецкурс «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий» выводит формирование критериально-корректностной компетентности на прагматический, оптимальный и автономный уровни.

Знаниевая составляющая критериально-корректностной компетентности характеризуется знаниями-умениями и методами сотрудничества: владение терминологической и общеупотребительной корректностью на уровне применения в стандартных и нестандартных условиях, стабильными умениями по обоснованию корректности определения понятий, прочностью, освоенностью и осознанностью операционного состава деятельности по обоснованию математической корректности.

Деятельностная составляющая критериально-корректностной компетентности характеризуется опытом совместной с преподавателем учебно-познавательной деятельности с элементами исследования при обобщении понятий, осознанием взаимосвязей и пониманием сущностного смысла требований корректности, оперированием понятием «корректность» в мировоззренческом смысле для создания целостной картины мира, деятельностным освоением принципа незавершенности знаний.

Личностная составляющая критериально-корректностной компетентности представлена способностью оценить компетентность другого в данной сфере, философским осознанием вопросов математической корректности, построением единой картины мира в соответствии с математической корректностью; мотивацией к творчеству.

4.2.2. Спецкурс «Корректные и некорректные задачи математической физики»

Материалы спецкурса опубликованы, см. [266], [267].

В рамках этого спецкурса должны быть раскрыты:

– содержание классических корректных и некорректных задач математической физики;

– мировоззренческий потенциал некорректных и обратных задач математической физики;

– возможности применения понятия «корректность» к анализу философских проблем, оценке места и роли человека в историческом процессе;

– назначение математики в качестве универсального языка науки, средства моделирования явлений и процессов, построение корректных и некорректных математических моделей, применение критерия «корректность» для оценки математических исследований.

Обучение на спецкурсе должно способствовать выработке у студентов активной жизненной позиции, личностных качеств: креативности, критичности мышления, чувствительности к деталям; а также способствовать формированию устной и письменной речи студентов, способности корректно выражать и аргументированно обосновывать имеющиеся знания, вести дискуссию, применять понятие «корректность» для оценки общественных и личностно-значимых проблем, овладевать общекультурными ценностями.

Спецкурс состоит из теоретической части, решенных задач, контрольных вопросов и заданий, заданий для самостоятельной работы. Приведено краткое систематическое изложение теории корректных и некорректных задач математической физики, исследуются методы регуляризации операторных уравнений. Спецкурс начинается с определений Ж. Адамара корректной и некорректной математической задачи. Затем рассматриваются классические примеры некорректных задач, проводятся необходимые обоснования. Классическим примером некорректной задачи является задача Коши для уравнения Лапласа, [143], [176].

Пример 1. Задача Коши для уравнения Лапласа. Найти функцию $u=u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$\Delta u(x,y)=0,$$
$$u(x,0)=f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=g(x), \quad -\infty<x<\infty,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – заданные функции.

Покажем, что задача некорректна. Выполним варьирование исходных данных: положим $f_1(x)=0, g_1(x)=\frac{1}{a}\sin ax$. Тогда решение задачи Коши будет иметь вид:

$$u_1(x,y)=\frac{1}{a^2}\sin axshay, \quad a>0.$$

Если положить $f_2(x)=0, g_2(x)=0$, то функция $u_2(x,y)=0$ будет решением задачи Коши

Отклонение начальных данных и решений в метрике C:

$$\rho(f_1,f_2)=\sup_x\left|f_1(x)-f_2(x)\right|=0,$$

$$\rho(g_1,g_2)=\sup_x\left|g_1(x)-g_2(x)\right|=\frac{1}{a}.$$

Величина $\rho(g_1, g_2)$ при достаточно больших значениях a может быть сделана сколь угодно малой. Однако отклонение решений

$$\rho(u_1, u_2) = \sup_x \left| u_1(x, y) - u_2(x, y) \right| = \sup_x \left| \frac{1}{a^2} \sin axshay \right| = \frac{1}{a^2} shay$$

при любом фиксированном $y > 0$ может быть произвольно большим при достаточно больших значениях числа a.

Таким образом, для уравнения Лапласа внутри замкнутой границы условия Коши дают слишком много условий, задача Коши переопределена, а на открытой границе вызывают слишком высокую чувствительность к малым изменениям условий, т.е. задача неустойчива.

Классическими примерами корректно поставленных задач математической физики являются задача Дирихле для уравнения Лапласа и смешанная задача Коши для уравнения теплопроводности. Рассмотрим эти задачи в примерах 2 и 3.

Пример 2. Корректность задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Постановка задачи Дирихле

Для уравнения Лапласа задача Дирихле ставится следующим образом: найти функцию $u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, удовлетворяющую в области G уравнению Лапласа:

$$\Delta u = 0$$

и граничному условию

$$u\big|_S = u_0$$

на поверхности S. Функция u_0 непрерывна на поверхности S.

Единственность решения задачи Дирихле

Теорема. Решение задачи Дирихле в классе функций $u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ единственно.

Доказательство. Достаточно доказать, что в данном классе функций задача Дирихле

$$\Delta u = 0, u \in C^2(G),$$

$$u\big|_S = 0, \quad u \in C^1(\bar{G})$$

не имеет другого решения, кроме как $u = 0$.

Воспользуемся тождеством:

$$\int_G \left(u\Delta u + (\nabla u)^2 \right) dv = \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma, \quad u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}).$$

Отсюда находим:

$$\int_G (\nabla u)^2 dv = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = \text{const}, x \in G.$$

Так как функция u непрерывна и $u = 0$ на S, то $u = 0$ в G. Теорема доказана.

Существование решения задачи Дирихле для полуплоскости

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u \in C^2$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, y > 0, -\infty < x < \infty,$$

и граничным условиям

$$u(x,0) = f(x),$$

при $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ функция u ограничена, т.е. $u = 0(1)$.

Решение. В изображениях Фурье по переменной x рассматриваемая задача принимает вид

$$-\lambda^2 \tilde{u} + \frac{d^2 \tilde{u}}{dy^2} = 0, y > 0,$$

$$\tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{f}(\lambda), \quad \tilde{u} = 0(1).$$

В итоге для образа Фурье получим формулу:

$$\tilde{u} = e^{-|\lambda| y} \tilde{f}(\lambda).$$

Возвращаясь к оригиналам, находим:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}e^{-|\lambda|y}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda\xi}f(\xi)d\xi d\lambda.$$

Изменяя порядок интегрирования и учитывая значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda x}e^{i\lambda\xi}e^{-|\lambda|y}d\lambda=\frac{y}{y^2+(x-\xi)^2},$$

получим формулу Пуассона для полуплоскости:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-\xi)^2}f(\xi)d\xi.$$

Итак, установлено существование решения.

Устойчивость решения задачи Дирихле

Пусть последовательность функций $\{f_k(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ в том смысле, что

$$\lim_{k\to\infty}\sup_x\left|f_k(x)-f(x)\right|=0.$$

Из интеграла Пуассона нетрудно установить оценку:

$$\left|u_k(x,y)-u(x,y)\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-\xi)^2}\left|f_k(\xi)-f(\xi)\right|d\xi\le$$

$$\le\sup_\xi\left|f_k(\xi)-f(\xi)\right|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+(x-\xi)^2}d\xi=\sup_\xi\left|f_k(\xi)-f(\xi)\right|.$$

В результате находим

$$\sup_{(x,y)}\left|u_k(x,y)-u(x,y)\right|\le\sup_\xi\left|f_k(\xi)-f(\xi)\right|..$$

Последнее неравенство показывает, что задача Дирихле обладает свойством устойчивости в метрике рассмотренных пространств.

Пример 3. Корректность задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Постановка смешанной краевой задачи

Рассмотрим уравнение теплопроводности:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u+f,\quad x\in G,\ t>0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

и граничным условием

$$u\big|_S = \psi(t,\eta), \eta \in S.$$

Единственность решения смешанной краевой задачи

Теорема 1. Если функция u непрерывна вместе с первой и второй производными по $x = (x_1, x_2, x_3)$ во всех точках области G при $t > 0$, производная $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ непрерывна в G при $t > 0$, функция u непрерывна в $\bar{G}$ при $t \geq 0$, тогда решение задачи единственно.

Доказательство. Докажем, что соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение. Рассмотрим следующий интеграл, который равен нулю:

$$\int_0^t dt \int_G u \left[\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dv = 0.$$

Преобразуем этот интеграл, основываясь на тождестве

$$\int_G \left(u\Delta u + (\nabla u)^2 \right) dv = \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

В результате получим:

$$\int_0^t dt \int_G u \left[\Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dv = \int_0^t dt \left\{ -\int_G (\nabla u)^2 dv + \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_G \frac{1}{a^2} u \frac{\partial u}{\partial t} dv \right\} =$$

$$= -\int_0^t dt \int_G (\nabla u)^2 dv + \int_0^t dt \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \int_S \frac{u^2}{2a^2} dv + \int_S \frac{u^2}{2a^2} \bigg|_{t=0} dv.$$

Из начальных и граничных условий получим:

$$0 = -\int_0^t dt \int_G (\nabla u)^2 dv - \int_S \frac{u^2}{2a^2} dv \Rightarrow \int_0^t dt \int_G (\nabla u)^2 dv + \int_S \frac{u^2}{2a^2} dv = 0 .$$

Следовательно, $u = 0, x \in \bar{G}, t \geq 0$. Единственность доказана.

Существование решения задачи Коши для случая бесконечной оси

Рассмотрим следующую задачу: найти функцию $u \in C^{1,2}$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0,\ -\infty < x < \infty$$

с начальным условием

$$u(0,x) = f(x),$$

и краевым условием на бесконечности

$$u(t,x)\Big|_{x\to\infty} = 0(1).$$

Решение. В изображениях Фурье рассматриваемая задача принимает вид:

$$\lambda^2 \tilde{u} + \frac{d\tilde{u}}{dt} = 0,\ t > 0,$$

$$\tilde{u}(0,\lambda) = \tilde{f}(\lambda).$$

В итоге для образа Фурье получим формулу:

$$\tilde{u} = e^{-\lambda^2 t}\tilde{f}(\lambda).$$

Возвращаясь к оригиналам, находим:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} e^{-\lambda^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi d\lambda.$$

Изменяя порядок интегрирования и учитывая значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} e^{i\lambda\xi} e^{-\lambda^2 t} d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right),$$

получим интеграл Пуассона:

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) f(\xi)\, d\xi.$$

Итак, установлено существование решения.

Устойчивость решения задачи Коши

Пусть последовательность функций $\{f_k(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ в том смысле, что $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_x \left|f_k(x)-f(x)\right|=0$. Из интеграла Пуассона нетрудно установить оценку:

$$\left|u_k(t,x)-u(t,x)\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)\left|f_k(\xi)-f(\xi)\right|d\xi\le$$

$$\le\sup_{\xi}\left|f_k(\xi)-f(\xi)\right|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)d\xi=\sup_{\xi}\left|f_k(\xi)-f(\xi)\right|.$$

В результате находим

$$\sup_x\left|u_k(t,x)-u(t,x)\right|\le\sup_{\xi}\left|f_k(\xi)-f(\xi)\right|.$$

Последнее неравенство показывает, что задача Коши обладает свойством устойчивости.

Приведенные примеры 1–3 относятся к числу прямых задач математической физики. В этих задачах требовалось найти решение, которое удовлетворяет заданному уравнению в частных производных и некоторым дополнительным условиям, начальным и/или краевым. В обратных задачах определяющее уравнение и/или начальные, и/или граничные условия не заданы полностью, но есть дополнительная информация.

Выделяют три типа обратных задач:

– коэффициентные, когда неизвестны некоторые коэффициенты уравнения;

– граничные, когда неизвестны граничные данные или какая-то их часть,

– эволюционные, когда неизвестны начальные условия.

Обратные задачи в большинстве своем являются некорректными ввиду нарушения требования непрерывной зависимости от входных данных. «Преодоление некорректности» достигается сужением множества решений, регуляризацией.

Приведем фрагмент спецкурса.

Пример 4. Обратные задачи математической физики неоднородных сред

Основные понятия и теоремы

Ретроспективная задача Коши состоит в определении в области $R_1 = \{ x \mid x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \}$ начального условия, т.е. функции $f(x) = u(0, x)$ по заданному значению в момент времени $t = \tau$ решению $u(\tau, x)$ уравнения теплопроводности

$$u'_t = u''_{xx}, (t, x) \in D_1 \tag{1}$$

с неизвестным начальным условием

$$u(0, x) = f(x) \tag{2}$$

и по условиям сопряжения

$$u_-(t,0) = u_+(t,0), \ k\frac{\partial u_-}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u_+}{\partial x}(t,0), \quad k > 0, \tag{3}$$

где $u_-(t,0), u_+(t,0), \frac{\partial u_-}{\partial x}(t,0), \frac{\partial u_+}{\partial x}(t,0)$ – предельные значения функции $u = u(t, x)$ и ее производных в точке $x = 0$ слева и справа соответственно.

Обратная задача Дирихле состоит в определении граничного значения $u(0, y)$ гармонической функции $u(x, y)$ по известному граничному значению функции $u(x, y)$ на линии $x = l_1$: $u(l_1, y) = f_1(y)$. Здесь $u = u(x, y)$ – функция, гармоническая в области D_1^+,

$$D_1^+ = \{ (x, y) \mid x \in (0; l) \cup (l; +\infty); \ y \in (-\infty; +\infty) \},$$

удовлетворяющая условиям сопряжения

$$u_-(l, y) = u_+(l, y), \ k\frac{\partial u_-}{\partial x}(l, y) = \frac{\partial u_+}{\partial x}(l, y), \quad k > 0, \tag{4}$$

где $u_-(l,y)$, $u_+(l,y)$, $\frac{\partial u_-}{\partial x}(l,y)$, $\frac{\partial u_+}{\partial x}(l,y)$ – предельные значения функции $u = u(x,y)$ и ее производных при $x = l$ слева и справа соответственно.

Контрольные вопросы и задания

1. Как ставится прямая задача Коши для уравнения теплопроводности в кусочно-однородном пространстве?

2. Как ставится ретроспективная задача Коши для уравнения теплопроводности в кусочно-однородном пространстве?

3. Как ставится прямая задача Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородном полупространстве?

4. Как ставится обратная задача Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородном полупространстве?

Примеры решения задач

Пример 5. Докажите, что у ретроспективной задачи Коши для уравнения теплопроводности в кусочно-однородном пространстве решение существует и единственно.

Решение. В задаче (1)–(3) перейдем к изображениям Фурье. В результате приходим к задаче

$$\tilde{u}'_t = -\lambda^2 \tilde{u}, \quad \lambda \in R \tag{5}$$

с начальным условием

$$\tilde{u}(0) = \tilde{f}(\lambda), \tag{6}$$

где $\tilde{u}, \tilde{f}$ – образы Фурье F_1. Для решения задачи (5)–(6) имеем формулу:

$$\tilde{u} = e^{-\lambda^2 t} \tilde{f}(\lambda).$$

По условию задачи известно значение $u(\tau,x)$, а ,значит, известно значение $\tilde{u}(\tau,\lambda)$, следовательно, $\tilde{f}(\lambda)=\tilde{u}(\tau,\lambda)e^{\lambda^2\tau}$. Возвращаясь к оригиналу, получим

$$f(x)=F_x^{-1}\left(\tilde{u}(\tau,\lambda)e^{\lambda^2\tau}\right).$$

Мы доказали, что решение рассматриваемой задачи существует и единственно.

Пример 6. Докажите, что у обратной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кусочно-однородном полупространстве решение существует и единственно.

Решение. В изображениях Фурье по переменной y задача принимает вид

$$\tilde{u}_{xx}^{//}=-\lambda^2\tilde{u},\quad x>0,\quad \lambda\in R, \tag{7}$$

с граничными условиями

$$\tilde{u}(0,\lambda)=\tilde{f}(\lambda),\ \sup_{x>0}\left|\tilde{u}(x,\lambda)\right|<\infty, \tag{8}$$

где $\tilde{u},\tilde{f}$ – образы Фурье F.

Для решения задачи (7)–(8) имеем формулу

$$\tilde{u}=e^{-|\lambda|x}\tilde{f}(\lambda).$$

По условию задачи известно значение $u(l,y)$, а значит, известно значение $\tilde{u}(l,\lambda)$, следовательно, $\tilde{f}(\lambda)=\tilde{u}(l,\lambda)e^{|\lambda|x}$. Возвращаясь к оригиналу, получим

$$f(y)=F^{-1}\left(\tilde{u}(l,\lambda)e^{|\lambda|x}\right)..$$

Итак, решение рассматриваемой задачи существует и единственно.

Пример 7. Докажите, что обратная задача Коши для уравнений теплопроводности в кусочно-однородном пространстве

$$u_t^{/}(t,x)=u_{xx}^{//}(t,x),$$

состоящая в определении начального значения $u(0,x)$ по известному значению $u(\tau,x)$ в момент времени $t=\tau,$ некорректна.

Решение. Пусть в рассматриваемой задаче $k=2$. Если положить

$$u_1(\tau,x)=\begin{cases} e^{-a^2\tau}\sin ax, & x<0,\\ 2e^{-a^2\tau}\sin ax, & x>0,\end{cases}$$

то решением обратной задачи Коши будет функция

$$u_1(\tau,x)=\begin{cases} \sin ax, & x<0,\\ 2\sin ax, & x>0.\end{cases}$$

Если положить $u_2(\tau,x)=0$, то решением обратной задачи Коши будет функция $u_2(0,x)=0.$

Будем оценивать отклонение начальных данных и решений в метрике C. Имеем

$$\rho\big(u_1(\tau,x),u_2(\tau,x)\big)=\sup_x\big|u_1(\tau,x)-u_2(\tau,x)\big|=2e^{-a^2\tau}.$$

Последняя величина при достаточно больших значениях a может быть сделана сколь угодно малой. Однако отклонение решений

$$\rho\big(u_1(0,x),u_2(0,x)\big)=\sup_x\big|u_1(0,x)-u_2(0,x)\big|=2$$

равно двум.

Таким образом, эта задача не обладает свойством устойчивости и, следовательно, является некорректно поставленной.

Пример 8. Докажите, что обратная задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$u''_{xx}(x,y)+u''_{yy}(x,y)=0,$$

состоящая в определении граничного значения $u(0,y)$ по известному значению $u(l_1,y)$ при $x=l_1,$ некорректна.

Решение. Если положить

$$u_1\left(l_1, y\right)=\frac{2k}{1+k}\frac{1}{1-\chi e^{-2al}}e^{-al_1}\sin ay,$$

где $\chi=\dfrac{1-k}{1+k}$, то решением обратной задачи Дирихле будет функция $u_1\left(0, y\right)=\sin ay$. Если положить $u_2\left(l_1, x\right)=0$, то решением обратной задачи Дирихле будет функция $u_2\left(0, y\right)=0$.

Будем оценивать отклонение начальных данных и решений в метрике C. Имеем

$$\rho\left(u_1\left(l_1, y\right), u_2\left(l_1, y\right)\right)=\sup_y\left|u_1\left(l_1, y\right)-u_2\left(l_1, y\right)\right|=$$

$$=\frac{e^{-al_1}-\chi e^{-a\left(2l-l_1\right)}}{1-\chi e^{-2al}}.$$

Последняя величина при достаточно больших значениях a может быть сделана сколь угодно малой. Однако отклонение решений

$$\rho\left(u_1\left(0, y\right), u_2\left(0, y\right)\right)=\sup_y\left|u_1\left(0, y\right)-u_2\left(0, y\right)\right|=1$$

равно 1.

Таким образом, эта задача не обладает свойством устойчивости и, следовательно, является некорректно поставленной.

Задания и упражнения для самостоятельной работы

1. Покажите, что формула для решения ретроспективной обратной задачи Коши может быть преобразована к виду

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^{\left(2k\right)}\left(\tau, x\right)}{k!}\tau^k.$$

Указание. Воспользуйтесь разложением в ряд Тейлора по λ функции $e^{\lambda^2\tau}$.

2. Докажите, что обратная коэффициентная задача Дирихле для кусочно-однородного полупространства, состоящая в определении коэффициента k по

известному граничному значению $u(0,y)$ и известному значению $u(l_1,y)$ на линии $x=l_1$ некорректна.

3. Изучите по учебному пособию [58] постановку обратной задачи гравиразведки. Ответьте на вопросы:

а) какая функция в этой задаче задана и какая неизвестна?

б) в чем состоит практическое значение решения задач гравиразведки?

в) как в геологии реализуют на практике поиск решения обратных задач гравиразведки?

4. Изучите по учебным пособиям [58], [176] метод регуляризации для решения ретроспективной задачи Коши и обратной граничной задачи. Ответьте на вопросы:

а) что называется регуляризирующим оператором?

б) какой вид имеет регуляризирующий оператор для обратной задачи Коши?

в) какой вид имеет регуляризирующий оператор для обратной задачи Дирихле?

Пример 9. Прямая и обратная задачи теплопроводности для действительной оси с точкой сопряжения.

1-ый этап (прямая задача): доказываются теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости решения от исходных данных.

Прямая задача Коши состоит в определении в области

$0<t\le T, x\in R_1, R_1 = \{x \mid x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\}$ решения $u(\tau,x)$ уравнения теплопроводности:

$$u_t^{/}=a^2(x)u_{xx}^{//}, t>0, x\in R_1,$$
$$a^2(x)=\begin{cases} a_-^2, x<0, \\ a_+^2, x>0. \end{cases} \qquad (1)$$

с начальным условием:

$$u(0,x)=f(x) \qquad (2)$$

и условиями сопряжения:

$$u_-(t,0)=u_+(t,0),$$
$$\lambda_1 \frac{\partial u_-}{\partial x}(t,0)=\lambda_2 \frac{\partial u_+}{\partial x}(t,0), \quad \lambda_1>\lambda_2, k=\lambda_1/\lambda_2 \qquad (3)$$

где $u_-(t,0), u_+(t,0), \frac{\partial u_-}{\partial x}(t,0), \frac{\partial u_+}{\partial x}(t,0)$ – предельные значения функции $u=u(t,x)$ и ее производных в точке $x=0$ слева и справа соответственно.

Доказывается аналог формулы Пуассона для уравнения теплопроводности и на его основе устанавливается корректность постановки задачи.

2-ой этап (обратная задача Коши (ретроспективная)):найти в R_1 начальное условие, т.е. функцию $f(x)=u(0,x)$ по заданному значению в момент времени $t=\tau$ решения $u(\tau,x)$ задачи (1),(3).

Методом интегральных преобразований Фурье с точкой деления доказывается, что решение ретроспективной задачи существует и единственно. Однако, решение ретроспективной задачи Коши неустойчиво. В самом деле, если положим:

$$u_1(\tau,x)=\begin{cases} \dfrac{\sin bx}{b}, & x<0, \\ k\dfrac{\sin bx}{b}, & x>0. \end{cases},$$

то решением обратной задачи Коши будет функция:

$$u_1(0,x)=\begin{cases} e^{b^2\tau}\dfrac{\sin bx}{b}, & x<0, \\ ke^{b^2\tau}\dfrac{\sin bx}{b}, & x>0, \end{cases}$$

Если принять $u_2(\tau,x)=0$, то решением обратной задачи Коши будет функция $u_2(0,x)=0$. Оценим отклонение данных и решений в метрике C. Имеем:

$$\rho\left(u_1(\tau,x),u_2(\tau,x)\right)=\sup_x\left|u_1(\tau,x)-u_2(\tau,x)\right|=\frac{k}{b}.$$

Последняя величина при достаточно больших значениях b может быть сделана сколь угодно малой. Однако отклонение решений

$$\rho\left(u_1(0,x),u_2(0,x)\right)=\sup_x\left|u_1(0,x)-u_2(0,x)\right|=e^{b^2\tau}\frac{k}{b}$$

неограниченно возрастает при достаточно больших значениях b при каждом фиксированном значении τ. Таким образом, эта задача не обладает свойством устойчивости и, следовательно, является некорректно поставленной.

3-ий этап (поиск решения ретроспективной задачи, построение регуляризирующего оператора).

Найдем в R_1 начальное условие $f(x)=u_1(0,x)$ по заданному нелокальному возмущенному условию $u_1(\tau,x)+\varepsilon u_1(0,x)$ задачи (1),(3). При каждом значении $\varepsilon>0$ эта задача будет корректной. Так, в нашем примере по данным задачи:

$$u_1(\tau,x)+\varepsilon u_1(0,x)=\begin{cases}\dfrac{\sin bx}{b}, & x<0,\\ k\dfrac{\sin bx}{b}, & x>0,\end{cases}$$

находим регуляризированное решение $f(x)=u_1(0,x)$:

$$u_1(0,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{\sin bx}{\varepsilon+e^{-b^2\tau}}, & x<0,\\ \dfrac{k}{b}\cdot\dfrac{\sin bx}{\varepsilon+e^{-b^2\tau}}, & x>0,\end{cases}$$

При достаточно больших значениях b и любом фиксированном значении $\varepsilon>0$ функция $f(x)=u_1(0,x)$ может быть сделана сколь угодно малой.

4-й этап (исследование полученного результата, выбор параметра регуляризации ε). Доказывается, что если ε выбирать согласованно с точностью вычислений δ, т.е. так, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{\delta}{\varepsilon}=0$, то регуляризированное решение будет стремиться к точному решению:

$$u_1(0,x)=\begin{cases} e^{b^2\tau}\dfrac{\sin bx}{b}, & x<0,\\ ke^{b^2\tau}\dfrac{\sin bx}{b}, & x>0,\end{cases}$$

5-ый этап (проверка полученных результатов для $\lambda_1=\lambda_2$**):** однородный случай.

Пример 10. Задача теплопроводности с обратным временем [58, 143]. Задача восстановления распределения температуры стержня в начальный момент времени по измеренной температуре в данный момент времени приводит после замены переменных к смешанной краевой задаче Коши с «обратным временем»: найти функцию $u(x,t)$ в области $(0,\pi)\times(0,T)$, которая удовлетворяет уравнению теплопроводности с обратным временем

$$u_t=-u_{xx} \tag{1}$$

краевым условиям

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\in(0,T), \tag{2}$$

и начальному условию

$$u(x,0)=f(x),\quad x\in(0,\pi). \tag{3}$$

Задача (1)–(3) некорректна, так как сколь угодно малым изменениям правой части f из (3) могут соответствовать сколь угодно большие изменения решения *u*. В самом деле, при $f(x)=\dfrac{1}{n}\sin nx$ решение $u(x,t)=\dfrac{1}{n}e^{n^2t}\sin nx$ растет неограниченно с ростом *n*, в то время как данные задачи $f(x)$ стремятся к нулю. Проведем регуляризацию задачи (1)–(3) методом разделения переменных с помощью ряда Фурье по sin.

Пусть

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\sin kx,\quad f_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kx dx.$$

Если функция $f(x)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 e^{k^2 T} \le C$, то решение рассматриваемой задачи Коши существует и имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{k^2 t} f_k \sin kx.$$

Определим последовательность регуляризирующих операторов R_n:

$$(R_n f)(x,t) = \sum_{k=1}^{n} e^{k^2 t} f_k \sin kx.$$

Пусть множество корректности M по Тихонову определено неравенством:

$$\int_0^{\pi} u^2(x,T)\,dx \le C.$$

Если данные задачи (1)–(3) известны с ошибкой δ, $\|f_\delta - f\| \le \delta$, то можно указать номер $n = n(\delta)$ такой, что $(R_{n(\delta)} f_\delta)(x,t) \to u(x,t)$ ï ðè $\delta \to 0$.

Из приведенного описания следует, что спецкурс «Корректные и некорректные задачи математической физики» выводит формирование критериально-корректностной компетентности бакалавров на прагматический, оптимальный уровни, которые характеризуются следующими чертами. Студенты приобретают «знания-умения» плюс опыт исследовательской деятельности, ими стабильно усвоены умения по обоснованию корректности классических задач математической физики, по применению корректных методов решения некорректных задач. Студенты знакомы с прикладными некорректными и обратными задачами и владеют их методами решения. Некорректные и обратные задачи становятся предметом квазипрофессиональной деятельности бакалавров.

Деятельность бакалавров на этом этапе характеризуется приобретением опыта исследовательской самостоятельной или совместной с преподавателем работы над решением некорректных задач, студенты овладевают методами теории некорректных и обратных задач, их приложений в радиоразведке, медицине, теории распознавания образов. Три требования корректности математической задачи прочно усвоены студентами и становятся аппаратом исследования прикладных, практических, квазипрофессиональных задач.

К концу обучения на этом спецкурсе личностная составляющая критериально-корректностной компетентности бакалавров характеризуется учебно-познавательной мотивацией, сформированными мировоззренческими взглядами о неоднозначности истины, о неоднозначной обратимости причинно-следственных связей, о спиралеобразном развитии корректного знания, о разрешимости в конечном итоге любой математической задачи. Студенты используют критерий корректности для создания целостной картины мира, для оценки личностно-значимых проблем. Формируются личностные качества студентов: критичность, креативность, чувствительность к деталям, открытость новому, уход от стереотипов.

Таким образом, описанные в разделе 4.3 система межпредметно-корректностных модулей и интегрированные спецкурсы могут служить основными дидактическими средствами формирования критериально-корректностной компетентности бакалавров в разработанной нами методической системе.

4.3. Экспериментальная проверка эффективности методической системы критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений

Целью проведения педагогического эксперимента являлась проверка достоверности сформулированной гипотезы педагогического исследования и возможности реализации разработанной методической системы. Экспериментальную базу исследования составили кафедры вузов Пензы, Орла, Москвы, Уфы и Тамбова, реализующие основные образовательные программы по математической подготовке бакалавров ряда направлений и профилей (физика, математика, информатика, педагогическое образование). Кроме того: Пензенский институт развития образования, Пензенские многопрофильные гимназии №1 и № 4 «Ступени». Более 1100 человек приняли участие в педагогическом эксперименте; это вузовские преподаватели, студенты, учителя школ, школьники. В процессе педагогического эксперимента и реализации методической системы критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений были разработаны средства и методика оценивания уровня сформированности, критерии оценивания приведены ранее, см. таблицу 1.

В проведении педагогического эксперимента можно выделить ряд этапов:

– констатирующий этап эксперимента: 2004–2010г.г.;

– поисковый этап эксперимента: 2010–2012 г.г.;

– формирующий этап эксперимента: 2012–2016г.г.

На первом, констатирующем, этапе педагогического эксперимента осуществлялось выявление состояния изученности проблемы исследования и обоснование необходимости выделения в математической подготовке бакалавров особого вида межпредметной математической подготовки – критериально-корректностной, а также обоснование необходимости построения ее шестиуровневого процесса и методической системы.

С этой целью были проведены:

– анализ современных образовательных документов, анализ ГОС ВПО, ФГОС ВПО, ФГОС ВО по направлениям подготовки бакалавриата «Физико-математические науки», «Информатика и вычислительная техника»;

– исследование и анализ математической, педагогической, научно-методической, философской литературы по теме исследования;

– наблюдения, опросы вузовских преподавателей, студентов, школьников, учителей по вопросам корректности математической задачи и ее решения, модели, определения понятия, вопросов и ответов, применения метода, доказательства и т.п.

В опросах приняли участие 713 человек: 162 студента первого курса, 213 студентов - выпускников, 99 вузовских преподавателей, 167 учителей и 72 школьника. Опрос проводился с помощью анкеты для определения первоначальных знаний по проблеме «Математическая корректность», см. Приложение 1.

На данном этапе мы выяснили, что:

1) при формулировке общекультурных и профессиональных компетенций понятие «корректность» служит критерием, оценочным понятием для образовательных результатов и используется при формулировке достаточно большого числа компетенций;

2) существуют разночтения в семантике понятия «корректность», его терминологическом и общеупотребительном использовании. В полной мере это относится к понятиям корректной и некорректной математической задачи, которое трактуется по-разному представителями школьного сообщества, вузовских преподавателей, ученых-методистов. Как показали наши опросы, с точки зрения школьников и большинства студентов-первокурсников некорректная задача - «это задача, которую не нужно решать»; учителя представляли некорректную задачу «как неправильно сформулированную, плохо поставленную, у которой нет однозначного правильного ответа»; преподаватели математики и информатики вуза чаще всего трактовали ее «как неустойчивую»; для ученых-методистов некорректная задача представляла собой задачу с неполными, переопределенными или противоречивыми данными. Порой даже сама возможность решения некорректной математической задачи вызывала яростное отторжение и неприятие: «Нельзя решать некорректные задачи!!!». Мы столкнулись не только с незнанием некорректных задач, но и с эмоционально окрашенными отрицательными установками, противоречащими научной точке зрения. По поводу корректной задачи разброс мнений был не менее широкий. Корректной называли «правильную задачу, для которой можно дать однозначный ответ», и в соответствии с этим корректной можно считать противоречивую задачу, т.к. у нее однозначный ответ: «Нет решений». В полной мере определением Ж. Адамара владели лишь 32% вузовских преподавателей, 20% студентов-выпускников, 7% учителей.

3) школьники и студенты первого курса для некорректной задачи вместо правильного ответа «Нет решений» давали ответы: «Не может быть», «Мы такое не решали!» - или вообще затруднялись с ответом; найдя одно из решений геометрической задачи, даже не предпринимали попыток обнаружить другое решение; пытались однозначно ответить на некорректно заданный вопрос; не могли сказать, обобщаются ли математические понятия и всегда ли разрешимы задачи, которые ставят перед математикой естествознание и другие науки;

4) большинство участников опроса проявляли профессиональный и общепознавательный интерес к теме корректности в математике и смежных дисциплинах. Особый интерес у аудитории вызывали пути и способы устранения выявленной некорректности.

Полученные на этом этапе педагогического эксперимента результаты позволили нам сделать вывод о том, что необходимо перейти к разработке концепции критериально-корректностной математической подготовки, которая позволила бы:

а) реализовать современные цели, задачи высшего образования и требования ФГОС ВО;

б) осуществить математическую подготовку бакалавров на единой методологической основе, используя в качестве генеральной идеи понятие «корректность».

На втором, поисковом, этапе педагогического эксперимента параллельно с экспериментальными действиями осуществлялось построение концепции исследования, на ее основе определялись структура и функционирование критериально-корректностной математической подготовки бакалавров, ее методической системы, выполнялось конструирование моделей, осуществлялось их частичное апробирование и корректировка, осуществлялся поиск эффективных путей реализации. В этом этапе эксперимента было задействовано 111 человек: 100 студентов и 11 вузовских преподавателей.

Этот этап проходил в двух направлениях:

а) проведение логико-дидактического анализа понятия «корректность», выявление его методологических и дидактических возможностей;

б) формирование содержания интегрированных межпредметных модулей, авторских специальных межпредметных курсов, семинаров; отбор учебных предметов для реализации идей критериально-корректностной подготовки и частичное апробирование в учебном процессе ее элементов; поиск форм, методов, средств обучения, обеспечивающих качественно новые образовательные результаты бакалавров, соответствующие требованиям стандартов.

На данном этапе нам удалось выявить многоаспектность понятия «корректность», что послужило основой для осмысления и построения главных компонентов критериально-корректностных компетенций и критериально-корректностной математической подготовки, ее методической системы, уровней и этапов; выделить существенные связи между компонентами, установить определенные связи компонент с составляющими внешней среды; построить модели; разработать критерии для определения уровня сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров. В этот период была опубликована первая монография [254], подготовлены и сданы в печать или опубликованы основные статьи [232, 234, 237,247, 255, 256].

На данном этапе исследования происходила корректировка содержания и методики реализации основных средств критериально-корректностной математической подготовки: уточнялось и корректировалось содержание каждого модуля в системе критериально-корректностных модулей, количество модулей в системе, содержание спецкурсов, последовательность их изучения. В ходе проведенного опроса преподавателей, участвовавших в педагогическом эксперименте, и промежуточных контрольных мероприятий со студентами нам удалось установить, что определенное нами количество модулей – восемь – оптимально. В то же время, содержание модулей было подвергнуто корректировке: в первоначальном варианте методики вопросы корректности математической задачи и ее формулировки входили в состав одного модуля. Однако, позже мы пришли к выводу о необходимости выделения двух самостоятельных модулей: модуль 2 «Корректность математической задачи» и модуль 3 «Корректность формулировки математической задачи», т.к. модуль 3 был дополнен важным, на наш общий взгляд, вопросом - корректностью тестовых заданий. В содержание модуля 8, по общему мнению преподавателей, были включены вопросы о постановке краевых и обратных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, что служит усилению межпредметных связей по вертикали и подготавливает студентов к изучению спецкурса «Корректные и некорректные задачи математической физики».

Далее, вопрос о регулярности обобщений и корректном определении понятий в первом варианте методики рассматривался как в качестве самостоятельного спецкурса, так и апробировался как один из разделов дисциплины «История математики и информатики». При втором варианте методики курс «История математики и информатики» был дополнен разделом, в котором обосновывались исторические предпосылки и корректность обобщения понятий, новых для XX века. Это понятия обобщенной функции и ее производной, интеграла Лебега, функциональных пространств, квазирешения и т.п. Как показали опросы, такой второй вариант методики оказался более целесообразным, т.к. позволял познакомить студентов с непростыми для понимания студентов математическими понятиями предварительно, на уровне описаний, наглядных представлений, а затем рассмотреть их с необходимой строгостью.

На поисковом этапе была определена последовательность изучения спецкурсов. Мы пришли к выводу, что вначале должен изучаться спецкурс «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий», где вводятся и определяются те математические понятия, которыми в спецкурсе «Корректные и некорректные задачи математической физики» студентам предстоит научиться оперировать.

На поисковом этапе педагогического эксперимента было проведено частичное апробирование системы межпредметно-корректностных модулей (СМКМ) и спецкурсов, см. таблицу 3.

Таблица 3

Количество студентов, справившихся с заданием по соответствующему критерию

Вид средства формирования критериально-коррект.компетентности	Критерий I (знаниевый)	Критерий II (деятельностный)	Критерий III (личностный)
СМКМ	72%	34%	30%
Спецкурсы	68%	26%	28%

Как показало частичное апробирование системы межпредметно-корректностных модулей (СМКМ) и спецкурсов, процент усвоения критериально-корректностной компетентности по первому критерию – знаниевому – достаточно высокий. В то же время, процент усвоения критериально-корректностной компетентности по второму и третьему критериям – деятельностному и личностному – неудовлетворительный, низкий. Это позволило разработать дополнительные методические рекомендации: необходимо увеличить количество заданий, направленных на формирование деятельностной и личностной составляющих критериально-корректностной компетентности. В окончательные варианты СМКМ и спецкурсов добавлены задания:

- проведите варьирование данных задачи, выполните корректировку ее условия,
- все ли решения задачи найдены? Ответ обоснуйте,
- какие еще возможны варианты решения? доказательства? корректны ли они?
- предложите свои примеры, обоснуйте их корректность/некорректность,
- какие приемы преодоления некорректности Вы использовали? не использовали? какие из них можно применить в данном случае?
- приведите примеры оценки с точки зрения корректности объектов окружаю-

щей среды, личностной сферы, морально-этических вопросов,

- какие математические философские проблемы связаны с понятием «корректность»?

На третьем, формирующем, этапе педагогического эксперимента осуществлялась проверка эффективности реализации методической системы.

С целью проведения этого, заключительного, этапа педагогического эксперимента и ознакомления специалистов с результатами исследования нами были изданы вторая монография [259], учебные пособия [266, 267] и статьи [177]–[269], опубликованы статьи в зарубежной печати [260–263, 268], в которых отражено содержание авторских специальных курсов, выполнены теоретические и методические разработки. С результатами исследования мы выступали с докладами на научно-методических и математических конференциях.

При проведении формирующего этапа педагогического эксперимента для получения объективных данных использовались различные виды оценивания и различные виды работ: контрольные работы, беседа, опрос, анкетирование, педагогическое наблюдение, тестирование, экспертная оценка. Оценка эффективности разработанной методической системы проводилась по результатам входных, промежуточных и итоговых измерений, при этом мы следовали рекомендациям Н. В. Кузьминой [78], Д. А. Новикова [90, 91], Талызиной Н. Ф[137, 138], Ю. К. Бабанского [18].

В формирующем этапе педагогического эксперимента по выявлению уровня сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров и обосновании эффективности методической системы участвовали 15 преподавателей, 154 студента (экспериментальная группа), 148 студентов (контрольная группа) второго-третьего курсов. Наблюдение осуществлялось в течение двух лет, входной контроль проводился в начале второго курса, промежуточный – в конце второго курса, выходной – в конце третьего. Проверка выдвинутой гипотезы проводилась с помощью разработанных в разделе 2.3 критериев, применением метода экспертных оценок, вычислением коэффициента $K_i, i=1,2,3$ усвоения содержания критериально-корректностной компетентности (см. Приложение 1), проведением статистической обработки результатов измерений.

Коэффициент $K_i, i=1,2,3$ усвоения содержания критериально-корректностной компетентности бакалавров, соответствующий i-му критерию в контрольной и экспериментальной группах, рассчитывался следующим образом: зафиксированная в ходе контроля сумма баллов группы по i-му критерию делится на максимально возможную сумму баллов группы по i-му критерию, i = 1,2,3. Расчет ведется с точностью до сотых. См. таблицу 4 и рисунки 7,8,9.

Коэффициент усвоения $K_i, i=1,2,3$позволяет оценить прирост усвоенного содержания компетентности при переходе от более низких уровней сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров к более высоким уровням по компонентному составу: коэффициент K_1 соответствует изменению знаниевой компоненты, коэффициенты K_2 и K_3 - деятельностной и личностной, соответственно.

Полученные в ходе анализа изменений величин $K_i, i=1,2,3$, результаты свидетельствуют о положительном влиянии методической системы формирования критериально-корректностной компетентности бакалавров: в ходе эксперимента в экспериментальной группе фиксируется стабильный прирост коэффициентов усвоения содержания $K_i, i=1,2,3$ критериально-корректностной компетентности по каждому из компонентов и переход на более высокие уровни сформированности компетентности; в контрольной группе этот прирост менее значительный.

Далее, анализируя таблицу 4 и рисунки 7,8,9, мы может заключить, что на этапе промежуточного контроля в контрольной и экспериментальной группах наблюдаются наибольшие изменения за счет прироста по коэффициенту K_1, который соответствует знаниевой компоненте компетентности. В этот период в контрольной группе значения коэффициента K_1 меняются от значения 0,11 до значения 0,75; в экспериментальной группе изменения еще более значительные: от 0,12 до 0,93. По коэффициентам K_2 и K_3 также имеется прирост, причем в экспериментальной группе он количественно более выражен.

К выходному контролю приоритет в формировании критериально-корректностной компетентности переходит к деятельностному и личностному компонентам: коэффициент K_2, который соответствует деятельностной компоненте, меняется в контрольной группе от 0,5 до 0,67, а в экспериментальной от 0,6 до 0,98; коэффициент K_3, который соответствует личностной компоненте, меняется в контрольной группе от 0,2 до 0,48, а в экспериментальной от 0,5 до 0,87. Эти изменения в экспериментальной группе свидетельствуют о положительном влиянии разработанных нами методических рекомендаций для организации межпредметной математической критериально-корректностной подготовки.

Таким образом, анализ изменения коэффициента $K_i, i = 1, 2, 3$ усвоения содержания критериально-корректностной компетентности бакалавров, соответствующего i-му критерию, подтверждает педагогическую гипотезу исследования: в ходе проведения педагогического эксперимента в экспериментальной группе фиксируется стабильный покомпонентый рост усвоения критериально-корректностной компетентности, более высокий, чем в контрольной группе; на начальных этапах обучения переход от предыдущего уровня сформированности критериально-корректностной компетентности к последующему уровню происходит за счет освоения студентами знаниевой компоненты; в дальнейшем более активно прирастающими становятся деятельностная и личностная компоненты компетентности.

Таблица 4

Коэффициент K_i усвоения содержания компетентности по каждому из критериев критериально-корректностной компетентности бакалавров

Критерии	Входной контроль		Промежуточный контроль		Выходной контроль	
	ЭГ	КГ	ЭГ	КГ	ЭГ	КГ
I критерий (знаниевый)	0, 12	0,11	0,91	0,35	1,00	0,40
II критерий (деятельностный)	0,10	0,09	0,60	0,35	0,98	0,4
III критерий (личностный)	0,10	0,10	0,26	0,2	0,87	0,38

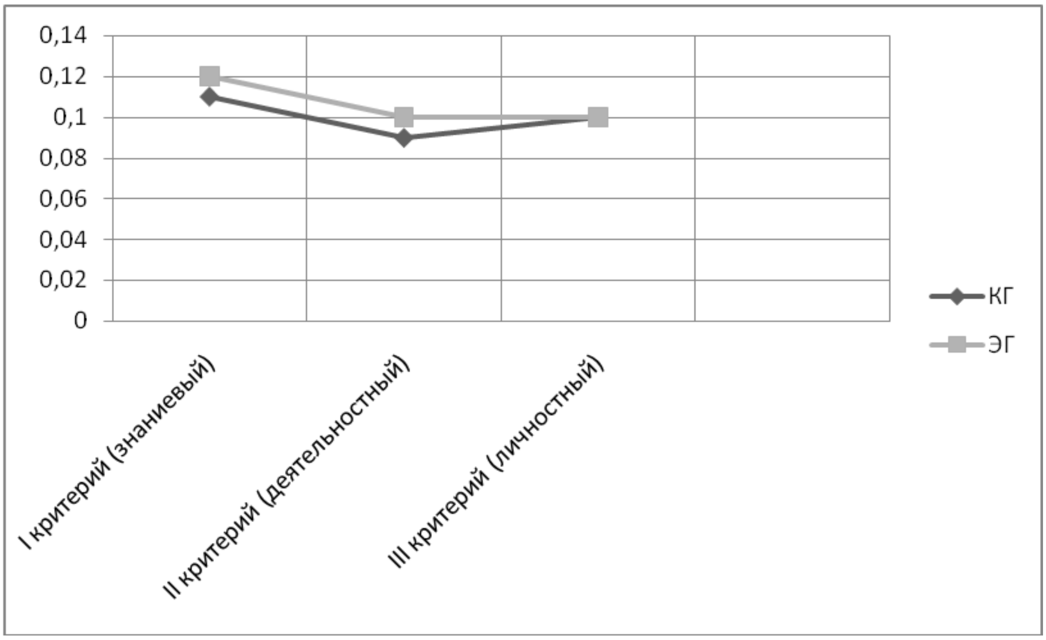


Рисунок 7. Коэффициент усвоения по каждому из критериев на входном контроле

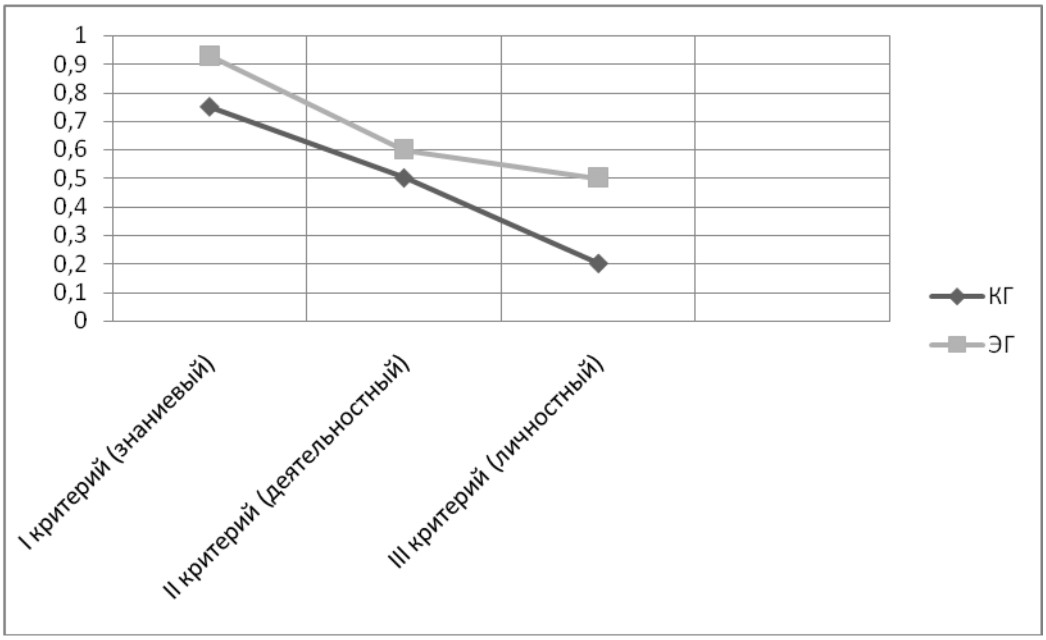


Рисунок 8. Коэффициент усвоения по каждому из критериев на промежуточном контроле

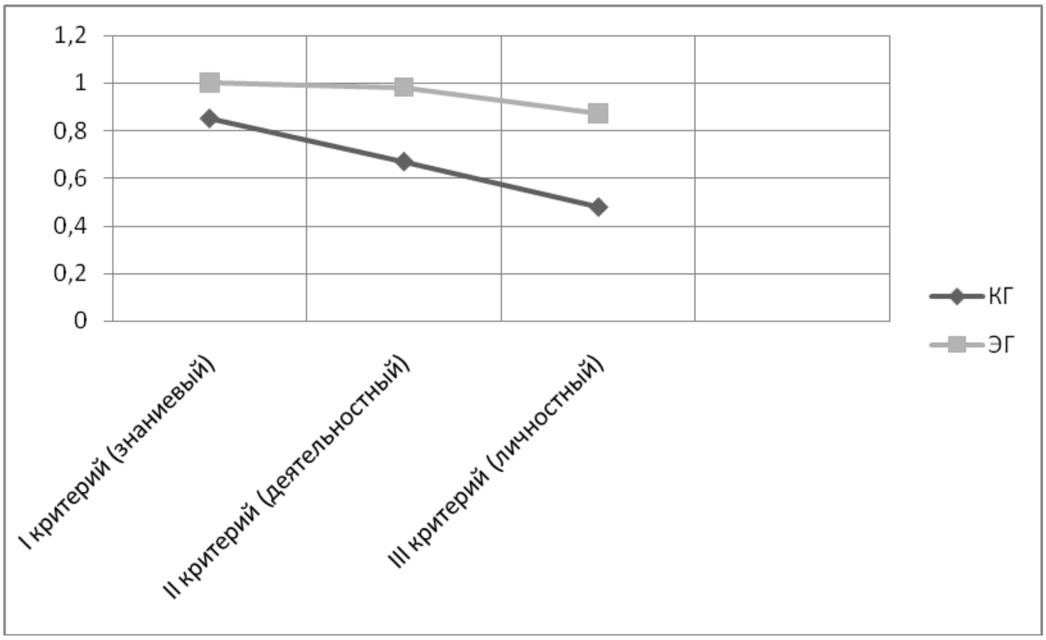


Рисунок 9. Коэффициент усвоения по каждому критерию на выходном контроле

Для дальнейшей проверки результатов педагогического эксперимента о достоверности различий образовательных результатов студентов в контрольной и экспериментальной группах использовался χ^2 – критерий Пирсона[90], [91] на уровне значимости 5 % (таблица 5, рисунок 10, диаграммы 1, 2).

В соответствии с выделенными в исследовании уровнями критериально-корректностной компетентности I-V результаты педагогических измерений представлены в таблице 5.

Таблица 5

Уровень сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров в контрольной (КГ) и экспериментальной (ЭГ) группах ДО эксперимента (входной контроль) и ПОСЛЕ эксперимента (выходной контроль)

Уровень сформированности	кг до экс.	эг до экс.	кг после экс.	эг после экс.
I	115	108	16	5
II	23	35	26	9
III	10	11	52	30
IV	0	0	28	54
V	0	0	26	56
	148	154	148	154

Выдвигаем статистические гипотезы.
Нулевую:

H_0 – значимые (существенные) различия в сформированности критериально-корректностной компетентности студентов контрольной и экспериментальной групп отсутствуют;

И конкурирующую:

H_1 – значимые (существенные) различия в сформированности критериально-корректностной компетентности студентов контрольной и экспериментальной групп имеют место.

Экспериментальное значение критерия Пирсона $\chi^2_{экс}$ рассчитываем по формуле:

$$\chi^2_{экс} = N \cdot M \cdot \sum_{i=1}^{i=L} \frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i + m_i}$$

где

N = 148 – количество студентов контрольной группы;

M = 154 – количество студентов экспериментальной группы;

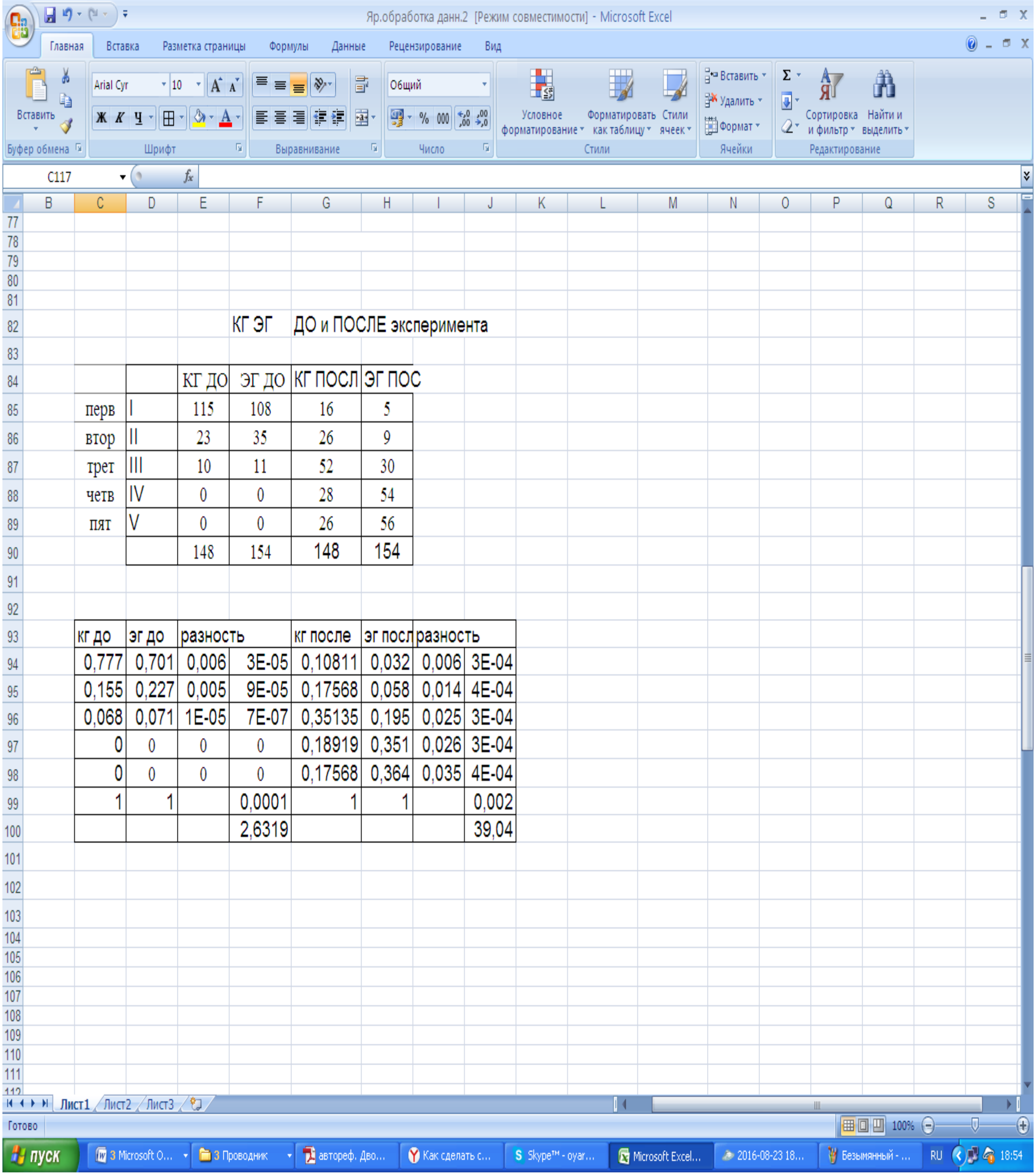
L=5 – число интервалов, на которые разбито множество значений оценки сформированности математической компетентности студентов;

n_i – количество студентов контрольной группы, достигших i-го уровня сформированности критериально-корректностной компетентности, i= I, II, III, IV, V;

m_i - количество студентов экспериментальной группы, достигших i-го уровня сформированности критериально-корректностной компетентности, i= I, II, III, IV, V;

Критическое значение критерия Пирсона для степеней свободы k = L – 1 = 4 и 5 % -уровня значимости равно $\chi^2_{0,05} = 9,49$.

Расчет экспериментального значения критерия Пирсона $\chi^2_{экс}$ проводился в системе EXCEL, результаты приведены на рисунке 10.



КГ ЭГ ДО и ПОСЛЕ эксперимента

		КГ ДО	ЭГ ДО	КГ ПОСЛ	ЭГ ПОС
перв	I	115	108	16	5
втор	II	23	35	26	9
трет	III	10	11	52	30
четв	IV	0	0	28	54
пят	V	0	0	26	56
		148	154	148	154

кг до	эг до	разность		кг после	эг посл	разность	
0,777	0,701	0,006	3E-05	0,10811	0,032	0,006	3E-04
0,155	0,227	0,005	9E-05	0,17568	0,058	0,014	4E-04
0,068	0,071	1E-05	7E-07	0,35135	0,195	0,025	3E-04
0	0	0	0	0,18919	0,351	0,026	3E-04
0	0	0	0	0,17568	0,364	0,035	4E-04
1	1		0,0001	1	1		0,002
			2,6319				39,04

Рисунок 10. Статистическая обработка данных педагогического эксперимента в EXCEL

До проведения педагогического эксперимента получено значение критерия $\chi^2_{экс}$ =2,63. Сравнивая его с критическим значением $\chi^2_{0,05} = 9,49$, получаем:

$$\chi^2_{экс} = 2{,}63 \leq \chi^2_{0{,}05} = 9{,}49.$$

Это означает, что ДО проведения педагогического эксперимента нет оснований опровергнуть нулевую гипотезу H_0, поэтому экспериментом подтверждено, что различия в уровне сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров в контрольной и экспериментальной группах до проведения эксперимента отсутствуют.

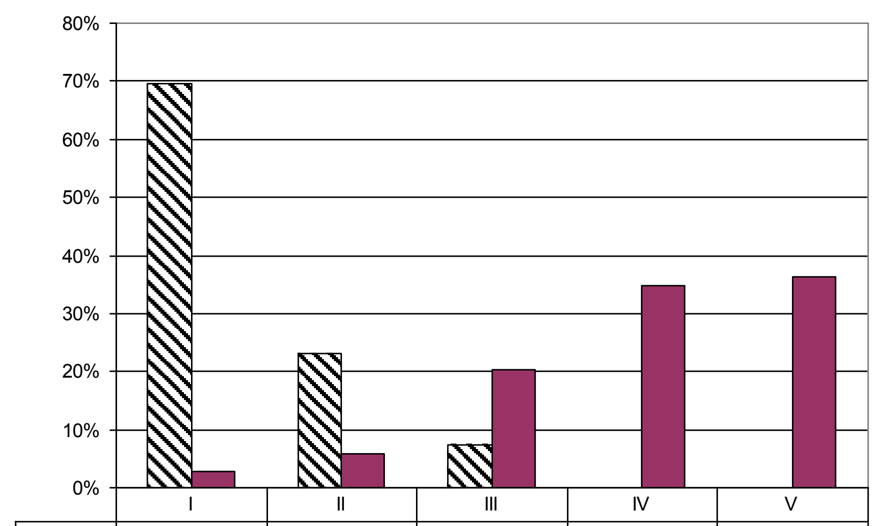
После проведения педагогического эксперимента получено $\chi^2_{экс}$ =39,04. Сравнивая с критическим значением критерия $\chi^2_{0{,}05} = 9{,}49$, будем иметь:

$$\chi^2_{экс} = 39{,}04 \geq \chi^2_{0{,}05} = 9{,}49.$$

Это означает, что ПОСЛЕ проведения педагогического эксперимента есть основания опровергнуть нулевую гипотезу H_0 об отсутствии различий в уровне сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров в контрольной и экспериментальной группах, и принять конкурирующую гипотезу H_1 о том, что после проведения эксперимента эти различия существенны.

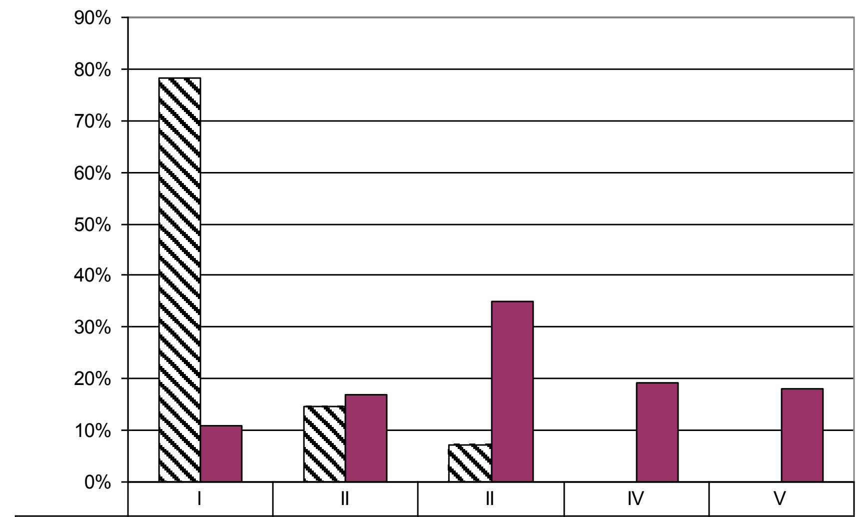
Статистическая обработка результатов измерений приводит к положительной оценке изменений показателей сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров в условиях построенной модели.

Диаграммы 1, 2 дают результаты (в процентах) достигнутого уровня сформированности критериально-корректностной компетентности в экспериментальной и контрольной группах, соответственно. Эти диаграммы свидетельствуют об эффективности методической системы критериально-корректностной математической подготовки бакалавров, переход на более высокие уровни сформированности критериально-корректностной компетентности в экспериментальной группе наблюдается для значительно большего числа студентов, чем в контрольной группе.



	I	II	III	IV	V
ЭГ ДО	70%	23%	7%	0	0
ЭГ ПОС	3%	6%	20%	35%	36%

Диаграмма 1. Уровень сформированности критериально-корректностной компетентности студентов экспериментальной группы ДО и ПОСЛЕ проведения эксперимента.



	I	II	II	IV	V
КГ ДО	78%	15%	7%	0	0
КГ ПОСЛ	11%	17%	35%	19%	18%

Диаграмма 2. Уровень сформированности критериально-корректностной компетентности студентов контрольной группы ДО и ПОСЛЕ проведения эксперимента.

Таким образом, результаты формирующего этапа педагогического эксперимента свидетельствуют об эффективности разработанных методических рекомендаций и дидактических материалов.

В целом, проведение педагогического эксперимента подтвердило гипотезу педагогического исследования.

Основные выводы и результаты главы IV

1. Построенная система межпредметно-корректностных модулей и разработанные спецкурсы «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий», «Корректные и некорректные задачи математической физики» обладают следующими особенностями:

– реализуют межпредметную и внутрипредметную интеграцию на основе понятия «корректность»;

– основаны на принципах математической корректности, незавершенности знаний, спиралеобразного развития корректного знания;

– ориентированы на формирование приемов обоснования корректности, распознавания некорректности и преобразования ее в корректность;

– в реализованной методической системе выполняют роль эффективных средств формирования критериально-корректностной компетентности бакалавров физико-математических направлений.

2. Система межпредметно-корректностных модулей выводит формирование критериально-корректностной компетентности на манипулятивный уровень; спецкурсы «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий», «Корректные и некорректные задачи математической физики» выводят формирование критериально-корректностной компетентности на прагматический, оптимальный и автономный уровни.

3. В результате проведения педагогического эксперимента было получено обоснование эффективности разработанной методической системы. Педагогический эксперимент показал целесообразность внедрения методической системы критериально-корректностной математической подготовки в практику вузовской работы.

4. Как показывают результаты педагогического эксперимента, выделение критериально-корректностной математической подготовки и применение разработанной методической системы обеспечивают овладение студентами на высоких диагностических уровнях (прагматическом и оптимальном) критериально-корректностной компетентностью, в состав которой входят межпредметные результаты образования:

– знания о структуре задачи и деятельности по ее решению;

– умения строить устную и письменную диалоговую речь в виде последовательности корректных вопросов и ответов;

– владение системой УУД: обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировка, – и приемами преодоления некорректности;

– готовность к использованию универсального критерия «корректность» в формировании мировоззрения, ценностного отношения к окружающему миру и оценке личных проблем.

5. Разработанная модель методической системы, в частности средства ее реализации, могут использоваться в практике обучения студентов других направлений и профилей, где для освоения системы межпредметно-корректностных модулей и содержания спецкурса «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий» не требуется специальных математических знаний, а достаточно общего математического образования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования была достигнута его цель, получила подтверждение гипотеза и определены дальнейшие перспективы разработки данной проблематики.

1. На основе анализа философских, математических, психолого-педагогических, научно-методических источников установлено, что понятие «корректность» обладает свойствами общности, абстрактности, универсальности, относительности, фундаментальности, системности, положительности и ему присущи функции: дидактическая, развивающая, воспитательная.

Установлено, что, являясь оценочным понятием, универсальным критерием, понятие «корректность» в то же время представляет собой с точки зрения теории и методики обучения математике, метапонятие, а с точки зрения формальной логики – межпредметную категорию.

На основе анализа философских, математических, психолого-педагогических, научно-методических источников установлено, что понятие «корректность» многоаспектно:

– обладает номинальным (терминологическим) и общеупотребительным смыслом (содержательный аспект);

– позволяет выделить универсальные учебные действия, адекватные данному понятию и приемы деятельности по преодолению некорректности (деятельностный аспект);

– на основе понятия «корректность» формулируются специальные принципы критериально-корректностной математической подготовки (математической корректности, незавершенности знания, спиралеобразного развития корректного знания), выдвинутые и обоснованные автором, которые определяют выстраивание критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений (дидактический аспект);

– дает возможность формировать ценностное отношение к окружающему миру, личностные качества, осваивать общекультурные и моральные ценности, с философских позиций оценивать и осмысливать математические факты, формировать грамотную устную и письменную речь в виде последовательности корректных вопросов и ответов, (общекультурный, философский и личностно-мировоззренческий аспекты).

2. На основе разноаспектных представлений о понятии «корректность» осуществлен анализ учебно-методической литературы, учебников, учебных пособий, теории и практики профессиональной подготовки бакалавров в системе высшего образования с точки зрения его использования в учебном процессе. Проведенный анализ показал разрозненность, отсутствие системности в осуществлении идеи корректности в образовательном процессе, несмотря на социальные потребности в профессиональной подготовке такого вида, закрепленные в положениях ФГОС ВПО, ФГОС ВО. На этом основании мы пришли к выводу о необходимости выделения нового вида межпредметной математической подготовки – критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений.

3. На основе понимания компетентности как владении рядом компетенций, сформулированные в работе критериально-корректностные компетенции и компетентность бакалавра выступили в качестве основных конструктов проведенного педагогического исследования. Как показывает классификация компетенций, критериально-корректностные компетенции могут быть отнесены к числу профессиональных с чертами общекультурных.

4. Разработанная концепция критериально-корректностной математической подготовки бакалавров, основанная на понятии «корректность» как на ведущей идее, обеспечивает целенаправленный непрерывный шестиэтапный процесс осуществления критериально-корректностной математической подготовки. В основу концепции положены теоретические положения системного, деятельностного, компетентностного подходов, идея корректности, принципы фундаментализации, сознательности и активности, интегративности, ориенти-

рованности высшего образования на развитие личности будущего специалиста; принципы гуманизации и гуманитаризации; принцип соответствия содержания вузовского образования современным и прогнозируемым тенденциям развития науки (принцип фундаментализации); принцип прикладной и профессиональной направленности обучения; принцип модульности, рационального применения современных методов и средств обучения на различных этапах подготовки бакалавров, принцип воспитывающего и развивающего обучения, а также специальные принципы: математической корректности, незавершенности знания, спиралеобразного развития корректного знания.

Разработанная концепция была положена в основу проектирования шестиуровневого процесса формирования критериально-корректностной компетентности бакалавров.

5. Созданная модель методической системы критериально-корректностной математической подготовки бакалавров базируется на системном, деятельностном и компетентностном подходах.

Сформулированные и разделенные на шесть групп цели исследования: развивающие, общекультурные, воспитательные, общеобразовательные, научные, прикладные, – связаны с принципами и содержательным, деятельностным, дидактическим и общекультурным аспектами понятия «корректность».

Содержание критериально-корректностной математической подготовки состоит из набора критериально-корректностных компетенций и отражено в совокупности учебных дисциплин, учебных предметов, учебных тем, всего массива учебных материалов с межпредметной и внутрипредметной интеграцией, метапредметностью, знаний требований корректности к основным математическим объектам и осуществления творческой деятельности, осуществления эмоционально-нравственных отношений на основе различных аспектов понятия «корректность».

Основными средствами формирования критериально-корректностной компетентности в разработанной методической системе стали система межпредметно-корректностных модулей и интегрированные спецкурсы.

6. Проведенный педагогический эксперимент подтвердил эффективность разработанной методической системы, т.е. гипотеза исследования была обоснована теоретически и подтверждена экспериментально. Эксперимент показал стабильную тенденцию к росту уровня сформированности критериально-корректностной компетентности в условиях применения разработанной методической системы.

За рамками диссертационного исследования остались вопросы формирования критериально-корректностной компетентности школьников и студентов колледжей, а также студентов гуманитарных и педагогических факультетов вуза, для которых понятие «корректность» играет заметную роль в профессиональной деятельности. Кроме того, возможно проведение исследований в психологическом направлении с целью выявления связи формирования критериально-корректностной компетентности со свойствами психических познавательных процессов обучающихся, в частности, с их продуктивностью, с критическим и интеррогативным мышлением.

Приложение 1. Диагностические материалы

Анкета
для определения первоначальных знаний по проблеме «Математическая корректность»

1. Что, по-вашему, представляет собой
а) корректная математическая задача?
б) некорректная математическая задача?
в) логически корректный вопрос?
г) логически некорректный вопрос?

2. Знаете ли Вы какое-либо определение корректной/некорректной задачи в математике? Кому оно принадлежит?

3. Знакомо ли Вам определение Ж. Адамара корректной и некорректной математической задачи? Если – да, то приведите его.

4. Что, по-вашему, означает каждое из следующих выражений:
а) некорректное доказательство?
б) некорректное определение?
в) некорректное применение метода?
г) некорректный вывод?
д) некорректный вопрос?

5. Интересны ли для Вас проблемы корректности в математике?

6. Решите задачу. Круизный лайнер водоизмещением 225 тыс. тонн направляется из порта Владивосток в порт Веллингтон (Новая Зеландия). На лайнере 7 палуб, теннисный корт, ресторан, бары, бассейн, каток, численность экипажа – 2165 человек, максимальное число пассажиров – 6400человек.

а) Какой возраст первого капитана лайнера?

б) Какой, по-вашему, может быть возраст первого капитана лайнера?

Объясните свой ответ в обоих случаях.

7. Решите задачу. Дана окружность радиуса 12, вписанная в угол 60°. Найдите радиус окружности, которая касается сторон угла и данной окружности.

8. Решите уравнения: $x^2 + 2x + 17 = 0$; б) sin x=2 ; в) $X^2 = 0$.

9. Чему равно 1+1 =?

10. Решите задачу. Найдите площадь прямоугольного треугольника, гипотенуза которого 11 дюймов, а опущенная на нее высота 6 дюймов.

11. Как Вы ответите на вопрос: «Чему равна площадь треугольной пирамиды?»

12. Как Вы ответите на вопрос: «Чему равно А+А ?»

13. Восстановите записи: $(....(...x + ...))' = e^x(2x + ...) + 2e^x$

а) Можно ли это сделать единственным образом?

б) Какие дополнительные условия могут обеспечить однозначность восстановления записей?

14. С точностью до десятых найдите корни уравнения:

$0{,}0001x^2 - 20x + 10 = 0$.

Диагностическая контрольная работа для определения уровня сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров

I. Охарактеризуйте с точки зрения корректности следующие вопросы. Ответьте на каждый из вопросов, ответ обоснуйте.

1. Что геометрически представляет собой множество точек $x=2$?

2. Как можно объяснить, что 16+23=15?

3. Сколько дней от Нового Года до Рождества?

4. Чему равна сумма внутренних углов 6 угольника?

5. Чему равна вероятность события, состоящего в том, что число на листке календаря, оторванного наудачу, равно 29?

6. Чему равна производная функции $f(x, y) = x^2 + y^2$?

7. Какое число из двух заданных чисел $z_1 = 1 + i$ *è* $z_2 = 1 + 2i$ больше?

8. Приведите пример события, вероятность которого равна 1,2.

9. Может ли быть $C_k^n = \dfrac{7}{3}$?

10. Всегда ли верно, что A+A=2A ?

II. Решите следующие задачи. Охарактеризуйте эти задачи с точки зрения их корректности. Ответ обоснуйте.

11. Какова вероятность того, что из наудачу разломанной палки можно сложить треугольник?

12. Вершины B, C равнобедренного треугольника $\Delta\ ABC, AB = AC$ лежат на параболе $y = x^2$. Точка A имеет координаты $(0, 2)$. Угол A в треугольнике равен 120^0, сторона BC параллельна оси OX. Найдите площадь треугольника ΔABC.

13. В каждом из случаев а), б), в) решите задачу Коши. Сколько решений имеет задача Коши?

а) $\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

14. В каждом из случаев а), б), в) решите уравнение. Сколько решений имеет уравнение?

а) $x^2 - 2x + 26 = 0$;

б) $e^x = -1$;

в) $\cos x = \sqrt{2}$.

15. Найдите коэффициенты α, β уравнения $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ в каждом из случаев а), б):

а) если известно, что функция $y = e^{-x}$ является решением этого уравнения;

б) если известно, что функция $y = e^{-x} + 2xe^{-x}$ является решением этого уравнения.

Сколько решений имеет задача в каждом из случаев?

16. Как ставятся прямая и обратная задачи Дирихле для уравнения Лапласа? Что известно об их корректности?

17. Как ставится задача Коши для уравнения Лапласа? Что известно о ее корректности?

18. Как ставятся прямая и обратная задачи теплопроводности? Что известно об их корректности?

19. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 14 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \\ 2x_1 + 4x_2 = 20 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases}$$

20. Найдите функцию $u = u(x)$, которая удовлетворяет функциональному уравнению, допуская, что такая функция существует и имеет производную. Сколько решений имеет уравнение в каждом из случаев?

а) $u(xy) = u(x) + u(y)$

б) $u(x+y) = u(x) + u(y)$

в) $u(x+y) = u(x) \cdot u(y)$

Экспертный лист оценки сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров

Критерий	Показатели	Баллы		
		2	1	0
I критерий Знаниевый	1) владение терминологической и обще-употребительной корректностью; 2) характер знаний по вопросам корректности: - знания – трансформации, - знания – умения, - знания – узнавание, 3) знания о корректности - математической задачи, - модели - вопроса и ответа, - формулировки задачи, определения понятий, метода, доказательства, решения; 4) решение некорректных задач: - найдены все решения, - выявлены противоречия, неопределенность, избыточность условий, - владение содержательным и операциональным составом задачи, - дан правильный ответ; 5) знания состава УУД			
II критерий Деятельностный	1) владение деятельностью: - распознавание корректности, - распознавание некорректности, - преодоление некорректности;			

	2) владение универсальным составом деятельности: - обоснование однозначной определенности, - варьирование, - корректировка. 3) характеристика выполнения действий: - развернутость, - обобщенность, - освоенность, - прочность, - осознанность.			
III критерий Личностный	1) личностные качества: - критичность, - креативнсть, - чувствительность к деталям, - открытость новому; 2) характер мотивации (учебно-познавательная, внешняя, мотивация отсутствует) 3) оценка с точки зрения корректности - объектов окружающего мира, - мировоззренческих и личностно-зна - чимых проблем.			

2 балла – высокая степень выраженности указанного признака,

1 балл – средняя степень выраженности указанного признака;

0 баллов – указанный признак отсутствует.

Таблица соответствия зафиксированных баллов достигнутому уровню сформированности критериально-корректностной компетентности бакалавров

Баллы	0-14	15-28	29-32	33-46	47-70
Уровни	I	II	III	IV	V

Коэффициент $K_i, i = 1, 2, 3$ усвоения содержания критериально-корректностной компетентности бакалавров, соответствующий i-му критерию в контрольной и экспериментальной группах рассчитывается следующим образом: зафиксированная в ходе контроля сумма баллов группы по i-му критерию делится на максимально возможную сумму баллов группы по i-му критерию, i = 1,2,3. Расчет ведется с точностью до сотых.

Приложение 2. Рабочие программы

Рабочая программа дисциплины «Дополнительные главы дифференциальных уравнений. Регулярное обобщение математических понятий. Корректность задач математической физики»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Орловский государственный университет»

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

учебной дисциплины

Дополнительные главы дифференциальных уравнений.
Регулярное обобщение математических понятий.
Корректность задач математической физики

Направление подготовки: 01.03.01 Математика

Профиль: Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление

Квалификация (степень): бакалавр

Форма обучения: очная

Составитель:
к.ф.-м.
н., доцент,
докторант,
Яремко Н.Н.

Орел, 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Орловский государственный университет»

Физико-математический факультет

Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

(УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ)

учебной дисциплины

Дополнительные главы дифференциальных уравнений.
Регулярное обобщение математических понятий.
Корректность задач математической физики

Направление подготовки: 01.03.01 Математика

Профиль: Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление

Квалификация (степень): бакалавр

Форма обучения: очная

Составитель:

к.ф.-м. н., доцент,
докторант,
Яремко Н.Н.

Орел, 2014

Выписка из протокола заседания кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений об утверждении программы дисциплины Дополнительные главы дифференциальных уравнений. Регулярное обобщение математических понятий. Корректность задач математической физики.

Данная программа составлена в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования от 07 августа 2014 № 943 по направлению подготовки 01.03.01 «Математика» (квалификация (степень) «бакалавр»).

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений

Протокол № 1 от 29.08.2014 г.

Зав. кафедрой математического анализа и
дифференциальных уравнений А.Н. Зарубин

Данная программа обсуждена и утверждена на заседании научно-методического совета физико-математического факультета

Протокол № 1 от 30.08. 2014 г.

Председатель
научно-методического совета И.И. Чернобровкина

1. Цели и задачи дисциплины

Курс «Доп.главы дифференциальных уравнений. Регулярное обобщение математических понятий. Корректность задач математической физики» имеет общеобразовательное и прикладное значение. Его методы находят дальнейшее развитие в таких математических дисциплинах, как интегральные и дифференциальные уравнения, численные методы, математическое моделирование, функциональный анализ и дифференциально-операторные уравнения. Его результаты используются в вариационном исчислении, математической и теоретической физике, других областях науки и её приложений.

Целью освоения дисциплины «Доп.главы дифференциальных уравнений. Регулярное обобщение математических понятий. Корректность задач математической физики» является формирование и развитие у студентов общекультурных, профессиональных и специальных компетенций, формирование систематизированных знаний в области математического анализа, о его месте и роли в системе математических наук, приложениях в естественных науках; формирование умений и навыков в области теории дифференциальных и интегральных уравнений и её основных методов, позволяющих подготовить конкурентоспособного выпускника для научно-исследовательской и материально-технической сфер деятельности, сферы образования, готового к инновационной творческой реализации в различных учреждениях.

Задачи изучаемой дисциплины формируются

исходя из общих целей подготовки бакалавра физико-математического направления «Математика» по профилю «Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление»:

- содействовать средствами дисциплины «Доп.главы дифференциальных уравнений. Регулярное обобщение математических понятий. Корректность задач математической физики» развитию у студентов мотивации к исследовательской профессиональной деятельности, профессионального мышления, коммуникативной готовности, общей культуры;
- научить студентов ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи;

исходя из конкретного содержания дисциплины:

- научить студентов регулярному обобщению математических понятий, способствовать формированию фундаментальных математических понятий обобщенной функции, ее производной и интеграла, суммируемости расходящихся рядов, освоению понятий квазирешения и приближенного решения;
- сформировать систему знаний и умений в области корректных и некорректных прямых и обратных задач математической физики, необходимых для применения в будущей профессиональной деятельности, при изучении смежных дисциплин, проведении научных исследований;
- познакомить студентов с приложениями математического анализа в естественных науках;

- научить студентов доказательно рассуждать, выдвигать гипотезы и их обосновывать;
- научить поиску, систематизации и анализу информации, используя разнообразные информационные источники, включая учебную и справочную литературу;
- научить использовать информационные технологии в будущей профессиональной деятельности.

2. Место дисциплины в структуре ООП

Настоящая дисциплина относится к блоку Б.1, вариативной части, дисциплина по выбору (Б1.В.ДВ.7.1). Курс предназначен для студентов по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», профиль подготовки «Дифференциальные уравнения, динамические системы, оптимальное управление»; читается в 5-8 семестрах. От обучающихся требуется знание математического анализа, алгебры, геометрии, физики, численных методов, истории математики. Программа соответствует требованиям стандарта. В данном курсе рассматриваются основные регулярные обобщения математических понятий, разделы математической физики, образующие элемент базового образования студентов по данному направлению.

Сведения, полученные при изучении данного курса, будут использоваться в таких математических дисциплинах, как уравнения математической физики, вариационное исчисление, численный анализ, теоретическая физика и в других областях науки и её приложений.

Обучение имеет целью сформировать у студентов следующие компетенции:

– способность использовать основы философских знаний для формирования мировоззренческой позиции (ОК-1);

- способность к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках; для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия (ОК-5);

- готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности (ОПК-1);

- способность к самостоятельной научно-исследовательской работе (ОПК-3);

- способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики (ПК-2);

- способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата (ПК-3);

- способность работать с математической задачей на основе понятия «корректность» (СК-1);

- способность выявлять некорректность математических объектов: математической модели, формулировок задач, доказательств, применения методов и т.п. – и владеть способами ее преобразования в корректность (СК-2);
- способность строить устную и письменную речь, вести научную дискуссию, осуществлять мыслительный процесс в форме диалоговой последовательности корректных вопросов и ответов (СК-3);
- способность осуществлять анализ философских, мировоззренческих и естественно-научных проблем с точки зрения понятия «корректность» (СК-4).

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

1) знать: основные понятия и строгие доказательства фактов основных разделов курса «Регулярное обобщение математических понятий. Корректность задач математической физики»

2) уметь: применять теоретические знания к решению задач по курсу; использовать в смежных дисциплинах основные методы регулярного обобщения математических понятии, теории корректных и некорректных задач математической физики;

3) владеть: различными приемами использования идеологии курса «Регулярное обобщение математических понятий. Корректность задач математической физики»; применять полученные знания к исследованию различных процессов и явлений окружающего мира;

- навыками корректного использования терминологии курса «Регулярное обобщение математических понятий. Корректность задач математической физики», навыками изложения доказательств и утверждений;

- навыками использования корректных и некорректных математических моделей в решении практических задач.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВПО по данному направлению:

Карта компетенций дисциплины

ОК-1	способность использовать основы философских знаний для формирования мировоззренческой позиции	Знать: сущностные характеристики общекультурной, философской составляющих понятия «корректность»,
		Уметь: использовать принципы спиралеобразности развития корректного знания и незавершенности знания при решении математических задач, при работе с корректными и некорректными объектами.

		Владеть: основными методами распознавания корректности и некорректности объектов математической и нематематической природы, преодоления некорректности,
ОК-5	способность к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках; для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия	Знать: требования корректности постановки вопросов, проведения обсуждений, организации дискуссий, организации устной и письменной речи.
		Уметь: применять требования корректности постановки вопросов, проведения обсуждений, организации дискуссий. организации устной и письменной речи.
		Владеть: основными механизмами преобразования некорректности при осуществлении коммуникации в устной и письменной формах.
ОПК-1	готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	Знать: основные методы доказательства и алгоритмы анализа Фурье, спектрального анализа, законы логики математических рассуждений в разделах: метод Фурье для решения краевых задач, метод спектрального анализа.
		Уметь: применять основные методы доказательных математических рассуждений при решении уравнений в частных производных, применять метод Фурье, метод спектрального анализа, теорию обобщенны функций в пространствах Соболева.
		Владеть: навыками применения основных алгоритмов метода Фурье, спектрального анализа во всех разделах математического и физического знания.

ОПК-3	способностью к самостоятельной научно-исследовательской работе	Знать: законы логики математических рассуждений в разделах: метод Фурье для решения краевых задач, метод спектрального анализа в курсе математической физики.
		Уметь: применять основные методы доказательных математических рассуждений в при решении уравнений в частных производных.
		Владеть: навыками использования законов логики математических рассуждений в других областях математики.
ПК-2	способностью математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	Знать: корректные постановки основных краевых задач в пространствах Соболева, основные положения метода Фурье, основы теории потенциала, владеть методом разложения по системе собственных функций.
		Уметь: использовать основные положения этих разделов науки при решении задач с практическим содержанием.
		Владеть: основными методами анализа Фурье, спектрального анализа, методами исследования задачи на корректность.
ПК-3	способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	Знать: основные методы доказательства и алгоритмы анализа Фурье, спектрального анализа.
		Уметь: применять метод Фурье, метод спектрального анализа, теорию обобщенных функций в пространствах Соболева.
		Владеть: навыками применения основных алгоритмов метода Фурье, спектрального анализа во всех разделах математического и физического знания.

СК-1	способность работать с математической задачей на основе понятия «корректность».	Знать: а) межпредменые знания: - знания о структуре задачи (данные, требование, решение, обоснование, предметная область), - знания об этапах решения задачи (осмысление условий и требования задачи, поиск решения, осуществление решения, «взгляд назад»); – знания о структуре деятельности по решению задачи (предмет, цель, средства, способы действий, результат); б) предметные математические знания: понятия, основные утверждения (теоремы, свойства, взаимосвязь между ними), знание методов решения ключевых задач, знание трех требований корректности задачи
		Уметь: выделять структурные звенья задачи; выполнять анализ данных и требования задачи; осуществлять целенаправленный поиск решения задачи, составлять алгоритм решения; правильно реализовывать алгоритм решения; осуществлять «взгляд назад»;
		Владеть: методами проверки задачи на корректность (полнота и непротиворечивость данных, единственность решения, варьирование данных и метода решения, корректировка метода решения) на каждом из этапов решения задачи; методами решения модельных корректных и некорректных задач.

СК-2	способность выявлять некорректность математических объектов: математической модели, формулировок задач, доказательств, применения методов и т.п. – и владеть способами ее преобразования в корректность	Знать: законы логики математических рассуждений в разделах: метод Фурье для решения краевых задач, метод спектрального анализа в курсе математической физики.
		Уметь: выполнять анализ и синтез, осуществлять проверку на однозначную определенность, непротиворечивость объектов, варьирование, корректировку, оценивать адекватность внешних и внутренних условий, определяющих корректность..
		Владеть: навыками исследования объектов произвольной природы на основе понятия «корректность» в других предметных областях и в реальной жизни; механизмами распознавания корректности и некорректности; механизмами преодоления некорректности.
СК-3	способность строить устную и письменную речь, вести научную дискуссию, осуществлять мыслительный процесс в форме диалоговой последовательности корректных вопросов и ответов.	Знать: структурные компоненты вопроса и ответа
		Уметь: выделять в структуре вопроса его компоненты (явные и неявные посылки, требование), корректно формулировать вопрос и ответ, – корректировать, варьировать вопрос и ответ, правильно реагировать на некорректный вопрос
		Владеть: понятием «корректность» для оценки вопросов и ответов.
СК-4	способность осуществлять анализ философских, мировоззренческих и естественнонаучных проблем с точки зрения понятия «корректность».	Знать: о законах диалектики, относительности истины, неограниченности познания, о незавершенности знаний,
		Уметь: применять понятие «корректность» к исследованию указанных проблем, умение осуществлять деятельность, адекватную данному понятию: обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировку.

		Владеть: навыками исследования объектов произвольной природы на основе понятия «корректность» в других предметных областях и в реальной жизни; механизмами распознавания корректности и некорректности; механизмами преодоления некорректности.

Карта формирования компетенций

Формируемые компетенции в соответствии с ОПП	Название темы, раздела для формирования компетенций	Формирование компетенций (формы, методы, средства)	Средства оценки
ОК-1, ОК-5	разделы 1-5	Стандартные (лекционно-семинарские) и интерактивные с применением мультимедийных средств: информационная лекция, лекция-визуализация, работа в малых группах, case-study, метод проектов, выполнение индивидуальных заданий; подготовка докладов и рефератов; разработка мультимедийных презентаций; устный ответ; участие во фронтальном опросе и дополнениях	тестирование; контрольная работа; коллоквиум; написание вопроса по лекциям; зачет; экзамен, научная работа
ОПК-1, ОПК-3 ПК-2, ПК-3	разделы 1- 5	Стандартные (лекционно-семинарские) и интерактивные с применением мультимедийных средств: информационная лекция, лекция-визуализация, работа в малых группах,case-study, метод проектов, выполнение индивидуальных заданий; подготовка докладов и рефератов; разработка мультимедийных презентаций; устный ответ; участие во	тестирование; контрольная работа; коллоквиум; написание вопроса по лекциям; зачет; экзамен, научная работа

		фронтальном опросе и дополнениях	
СК-1, СК-2, СК-3, СК-4	разделы 1- 5	Стандартные (лекционно-семинарские) и интерактивные с применением мультимедийных средств: информационная лекция, лекция-визуализация, работа в малых группах,case-study, метод проектов, выполнение индивидуальных заданий; подготовка докладов и рефератов; разработка мультимедийных презентаций; устный ответ; участие во фронтальном опросе и дополнениях	тестирование; контрольная работа; коллоквиум; написание вопроса по лекциям; зачет; экзамен, научная работа

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины для очной формы обучения составляет 7 зачетных единиц (252 академических часов).

Виды учебной работы	Всего часов		семестры			
	всего	в т.ч. в интерактивной форме	5	6	7	8
Аудиторные занятия (всего)	144	44	36	36	28	44
В том числе:						
Лекции	72	14	18	18	14	22
Практические занятия	72	30	18	18	14	22
Семинары						
Лабораторные занятия						
Самостоятельная работа (всего)	36		9	27	17	10
В том числе:						
Курсовая работа (проект)					17	
Реферат						
Другие виды самостоятельной работы			9	27		45
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)	72			экзамен	зачет	экзамен
Общая трудоемкость: часов /зач.ед.	252/7					

5. Структура и содержание дисциплины

Раздел 1. Универсальность определения Ж.Адамара корректной и некорректной математической задачи. Корректность математических объектов и их дидактический анализ.

Раздел 2. Решение несовместных систем линейных уравнений. Понятие о квазирешении и регуляризованном решении. Обобщение понятия производной и интеграла.

Раздел 3. . Корректные и некорректные задачи дифференциального и интегрального исчислений.

Раздел 4. Теория потенциала.

Тема 4.1. Вывод основных уравнений математической физики и постановка граничных условий. Классификация линейных уравнений второго порядка. Приведение уравнения к каноническому виду. Многомерная формула интегрирования по частям. Формулы Грина. Задача Коши. Характеристики. Соотношение между данными Коши на характеристике. Формулировка теоремы Коши – Ковалевской. Задача Штурма – Лиувилля. Постановка задачи Штурма – Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма – Лиувилля.

Тема 4.2. Уравнение Лапласа. Формула Пуассона. Свойства гармонических функций, вытекающие из формулы Пуассона. Теоремы единственности и необходимые условия разрешимости для внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана. Интегральные уравнения. Теория потенциала. Исследование интегральных уравнений теории потенциала. Разрешимость краевых задач для оператора Лапласа.

Раздел 5. Корректность задач математической физики

Тема 5.1. Корректность основных задач математической физики. Понятие корректной и некорректной математической задачи. Методы решения некорректных задач первого типа. Преобразование Фурье на действительной оси и его обобщение на случай действительной оси с точкой деления.

Тема 5.2. Обратные задачи математической физики. Некорректность задачи продолжения потенциала для уравнения Лапласа. Некорректность задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем.

Тема 5.3. Задачи математической физики неоднородных структур. Задача Дирихле в двухслойной полуплоскости.   Задача Коши в двух слойном пространстве. Интегральные уравнения. Обратные задачи математической физики двухслойных сред.

Учебно-тематический план

№ п/п	Содержание	Количество часов		
		Лекции	практические занятия	самостоятельная работа студентов
1	Универсальность определения Ж.Адамара корректной и некорректной математической задачи. Корректность математических объектов и их дидактический анализ..	4	4	2
2	Решение несовместных систем линейных уравнений. Понятие о квазирешении и регуляризованном решении. Обобщение понятия производной и интеграла.	16	16	3
3	Корректные и некорректные задачи дифференциального и интегрального исчислений.	16	16	4
	Итого (5+6семестры)	36	36	9
4	Теория потенциала Тема 4.1. Вывод основных уравнений математической физики и постановка граничных условий. Классификация линейных уравнений второго порядка. Приведение уравнения к каноническому виду. Многомерная формула интегрирования по частям. Формулы Грина. Задача Коши. Характеристики. Соотношение между данными Коши на характеристике. Формулировка теоремы Коши – Ковалевской. Задача Штурма – Лиувилля. Постановка задачи Штурма – Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма – Лиувилля. Тема 4.2. Уравнение Лапласа. Формула Пуассона. Свойства гармонических функций, вытекающие из формулы Пуассона. Теоремы единственности и необходимые условия разрешимости для внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана. Интегральные уравнения. Теория потенциала. Исследование интегральных уравнений теории потенциала. Разрешимость краевых задач для оператора Лапласа.	18	18	12

5	Корректность задач математической физики Тема 5.1. Корректность основных задач математической физики. Понятие корректной и некорректной математической задачи. Методы решения некорректных задач первого типа. Преобразование Фурье на действительной оси и его обобщение на случай действительной оси с точкой деления. Тема 5.2. Обратные задачи математической физики. Некорректность задачи прдолжения потенциала для уравнения Лапласа. Некорректность задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем. Тема 5.3. Задачи математической физики неоднородных структур. Задача Дирихле в двухслойной полуплоскости. Задача Коши в двухслойном пространстве. Обратные задачи математической физики неоднородных сред. Интегральные уравнения.	18	18	15
	Итого (7+8 семестры)	36	36	27
	итого	72	72	36

6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Доп. главы дифференциальных уравнений. Регулярное обобщение математических понятий. Корректность задач математической физики»

Самостоятельная работа по дисциплине включает в себя изучение теоретических вопросов, решение прикладных задач, работу с научной литературой, выполнение индивидуальных заданий.

График контроля СРС по учебной дисциплине «Доп.главы дифференциальных уравнений. Регулярное обобщение математических понятий. Корректность задач математической физики»

Наименование раздела (темы) учебной дисциплины	Содержание СРС	Форма контроля	Вид СРС
5+6семестры			
Универсальность определения Ж.Адамара корректной и некорректной математической задачи. Корректность математических объектов и их дидактический анализ..	Подготовка к семинарскому занятию, подготовка к устному опросу. Выполнение практического задания	Устный контроль, реферат, тест	СР
Решение несовместных систем линейных уравнений. Понятие о квазирешении и регуляризованном решении. Обобщение понятия производной и интеграла.	Подготовка к семинарскому занятию, подготовка к устному опросу. Выполнение практического задания	Устный и письменный контроль, реферат, коллоквиум	СР
Корректные и некорректные задачи дифференциального и интегрального исчислений.	Подготовка к семинарскому занятию, подготовка к устному опросу. Выполнение практического задания	Устный и письменный контроль, тест, коллоквиум, экзамен	СР
7+8семестры			
Теория потенциала	Подготовка к семинарскому занятию, подготовка к устному опросу. Выполнение практического задания	Устный и письменный контроль, зачет	СР
Корректность задач математической физики	Подготовка к семинарскому занятию, подготовка к устному опросу. Выполнение практического задания	Устный и письменный контроль, экзамен	СР

Темы рефератов (докладов, эссе):

1. Многомерная формула интегрирования по частям. Формулы Грина.
2. Теоремы единственности и необходимые условия разрешимости для внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана.
3. Интегральные уравнения Вольтерра.
4. Сведение задачи Дирихле к интегральному уравнению.
5. Функции Бесселя и их свойства.
6. Явное построение сферических функций.
7. Пространства основных и обобщенных функций. Регулярные обобщенные функции. Функция Дирака.
8. Вывод уравнения Эйлера для одномерного функционала; естественные граничные условия.
9. Вариационный принцип для собственных значений.
10. Вывод основных уравнений математической физики на основе вариационного принципа и постановка краевых задач
11. Уравнение Лапласа. Формула Пуассона для круга.
12. Интегральные уравнения Фредгольма.

Требования к реферату:

1. Объем реферата – 20-25 стр. (включая титульный лист и список литературы), 14 шрифт, 1.5 интервал (*объем реферата определяется преподавателем, учитывая специфику предмета*).
2. Структура реферата включает:
   титульный лист, лист оглавления, введение, главы (не менее 2-х) и параграфы, заключение, список литературы. Названные структурные элементы должны быть выделены в тексте. Введение, глава, заключение должны начинаться с новой страницы.
3. Текст реферата должен содержать ссылки на используемые источники информации: учебники, монографии, статьи, интернет -ресурсы (не допускается использование сайтов рефератов, дипломов и контрольных работ в качестве источников для написания рефератов).

Критерии оценки (*в соответствии с больно-рейтинговой системой*):
Максимальное значение баллов за написание реферата 5.

5 баллов выставляется студенту, если:

- при написании работы выполнены все требования по оформлению реферата;
- тема реферата полностью раскрыта;

- цель и задачи реферата соответствуют его теме и достигнуты в процессе работы;
- все используемые источники литературы снабжены правильно оформленными ссылками.

4 балла выставляется студенту, если:
- при написании работы выполнены все требования по оформлению реферата;
- тема реферата раскрыта, хотя и не полностью;
- цель и задачи реферата соответствуют его теме и в основном достигнуты в процессе работы, допускается невыполнение не более 1 задачи;
- не все, но большинство используемых источников литературы снабжены оформленными ссылками.

3 балла выставляется студенту, если:
- при написании работы выполнены все требования по оформлению реферата;
- тема реферата близка к раскрытию;
- цель и задачи реферата относятся к теме, но не раскрывают ее целиком, в процессе работы большинство задач выполнено;
- некоторые источники литературы снабжены правильно оформленными ссылками.

менее 3 баллов выставляется студенту, если:
- при написании работы выполнены все требования по оформлению реферата;
- реферат в целом соответствует теме, хотя она оказывается и не раскрыта;
- цель и задачи реферата слабо соответствуют его теме или не достигнуты в процессе работы;
- большинство (более 50%) ссылок отсутствует.

Примерные вопросы к коллоквиуму

1. Докажите, что операция обобщенного дифференцирования линейна.

2. Докажите, что для функции интегрируемой и неотрицательной на $[a,\infty)$ значение несобственного интеграла 1-го рода $\int_a^\infty f(x)dx$ и его обобщение совпадают.

3. Исследовать на сходимость в классическом смысле интеграл $\int_0^\infty \cos x dx$

4. Дайте определение квазирешения систем линейных уравнений.

5. Дайте определение регуляризированного решения несовместной системы линейных уравнений.

Критерии оценки *(в соответствии с бально-рейтинговой системой):*

3 балла – полное, грамотное раскрытие теоретического вопроса сопровождающиеся графическими, математическими и другими пояснениями, доказательствами теорем, лемм и т.д.,

1,5 балла – раскрытие теоретического вопроса на уровне определений, формулировок основных положений, без доказательств,

0 баллов – отсутствие теоретических знаний.

Темы курсовых работ

В каждой курсовой работе нужно выполнить следующие задания:

1. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения и исследовать их зависимость от l, где l – числовой параметр.
2. Найти все собственные числа и собственные решения краевой задачи (задача Штурма – Лиувилля)
3. Привести уравнение к каноническому виду.
4. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке.
5. Найти решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.
6. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге.
7. Как ставится задача Коши для гиперболического уравнения?
8. Как ставится задача Коши для параболического уравнения?
9. В чем заключаются условия Дирихле, Неймана и третье краевое для уравнения эллиптического типа?
10. Дать определение понятия устойчивости для задачи Дирихле.
11. Дать определение понятия устойчивости задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Курсовая работа 1

1. $(l+x)u_{xx} + 2xy\,u_{xy} - y^2 u_{yy} = 0$
2. $y'' + \lambda y = 0,\ 1 \le x \le 2,\ \ y(1) = y'(2) = 0$
3. $u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} + u_x + u_y = 0$
4. $u_{tt} = u_{xx},\quad 0 < x < 1,\quad 0 < t < \infty,\quad u(x,0) = x(x-1),\quad u_t(x,0) = 0$

   $u(0,t) = 0,\qquad u(1,t) = 0.$
5. $u_t = 16u_{xx},\quad 0 < x < 3,\quad t > 0,\quad u(x,0) = \begin{cases} x^2/3, & 0 \le x \le 3/2 \\ 3 - x, & 3/2 < x \le 3 \end{cases}$

   $u(0,t) = u(3,t) = 0.$
6. $\Delta u = 0,\ \ 0 \le r < 1,\ \ u/_{r=1} = 2cos\varphi$

7. Докажите, что обратная коэффициентная задача для уравнения теплопроводности

$$u_t'(t,x) = b^2 u_{xx}''(t,x),$$

состоящая в определении коэффициента b по известному начальному условию $u(0,x)$ и значению $u(\tau,x)$ при $t=\tau$, некорректна.

8. Докажите, что обратная третья краевая задача для уравнения Лапласа

$$u_{xx}''(x,y) + u_{yy}''(x,y) = 0,$$

состоящая в определении граничного значения $hu(0,y) + u_x'(0,y)$ по известному значению $u(l,y)$ при $x=l$, некорректна.

Курсовая работа 2

1. $lu_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$
2. $y'' + \lambda y = 0,\ {}^3/_2 \le x \le 2,\ \ y({}^3/_2) = y'(2) = 0$
3. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0$
4. $u_{tt} = u_{xx},\ \ 0 < x < {}^3/_2,\ \ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x - {}^3/_2), u_t(x,0) = 0$

$u(0,t) = 0, \qquad u({}^3/_2, t) = 0.$

5. $u_t = u_{xx},\ \ 0 < x < 2,\ \ t > 0,\ \ u(x,0) = \begin{matrix} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{matrix}$

$u(0,t) = u(2,t) = 0.$

6. $\Delta u = 0,\ \ 0 \le r < 2,\ \ u/_{r=2} = sin\varphi$

7. Докажите, что обратная граничная задача Неймана для уравнения Лапласа

$$u_{xx}''(x,y) + u_{yy}''(x,y) = 0$$

заключающаяся в определении значений $u_x'(0,y)$ по известным значениям $u(0,y)$, некорректна. Указание: рассмотреть задачу Дирихле

$$u_{xx}''(x,y) + u_{yy}''(x,y) = 0,$$

$$u(0,y) = \sin ay$$

с достаточно большим значением параметра a .

8. Докажите, что обратная коэффициентная задача для уравнения теплопроводности

$$u_t^{/}(t,x)=b^2u_{xx}^{//}(t,x),$$

состоящая в определении коэффициента b по известному начальному условию $u(0,x)$ и значению $u(\tau,x)$ при $t=\tau$, некорректна.

Курсовая работа 3

1. $lu_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$
2. $(l-x)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$
3. $y''+\lambda y=0,\ ^{\pi}/_{2}\le x\le\pi,\ y(^{\pi}/_{2})=y'(\pi)=0$
4. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+2u_x-2u_y=0$
5. $u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<{}^3/_2,\quad 0<t<\infty,\ u(x,0)=x(x-{}^3/_2), u_t(x,0)=0$
   $u(0,t)=0,\qquad u({}^3/_2,t)=0.$
6. $u_t=25u_{xx},\quad 0<x<5,\quad t>0,\quad u(x,0)=\begin{matrix}2x^2/5, & 0\le x\le 5/2\\ 5-x, & 5/2<x\le 5\end{matrix}$
   $u(0,t)=u(5,t)=0.$
7. $\Delta u=0,\ 0\le r<1,\ u/_{r=1}=2sin\varphi$
8. Докажите, что задача решения интегрального уравнения $\int_0^1\varepsilon^{\gamma-1}u(\varepsilon x)d\varepsilon=f(x)$ не обладает устойчивостью, т.е. некорректна.

   Указание. Воспользоваться формулой для решения $u(x)$

   $u(x)=\gamma\, f(x)+xf^{/}(x).$
9. Докажите, что обратная коэффициентная задача для уравнения теплопроводности

$$u_t^{/}(t,x)=b^2u_{xx}^{//}(t,x),$$

состоящая в определении коэффициента b по известному начальному условию $u(0,x)$ и значению $u(\tau,x)$ при $t=\tau$, некорректна.

Методические указания для студентов при выполнении курсовых работ

Структура курсовой работы включает: титульный лист, содержание (перечень основных частей работы с указанием страниц), текст курсовой работы, включающий: введение; основную часть, (главы, параграфы, пункты, под-пункты), заключение, список литературы, приложения, другие дополнительные материалы (при необходимости).

Объем курсовой работы должен учитывать специфику направления подготовки и может варьироваться. Рекомендуемым является объем курсовой работы без приложений – 20-30 страниц печатного текста.

Оформление курсовой работы – текст работы должен быть выполнен печатным способом с использованием компьютера и принтера на одной стороне листа белой бумаги формата А4 (210*297 мм) размером шрифта TimesNewRoman 14 пт через полтора интервала и выравниванием по ширине. Курсовая работа должна иметь переплет.

Методические рекомендации для преподавателей

Курсовая работа является самостоятельной научной работой студента, призванной продемонстрировать его знакомство с темой, указанной в названии. Ее текст представляет собой развернутое, логически и построенное изложение сведений, почерпнутой из учебной и научной литературы по выбранной теме. Целью написания курсовой работы является развитие навыков самостоятельной творческой работы на основе имеющихся знаний и профессиональных умений, компетенций, их расширение, углубление и совершенствование в процессе решения конкретных практических задач.

При выполнении курсовой работы преподаватель (руководитель курсовой работы) обязан:

– предоставить студентам перечень тем курсовых работ по дисциплине;
– совместно со студентами разработать план курсовой работы по выбранной теме;
– следить за соблюдением графика выполнения работы (календарного плана) со стороны студента;
– ознакомить студентов с требованиями к содержанию и критериями оценки курсовой работы;

– проверять и оценивать курсовую работу (в соответствии с бально-рейтинговой системой);
– предоставить на кафедру письменную рецензию, и высказать мнение о возможном допуске (или недопуске) работы к защите.

Критерии оценки курсовых работ
(в соответствии с бально-рейтинговой системой)

Критерии оценки разрабатываются по 100-бальной шкале.

При защите курсовых работ учитываются содержание и оформление работ (примерно до 60 баллов), качество доклада (примерно до 20 баллов), ответы на вопросы (до 20 баллов).

Примерное распределение баллов для оценки курсовой работы:

Основные параметры	Основные критерии оценки	Максимальный балл	Проверяемые компетенции
	Обоснование актуальности темы исследования	4	ОПК – 3 – способность к самостоятельной научно-исследовательской работе ПК – 2 – способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики ПК-3 способность строго доказать
	Грамотность формулировки аппарата исследования (определение объекта и предмета исследования, корректная формулировка целей, задач, выбор методов исследования)	4	

<table>
<tr><td rowspan="6"></td><td>Полнота и глубина обзора литературы (достаточное количество источников использованной литературы, умение анализировать литературу, сопоставлять, выбирать соответствующей теме исследования теоретический материал).</td><td>8</td><td rowspan="5">утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата ;
ПК – 4 – способность публично представлять собственные и известные научные результаты
СК-1- способность работать с математической задачей на основе понятия «корректность»;

СК-2- способность выявлять некорректность математических объектов: математической модели, формулировок задач, доказательств, применения методов и т.п. – и владеть способами ее преобразования в корректность;</td></tr>
<tr><td>Содержание и логика изложения результатов теоретического (эмпирического) исследования</td><td>16</td></tr>
<tr><td>Корректность количественного и качественного анализа результатов</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Обоснованность выводов эмпирического исследования</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Наличие выводов по параграфам и главам и их соответствие содержанию компонентов работы</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="3">50</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Оформление</td><td>Грамотность письменного изложения</td><td>2</td><td rowspan="2">ОПК – 3 – способность к самостоятельной научно-исследовательской работе
ПК – 2 – способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики
ПК-3 – способность строго доказать утверждение, сформу-</td></tr>
<tr><td>Наличие всех структурных компонентов работы (введение, теоретическая часть, практическая часть, заключение, список литературы, приложение)</td><td>2</td></tr>
</table>

	Оформление справочно-библиографического аппарата (библиографические ссылки, список литературы) согласно требованиям ГОС	3	лировать результат, увидеть следствия полученного результата ; ПК – 4 – способность публично представлять собственные и известные научные результаты
	Качество технической стороны работы (формирование текста, оформление рисунков, таблиц, приложений), ее соответствие требованиям ГОСТ	3	
	10		
Качество	Связность и логичность изложения материала доклада	10	ОПК – 3 – способность к самостоятельной научно-исследовательской работе ПК – 2 – способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики ПК-3- способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата (); ПК – 4 – способность публично представлять собственные и известные научные результаты
	Четкая структура доклада	10	
	20		
	Аргументированность ответа на вопрос	10	ОПК – 3 – способность к самостоятельной научно-исследовательской работе ПК – 2 – способность математически корректно ставить естественнонаучные зада-

			чи, знание постановок классических задач математики ПК-3 – способность строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата;
	Глубина включенности в исследуемую проблему (оперирование теоретической информацией, владение знаниями о состоянии проблемы исследования)	10	ПК – 4 – способность публично представлять собственные и известные научные результаты СК-3 -способность строить устную и письменную речь, вести научную дискуссию, осуществлять мыслительный процесс в форме диалоговой последовательности корректных вопросов и ответов; СК-4- способность осуществлять анализ философских, мировоззренческих и естественно-научных проблем с точки зрения понятия «корректность»
	20		
Итого: 100			

7. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Задания для практической части экзамена (6 семестр)

1. Найти точное решение системы линейных уравнений и квазирешение. Убедиться, что они совпадают.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \\ -x+2y=3 \end{cases}$$. Ответ: $(1,\ 2)$

2. Убедиться, что система линейных уравнений несовместна, и найти ее квазирешение:

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ -3x+y=-2 \\ -x+y=1 \end{cases}$$ Ответ: $\left(\frac{1}{5},\ \ \frac{3}{2}\ \ \right)$

3. Изучите понятие нормального решения системы линейных уравнений, см. [125,с.112] и найдите нормальное решение системы:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-2y=0 \end{cases}$$ Ответ: $\left(\frac{3}{7},\ \ \frac{3}{14},\ \ -\frac{5}{14}\right)$

4. Найти регуляризированное решение несовместной системы линейных уравнений, $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$

5. Убедиться, что предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ существует, но не может быть найден по правилу Лопиталя.

6. Доказать, что если существует $f'(a)$, то

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right)=f'(a).$$

Показать на примере функции

$$f(x)=\begin{cases} 1, x-\textit{рациональное}, \\ 0, x-\textit{иррациональное}, \end{cases}$$

что обратное утверждение не всегда справедливо (взять $a=0$).

7. Убедиться, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$ существует, но не может быть найден по дискретному аналогу правила Лопиталя.

8. Убедиться, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$ существует, но не может быть найден по дискретному аналогу правила Лопиталя.

9. Докажите, что последовательность функций

$$f_\gamma(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\varepsilon}, |x|<\varepsilon,\\ 0, |x|>\varepsilon\end{cases}$$

является δ – образной последовательностью, т.е. $\lim\limits_{\gamma\to 0} f_\gamma(x)=\delta(x)$.

10. Докажите, что $\delta(x)=\lim\limits_{\gamma\to 0}\frac{1}{\gamma}\sin\frac{x}{\gamma}$.

11. Докажите, что $\lim\limits_{\gamma\to 0}\frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\left(x^2+\gamma^2\right)^{3/2}}=\delta(x)$

12. Докажите, что $\delta(tx)=t\delta(x), t>0$.

13. Докажите, что $a(x)\delta'(x)=a(0)\delta'(x)-a'(0)\delta(x)$ для любой бесконечно дифференцируемой в R функции $a(x)$.

14. Найти обобщенную производную функции $f(x)=\begin{cases}x^3, x\le 0,\\ e^x+1, x>0.\end{cases}$

15. Проверьте, что функция $u(x)=-\delta(x)+c\theta(x)+c_1$ при любых постоянных c, c_1 удовлетворяет уравнению $xu'(x)=\delta(x)$. Указание: воспользуйтесь тем, что

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{x^2+\gamma^2}=\delta(x) \text{ и } \lim_{\gamma\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{x^2\gamma}{\left(x^2+\gamma^2\right)^2}=\delta(x).$$

16. Воспользовавшись значением предела $\lim\limits_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{x^2+\gamma^2}=\delta(x)$, найдите значение интеграла $\int_{-\infty}^{x}\delta(x)dx$.

17. Найти обобщенную производную функции $f(x)=\begin{cases}x, x\in[0,1],\\ (x+1)^2, x\notin[0,1].\end{cases}$

18. Дайте определения несобственного интеграла 1-го рода и 2-го рода.

19. Докажите, что для функции, заданной в соответствующем промежутке, значения несобственных интегралов 1-го и 2-го рода и интегралов в смысле главного значения (v.p.), совпадают.

20. Докажите, что для функции интегрируемой на $[a,b]$ в смысле Римана классически определенный интеграл (в смысле Римана) $\int_a^b f(x)dx$ и его обобщение в смысле (4.2), совпадают.

21. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^\infty x^\alpha dx, \alpha>0$.

22. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx$.

23. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$.

Перечень теоретических вопросов к экзамену (6 семестр)

1. Универсальность определения Ж.Адамара корректной математической задачи.
2. Корректность математических объектов и их дидактический анализ.
3. Корректность в общеупотребительном смысле.
4. Коорректность вопроса и ответа.
5. Логико-дидактический анализ понятия «корректность».
6. Решение несовместных систем линейных уравнений.
7. Квазирешение.
8. Предельный переход, его обобщения.
9. Обобщение понятия функции.
10. Обобщенная функция. Пространство Соболева.
11. Обобщение понятия производной и интеграла.
12. Регулярные обобщения несобственных интегралов.
13. Суммирование расходящихся рядов.
14. Обобщенное суммирование в смысле Чезаро и Пуассона.
15. Корректные и некорректные задачи дифференциального исчисления.
16. Корректные и некорректные задачи интегрального исчисления.
17. Регуляризационные алгоритмы для нахождения производной.
18. Приближенное суммирование рядов Фурье.
19. Регуляризация для суммирования ряда Фурье.

Задания для практической части экзамена (8семестр)

Задание №1

1. Решить смешанную задачу

$u_{tt} = 81u_{xx}, u(x,0) = sin\pi x, u_t(x,0) = 0,$

$u(0,t) = u(5,t) = 0.$

2. Решить смешанную задачу

$u_{tt} = 64u_{xx}, u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 8\pi sin\pi x,$
$u(0,t) = u(6,t) = 0.$

3. Решить смешанную задачу

$u_{tt} = 49u_{xx}, u(x,0) = 3sin2\pi x, u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(4,t) = 0.$

4. Решить смешанную задачу

$u_{tt} = 36u_{xx}, u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 12\pi sin2\pi x,$
$u(0,t) = u(5,t) = 0.$

5. Решить смешанную задачу

$u_{tt} = 25u_{xx}, u(x,0) = 5sin3\pi x, u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(3,t) = 0.$

6. Решить смешанную задачу

$u_{tt} = 16u_{xx}, u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 12\pi sin\pi x,$
$u(0,t) = u(4,t) = 0.$

7. Решить смешанную задачу

$u_{tt} = 9u_{xx}, u(x,0) = 7sin4\pi x, u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(2,t) = 0.$

8. Решить смешанную задачу

$u_{tt} = 4u_{xx}, u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 8\pi sin4\pi x,$
$u(0,t) = u(3,t) = 0.$

9. Решить смешанную задачу

$u_{tt} = u_{xx}, u(x,0) = 9sin5\pi x, u_t(x,0) = 0,$
$u(0,t) = u(1,t) = 0.$

10. Решить смешанную задачу

$u_{tt} = u_{xx}, u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 5\pi sin5\pi x,$
$u(0,t) = u(3,t) = 0.$

Задание №2

1. Решить смешанную задачу

$$u_t = 2u_{xx}, u(x,0) = 2cos2\pi x,$$

$u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0.$

2. Решить смешанную задачу

$$u_t = 2u_{xx}, u(x,0) = 2cos2\pi x,$$

$u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0.$

3. Решить смешанную задачу

$$u_t = 3u_{xx}, u(x,0) = 3cos3\pi x + 4cos4\pi x,$$

$u_x(0,t) = u_x(7,t) = 0.$

4. Решить смешанную задачу

$$u_t = 3u_{xx}, u(x,0) = 4cos3\pi x,$$

$u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0.$

5. Решить смешанную задачу

$$u_t = 8u_{xx}, u(x,0) = 5cos2\pi x + 6cos3\pi x,$$
$u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0.$

6. Решить смешанную задачу
$u_t = 4u_{xx}, u(x,0) = 6cos2\pi x,$
$u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0.$

7. Решить смешанную задачу
$$u_t = 4u_{xx}, u(x,0) = 7cos3\pi x + 8cos4\pi x,$$
$u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0.$

8. Решить смешанную задачу
$$u_t = 5u_{xx}, u(x,0) = 8cos3\pi x,$$
$u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0.$

9. Решить смешанную задачу
$$u_t = 6u_{xx}, u(x,0) = 9cos2\pi x + 10cos3\pi x,$$
$u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0.$

10. Решить смешанную задачу
$$u_t = 6u_{xx}, u(x,0) = 10cos2\pi x,$$
$u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0.$

Перечень теоретических вопросов к экзамену (8 семестр)

1. Вывод основных уравнений математической физики и постановка граничных условий.

2. Классификация линейных уравнений второго порядка. Приведение уравнения к каноническому виду.

3. Многомерная формула интегрирования по частям. Формулы Грина.

4. Задача Коши. Характеристики. Соотношение между данными Коши на характеристике. Формулировка теоремы Коши – Ковалевской.

5. Оператор Лапласа в сферических координатах. Преобразование Кельвина.

6. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Формула Пуассона.

7. Теоремы единственности и необходимые условия разрешимости для внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана.

8. Объемный потенциал и его свойства. Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям.

9. Разрешимость краевых задач для уравнения Лапласа.

10. Постановка задачи Штурма – Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма – Лиувилля. Фредгольмова разрешимость задачи Штурма – Лиувилля.

11. Гармонические полиномы и сферические функции.

12.Пространства основных и обобщенных функций. Регулярные обобщенные функции. Функция Дирака.

13.Фундаментальное решение дифференциального оператора. Обобщенные производные по Соболеву.

14.Локальный экстремум функционала. Определение первой вариации.

15.Изопериметрическая задача; теорема Эйлера.

16.Вывод уравнения колебаний мембраны.

17.Теоремы единственности для задачи Дирихле. Обобщенная постановка задачи Неймана. Теорема единственности. Разрешимость задачи Неймана.

18. Схема метода Галеркина. Вариационно-разностный метод для краевых задач. Вариационный принцип для собственных значений.

19. Метод Галеркина – Ритца для собственных значений.

20. Уравнение теплопроводности. Принцип максимума и его следствия. Метод Фурье для параболического уравнения.

21. Волновое уравнение. Задача Коши для волнового уравнения. Формулы Д' Аламбера для колеблющейся струны.

22. Корректность основных задач математической физики. Преобразование Фурье на действительной оси и его обобщение на случай действительной оси с точкой деления.

23. Обратные задачи математической физики. Некорректность задачи продолжения потенциала для уравнения Лапласа. Некорректность задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем.

24. Задачи математической физики неоднородных структур. Задача Дирихле в двухслойной полуплоскости. Задача Коши в двухслойном пространстве. Обратные задачи математической физики неоднородных сред.

25. Интегральные уравнения Вольтерра.

Критерии выставления отметки на экзамене

(в соответствии с бально-рейтинговой системой):

Максимальная сумма баллов:100 - за семестр по дисциплине. Их них 60-текущий контроль, 40 –промежуточная аттестация.

Письменный экзамен включает два теоретических вопроса и две задачи, которые оцениваются по 10 баллов. Всего – 40 баллов.

10 баллов при полном, грамотном раскрытии вопроса, сопровождающегося пояснениями, доказательствами теорем, лемм и т.д.;

7 баллов за ответы содержащие несущественные неточности;

2 балла если дан ряд определений и формул;

0 баллов – знаний нет по вопросу.

10 баллов за правильно выполненное практическое задание;

5 баллов при решении задачи допущены ошибки, ответ неверный;

0 баллов – задача не решена.

Шкала отметки в семестре на основе набранных баллов:
85-100 баллов – «отлично»;
65-84 баллов – «хорошо»;
51-64 баллов – «удовлетворительно»;
0-50 баллов – «неудовлетворительно».

Таблица оценочных средств для проверки сформированности компетенций

Форма контроля	Компетенции
	ОК-1,5; ОПК –1, 3; ПК – 2, 3; СК-1-4
Теоретическая часть	Вопросы к экзамену
Практическая часть	Задание для практической части

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература

1. Зарубин, А. Н. Гиперболические и параболические уравнения / А. Н. Зарубин. – Орел : ОГУ, 2009. – 94 с.
2. Зарубин, А. Н. Уравнения эллиптического типа / А. Н. Зарубин. – Орел : ОГУ, 2009. – 118 с.
3.Арнольд, В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2004. –16 с.
4. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
5. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.
6. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин. – Новосибирск : Сибирское науч. изд-во, 2008. – 460 с.

7. Тихонов, А. Н. Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – М. : Наука, 1990. – 230 с.

8. Будаев, В. Д. Математический анализ функции одной переменной : учебник / В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон. – СПб. : Лань, 2012. – 544 с.

9. Вапник, В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным / В. Н. Вапник. – М. : Наука, 1979. – 447 с.

10. Смирнов, М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 2005.

11. Яремко, О. Э. Математическая корректность / О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – 192 с.

12. Плис, А. И. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М. : Финансы и статистика, 2004.

Дополнительная литература

1. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.

2. Михлин, С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. – М. : Высшая школа, 2007.

3. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 2003.

4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001.

Программное обеспечение и интернет-ресурсы

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике и математикам.
2.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	**Студентам:** запустить установленный у Вас математический пакет, выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакета, подходящий и решить свою задачу по аналогии; **Преподавателям:** – использовать математические пакеты для поддержки курса лекций
3.	Математика	www.mathematics.ru	Учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	fismat	www.fismat.ru	Высшая математика для студентов – интегралы и производные, ряды; лекции,задачи, учебники.
5.	Российское образование.	www.edu.ru	Федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
6.	Математика для студентов	www.xplusy.isnet.ru	содержит большое количество видеолекций для студентов по математике и физике.
7.	Официальный сайт механико-математического факультетаМГУ.	http://mech.math.msu.su	Высшая математика для студентов – интегралы и производные, ряды; лекции,задачи, учебники.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Для достижения поставленных целей преподавания дисциплины реализуются следующие средства, способы и организационные мероприятия:

*изучение теоретического материала дисциплины на лекциях с использованием компьютерных технологий;

*самостоятельное изучение теоретического материала дисциплины с использованием *Internet*-ресурсов, информационных баз, методических разработок, специальной учебной и научной литературы;

*закрепление теоретического материала при выполнении проблемно-ориентированных, поисковых, творческих заданий;

*активные и интерактивные формы: лекции, семинары, консультации, индивидуальные работы, контрольные работы, зачет и экзамен в 6-8 семестрах, в том числе активные формы: проблемная лекция, лекция по готовому конспекту, лекция-дискуссия, лекция-погружение, мозговой штурм, вопросно-развивающие беседы и решение типовых задач, занятия по решению проблемных и творческих задач, контрольно-корректирующие занятия.

Зачет и экзамен выставляются после решения всех задач, контрольных работ.

Интерактивные образовательные технологии, используемые при проведении аудиторных занятий

№ п/п	Тема занятия	Количество часов		Форма интерактивного занятия
		лекции	практика	
1	Универсальность определения Ж.Адамара корректной и некорректной математической задачи. Корректность математических объектов и их дидактический анализ.	2	1	Проблемная лекция, мастер-класс, контекстное обучение
2	Решение несовместных систем линейных уравнений. Понятие о квазирешении и регуляризованном решении. Обобщение понятия производной и интеграла.	10		Мозговой штурм, круглый стол, метод проектов
3	Корректные и некорректные задачи дифференциального и интегрального исчислений.		11	Мастер-класс, контекстное обучение, Case-study,
4	Теория потенциала Тема 4.1. Вывод основных уравнений математической физики и постановка граничных условий. Классификация линейных уравнений второго порядка. Приведение уравнения к каноническому виду. Многомерная формула интегрирования по частям. Формулы Грина. Задача Коши. Характеристики. Соотношение между данными Коши на характеристике. Формулировка теоремы Коши – Ковалевской. Задача Штурма – Лиувилля. Постановка задачи Штурма – Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма – Лиувилля.	1	8	Мастер-класс, контекстное обучение, Case-study, работа в малых группах.

	Тема 4.2. Уравнение Лапласа. Формула Пуассона. Свойства гармонических функций, вытекающие из формулы Пуассона. Теоремы единственности и необходимые условия разрешимости для внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана. Интегральные уравнения. Теория потенциала. Исследование интегральных уравнений теории потенциала. Разрешимость краевых задач для оператора Лапласа			
5	Корректность задач математической физики Тема 5.1. Корректность основных задач математической физики. Понятие корректной и некорректной математической задачи. Методы решения некорректных задач первого типа. Преобразование Фурье на действительной оси и его обобщение на случай действительной оси с точкой деления. Тема 5.2. Обратные задачи математической физики. Корректность задач математической физики. Корректность задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Корректность задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем. Тема 5.3. Задачи математической физики неоднородных структур. Задача Дирихле в двухслойной полуплоскости. Задача Коши в кусочно-однородном пространстве. Обратные задачи математической физики неоднородных сред. Интегральные уравнения.	9	2	Проблемная лекция, контекстное обучение
	Итого	44		

10. Материально-техническое обеспечение дисциплины

1. Лекционные занятия:
   - а) опорные конспекты лекций с примерами, задачами и упражнениями для самостоятельного решения в электронной форме;
   - б) аудитория, оснащенная презентационной техникой (проектор, экран, ноутбук);
   - в) аудитория, оснащенная интерактивной доской;
   - г) классическое учебное оборудование (аудитория для лекционных занятий с доской).
2. Практические занятия:
   - а) учебно-методические пособия по всем основным разделам, содержащие задачи и упражнения к практическим занятиям в электронной форме; тестовые задания и т.п.;
   - б) презентационная техника (проектор, экран, ноутбук);
   - в) интерактивная доска;
   - г) классическое учебное оборудование (аудитория для практических занятий с доской);
   - д) пакеты ПО общего назначения (текстовые редакторы, графические редакторы);
   - е) специализированное ПО.

Рабочая программа дисциплины «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
________________ Фионова Л.Р.
(Подпись) (Фамилия, инициалы)
«____» ______________ 201_ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.2.16.Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики

Направление подготовки 01.03.02. Прикладная математика и информатика

Профиль Системное программирование и компьютерные технологии

Квалификация (степень) выпускника – Бакалавр

Форма обучения Очная

Пенза, 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
__________ Фионова Л.Р.
(Подпись)(Фамилия, инициалы)
«__» сентября 2015_ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.2.16.Численные методы математической физики.
Корректные и некорректные задачи математической физики

Направление подготовки 01.03.02. Прикладная математика и информатика

Профиль Системное программирование и компьютерные технологии

Квалификация (степень) выпускника - Бакалавр

Форма обучения Очная

Пенза, 2015

1. Цели освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики» состоит в формировании и развитии у студентов общекультурных, профессиональных и специальных компетенций, систематизации знаний по прикладной математике, о ее месте и роли в приложениях для естественных наук. Формирование умений и навыков в области математической физики и ее основных методов, позволяющих подготовить профессионала для сферы компьютерных технологий, готового к их инновационной творческой реализации в учреждениях различного уровня и профиля.

Задачи изучаемой дисциплины:

Исходя из общих целей подготовки бакалавра прикладной математики и информатики по профилю «Системное программирование и компьютерные технологии»:

- содействовать средствами дисциплины «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики» развитию у студентов мотивации к профессиональной деятельности, профессионального мышления, коммуникативной готовности, общей культуры;
- научить студентов ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи.

Исходя из конкретного содержания дисциплины:

- сформировать систему знаний и умений в области корректных и некорректных задач математической физики, необходимых для применения в будущей профессиональной деятельности, при изучении смежных дисциплин, проведении научных исследований;
- познакомить студентов с приложениями математического анализа;

- научить студентов рассуждать логически, конструировать и проверять гипотезы;
- научить студентов извлекать, систематизировать информацию из различных источников: учебная, справочная литература и специализированные интернет- ресурсы;
- научить применять IT- технологии.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики» относится к дисциплинам по выбору профессионального цикла. Для освоения дисциплины используются знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения предметов «Математика», «Информатика». Дисциплина «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики», наряду с дисциплинами «Дискретная математика» и «Абстрактная и компьютерная алгебра», является фундаментом высшего математического образования. Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики», базируются на освоенных ранее дисциплинах профессионального цикла: «Дискретная математика», «Абстрактная и компьютерная алгебра», «Математический анализ».

В результате изучения данной дисциплины обучающийся должен:

знать основные понятия и строгие доказательства фактов основных разделов курса «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики»;

уметь применять теоретические знания к решению задач по курсу;

владеть различными приемами использования идеологии курса «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики», навыками корректного использования терминологии курса «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики», приемами доказательств; основными принципами создания математических моделей.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики»**.**

Овладение дисциплиной ориентировано на формирование следующих компетенций:

ОПК-1	способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	Знать: корректные постановки основных краевых задач в пространствах Соболева, основные положения метода Фурье, основы теории потенциала, владеть методом разложения по системе собственных функций.
		Уметь: использовать знание понятия корректной постановки математической задачи при работе над базовыми и элективными курсами.
		Владеть: основными методами теории корректности математической задачи.
ОПК-3	способность к разработке алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программирования, математических, информационных и имитационных моделей, созданию информационных ресурсов глобальных сетей, образовательного контента, прикладных баз данных, тестов и средств тестирования систем и средств на соответствие стандартам	Знать: корректные алгоритмические и программные решения в области системного и прикладного программирования, постановки основных краевых задач в пространствах Соболева, основные положения метода Фурье, основы теории потенциала, владеть методом разложения по системе собственных функций.
		Уметь: создавать информационные ресурсы с использованием основных положений разделов науки при решении задач с практическим содержанием.
		Владеть: основными методами тестирования, анализа Фурье, спектрального анализа, методами исследования

	и исходным требованиям	задачи на корректность.
ОПК-4	способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности	Знать: основные корректные методы решения стандартных задач, доказательств и алгоритмов, анализа Фурье, спектрального анализа.
		Уметь: применять метод Фурье, метод спектрального анализа, теорию обобщенных функций в пространствах Соболева.
		Владеть: навыками применения основных алгоритмов метода Фурье, спектрального анализа во всех разделах математического и физического знания.
ПК-5	способность осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в информационно-телекоммуникационной сети "Интернет" (далее – сеть "Интернет") и в других источниках	Знать: источники получения корректной новейшей информации
		Уметь: осуществлять целенаправленный поиск новейшей информации
		Владеть: методами поиска новейшей информации
ПК-7	способность к разработке и применению алгоритмических и программных решений в области системного и прикладного программного обеспечения	Знать: основные корректные алгоритмические программные решения
		Уметь: обосновывать корректность программных решений
		Владеть: методологией создания алгоритмических программных решений в области системного и программного обеспечения
ПСК-1	способность работать с математической задачей на основе понятия «корректность».	Знать: а) межпредменые знания: – знания о структуре задачи (данные, требование, решение, обоснование, предметная область), – знания об этапах решения задачи (осмысление условий и требования за-

		дачи, поиск решения, осуществление решения, «взгляд назад»); – знания о структуре деятельности по решению задачи (предмет, цель, средства, способы действий, результат); б) предметные математические знания: понятия, основные утверждения (теоремы, свойства, взаимосвязь между ними), знание методов решения ключевых задач, знание трех требований корректности задачи
		Уметь: выделять структурные звенья задачи; выполнять анализ данных и требования задачи; осуществлять целенаправленный поиск решения задачи, составлять алгоритм решения; правильно реализовывать алгоритм решения; осуществлять «взгляд назад».
		Владеть: методами проверки задачи на корректность на каждом из этапов решения задачи; методами решения ключевых корректных задач.
ПСК-2	способность выявлять некорректность математических объектов: математической модели, формулировок задач, доказательств, применения методов и т. п. – и владеть способами ее преобразования в корректность	Знать: законы логики математических рассуждений в разделах: метод Фурье для решения краевых задач, метод спектрального анализа в курсе математической физики.
		Уметь: выполнять анализ и синтез, осуществлять проверку на однозначную определенность, непротиворечивость объектов, вырьирование, корректировку, оценивать адекватность внешних и внутренних условий, определяющих корректность.
		Владеть: навыками исследования объектов произвольной природы на основе понятия «корректность» в других предметных областях и в реальной жизни; механизмами распознавания корректности и некорректности; механизмами преодоления некорректности.

ПСК-3	способность строить устную и письменную речь, вести научную дискуссию, осуществлять мыслительный процесс в форме диалоговой последовательности корректных вопросов и ответов.	Знать: структурные компоненты вопроса и ответа
		Уметь: выделять в структуре вопроса его компоненты (явные и неявные посылки, требование), корректно формулировать вопрос и ответ, – корректировать, варьировать вопрос и ответ, правильно реагировать на некорректный вопрос
		Владеть: понятием «корректность» для оценки вопросов и ответов.
ПСК-4	способность осуществлять анализ философских, мировоззренческих и естественно-научных проблем с точки зрения понятия «корректность».	Знать: о законах диалектики, относительности истины, неограниченности познания, о незавершенности знаний,
		Уметь: умение применять понятие «корректность» к исследованию указанных проблем, умение осуществлять деятельность, адекватную данному понятию: обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировку.
		Владеть: навыками исследования объектов произвольной природы на основе понятия «корректность» в других предметных областях и в реальной жизни; механизмами распознавания корректности и некорректности; механизмами преодоления некорректности.

4. Структура и содержание дисциплины «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики»

4.1. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет _4 зачетных единиц, _144 часов.

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Недели семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)										Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)*			
				Аудиторная работа				Самостоятельная работа									
				Всего	Лекция	Практические занятия	Лабораторные занятия	Всего	Подготовка к аудиторным занятиям	Подготовка к тестированию	Подготовка к контрольной работе	Подготовка к коллоквиуму, собеседованию	Подготовка к экзамену	собеседование	коллоквиум	тест	контрольная работа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1.	**Раздел 1. Теория потенциала**	**8**	**1-4**	**18**	**6**	**12**		**18**	**12**	**2**	**4**	**6**	**36**				
1. 1.	Тема 1. 1. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом сеток		1-2	12	3	6		9	6	2		4		2		1	

1. 2.	Тема 1. 2. Решение смешанной задачи для волнового уравнения методом сеток		3-4	12	3	6		9	6		4	2		4			
2.	**Раздел 2. Корректные и некорректные задачи**		**5-12**	**36**	**12**	**24**		**36**	**24**	**2**	**8**	**14**					
2. 1	Тема 2. 1. Корректность основных задач математической физики		5-6	9	3	6		9	6	2		4				6	5
2. 2	Тема 2. 2. Обратные задачи математической физики		7-8	9	3	6		9	6		2	4					8
2. 3	Тема 2. 3. Задачи математической физики неоднородных структур		9-12	18	6	12			12		6	6			11	10	
	Общая трудоемкость в часах			**54**	**18**	**36**		**54**	**36**		**12**	**24**	**36**	Промежуточная аттестация			
														Форма			Семестр
														Экзамен			8 семестры

4.2. Содержание дисциплины

Раздел 1. Теория потенциала

Тема 1. 1. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом сеток.

Постановка задачи.

Явная разностная схема. Проблема устойчивости.

Вычислительная схема (алгоритм) решения явной разностной схемы.

Тема 1. 2. Решение смешанной задачи для волнового уравнения методом сеток.

Постановка задачи.

Явная разностная схема. Проблема устойчивости.

Вычислительная схема (алгоритм) решения явной разностной схемы.

Раздел 2. Корректные и некорректные задачи

Тема 2. 1. Корректность основных задач математической физики. Понятие корректной и некорректной математической задачи. Методы решения некорректных задач первого типа. Преобразование Фурье на действительной оси и его обобщение на случай действительной оси с точкой деления.

Тема 2. 2. Обратные задачи математической физики. Некорректность задачи продолжения потенциала для уравнения Лапласа. Некорректность задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем.

Тема 2. 3. Задачи математической физики неоднородных структур. Задача Дирихле в двухслойной полуплоскости. Задача Коши в двухслойном пространстве. Обратные задачи математической физики неоднородных сред. Интегральные уравнения Вольтерра.

5. Образовательные технологии

В ходе освоения дисциплины «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики», при проведении аудиторных занятий, используются технологии традиционных и нетрадиционных учебных занятий.

Технология традиционного обучения предусматривает такие методы и формы изучения материала как лекция, практические занятия:

- информационная лекция:

Тема 1. 1. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом сеток.

Тема 1. 2. Решение смешанной задачи для волнового уравнения методом сеток.

Тема 2. 3. Задачи математической физики неоднородных структур

- лекция-визуализация:

Тема 2. 2. Обратные задачи математической физики. Корректность задач математической физики.

Тема 2. 1. Понятие корректной и некорректной математической задачи.

Практические занятия направлены на формирование у студентов умений и навыков решения задач, в том числе с практическим содержанием и исследовательских задач. В ходе проведения практических занятий используются задания учебно-тренировочного характера и задания творческого характера.

При изучении дисциплины «Численные методы. Корректные и некорректные задачи математической физики» используются активные и интерактивные технологии обучения, такие как:

- технология сотрудничества, включающая работу в малых группах (тема 2. 2. Обратные задачи математической физики,

тема 2. 3. Задачи математической физики неоднородных структур;

- медиатехнология (подготовка и демонстрация презентаций);
- кейс-технология (проблемный метод, работа в парах и группах).

Нетрадиционные учебные занятия проводятся в форме тренинга (заключительные практические занятия по изучаемым темам).

Занятия, проводимые в интерактивной форме, в том числе с использованием интерактивных технологий составляют 25% от общего количества аудиторных занятий.

Самостоятельная работа студентов подразумевает работу под руководством преподавателя (консультации, коллоквиумы) и индивидуальную работу студента, выполняемую, в том числе, в компьютерном классе с выходом в сеть «Интернет» на физико-математическом факультете университета.

При реализации образовательных технологий используются следующие виды самостоятельной работы:

- работа с конспектом лекции;
- работа с учебником;
- решение задач и упражнений по образцу;
- решение вариативных задач и упражнений;
- поиск информации в сети «Интернет» и в дополнительной справочной литературе;
- подготовка к сдаче экзамена.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.
Самостоятельная работа студента.

Неделя	№ темы	Вид самостоятельной работы	Рекомендуемая литература	Часы
1	2	3	4	5
8 семестр	**1**	**Численные методы**		**20**
1-2	**1. 1.**	*Подготовка к аудиторному занятию:* • *работа с конспектом лекций:* Классификация линейных уравнений второго порядка. • *работа с учебником:* Свойства гармонических функций, вытекающие из формулы Пуассона. • *решение задач и упражнений по образцу;* • *решение вариативных задач и упражнений;* • *подготовка к коллоквиуму*	1,2,3 (1,2)	12
3-4	**1. 2.**	*Подготовка к аудиторному занятию:* • *работа с конспектом лекции:* Уравнение Лапласа. Формула Пуассона. • *работа с учебником:* Уравнение Лапласа. • *решение задач и упражнений по образцу;* • *решение вариативных задач и упражнений;* • *подготовка к коллоквиуму*	1,2,3 (1,2)	12
	2	**Корректные и некорректные задачи**		**40**
5-6	**2. 1.**	*Подготовка к аудиторному занятию:* Понятие корректной и некорректной математической задачи. *работа с конспектом лекции:* Три условия корректности • *работа с учебником:* изучение вопроса: корректность математической задачи • *решение задач и упражнений по образцу;*	1,2,3,5 (1,2,5)	12

		• *решение вариативных задач и упражнений;* • *подготовка доклада по заданной теме с компьютерной презентацией;* • *подготовка к коллоквиуму.*		
7-8	**2. 2.**	*Подготовка к аудиторному занятию:* • *работа с конспектом лекции:* Метод регуляризации в теории обратных задач • *работа с учебником:* Изучение тем: «корректность задачи • *решение задач и упражнений по образцу;* • *решение вариативных задач и упражнений;* • *подготовка доклада по заданной теме с компьютерной презентацией;* • *мини-исследование* Решение краевых задач. Фредгольмова разрешимость задачи Дирихле. Теоремы единственности для задачи Дирихле.	1,2,3,5 (1,2,5)	12
9-12	**2. 3**	*Подготовка к аудиторному занятию:* • *работа с конспектом лекции:* Решение краевых задач. Теоремы единственности для задачи Дирихле. *работа с учебником:* изучение вопроса: Теоремы единственности для задачи Дирихле и Неймана. • *решение задач и упражнений по образцу;* • *решение вариативных задач и упражнений;* • *подготовка доклада по заданной теме с компьютерной презентацией;* *подготовка к коллоквиуму.*	1,2,3,5 (1,2,5)	24

Примерные варианты контрольной работы

В каждом варианте нужно выполнить следующие задания:

1.Построить сеточную модель для дифференциального уравнения.

2.Найти методом сеток все собственные числа и собственные решения краевой задачи (задача Штурма – Лиувилля)

3.Заменить уравнение разностным.

4.Решить методом сеток первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке.

5.Найти методом сеток решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

6.Решить методом сеток задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

7.Как ставится задача Коши для гиперболического уравнения?

8.Как ставится задача Коши для параболического уравнения?

9.В чем заключаются условия Дирихле, Неймана и третье краевое для уравнения эллиптического типа?

10. Дать определение понятия устойчивости для задачи Дирихле.

11. Дать определение понятия устойчивости задачи Коши для параболического уравнения.

Предлагаемые варианты контрольной работы.

Вариант 1

1. $(l+x)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$

2. $y''+\lambda y=0,\ 1\le x\le 2,\ \ y(1)=y'(2)=0$

3. $u_{xx}+2u_{xy}-u_{yy}+u_x+u_y=0$

4. $u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<1,\quad 0<t<\infty,\quad u(x,0)=x(x-1),\quad u_t(x,0)=0$

   $u(0,t)=0,\qquad u(1,t)=0.$

5. $u_t=16u_{xx},\quad 0<x<3,\quad t>0,\quad u(x,0)=\begin{cases} x^2/3, & 0\le x\le 3/2 \\ 3-x, & 3/2<x\le 3\end{cases}$

   $u(0,t)=u(3,t)=0.$

6. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 1,\ u/_{r=1} = 2cos\varphi$

7. Докажите, что обратная коэффициентная задача для уравнения теплопроводности

$$u_t^{/}(t,x) = b^2 u_{xx}^{//}(t,x),$$

состоящая в определении коэффициента b по известному начальному условию $u(0,x)$ и значению $u(\tau,x)$ при $t=\tau$, некорректна.

8. Докажите, что обратная третья краевая задача для уравнения Лапласа

$$u_{xx}^{//}(x,y) + u_{yy}^{//}(x,y) = 0,$$

состоящая в определении граничного значения $hu(0,y) + u_x^{/}(0,y)$ по известному значению $u(l,y)$ при $x=l$, некорректна.

Вариант 2

1. $lu_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$
2. $y'' + \lambda y = 0,\ {}^3/_2 \le x \le 2,\ y({}^3/_2) = y'(2) = 0$
3. $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0$
4. $u_{tt} = u_{xx},\ \ 0 < x < {}^3/_2,\ \ 0 < t < \infty,\ u(x,0) = x(x - {}^3/_2), u_t(x,0) = 0$
$u(0,t) = 0,\quad u({}^3/_2, t) = 0.$
5. $u_t = u_{xx},\ \ 0 < x < 2,\ \ t > 0,\ \ u(x,0) = \begin{matrix} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{matrix}$
$u(0,t) = u(2,t) = 0.$
6. $\Delta u = 0,\ 0 \le r < 2,\ u/_{r=2} = sin\varphi$

7. Докажите, что обратная граничная задача Неймана для уравнения Лапласа

$$u_{xx}^{//}(x,y) + u_{yy}^{//}(x,y) = 0$$

заключающаяся в определении значений $u_x^{/}(0,y)$ по известным значениям $u(0,y)$, некорректна. Указание: рассмотреть задачу Дирихле

$$u''_{xx}(x,y)+u''_{yy}(x,y)=0,$$

$$u(0,y)=\sin ay$$

с достаточно большим значением параметра a.

8. Докажите, что обратная коэффициентная задача для уравнения теплопроводности

$$u'_t(t,x)=b^2u''_{xx}(t,x),$$

состоящая в определении коэффициента b по известному начальному условию $u(0,x)$ и значению $u(\tau,x)$ при $t=\tau$, некорректна.

Вариант 3

1. $(l-x)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$
2. $y''+\lambda y=0,\ {}^{\pi}/_{2}\le x\le\pi,\ y({}^{\pi}/_{2})=y'(\pi)=0$
3. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+2u_x-2u_y=0$
4. $u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<{}^{3}/_{2},\quad 0<t<\infty,\ u(x,0)=x(x-{}^{3}/_{2}),u_t(x,0)=0$
   $u(0,t)=0,\qquad u({}^{3}/_{2},t)=0.$
5. $u_t=25u_{xx},\quad 0<x<5,\quad t>0,\quad u(x,0)=\begin{matrix}2x^2/5, & 0\le x\le 5/2\\ 5-x, & 5/2<x\le 5\end{matrix}$

$u(0,t)\ =\ u(5,t)=0.$

6. $\Delta u=0,\ \ 0\le r<1,\ \ u/_{r=1}=2sin\varphi$

7. Докажите, что задача решения интегрального уравнения $\int_0^1\varepsilon^{\gamma-1}u(\varepsilon x)d\varepsilon=f(x)$ не обладает устойчивостью, т.е. некорректна.

Указание. Воспользоваться формулой для решения $u(x)$

$u(x)=\gamma f(x)+xf'(x)$.

8. Докажите, что обратная коэффициентная задача для уравнения теплопроводности

$$u'_t(t,x)=b^2u''_{xx}(t,x),$$

состоящая в определении коэффициента b по известному начальному условию $u(0,x)$ и значению $u(\tau,x)$ при $t=\tau$, некорректна.

Примерные вопросы к собеседованиям

1. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводнсти методом сеток.
2. Решение смешанной задачи для волнового урвнения методом сеток.
3. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток.
4. Сеточные методы для интегральных уравнений.
5. Сведение задачи Дирихле к интегральному уравнению. Функции Бесселя и их свойства.
6. Метод Ритца.
7. Пространства основных и обобщенных функций. Регулярные обобщенные функции. Функция Дирака.
8. Вывод уравнения Эйлера для одномерного функционала; естественные граничные условия.
9. Вариационный принцип для собственных значений.
10. Вывод основных уравнений математической физики и постановка краевых задач
11. Уравнение Лапласа. Формула Пуассона.
12. Интегральные уравнения.
13. Понятие корректной и некорректной математической задачи.

Вопросы к экзамену

1. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводнсти методом сеток.
2. Решение смешанной задачи для волнового урвнения методом сеток.
3. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом сеток.
4. Сеточные методы для интегральных уравнений.

5. Сведение задачи Дирихле к интегральному уравнению. Функции Бесселя и их свойства.
6. Метод Ритца. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Формула Пуассона.
7. Разрешимость краевых задач для оператора Лапласа.
8. Постановка задачи Штурма – Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма – Лиувилля. Фредгольмова разрешимость задачи Штурма – Лиувилля.
9. Пространства основных и обобщенных функций. Регулярные обобщенные функции. Функция Дирака.
10. Фундаментальное решение дифференциального оператора. Обобщенные производные по Соболеву.
11. Локальный экстремум функционала. Определение первой вариации.
12. Изопериметрическая задача; теорема Эйлера.
13. Схема метода Галеркина. Вариационно-разностный метод для краевых задач. Вариационный принцип для собственных значений.
14. Метод Галеркина – Ритца для собственных значений.
15. Корректность основных задач математической физики. Преобразование Фурье на действительной оси и его обобщение на случай действительной оси с точкой деления.
16. Обратные задачи математической физики. Корректность задач математической физики. Корректность задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Корректность задачи Коши для уравнения теплопроводности с обратным временем.
17. Задачи математической физики неоднородных структур. Задача Дирихле в двухслойной полуплоскости. Задача Коши в кусочно-однородном пространстве. Обратные задачи математической физики неоднородных сред.

8. Список основной и дополнительной литературы

Основная литература

1. Романов, В. Г. Обратные задачи математической физики / В. Г. Романов. – М. : Наука, 1984. – 261 с.

2. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.

3. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.

4. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин. – Новосибирск : Сибирское науч. изд-во, 2008. – 460 с.

5. Тихонов, А. Н. Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – М. : Наука, 1990. – 230 с.

6. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. – М. : Наука, 1980.

7. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – Изд. 5. – М. : Наука, 2008.

8. Смирнов, М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 2005.

9. Яремко, О. Э. Математическая корректность / О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – 192 с.

Дополнительная литература

1. Михлин, С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. – М. : Высшая школа, 2007.

2. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 2003.

Программное обеспечение и интернет-ресурсы

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	**Math. ru**	www.math.ru	Сайт посвящен математике (и математикам). Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки «математика».
2.	**Exponenta. ru**	www.exponenta.ru	**Студентам:** - запустить установленный у Вас математический пакет, выбрать в списке примеров решенных в среде этого пакета, подходящий и решить свою задачу по аналогии; **Преподавателям:** - использовать математические пакеты для поддержки курса лекций. **Всем заинтересованным пользователям:** – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе. – найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
3.	**Математика**	www.mathematics.ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	**fismat**	www.fismat.ru	Высшая математика для студентов – интегралы и производные, ряды; лекции, задачи, учебники.
5.	**Российское образование.**	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
6.	**Математика для студентов и прочее.**	www.xplusy.isnet.ru	содержит большое количество видеолекций для школьников, абитуриентов и студентов по математике и физике.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

«Численные методы математичской физики. Корректные и некорректные задачи математической физики»

Для освоения данной дисциплины необходимы:

– мультимедийные средства обучения математическому анализу (компьютер и проектор; интерактивная доска; интернет – ресурсы).

Рабочая программа дисциплины «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций примерной ООП ВПО по направлению подготовки _010302«Прикладная математика и информатика», и профилю подготовки «Системное программирование и компьютерные технологии»

Программу составил:
Яремко Н. Н.., доцент кафедры КТ

Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.

Программа одобрена на заседании кафедры «Компьютерные технологии»

Протокол № ___ от «____» ___________20__ года

Зав. кафедрой «Компьютерные технологии» _________________________
В. И. Горбаченко

Программа одобрена методической комиссией факультета вычислительной техники

Протокол № ___ от «____» ___________20__ года

Председатель методической комиссии
Факультета вычислительной техники ___________________________________
(подпись) (Ф.И.О.)

Рабочая программа дисциплины «Численные методы математической физики. Корректные и некорректные задачи математической физики» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций примерной ООП ВПО по направлению подготовки 010302«Прикладная математика и информатика», и профилю подготовки «Системное программирование и компьютерные технологии»

Программу составил:
Яремко Н.Н.., доцент кафедры КТ

Программа одобрена на заседании кафедры «Компьютерные технологии»

Протокол № 1 от «31» 08 2015 года

Зав. кафедрой «Компьютерные технологии» В. И. Горбаченко

Программа одобрена методической комиссией факультета вычислительной техники

Протокол № 1 от «10» 09 2015 года

Председатель методической комиссии
Факультета вычислительной техники

(подпись) (Ф.И.О.)

Рабочая программа дисциплины «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий»

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______________ Фионова Л.Р.
(Подпись) (Фамилия, инициалы)
«____» ______________ 201_ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.2.1. История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий

Направление подготовки 01.03.02. Прикладная математика и информатика

Профиль Системное программирование и компьютерные технологии

Квалификация (степень) выпускника – Бакалавр

Форма обучения Очная

Пенза, 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______ Фионова Л.Р.
Подпись (Фамилия, инициалы)
«___» ____________ 2015 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.2.1. История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий

Направление подготовки 01.03.02. Прикладная математика и информатика

Профиль Системное программирование и компьютерные технологии

Квалификация (степень) выпускника - Бакалавр

Форма обучения Очная

Пенза, 2015

18.Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий» является формирование и развитие у студентов профессиональных и специальных компетенций, формирование систематизированных знаний в области алгебры, математического анализа, об их месте и роли в системе математических наук, приложениях в естественных науках. Формирование умений и навыков в области теории функций и ее основных методов, позволяющих подготовить конкурентоспособного выпускника для сферы образования, готового к их инновационной творческой реализации в учреждениях различного уровня.

Задачи изучаемой дисциплины:

Исходя из общих целей подготовки бакалавра Прикладной математики и информатики по профилю «Системное программирование и компьютерные технологии»

- содействовать средствами дисциплины «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий» развитию у студентов мотивации к профессиональной деятельности, профессионального мышления, коммуникативной готовности, общей культуры;
- научить студентов ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи.

Исходя из конкретного содержания дисциплины:

- сформировать систему знаний и умений в межпредметной области математических дисциплин, необходимых для применения в будущей профессиональной деятельности, при изучении смежных дисциплин, проведении научных исследований;
- познакомить студентов с приложениями математики в естественных науках;

- научить студентов логическим правилам вывода, выдвигать и проверять гипотезы;
- научить поиску, систематизации и анализу информации, используя разнообразные информационные источники, включая учебную и справочную литературу;
- научить использовать информационные технологии в будущей профессиональной деятельности.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий» относится к дисциплинам по выбору профессионального цикла. Для освоения дисциплины используются знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения предметов «Математика», «Информатика» на предыдущих этапах образования. Дисциплина «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий», наряду с дисциплинами «Дискретная математика» и «Абстрактная и компьютерная алгебра», является фундаментом высшего математического образования. Знания и умения, формируемые в процессе изучения дисциплины «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий», базируются на освоенных ранее дисциплинах профессионального цикла: «Дискретная математики», «Математический анализ».

В результате изучения данной дисциплины обучающийся должен:

знать основные понятия и строгие доказательства фактов основных разделов курса «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий»;

уметь применять теоретические знания к решению задач по курсу;

владеть различными приемами использования идеологии курса «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий» в профессиональной деятельности, навыками корректного использования терминологии курса «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий», навыками изложения доказательств и утверждений; навыками использования математических моделей в решении практических задач.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий»

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС 3+по данному направлению:

ОК-2	способностью анализировать основные этапы и закономерности исторического развития общества для формирования гражданской позиции	Знать: правила корректного обобщения понятий, сущностные характеристики, функции понятия «математическая корректность».
		Уметь: использовать требования корректности при конструировании математических понятий.
		Владеть: основными методами теории математической корректности .
ОПК-2	способностью приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии	Знать: сущностные характеристики понятия «корректность», его общекультурный и мировоззренческий смысл.
		Уметь: проверять условия корректности при работе с корректными и некорректными объектами.
		Владеть: основными методами преобразования некорректности в корректность.
ПСК-1	способность работать с математической задачей на основе понятия «корректность».	Знать: а) межпредметные знания: – знания о структуре задачи (данные, требование, решение, обоснование, предметная область), – знания об этапах решения задачи (осмысление условий и требования задачи, поиск решения, осуществление решения, «взгляд назад»);

		– знания о структуре деятельности по решению задачи (предмет, цель, средства, способы действий, результат); б) предметные математические знания: понятия, основные утверждения (теоремы, свойства, взаимосвязь между ними), знание методов решения ключевых задач, знание трех требований корректности задачи
		Уметь: выделять структурные звенья задачи; выполнять анализ данных и требования задачи; осуществлять целенаправленный поиск решения задачи, составлять алгоритм решения; правильно реализовывать алгоритм решения; осуществлять «взгляд назад»;
		Владеть: методами проверки задачи на корректность на каждом из этапов решения задачи; методами решения ключевых корректных задач.
ПСК-2	способность выявлять некорректность математических объектов: математической модели, формулировок задач, доказательств, применения методов и т. п. – и владеть способами ее преобразования в корректность	Знать: законы логики математических рассуждений в разделах: метод Фурье для решения краевых задач, метод спектрального анализа в курсе математической физики.
		Уметь: выполнять анализ и синтез, осуществлять проверку на однозначную определенность, непротиворечивость объектов.
		Владеть: навыками исследования объектов произвольной природы на основе понятия «корректность» в других предметных областях и в реальной жизни; механизмами распознавания корректности и некорректности; механизмами преодоления некорректности.

ПСК-3	способность строить устную и письменную речь, вести научную дискуссию, осуществлять мыслительный процесс в форме диалоговой последовательности корректных вопросов и ответов.	Знать: структурные компоненты вопроса и ответа
		Уметь: выделять в структуре вопроса его компоненты (явные и неявные посылки, требование), корректно формулировать вопрос и ответ, – корректировать, варьировать вопрос и ответ, правильно реагировать на некорректный вопрос
		Владеть: понятием «корректность» для оценки вопросов и ответов.
ПСК-4	способность осуществлять анализ философских, мировоззренческих и естественнонаучных проблем с точки зрения понятия «корректность».	Знать: о законах диалектики, относительности истины, неограниченности познания, о незавершенности знаний,
		Уметь: умение применять понятие «корректность» к исследованию указанных проблем, умение осуществлять деятельность, адекватную данному понятию: обоснование однозначной определенности, варьирование, корректировку.
		Владеть: навыками исследования объектов произвольной природы на основе понятия «корректность» в других предметных областях и в реальной жизни; механизмами распознавания корректности и некорректности; механизмами преодоления некорректности.

4. Структура и содержание дисциплины

«История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий»

Общая трудоемкость дисциплины составляет _2_зачетных единиц, _72_ часов.

4. 1. Структура дисциплины

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Недели семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)										Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)*			
				Аудиторная работа				Самостоятельная работа									
				Всего	Лекция	Практические занятия	Лабораторные занятия	Всего	Подготовка к аудиторным занятиям	Подготовка к тестированию	Подготовка к контрольной работе	Подготовка к коллоквиуму, собеседованию	Подготовка к экзамену	собеседование	коллоквиум	тест	контрольная работа
1.	**Раздел 1. МЕЖПРЕДМЕТНАЯ КАТЕГОРИЯ «Математическая корректность»**	**8**	**1-4**	**24**	**12**	**12**		**24**	**12**	**2**	**4**	**6**	**36**				
1. 1.	Тема 1.1. Чистая и прикладная математика и информатика.Универсальность определения Ж. Адамара коррект-		1-2	12	6	6		12	6	2		4		2		1	

	ной и некорректной математической задачи.																
1. 2.	Тема 1.2. Подходы дискретной и непрерывной математики. Корректность математических объектов и их дидактический анализ		3-4	12	6	6		12	6		4	2		4			
2.	**Раздел 2. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий**		**5-12**	**48**	**24**	**24**		**48**	**24**	**2**	**8**	**14**					
2. 1	Тема 2. 1. Решение несовместных систем линейных уравнений. Понятие о квазирешении и регуляризованном решении. Вычислительный эксперимент.		5-6	12	6	6		12	6	2		4				6	5
2. 2	Тема 2. 2. Обобщение понятия производной. Развитие понятия производной.		7-8	12	6	6		12	6		2	4					8
2. 3	Тема 2. 3. Корректные и некорректные задачи дифференциального и интегрального исчислений. Обобщение понятия интеграла Римана		9-12	24	12	12		24	12		6	6			11	10	
	Общая трудоемкость в часах			**72**	**36**	**36**		**72**	**36**		**12**	**24**	**36**	Промежуточная аттестация			
														Форма		Семестр	
														Экзамен		8 семестры	

4. 2. Содержание дисциплины

Раздел 1. Математическая корректность.

Тема 1. 1. Чистая и прикладная математика и информатика. Универсальность определения Ж. Адамара корректной математической задачи.

Корректность математических объектов и их дидактический анализ.

Тема 1.2. Подходы дискретной и непрерывной математики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий.

Раздел 2. Тема 2. 1. Решение несовместных систем линейных уравнений. Квазирешение.

Тема 2. 2. Развитие понятия предельного перехода. Обобщение понятия функции. Обобщение понятия производной и интеграла. Регулярные обобщения несобственных интегралов.

Тема 2. 3. Суммирование расходящихся рядов. Суммирование в смысле Чезаро и Пуассона. Корректные и некорректные задачи дифференциального и интегрального исчислений. Регуляризационные алгоритмы для производной. Приближенное суммирование рядов Фурье. Регуляризация для суммирования ряда Фурье.

5. Образовательные технологии.

В ходе освоения дисциплины «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий» при проведении аудиторных занятий используются технологии традиционных и нетрадиционных учебных занятий.

Технология традиционного обучения предусматривает такие методы и формы изучения материала как лекция, практические занятия:

- информационная лекция:

Тема 1. 1. Чистая и прикладная математика и информатика. Универсальность определения Ж. Адамара корректной математической задачи.

Тема 1. 2. Подходы дискретной и непрерывной математики. Логико-дидактический анализ понятия «корректность»

Тема 2. 3. Суммирование расходящихся рядов Корректные и некорректные задачи дифференциального и интегрального исчисления.

- лекция-визуализация:

Тема 2. 2. Предельный переход. Обобщение понятия функции. Обобщение понятия производной и интеграла.

Тема 2. 1. Решение несовместных систем линейных уравнений. Квазирешение Практические занятия направлены на формирование у студентов умений и навыков решения задач, в том числе с практическим содержанием и исследовательских задач. В ходе проведения практических занятий используются задания учебно-тренировочного характера и задания творческого характера.

При изучении дисциплины «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий» используются активные и интерактивные технологии обучения, такие как:

- технология сотрудничества, включающая работу в малых группах (тема 2. 2. Предельный переход. Обобщение понятия функции. Обобщение понятия производной и интеграла. Тема 2. 3. Суммирование расходящихся рядов. Корректные и некорректные задачи дифференциального и интегрального исчисления.)
- медиатехнология (подготовка и демонстрация презентаций);
- кейс-технология (проблемный метод, работа в парах и группах).

Нетрадиционные учебные занятия проводятся в форме тренинга (заключительные практические занятия по изучаемым темам).

Занятия, проводимые в интерактивной форме, в том числе с использованием интерактивных технологий составляют 25% от общего количества аудиторных занятий.

Самостоятельная работа студентов подразумевает работу под руководством преподавателя (консультации, коллоквиумы) и индивидуальную работу студента, выполняемую, в том числе, в компьютерном классе с выходом в сеть «Интернет».

При реализации образовательных технологий используются следующие виды самостоятельной работы:

- работа с конспектом лекции;
- работа с учебником;
- решение задач и упражнений по образцу;
- решение вариативных задач и упражнений;
- поиск информации в сети «Интернет» и дополнительной и справочной литературе;
- подготовка к сдаче экзамена.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Самостоятельная работа студента.

Неделя	№ темы	Вид самостоятельной работы	Рекомендуемая литература	Часы
1	2	3	4	5
8 семестр	**1**	**Межпредметная категория «Корректность»**		**20**
1-2	**1. 1.**	*Подготовка к аудиторному занятию:* • *работа с конспектом лекций:* Общеупотребительная и терминологическая корректность. • *работа с учебником:*	1,2,3 (1,2)	12

		Обзор корректности основных математических понятий • *решение задач и упражнений по образцу;* • *решение вариативных задач и упражнений;* • *подготовка к коллоквиуму*		
3-4	**1. 2.**	*Подготовка к аудиторному занятию:* • *работа с конспектом лекции:* Сущностные характеристики понятия «корректность» • *работа с учебником: Корректная математическая задача* • *решение задач и упражнений по образцу;* • *решение вариативных задач и упражнений;* • *подготовка к коллоквиуму*	1,2,3 (1,2)	12
	2	**КОРРЕКТНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И РЕГУЛЯРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ**		**40**
5-6	**2. 1.**	*Подготовка к аудиторному занятию:* Регулярное обобщение понятий *работа с конспектом лекции:* Соотношение объемов обобщаемого и обобщенного понятий. • *работа с учебником:* изучение вопроса: Суммирование расходящихся рядов • *решение задач и упражнений по образцу;* • *решение вариативных задач и упражнений;* • *подготовка доклада по заданной теме с компьютерной презентацией;* • *подготовка к коллоквиуму.*	1,2,3 (1,2)	12
7-8	**2. 2.**	*Подготовка к аудиторному занятию:* • *работа с конспектом лекции:* Обобщенная функция • *работа с учебником:* Производная обобщенной функции	1,2,3 (1,2)	12

		• *решение задач и упражнений по образцу;* • *решение вариативных задач и упражнений;* • *подготовка доклада по заданной теме с компьютерной презентацией;* • *мини-исследование «* Решение задач по нахождению производной обобщенной функции.		
9-12	**2. 3**	*Подготовка к аудиторному занятию:* • *работа с конспектом лекции:* Интеграл Лебега *работа с учебником:* изучение вопроса: Обобщения несобственных интегралов 1-го и 2-го рода. • *решение задач и упражнений по образцу;* • *решение вариативных задач и упражнений;* • *подготовка доклада по заданной теме с компьютерной презентацией;* *подготовка к коллоквиуму*.	1,2,3 (1,2)	24

Задания для контрольной работы

1. Найти точное решение системы линейных уравнений и квазирешение. Убедиться, что они совпадают.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \\ -x+2y=3 \end{cases}. \text{ Ответ: } (1,\ 2)$$

2. Убедиться, что система линейных уравнений несовместна, и найти ее квазирешение:

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ -3x+y=-2 \\ -x+y=1 \end{cases} \text{ Ответ: } \left(\frac{1}{5},\quad \frac{3}{2}\right)$$

3. Изучите понятие нормального решения системы линейных уравнений, см. [125,с. 112] и найдите нормальное решение системы:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-2y=0 \end{cases} \text{Ответ: } \left(\frac{3}{7},\quad \frac{3}{14},\quad -\frac{5}{14}\right)$$

4. Найти регуляризированное решение несовместной системы линейных

уравнений, $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$

5. Убедиться, что предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ существует, но не может быть найден по правилу Лопиталя.

6. Доказать, что если существует $f^{/}(a)$, то

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right)=f^{/}(a).$$

7. Убедиться, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(-1)^n}{n^2+(-1)^n}$ существует, но не может быть найден по дискретному аналогу правила Лопиталя.

8. Убедиться, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$ существует, но не может быть найден по дискретному аналогу правила Лопиталя.

9. Докажите, что последовательность функций

$$f_\gamma(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, |x|<\varepsilon,\\ 0, |x|>\varepsilon\end{cases}$$

является $\delta-$образной последовательностью, т.е. $\lim\limits_{\gamma\to 0} f_\gamma(x)=\delta(x)$.

10. Докажите, что $\delta(x)=\lim\limits_{\gamma\to 0}\dfrac{1}{\gamma}\sin\dfrac{x}{\gamma}$.

11. Докажите, что $\lim\limits_{\gamma\to 0}\dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma^2}{\left(x^2+\gamma^2\right)^{3/2}}=\delta(x)$

12. Докажите, что $\delta(tx)=t\delta(x), t>0$.

13. Докажите, что $a(x)\delta'(x)=a(0)\delta'(x)-a'(0)\delta(x)$ для любой бесконечно дифференцируемой в R функции $a(x)$.

14. Найти обобщенную производную функции $f(x)=\begin{cases} x^3, x\le 0,\\ e^x+1, x>0.\end{cases}$

15. Проверьте, что функция $u(x)=-\delta(x)+c\theta(x)+c_1$ при любых постоянных c, c_1 удовлетворяет уравнению $xu'(x)=\delta(x)$. Указание: воспользуйтесь тем, что

$$\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{x^2+\gamma^2}=\delta(x) \text{ и } \lim_{\gamma\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{x^2\gamma}{\left(x^2+\gamma^2\right)^2}=\delta(x).$$

16. Воспользовавшись значением предела $\lim\limits_{\gamma\to 0}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\gamma}{x^2+\gamma^2}=\delta(x)$, найдите значение интеграла $\int_{-\infty}^{x}\delta(x)dx$.

17. Найти обобщенную производную функции

$$f(x)=\begin{cases} x, x\in[0,1],\\ (x+1)^2, x\notin[0,1].\end{cases}$$

18. Дайте определения несобственного интеграла 1-го рода и 2-го рода.

19. Докажите, что для функции, заданной в соответствующем промежутке, значения несобственных интегралов 1-го и 2-го рода и интегралов в смысле главного значения (v. p.), совпадают.

20. Докажите, что для функции интегрируемой на $[a,b]$ в смысле Римана классически определенный интеграл (в смысле Римана) $\int_a^b f(x)dx$ и его обобщение в смысле (4. 2), совпадают.

21. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{\infty} x^{\alpha} dx, \alpha > 0$.

22. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx$.

23. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$.

Примерные вопросы к собеседованиям

1. Докажите, что операция обобщенного дифференцирования линейна.

2. Докажите, что для функции интегрируемой и неотрицательной на $[a, \infty)$ значение несобственного интеграла 1-го рода $\int_a^{\infty} f(x) dx$ и его обобщение совпадают.

3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{\infty} \cos x dx$

4. Дайте определение квазирешения.

5. Дайте определение регуляризированного решение несовместной системы линейных

Вопросы к экзамену

1. Чистая и прикладная математика и информатика. Универсальность определения Ж. Адамара корректной математической задачи.
2. Подходы дискретной и непрерывной математики. Корректность математических объектов и их анализ.
3. Корректность в общеупотребительном смысле.
4. Корректность вопроса и ответа. Развитие представлений о строгости.
5. Логико-дидактический анализ понятия «корректность».
6. Решение несовместных систем линейных уравнений.
7. Квазирешение (система линейных уравнений.).
8. Развитие понятия предельного перехода, его обобщения.
9. Развитие представлений о функции.
10. Обобщенная функция. Пространство Соболева. Обобщенная постановка задач математической физики.
11. Обобщение понятия производной и интеграла.

12. Регулярные обобщения несобственных интегралов. Феймановские интегралы.
13. Регулярные методы суммирования расходящихся рядов и их применения в теории катастроф.
14. Обобщенное суммирование в смысле Чезаро и Пуассона.
15. Корректные и некорректные задачи дифференциального исчисления.
16. Корректные и некорректные задачи интегрального исчисления.
17. Регуляризационные алгоритмы для производной и их применения в математическом моделировании.
18. Приближенное суммирование рядов Фурье. Приложение к уравнению теплопроводности.
19. Регуляризация для суммирования ряда Фурье и применения для обработки изображений.
20. Регуляризация для вычисления несобственных интегралов.

7. Список основной и дополнительной литературы, интернет-ресурсы

Основная литература

1. Арнольд, В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2004. – 16 с.

2. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / В. И. Арнольд. – М. : Изд-во МГУ, 1994. 207 с.

3. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.

4. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин. – Новосибирск : Сибирское науч. изд-во, 2008. – 460 с.

5. Тихонов, А. Н. Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – М. : Наука, 1990. – 230 с.

6. Будаев, В. Д. Математический анализ функции одной переменной : учебник / В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон. – СПб. : Лань, 2012. – 544 с.

7. Вапник, В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным / В. Н. Вапник. – М. : Наука, 1979. – 447 с.

8. Смирнов, М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 2005.

9. Яремко, О. Э. Математическая корректность / О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – 192 с.

10. Плис, А. И. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М. : Финансы и статистика, 2004.

Дополнительная литература

1. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.

2. Михлин, С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. – М. : Высшая школа, 2007.

3. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 2003.

4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001.

Программное обеспечение и интернет-ресурсы

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	**Math. ru**	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	**Exponenta. ru**	www.exponenta. ru	**Студентам:** - запустить установленный у Вас математический пакет, выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакета, подходящий и решить свою задачу по аналогии; **Преподавателям:** - использовать математические пакеты для поддержки курса лекций. **Всем заинтересованным пользователям:** – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе. – найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.
3.	**Математика**	www.mathematics. ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	**Truba. nnov**	www.truba.nnov. ru	Сайт о математическом анализе.
5.	**fismat**	www.fismat.ru	Высшая математика для студентов – интегралы и производные, ряды; лекции,задачи, учебники.
4.	**Российское образование.**	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
6.	**Математика для студентов и прочее.**	www.xplusy. isnet.ru	содержит большое количество видеолекций для школьников, абитуриентов и студентов по математике и физике.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

«История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий»

Для освоения данной дисциплины необходимы:

– мультимедийные средства обучения математическому анализу (компьютер и проектор; интерактивная доска; интернет-ресурсы).

Рабочая программа дисциплины «История прикладной математики и информатики. Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций примерной ООП ВО по направлению подготовки _010302 «Прикладная математика и информатика» и профилю подготовки Системное программирование и компьютерные технологии»

Программу составил:

Яремко Н. Н., доцент кафедры КТ

Программа одобрена на заседании кафедры «Компьютерные технологии»

Протокол № ___ от «____» _______20__ года

Зав. кафедрой «Компьютерные технологии» ________________________ В. И. Горбаченко

Программа одобрена методической комиссией факультета вычислительной техники

Протокол № ___ от «____» ________20__ года

Председатель методической комиссии

Факультета вычислительной техники ______________ ______________

(подпись) (Ф.И.О.)

Рабочая программа дисциплины «Корректность определений и регулярное обобщение математических понятий» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций примерной ООП ВО по направлению подготовки _010302 «Прикладная математика и информатика»_ и профилю подготовки Системное программирование и компьютерные технологии»

Программу составил:
Яремко Н.Н., доцент кафедры КТ

Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.

Программа одобрена на заседании кафедры «Компьютерные технологии»

Протокол № 1 от «31» 08 2015 года

Зав. кафедрой «Компьютерные технологии» ______________
В. И. Горбаченко

Программа одобрена методической комиссией факультета вычислительной техники

Протокол № 1 от 10 » 09 2015 года

Председатель методической комиссии
Факультета вычислительной техники ______________
(подпись) (Ф.И.О.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978. – 351 с.
2. Адамар, Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики / Ж. Адамар. – М. : Сов. радио, 1970. – 152 с.
3. Аванесов, В.С. Форма тестовых заданий /В.С.Аванесов. – М.: Центр тестирования, 2005. – 155с.
4. Аксенов, А.А. Теория обучения логическому поиску решения школьных математических задач : моногр. / А. А. Аксенов. – Орёл : ОГУ, Полиграфическая фирма «Картуш», 2007. – 200 с.
5. Алгебра и начала математического анализа: 11 класс (профильный уровень) : учебник / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов ; под ред. А. Г. Мордковича. – 6-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2012. – 287 с.
6. Алгебра и начала анализа : учеб. для 10–11 классов общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. – 18-е изд. – М. : Просвещение, 2012. – 385 с.
7. Аматова Г. М. , Аматов М. А. Математика: учеб. пособие для студентов высш. пед. учеб. завед. : в 2 кн. – М. : Академия, 2008. – Кн. I. – 256 с.
8. Аммосова, Н. В. Система методических спецкурсов для студентов-математиков высшей школы : учеб. пособие / Н. В. Аммосова. – Астрахань : Астраханский университет, 2007. – 232 с.
9. Аммосова, Н. В. Развитие творческой личности школьника при обучении математике : учеб. пособие / Н. В. Аммосова. – Астрахань : Изд-во АИПКП, 2010. – 226 с.
10. Аммосова, Н. В. Методико-математическая подготовка будущих учителей математики в соответствии с задачами современности : моногр. / Н. В. Аммосова. – Астрахань : Изд-во АИПКП, 2012. – 324 с.
11. Анохин, П. К. Теория функциональных систем в физиологии и психо-

логии / П. К. Анохин. – М., 1978. – 384 с.

12. Анфилатов, В. С. Системный анализ в управлении / В. С. Анфилатов, А. А. Емельянов, А. А. Кукушкин. – М. : ФиС, 2002. – 368 с.
13. Архангельский, С. И. Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы / С. И. Архангельский. – М. : Высш. шк., 1980. – 368 с.
14. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие для вузов / В. И. Арнольд. – М. : Наука, 1971. – 239 с.
15. Арнольд, В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2004. – 16 с.
16. Асланов, Р. М. Математика: учебник / Р. М. Асланов, В. Л. Матросов, А. И. Нижников, М. В. Топунов. – М. : МПГУ, 2007. – 386 с.
17. Асмолов, А. Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий : пособие для учителя / А. Г. Асмолов, В. Г. Бурменская, И. А. Володарская и др. ; под ред. А. Г. Асмолова. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2011. – 159 с.
18. Бабанский, Ю. К. Проблемы повышения эффективности педагогических исследований: Дидактический аспект / Ю. К. Бабанский. – М. : Педагогика, 1982. – 192 с.
19. Баврин, И. И. Матричные интегральные преобразования для задач математической физики неоднородных структур / И. И. Баврин, В. Л. Матросов, О. Э. Яремко. – М. : Прометей, 1998.
20. Балл, Г. А. Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. – М. : Педагогика, 1990. –184 с.
21. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1973. – 632 с.
22. Безусова, Т. А. Некорректные задачи как средство развития культуры математического и естественно-научного мышления школьников : автореф. дис. … канд. пед. наук / Безусова Т. А. – Тюмень, 2008. – 27 с.

23. Беспалько, В. П. Слагаемые педагогической технологии / В. П. Беспалько. – М., 1989. – 190 с.
24. Большая советская энциклопедия. – Т. 23. – 430 с.
25. Боровских, А. В. Деятельностные принципы в педагогике и педагогическая логика / А. В. Боровских, Н. Х. Розов. – М. : МАКС Пресс, 2010. – 80 с.
26. Будаев, В. Д. Математический анализ функции одной переменной : учеб. / В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон. – СПб. : Лань, 2012. – 544 с.
27. Вапник, В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным / В. Н. Вапник. – М. : Наука, 1979. – 447 с.
28. Варшавский, И. К. Стереометрия на едином государственном экзамене / И. К. Варшавский, М. Я. Гаиашвили, Ю. А. Глазков // Математика в школе. – 2006. – № 4. – С. 2–9.
29. Василенко, О. А. Формирование межпредметных понятий при обучении математике в основной школе : автореф. дис. … канд. пед. наук / Василенко О. А. – СПб., 2007. – 19 с.
30. Вербицкий, А. А. Личностный и компетентностный подходы в образовании: проблемы интеграции / А. А. Вербицкий, О. Г. Ларионова. – М. : Логос, 2009. – 336 с.
31. Владимиров, В. С. Что такое математическая физика? : препринт / В. С. Владимиров ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. – М. : МИАН, 2006. – 20 с.
32. Волков, И. К. Интегральные преобразования и операционное исчисление : учеб. для вузов / И. К. Волков, А. Н. Канатников ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996. – 228 с.
33. Выготский, Л. С. Собрание сочинений / Л. С. Выготский. – М. : Педагогика, 1982. – Т. I. – 488 с.
34. Гадамер, Х. Г. Истина и метод: основы философской герменевтики / Х.

Г. Гадамер. – М. : Прогресс, 1988. – 704 с.

35.Гальперин, П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий / П. Я. Гальперин // Исследование мышления в советской психологии. – М. : Наука, 1966. – С. 236–277.

36.Гетманова, А. Д. Логика : учебник, словарь, практикум / А. Д. Гетманова. – Изд. 2-е. – М. : Академический проект, 2009. – 712 с.

37.Гнеденко, Б. В. Математическое образование в вузах : учеб.-метод. пособие / Б. В. Гнеденко. – М. : Высш. школа, 1981. – 174 с.

38.Гнеденко, Б. В. Математика и математическое образование в современном мире / Б. В. Гнеденко. – М. : Просвещение, 1985. – 192 с.

39.Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. л-ры, 1950. – 388 с.

40.Горбатов, В. В. Логика : учеб. пособие / В. В. Горбатов ; Моск. гос. ун-т экономики, статистики и информатики. – М. : МЭСИ, 2006. – 247 с.

41.Гурова, Л. Л. Психологический анализ решения задач / Л. Л. Гурова. – Воронеж : Изд-во Воронежск. ун-та, 1976. – 327 с.

42.Гусев, В. А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В. А. Гусев. – М. : Вербум, 2003. – 432 с.

43.Гусев, В. А. Логика : учеб. пособие для вузов / В. А. Гусев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 272 с.

44.Демидов, И. В. Логика : учеб. пособие для юридических вузов / И. В. Демидов ; под ред. д.ф.н., проф. Б. И. Каверина. – М. : Юриспруденция, 2000. – 208 с.

45.Демидов, И. В. Логика. Вопросы и ответы / И. В. Демидов, Б. И. Каверин. – Изд. второе, испр. и доп. – М. : Юриспруденция, 2002. – 160 с.

46.Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач : учеб. пособие / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 208 с.

47.Дорофеев, Г. В. Строгость определения математических понятий школьного курса с методической точки зрения / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1994. – № 3. – С. 36–38.

48. Дробышев, Ю. А. Многоуровневая историко-математическая подготовка будущего учителя математики : автореф. дис. … д-ра пед. наук / Дробышев Ю. А. – Москва, 2011. – 45 с.

49. Дробышева, И. В. О содержательном компоненте компетентносно ориентированного обучения математике студентов вузов / И. В. Дробышева // Артемовские чтения : материалы VIII Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием (Пенза, 17–18 мая 2012 г.). – Пенза : ПГПУ, 2012. – Т. 1. – С. 31–35.

50. Егупова, М.В. Методическая система подготовки учителя к практико-ориентированному обучению математике в школе: моногр / М.В. Егупова. – М.: МПГУ, 2014. – 220 с.

51. Загвязинский, В. И. Теория обучения: современная интерпретация : учеб. пособие / В. И. Загвязинский. – М. : Академия, 2006. – 192 с.

52. Зельдович, Я. Б. Высшая математика для начинающих / Я. Б. Зельдович. – М. : Наука, 1968. – 576 с.

53. Зимняя, И. А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования / И. А. Зимняя // Высшее образование сегодня. – 2003. – № 8. – С. 34–42.

54. Зимняя, И. А. Педагогическая психология : учеб. для вузов / И. А. Зимняя. – М. : Логос, 2004. – 384 с.

55. Иванова, Е. О. Теория обучения в информационном обществе / Е. О. Иванова, И. М. Осмоловская. – М. : Просвещение, 2011. – 190 с.

56. Иванов, В. К. О некорректно поставленных задачах / В. К. Иванов // Матем. сб. – 1963. – Т. 61, № 2.

57. Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 206 с.

58. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи / С. И. Кабанихин. – Новосибирск : Сибирск. науч. изд-во, 2008. – 460 с.

59. Калошина, И. П. Психология творческой деятельности : учеб. пособие

для вузов / И. П. Калошина. – 2-е изд. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 559 с.

60. Калинин, С. И. Методическая система обучения студентов педвуза дифференциальному и интегральному исчислению функций в контексте фундаментализации образования : автореф. дис. … д-ра пед. наук / Калинин С. И. – Москва, 2010. – 46 с.

61. Ковалева, Г. И. Методическая система обучения будущих учителей математики конструированию систем задач : автореф. дис. … д-ра пед. наук / Ковалева Г. И. – Волгоград, 2012. – 41 с.

62. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1976.

63. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математике. Ч. I / Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1977. – 110 с.

64. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математике. Ч. II / Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1977. – 144 с.

65. Колягин, Ю. М. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы : автореф. дис. … д-ра пед. наук / Колягин Ю. М. – М., 1977. – 55 с.

66. Колягин, Ю. М. Учись решать задачу / Ю. М. Колягин, В. А. Оганесян. – М. : Просвещение, 1980. – 99 с.

67. Корнилов, В. С. Теоретические и методические основы обучения обратным задачам для дифференциальных уравнений в условиях гуманитаризации математического образования : автореф. дис. … д-ра пед. наук / Корнилов В. С. – М. : МПГУ, 2008. – 46 с.

68. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. В. Глиер, М. М. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1970. – 710 с.

69. Коржуев, А. В. Содержательная и логическая корректность педагогических исследований / А. В. Коржуев // Педагогика. – 1999. – № 2. – С. 8–12.

70. Краевский, В. В. Основы обучения. Дидактика и методика : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. В. Краевский, А. В. Хуторской. – 2-е изд.,стер. – М. : Академия, 2008. – 352 с.
71. Краснова, О. В. Механизм эмерджентобразования в развитии систем педагогических взаимодействий и его применение при решении задачи коррекции универсальных учебных действий школьников / О. В. Краснова // Наука и школа. – 2009. – № 6. – С. 23–27.
72. Краснова, О. В. Проблема поиска единого механизма функционирования и развития систем педагогических взаимодействий: опыт структурно-динамического исследования / О. В. Краснова // Образование и наука. – 2009. – № 11 (68). – С. 123–139.
73. Краснова, О. В. Содержание и объем понятия «система педагогических взаимодействий» / О. В. Краснова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Гуманитарные науки. – 2008. – № 4 (8). – С. 105–112.
74. Крупич, В. И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач / В. И. Крупич. – М. : Прометей, 1995. – 166 с.
75. Крутецкий, В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – М. : Просвещение, 1968. – 432 с.
76. Кудрявцев, Л. Д. Современная математика и ее преподавание / Л. Д. Кудрявцев. – 2-е изд. – М. : Наука, 1985.
77. Кудрявцев, Л. Д. Современное общество и нравственность / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 2000.
78. Кузьмина, Н. В. Понятие «педагогической системы» и критерии ее оценки / Н. В. Кузьмина // Методы системного педагогического исследования ; под ред. Н. В. Кузьминой. – М. : Народное образование, 2002. – С. 11.
79. Курант, Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт. – М. : Гостехиздат, 1945. – Т. 2. – 620 с.
80. Лаврентьев, М. М. Некорректные задачи математической физики и

анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. – М. : Наука, 1980. – 286 с.

81. Лаврентьев, М. М. Одномерные обратные задачи математической физики / М. М. Лаврентьев, К. Г. Резницкая, В. Г. Яхно. – Новосибирск : Наука, 1982. – 88 с.
82. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.
83. Лакатос, И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / И. Лакатос. – М., 1967. – 65 с.
84. Лернер, И. Я. Дидактические основы методов обучения / И. Я. Лернер. – М. : Педагогика, 1981. – 186 с.
85. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / под науч. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М. : Дрофа, 2005. – 416 с.
86. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие. – Чебоксары : Изд-во Чувашск. ун-та, 2009. – 732 с.
87. Нижников, А.И. Проектирование учебного курса на основе принципов всемирной инициативы CDIO/ А.И. Нижников, С.А. Муханов.// Педагогическая информатика. –2014 – № 4 – с. 39-46.
88. Нижников, А. И. Разработка генератора тестовых заданий по дифференциальным уравнениям для системы дистанционного обучения MOODLE / А. И. Нижников, А. А. Муханова, С. А. Муханов // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Информатизация образования. – 2014. – № 3. – С. 100–107.
89. Новая философская энциклопедия. – URL: http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/378783
90. Новиков, А. М. Методология образования / А. М. Новиков. – Изд. второе. – М. : Эгвес, 2006. – 488 с.
91. Новиков, А. М. Основания педагогики : пособие для авторов учебников и преподавателей педагогики / А. М. Новиков. – М. : ЭГВЕС, 2010. –

208 с.

92.Павлов, А. С. О соблюдении 10 правил корректности в научных исследованиях / А. С. Павлов – URL: http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11603.html

93.Педагогика и психология высшей школы : учеб. пособие. – 3-е изд. – Ростов н/Д : Феникс, 2006. – 512 с.

94.Перминов, В. Я. Развитие представлений о надежности математического доказательства / В. Я. Перминов. – Изд. 2-е. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 240 с.

95.Перминов, В. Я. Философия и основания математики / В. Я. Перминов. – М. : Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.

96.Петрова В. Т. Научно-методические основы интенсификации обучения математическим дисциплинам в высшем учебном заведении : автореф. дис. … д-ра пед. наук / Петрова В. Т. – М., 1998. – 43 с.

97.Петров, Ю. А. Практическая методология / Ю. А. Петров, А. А. Захаров. – Озерск : ОТИ МИФИ, 2001. – 107 с.

98.Плис, А. И. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – М. : Финансы и статистика, 2004.- 437с.

99. Плоткин, Б. И. Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных / Б. И. Плоткин. – М. : Наука, 1991. – 447 с.

100.Подходова, Н. С. Методика формирования междисциплинарных понятий / Н. С. Подходова. – СПб. : РГПУ, 2006. – 35 с.

101. Подходова, Н. С. Проблема формирования междисциплинарных понятий / Н. С. Подходова // Метаметодика как перспективное направление предметных методик : Четвертая Всерос. науч.-практ. конф. – СПб., 2006.

102.Подходова Н. С. Метаметодический подход к образовательному процессу / Н. С. Подходова //Современные наукоемкие технологии. – 2004. – № 6. – С. 14–16.

103.Полотовский, Г. М. Математическая безграмотность губительнее костров инквизиции. Памяти В. И. Арнольда / Г. М. Полотовский // Математика в высшем образовании. – 2010. – № 8. – С. 7–18.

104.Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1974.

105. Пойа, Д. Как решать задачу / Д. Пойа. – Львов : Квантор, 1991. – 216с.

106.Пойа, Д. Математическое открытие / Д. Пойа. – М. : Наука, 1976. – 448 с.

107. Пойа, Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. – М. : Просвещение, 1975. – 464 с.

108. Полиа, Д. Задачи и теоремы из анализа / Д. Полиа, Г. Сеге. – М. : Наука, 1978. – Ч. I, II.

109. Пономарев, Я. А. Психология творческого мышления / Я. А. Пономарев. – М. : Изд-во АПН РСФСР, 1960. – 352 с.

110. Пузанков, Д. В. Двухступенчатая система подготовки специалистов / Д. В. Пузанков, И. Б. Федоров, В. Д. Шадриков // Высшее образование в России. – 2004. – № 2. – С. 3–11.

111.Пышкало, А. М. Методическая система обучения геометрии в начальной школе : авторский доклад по монографии «Методика обучения элементам геометрии в начальных классах», представленной на соискание ученой степени д-ра пед. наук / А. М. Пышкало. – М. : Академия пед. наук СССР, 1975. – 60 с.

112. Равен, Дж. Компетентность в современном обществе: выявление, развитие и реализация / Дж. Равен ; пер. с англ. – М. : Когито-Центр, 2002. – 96 с.

113. Развитие универсальных учебных действий / под ред. С. Г. Воровщикова, Н. П. Авериной. – М. : Перспектива, 2013. – 280 с.

114. Решетняк, Ю. Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе / Ю. Г. Решетняк. – Новосибирск : Наука, 1982. – 229 с.

115. Родионов, М. А. Деятельностно-процессуальный подход к обучению школьников поиску пути решения математических задач / М. А. Родионов, Н. Н. Храмова. – Пенза : ПГПУ, 2007. – 28 с.
116. Розанова, С. А. Математическая культура студентов технических университетов / С. А. Розанова. – М. : Физматлит, 2003. – 176 с.
117. Розов, Н. Х. Курс математики общеобразовательной школы: сегодня и послезавтра / Н. Х. Розов // Задачи в обучении математике: теория, опыт, инновации : материалы Всерос. науч.-практ. конф. ,посвящ. 115-летию чл.-кор. АПН СССР П. А. Ларичева. – Вологда : Русь, 2007. – С. 6–12.
118. Рубинштейн, С. Л. О мышлении и путях его исследования / С. Л. Рубинштейн. – М. : Изд-во АПН СССР, 1958. – 146 с.
119. Русский язык и культура речи : учеб. / под ред. проф. В. И. Максимова. – М. : Гардарики, 2001. – 413 с.
120. Самарский, А. А. Численные методы обратных задач математической физики : учеб. пособие / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Изд. 3-е. – М. : Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
121. Саранцев, Г. И. Общая методика преподавания математики / Г. И. Саранцев. – Саранск, 1999. – 208 с.
122. Саранцев, Г. И. Методология методики обучения математике / Г. И. Саранцев. – Саранск, 2001. – 144 с.
123. Секей, Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике / Г. Секей. – М. : Мир, 1990. – 240 с.
124. Селютин, В. Д. Научные основы методической готовности учителя к обучению школьников стохастике / В. Д. Селютин. – Орел : ОГУ, 2001. – 200 с.
125. Селютин, В. Д. Теория вероятностей в экономическом прогнозировании : моногр. / В. Д. Селютин, Е. В. Лебедева. – Орел : ФГБОУ ВПО «ОГУ», 2013. – 120 с.
126. Селютин, В. Д. Укрепление внутрипредметных связей школьного

курса математики средствами стохастики : моногр. / В. Д. Селютин, Л. А. Терехова. – Орел : ОГУ, 2008. – 198 с.

127.Селевко, Г. К. Современные образовательные технологии / Г. К. Селевко. – М. : Народное образование, 1998. – 256 с.

128. Сластенин, В. А. Педагогика : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов ; под ред. В. А. Сластенина. – М. : Академия, 2007. – 576 с.

129. Смирнов, В. В. Математическое моделирование : конспект лекций для студентов специальности 151001 «Технология машиностроения» всех форм обучения / В. В. Смирнов. – Бийск : Изд-во Алтайск. гос. техн. ун-та, 2006. – 103 с.

130. Смирнов, С. Д. Педагогика и психология высшего образования: от деятельности к личности / С. Д. Смирнов. – М., 2005.- 400с.

131. Соболев, В. А. Решаем несовместные системы / В. А. Соболев // Соросовский образовательный журнал. Математика. – 2000. Т. 6., № 4. – С. 116–119.

132. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : Физматгиз, 1959. – 473 с.

133. Столяр, А. А. Педагогика математики / А. А. Столяр. – Минск : Высш. шк. ,1986. – 414 с.

134. Сумин, М. И. О некорректно поставленных задачах и методе регуляризации : метод. разработка / М. И. Сумин. – Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 1991. – Ч. 1. – 16 с. ; Ч. 2. – 15 с. ; Ч. 3. – 21 с.

135. Сухотин, А. К. Философия математики : учеб. пособие / А. К. Сухотин. – Томск : Изд-во Томск. ун-та, 2003. – Гл. IX. Специфика истины в математике. Критерий выводимости и проблема корректности. критерий корректности правил вывода. – 350 с.

136. Талызина, Н. Ф. Управление процессом знания / Н. Ф. Талызина. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 346 с.

137. Талызина, Н. Ф. Практикум по педагогической психологии : учеб.

пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / Н. Ф. Талызина. – М. : Академия, 2002. – 192 с.

138. Талызина, Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н. Ф. Талызина. – 2-е изд. – М. : Изд-во МГУ, 1984. – 346 с.

139. Тимофеев, И. А. Логика и теория аргументации / И. А. Тимофеев. – URL: http://x.gukit.ru/wp-content/fmk/doc/Logika_argument.doc

140. Тимофеева, И. Л. Совершенствование дедуктивной подготовки студентов математических факультетов педвузов при обучении основам теории доказательств : автореф. дис. … канд. пед. наук / Тимофеева И. Л. – М., 2001.

141. Титова, И. М. Метаметодический подход к модернизации обучения в общеобразовательной школе / И. М. Титова // Академические чтения. Вып. 3. Теория и практика модернизации отечественного образования. – СПб., 2002.

142. Тихонов, А. Н. Некорректные задачи / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин // Математическая энциклопедия. – М. : Советская энциклопедия, 1982. – Т. 3. – С. 930–935.

143. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.

144. Тихонов, А. Н. Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – М. : Наука, 1990. – 230 с.

145. Тихонов, А. Н. Некорректно поставленные задачи / А. Н. Тихонов, В. К. Иванов, М. М. Лаврентьев // Дифференциальные уравнения с частными производными. – М. : Наука, 1970. – С. 224–238.

146. Тихонов, А. Н. Курс высшей математики и математической физики / А. Н. Тихонов, В. А. Ильин, А. Г. Свешников. – М. : Наука, 1980. – Вып. 7. Дифференциальные уравнения.

147. Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // ДАН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.

148. Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151,№ 3. – С. 501–504.

149. Тихонова, А. А. Андрей Николаевич Тихонов / А. А. Тихонова, Н. А. Тихонов. – Вып. VIII. – М. : МГУ, физ. ф-т, 2004. – 124 с. – (Выдающиеся ученые физического факультета МГУ).

150. Толковый словарь иностранных слов. – URL: http://foreign. slovaronlincom/К/КР/6938-KRITERIY

151. Федорова, М. А. Формирование учебной самостоятельной деятельности студентов в личностно развивающем профессиональном образовании : моногр. / М. А. Федорова. – Орел : Изд-во ГОУ ВПО «ОГУ», 2011. – 312 с.

152. Федеральный государственный образовательный стандарт по направлениям подготовки «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Прикладная математика и информатика», «Механика и математическое моделирование» (бакалавриат) // Российское образование : федеральный портал. – URL: http://www.edu.ru.

153. Философия естественных наук : учеб. пособие для вузов / под общ. ред. С. А. Лебедева. – М. : Академический проект, Фонд «Мир», 2006. – 560 с.

154. Философия математики и технических наук : учеб. пособие для вузов / под общ. ред. С. А. Лебедева. – М. : Академический проект, 2006. – 779 с.

155. Философия естественных наук : учеб. пособие для вузов / под общ. ред. проф. С. А. Лебедева. – М. : Академические проект ; Фонд «Мир», 2006. – 560 с.

156. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматлит, 2001.

157. Фридман, Л. М. Учитесь учиться математике / Л. М. Фридман. – М. : Просвещение, 1986. – 112 с.

158. Фридман, Л. М. Как научиться решать задачи / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий. – М., 1984. – 175 с.

159. Фридман, Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в средней школе / Л. М. Фридман. – М. : Просвещение, 1983. – 160 с.

160. Фридман, Л. М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач / Л. М. Фридман. – М. : Педагогика, 1977. – 208 с.

161. Фридман, Л. М. О корректном применении статистических методов в психолого-педагогических исследованиях / Л. М. Фридман // Советская педагогика. – 1970. – № 3.

162. Холодная, М. А. Психология интеллекта / М. А. Холодная. – СПб. : Питер, 2002. – 272 с.

163. Хрестоматия по методике математики. Обучение через задачи / сост. М. И. Зайкин, С. В. Арюткина. – Арзамас, 2005. – 300 с.

164. Хуторской, А. В. Метапредметный подход в обучении : науч.-метод. пособие / А. В. Хуторской. – М. : Эйдос ; Изд-во Института образования человека, 2012. – 73 с.

165. Хуторской, А. В. Системно-деятельностный подход в обучении : науч.-метод. пособие / А. В. Хуторской. – М. : Эйдос, 2012. – 63 с.

166. Хуторской, А. В. Современная дидактика : учеб. для вузов / А. В. Хуторской. – СПб. : Питер, 2001. – 544 с.

167. Черняк, А. А. Высшая математика на базе Mathcad / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк, Ю. А. Доманова. – СПб. : БВХ-Петербург, 2004. – 593 с.

168. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – М. : Гл. ред. физ.-мат. л-ры., 1978. – 224 с.

169. Шабунин, М. И. Математика для поступающих в вузы / М. И. Шабунин. – М. : Лаборатория базовых знаний, 1999. – 636 с.

170. Шадриков, В. Д. Деятельность и способности / В. Д. Шадриков. – М. : Логос, 1994. – 320 с.

171. Шаршунов, В. А. Как подготовить и защитить диссертацию: ис-

тория, опыт, методика и рекомендации / В. А. Шаршунов, Н. В. Гулько. – URL: http://www.twirpx.com/file/353292/

172. Эльконин, Б. Д. Психология развития : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Б. Д. Эльконин. – М. : Академия, 2001. – 144 с.

173. Эсаулов, А. Ф. Активизация учебно-познавательной деятельности студентов / А. Ф. Эсаулов. – М. : Высшая школа, 1982. – 223 с.

174. Эсаулов, А. Ф. Психология решения задач / А. Ф. Эсаулов. – М. : Высшая школа, 1972. – 216 с.

175. Юцавичене, П. А. Теория и практика модульного обучения / П. А. Юцавичене. – Каунас, 1989. – 150 с.

176. Ягола, А.Г. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. /А.Г. Ягола, Ван Янфей, И.Э Степанова, В.Н.Титаренко,. – 2-е изд. – М.:Бином, Лаборатория знаний, 2014. – 216с.

177. Яремко, Н. Н. (Гайдай, Н. Н.) Характеристики роста аналитических функций и их приложения : дис. … канд. физ.-мат. наук / Яремко Н. Н. (Гайдай Н. Н.). – Свердловск, 1984. – 117 с.

178. Яремко, Н.Н. Методическая система критериально-корректностной математической подготовки бакалавров / Н. Н. Яремко // 69-е Герценовские чтения : сб. науч. работ, представленных на Международную научную конференцию «Проблемы теории и практики обучения математике / под ред. В. В. Орлова. – СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. – С. 101–105.

179. Яремко, Н. Н. Критериально-корректностная компетентность бакалавров и ее формирование при обучении математике в вузе / Н. Н. Яремко, М.А. Гаврилова // Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство : тр. Междунар. науч. конф., г. Горис, Армения, 28 сентября – 2 октября 2015 г. – Москва : РУДН, 2015. – Т. 1. – С. 324–329.

180. Яремко, Н. Н. Методическая система критериально-корректностной математической подготовки бакалавров / Н. Н. Яремко

// Материалы XXXIV Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов под руководством А.Г.Мордковича 25–27 сентября 2015, Калуга Калужский филиал Финансового университета при правительстве РФ: Концепция развития математического образования: проблемы и пути реализации. – М. : Изд-во ООО «ТРП», 2015. – С. 486–490.

181. Яремко, Н. Н. Математическая корректность как ведущая идея обучения математике в вузе / М. А. Гаврилова, Н. Н. Яремко // Тезисы XXIII Международной конференции МКО 25–30 января 2016 г. в г. Дубна / под ред. Г. Ю. Ризниченко и А. Б. Рубина. – М. – Ижевск, 2016. – С. 345.

182. Яремко, Н. Н. Проблемный подход в обучении – эффективный путь формирования творческой личности / Н. Н. Яремко, Л. Е. Золотова // Методический сборник № 16 ПВАИУ. – Пенза, 1990. – С. 117–122.

183. Яремко, Н. Н. Деятельностный подход в обучении математике Передовой опыт ПВАИУ : метод. рекомендации / Н. Н. Яремко, Л. Е. Золотова. – Пенза : ПВАИУ, 1990. – 17 с.

184. Яремко, Н. Н. Уравнения математической физики : учеб. пособие / Н. Н. Яремко, Л. Е. Золотова, Т. Г. Фунина. – Пенза : ПВАИУ, 1990. – 70 с.

185. Яремко, Н. Н. Школьнику о математических методах в экономике: учеб. пособие / Н. Н. Яремко, О. Э. Яремко, О. Г. Никитина. – Пенза : НМЦ, 1992. – 100 с.

186. Яремко, Н. Н. Higher mathematics / Н. Н. Яремко, Л. И. Крюкова, В. В. Дрождин. – Пенза : ПГПУ, 1996. – 63 с.

187. Яремко, Н. Н. Интеллектуальные способности и механизмы их реализации при обучении математики / Н. Н. Яремко, Л. Е. Золотова // Традиции и современность : тез. докладов фед. науч.-практ. конф. (25–26 ноября 1997 г.). – Нижний Новгород, 1997. – С. 195–196.

188. Яремко, Н. Н. Теория функций комплексного переменного : учеб.

пособие / Н. Н. Яремко, Л. Е. Золотова и др. – Пенза : ПВАИИ, 1999. – 85 с.

189. Гаврилова, М. А. Тестирование как проблема теоретического и прикладного исследования / М. А. Гаврилова, Н. Н. Яремко. – Пенза : ПГПУ, 2001. – 65 с.

190. Яремко, Н. Н. Опыт компьютерного тестирования по математике / Н. Н. Яремко // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб. материалов Всерос. науч.-практ. конф. – Пенза, 2001. – С. 133–134.

191. Яремко, Н. Н. Особенности обучения высшей математике студентов экономического факультетата / Н. Н. Яремко // Экономика, менеджмент, информатика, иностранные языки : сб. ст. ПГПУ. – Пенза : ПГПУ,2001. – С. 111–117.

192. Яремко, Н. Н. Система учебных математических задач как средство формирования интеллектуальной активности / Н. Н. Яремко // Модернизация школьного математического образования и проблемы подготовки учителя математики : тр. XXI Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и пед. вузов. – СПб. : РГПУ им. Герцена, 2002. – С. 52–53.

193. Яремко, Н. Н. Интеллектуальная активность студентов в контексте гуманизации математического образования / Н. Н. Яремко // Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика : материалы Всерос. науч. конф. (18–20 сентября 2002 г.). – Саранск, 2002. – С. 179–183.

194. Яремко, Н. Н. Реализация интеллектуальной активности студентов в условиях различных образовательных технологий / Н. Н. Яремко // Проблемы профессионального образования молодежи : межрег. сб. науч. тр. – Саранск ; Пенза ; Тольятти, 2002–2003. – Ч. IV. – С. 43–46.

195. Яремко, Н. Н. Интеллектуальная активность – структурообразующий компонент методической системы обучения высшей математике/

Н. Н. Яремко // Проблемы повышения качества подготовки специалистов : материалы 8-й Междунар. науч.-метод. конф. (27 марта 2002 г.). – Вып. 6. – М. : МГТА, 2002. – С. 192–194.

196. Линьков, В. М. Высшая математика в примерах и задачах. Компьютерный практикум : учеб. пособие / В. М. Линьков, Н. Н. Яремко ; под ред. акад. А. А. Емельянова. – М. : Финансы и Статистика, 2006. – 320 с.

197. Яремко, Н. Н. Обратная коэффициентная задача гравиразведки для кусочно-однородной среды / Н. Н. Яремко // Дифференциальные уравнения и их приложения : тез. докладов Междунар. конф. (11–14 октября 2006 г.). – Черновцы : ЧГУ, 2006. – С. 186–187.

198. Родионов, М. А. Комбинаторика, теория вероятностей, математическая статистика / М. А. Родионов, Н. Н. Яремко. – Пенза : Приволжский дом знаний, 2007. – 124 с.

199. Гаврилова, М. А. Математика на экономическом факультете / М. А. Гаврилова, Н. Н. Яремко // Обозрение прикладной и промышленной математики : тез. Докладов. – М. : ОПиПМ, 2007. – Ч. IV, т. 14, вып.2.С. 276–277. – (Прикладная вероятность и статистика).

200. Яремко, Н. Н. Креативные методы решения стереометрических задач (метод координат) / Н. Н. Яремко // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы : материалы Всерос. науч.-практ. конф. «Артемовские чтения». – Пенза, 2007. – С. 138–140.

201. Яремко, Н. Н. Обучение решению корректных и некорректных задач с использованием информационных технологий / Н. Н. Яремко // Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции (28–29 ноября 2007 г.). – Пенза : Приволжский дом знаний, 2007. – С. 94–98.

202. Яремко, Н. Н. Особенности обучения решению корректных и некорректных задач в школе и вузе / Н. Н. Яремко // Проблемы теории и практики подготовки современного специалиста : межвуз. сб. науч. тр.

– Вып. 6. – Нижний Новгород, 2007. – С. 399–403.

203. Яремко, Н. Н. Метод кусочно-однородных сплайнов для решения некорректных задач слоистых структур / Н. Н. Яремко // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. Физико-математические науки. – 2008. – №8(12).С. 54–58.

204. Яремко, Н. Н. Вероятностные методы в математическом анализе / Н. Н. Яремко // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. Физико-математические науки. – 2008. – № 8 (12). – С. 58–63.

205. Яремко, Н. Н. Формирование интеллектуальной активности студентов при обучении математическому анализу / Н. Н. Яремко, М. А. Родионов // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. Основной выпуск. Специальный выпуск. – 2008. – Т. 14. – С. 276–279.

206. Яремко, Н. Н. Некорректные задачи при обучении математике в школе и вузе / Н. Н. Яремко // Известия РГПУ им. Герцена. Докторские тетради. – 2008. – № 11 (62). – С. 339–346.

207. Яремко, Н. Н. Корректные алгоритмы решения некорректных задач в школьном курсе математики / Н. Н. Яремко // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы : материалы IV Всерос. науч.-практ. конф. «Артемовские чтения». – Пенза : ПГПУ, 2008.–Т.I.С. 163–167.

208. Баврин, И. И. Корректные и некорректные задачи / И. И. Баврин, Н. Н. Яремко // Проф. образование. Столица. – 2008. – № 9. – С. 37–38.

209. Яремко, Н. Н. Информационные технологии как инструментарий решения некорректных математических задач / Н. Н. Яремко // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : материалы VIII Всерос. науч.-практ. конф. (19–20 ноября 2008 г.). – Пенза : Приволжский дом знаний, 2008. – С. 147–150.

210. Родионов, М. А. Дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных : учеб. пособие / М. А. Родионов, Н. Н. Яремко,

А. В. Везденева. – Пенза : ПГПУ, 2008. – 144 с.

211. Яремко, Н. Н. Проблема потери решений уравнения / Н. Н. Яремко // Математика в школе. – 2009. – № 8. – С. 21–26.

212. Яремко, Н. Н. Функции некорректных задач в обучении математике / Н. Н. Яремко // Математическое образование: концепции, методики и технологии : сб. тр. IV Междунар. конф. (21–24 апреля 2009 г.). – Тольятти : ТГУ, 2009. – С. 74–79.

213. Яремко, Н. Н. Роль и место некорректных задач в обучении математике / Н. Н. Яремко // Современная математика и проблемы математического образования : материалы Всерос. заоч. науч.-практ. конф. – Орел : ОГУ, 2009. – С. 271–276.

214. Яремко, Н. Н. Некорректные задачи как средство реализации деятельностного подхода в обучении математике / Н. Н. Яремко // Матаматика. Образование : материалы XVII Междунар. конф. (24–31 мая 2009 г.). – Чебоксары : ЧПУ,ЧГУ, 2009. – С. 142.

215. Яремко, Н. Н. Некорректные математические задачи как фактор актуализации исследовательского компонента познавательной деятельности / Н. Н. Яремко // Артемовские чтения : материалы V Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием (14–15 мая 2009 г.). – Пенза : ПГПУ, 2009. – Т. 1. – С. 48–55.

216. Яремко, Н. Н. Целесообразность использования некорректных задач в обучении математике / Н. Н. Яремко // 62-е Герценовские чтения : сб. науч. работ Междунар. конф. – СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена,2009.–С. 171–176.

217. Яремко, Н. Н. Обратная некорректная задача для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами / Н. Н. Яремко // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. Физико-математические науки. – 2009. – № 13 (17). – С. 38–42.

218. Яремко, Н. Н. Решение задачи о структуре температурного поля бесконечного кусочно-однородного поля с использованием пакета

Matlab/ Н. Н. Яремко, А. В. Везденева // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. Физико-математические науки. – 2009. – № 13 (17). – С. 46–50.

219. Баврин, И. И. Некорректные по Адамару-Тихонову задачи в школьном курсе математики / И. И. Баврин, Н. Н. Яремко // Наука и школа. – 2009. – № 2. – С. 29–32.

220. Яремко, Н. Н. Дидактический анализ некорректной задачи / Н. Н. Яремко // Известия вузов Поволжья. Гуманитарные науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 110–118.

221. Печникова, Н. В. Совершенствование математической подготовки студентов классического университета / Н. В. Печникова, Н. Н. Яремко, М. А. Гаврилова // Актуальные вопросы методики преподавания математики и информатики : сб. науч. тр. Четвертой Междунар. науч.-практ.конф. (16 апреля 2009 г.). – Биробиджан, 2009. – Ч. 1. – С. 98–106.

222. Яремко, Н. Н. Элементы теории катастроф в курсе математики для студентов экономических специальностей / Н. Н. Яремко // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб.ст.IX Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 70-летию Пензенского педагогического университета им. В. Г. Белинского (28–29 октября 2009 г.). – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2009. – С. 17–24.

223. Яремко Н. Н. Решение уравнений с параметром методом отыскания точек бифуркации / Н. Н. Яремко // Актуальные проблемы обучения математике. физике и информатике в школе и вузе : материалы межрег. науч.-практ. конф. учителей (12–13 ноября 2009 г.). – Пенза : ПГПУ,2009. – С. 212–219.

224. Яремко, Н. Н. Дидактические принципы обучения решению некорректных задач / Н. Н. Яремко // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. Общественные науки. – 2010. – № 16 (20). – С. 175–178.

225. Яремко Н. Н. Педагогические компоненты формирования мате-

матической деятельности студентов в процессе решения некорректных задач / Н. Н. Яремко // Известия вузов Поволжья. Гуманитарные науки. – 2010.– № 3 (15). – С. 150–157.

226. Яремко, Н. Н. Структура деятельности школьников и студентов в процессе решения некорректных математических задач / Н. Н. Яремко // Проблемы теории и практики обучения математике : сб. науч. тр. Междунар. науч. конф. «63-е Герценовские чтения» / под ред. В. В. Орлова.СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2010. – С. 306–310.

227. Яремко, Н. Н. О целесообразности включения некорректных математических задач в содержание образования при углубленном изучении математики / Н. Н. Яремко // Актуальные проблемы углубленного математического образования : материалы XXVII Пленума Учебно-методического совета по математике и механике и материалы Всероссийской научно-методической конференции Адыгейского университета (Майкоп, 20–22 мая 2010 г.). – Майкоп : АГУ, 2010. – С. 228–233.

228. Яремко, Н. Н. Дидактические аспекты введения понятия «некорректная задача» в школьный курс математики / Н. Н. Яремко // Артемовские чтения : материалы VI Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием (13–14 мая 2010 г.). – Пенза : ПГПУ, 2010. – С. 202–209.

229. Яремко, О. Э. Параллельные вычисления для преобразований Фурье с разрывными коэффициентами / О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. – 2010. – Т. 15, вып. 4. – С. 1436–1441.

230. Yaremko, O. E. Parallel computing for Fourier transform with discontinuous coefficients / O. E. Yaremko, N. N. Yaremko // Journal of Tambov State University. Series: Natural and Technical Scienes. – 2010. – Vol. 15, Issue 4.– P. 1436–1441.

231. Яремко, Н. Н. Метод операторов преобразования для решения обратных задач теплопроводности / Н. Н. Яремко // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб. ст. X

Междунар. науч.-техн. конф. (21–22 октября 2010 г.). – Пенза : Приволжский дом знаний, 2010. – С. 54–58.

232. Яремко, Н. Н. Понятие корректности в математике и его реализация в процессе формирования математической деятельности обучающихся / Н. Н. Яремко // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. – 2010. – № 18 (22). – С. 244–250.

233. Яремко, Н. Н. Метод операторов преобразования для восстановления зависимостей по эмпирическим данным / // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. Физико-математические науки. – 2010. – № 18 (22). – С. 30–34.

234. Яремко Н. Н. Модель формирования профессиональных компетенций специалиста на основе понятия «корректность» / Н. Н. Яремко // Вестник МГОУ. Сер. Педагогика. – 2011. – № 2. – С. 101–106.

235. Яремко, Н. Н. Формирование профессиональных компетенций специалиста на основе понятия «корректность» / Н. Н. Яремко // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. Общественные науки. – 2011. – № 24. – С. 891–896.

236. Яремко, Н. Н. Общепрофессиональная компетенция решения задач на основе понятия «корректность» / Н. Н. Яремко // Проблемы теории и практики обучения математике : сб. науч. ст. Междунар. науч. конф. «64-е Герценовские чтения» / под ред. В. В. Орлова. – СПб. : Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2011. – С. 113–116.

237. Яремко, Н. Н. Формирование исследовательских умений программистов в процессе обучения математическому анализу на основе понятия «корректность» / Н. Н. Яремко, А. В. Колесникова // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. Общественные науки. – 2011. – № 24. – С. 896–900.

238. Яремко, Н. Н. Понятие корректности в математике и формирование на его основе профессиональных компетенций / Н. Н. Яремко // Актуальные проблемы обучения математике, физике, информатике в

школе и вузе : материалы II межрег. науч.-практ. конф. учителей (4–5 января 2011 г.). – Пенза : ПГПУ, 2011. – С. 228–231.

239. Яремко, Н. Н. Метапредметное понятие «корректность» / Н. Н. Яремко // Математика. Образование. Культура : сб. тр. V Междунар. науч. конф. (26–28 апреля 2011 г.). – Тольятти : ТГУ, 2011. – Т. 2. – С. 113–117.

240. Яремко, Н. Н. Основные свойства метапредметного понятия «корректность» / Н. Н. Яремко // Артемовские чтения : материалы VII Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием (12–13 мая 2011 г.). – Пенза : ПГПУ, 2011. – Т. 1. – С. 77–80.

241. Яремко, Н. Н. Векторные интегральные преобразования Вебера порядка $2g$ с разрывными коэффициентами на полярной оси с n точками сопряжения / Н. Н. Яремко, О. Э. Яремко // Математика и ее приложения. Экономическое прогнозирование: модели и методы : материалы Междунар. науч.-практ. конф. (г. Орел, 20–21 мая 2011 г.) / под ред. В. В.Давниса,А. Н. Зарубина. – Воронеж : ООО «Воронежский центр новых технологий и инноваций», 2011. – С. 108–113.

242. Яремко, Н. Н. Метаметодический подход к математической подготовке студентов вуза на основе понятия «корректность» / Н. Н. Яремко // Проблемы математического образования: история и современность : материалы Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения педагога-математика В. Л. Минковского (23–24 сентября 2011 г.). – Орел : ФГБОУ «Орловский гос. университет», 2011. – С. 210–217.

243. Яремко, Н. Н. Функции Эрмита с разрывными коэффициентами и их применения для решения обратных задач теплопроводности / Н. Н. Яремко // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. Физико-математические и технические науки. – 2011. – № 26. – С. 326–331.

244. Яремко, Н. Н. Проблема восстановления функциональных зависимостей в задачах интерпретации косвенных результатов наблюдений

/Н. Н. Яремко // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб. ст. XI Междунар. науч.-практ. конф. (27–29 октября 2011 г.). – Пенза : Приволжский дом знаний, 2011. – С. 54–56.

245. Яремко, Н. Н. Метод Вимана–Валирона в полупространстве / Н. Н. Яремко // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании : сб. науч. тр. / Научно-методический совет по математике МОН РФ, Российская академия естественных наук, Средневолжское математическое общество. – Ульяновск : УГТУ, 2011. – С. 293–295.

246. Яремко, Н. Н. Критериально-корректностная математическая подготовка студентов вуза / Н. Н. Яремко // 65-е Герценовские чтения : сб. науч. тр. Междунар. науч. конф. / под ред. В. В. Орлова. – СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2012. – С. 116–119.

247. Яремко, Н. Н.. Критериально-корректностная математическая подготовка студентов университета и ее реализация / Н. Н. Яремко, О. В. Краснова // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. – 2012. – № 28. – С. 1143–1147.

248. Яремко, Н. Н. Интегральное исчисление : учеб.-метод. пособие / Н. Н. Яремко, Е. Г. Журавлева. – Пенза : ПГПУ им. В. Г. Белинского, 2012. – 80 с.

249. Яремко, Н. Н. Новый алгоритм вычисления логарифма матрицы и его реализация в MATLAB / Н. Н. Яремко // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб. ст. XII Междунар. науч.-техн. конф. (25–26 октября 2012 г.) / под. ред. д.т.н., проф. В. И. Горбаченко, к.т.н., проф. В. В. Дрождина. – Пенза : Приволжский Дом знаний,2012.– С. 56–59.

250. Яремко, Н. Н. Математическая корректность как метапонятие и как дидактический принцип / Н. Н. Яремко // Артемовские чтения : материалы VIII Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием (17–18

мая 2012 г.). – Пенза : ПГПУ, 2012. – Т. 1. – С. 75–78.

251. Яремко, Н. Н. Интегральное исчисление функции одной переменной : учеб.-метод. пособие / Н. Н. Яремко // Интернет-портал «Информика». – 2012. – 78 с.

252. Яремко, Н. Н. Оператор Римана–Лиувилля в классе плюригармонических функций / Н. Н. Яремко // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. Физико-математические науки. – 2012. – № 30. – С. 248–258.

253. Яремко, Н. Н. Обобщение формулы Виета и их применение для решения уравнений старших степеней / Н. Н. Яремко, Е. Г. Журавлева // Артемовские чтения : материалы VIII Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием (17–18 мая 2012 г.). – Пенза : ПГПУ, 2012. – Т. 1. – С. 200–205.

254. Яремко, Н. Н. Критериально-корректностная математическая подготовка студентов университета : Монография / Н. Н. Яремко. – Пенза : ПГПУ им. В. Г. Белинского, 2012. – 102 с.

255. Яремко, Н. Н. Критериально-корректностная подготовка в формировании компетентностного профиля математиков: констатирующее исследование и экспериментальная модель / Н. Н. Яремко, Краснова О. В. // Педагогическое образование в России. – 2013. – № 2. – С. 179–187.

256. Яремко, Н. Н. Система формирования критериально-корректностной компетентности математиков: качественное структурирование процесса и межпредметная интеграция / Н. Н. Яремко, О. В. Краснова // Известия вузов. Поволжский регион. Гуманитарные науки. – 2013. – № 1. – С. 191–203.

257. Яремко, Н. Н. Система межпредметных интегрированных модулей как средство реализации критериально-корректностной математической подготовки студентов вуза / Н. Н. Яремко // Проблемы теории и практики обучения математике : сб. науч. тр. Междунар. науч. конф. «66-е Герценовские чтения» / под ред. В. В. Орлова. – СПб. : РГПУ им.

А. И. Герцена, 2013. – С. 90–96.

258. Яремко, Н. Н. Концепция критериально-корректностной математической подготовки / Н. Н. Яремко // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы : сб. ст. IX Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Артемовские чтения» (Пенза, 16–17 мая 2013 г.) / под общ. ред. д.п.н., проф. М. А. Родионова. – Пенза : Изд-воПГУ,2013.– С. 19–23.

259. Яремко, Н. Н. Теоретико-методические основания критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математематическихнаправлений : моногр. / Н. Н. Яремко. – Орел : Изд-во ГОУ ВПО «ОГУ», 2015. – 148 с.

260. Yaremko, N. N. On a New Formulas for a Direct and Inverse Cauchy Problems of Heat Equation / N. N. Yaremko, O. E. Yaremko // International Journal of Partial Differential Equations and Applications. – 2014. – Vol. 2, № 1. – P. 1–6.

261. Yaremko, N. N. The Criterion-correctness mathematician competence formation on the base of theory of pedagogical interaction systems functioning and development Science and Education / N. N. Yaremko, O. V. Krasnova, S. A. Vlazneva // Materials of the V International Research and Practice Conference. Vol. II. Munich, Germany, 2014. – P. 153–157. – URL: http://science-canada.com/06-2014.pdf

262. Yaremko, O. The Fourier Transform with piecewise trigonometric kernels and its Applications / O. Yaremko, V. Selutin, N. Yaremko // Wseas Transactions on Mathematics. – 2014. – Vol. 13. – P. 615–625.

263. Yaremko, O. Integral Fourier transforms with discontinuousCoefficients / O. Yaremko, N. Yaremko // NAUN. International Journal of Pure Mathematics. Europe. – 2014. – Vol. 1. – P. 43–46.

264. Яремко, Н. Н. Концепция критериально-корректностной математической подготовки школьников / Н. Н. Яремко // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы : сб. ст. X

Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием «Артемовские чтения» (Пенза,15–16 мая 2014 г.). – Пенза, 2014. – С. 21–25.

265. Яремко, Н. Н. Критериально-корректностная математическая подготовка школьника / Н. Н. Яремко // Актуальные проблемы обучения математике, физике и информатике в школе и вузе : сб. ст. V Межрег. науч.-практ. конф. учителей, посвящ. 75-летию образования факультета ПГУ / под общ. ред. д.п.н. проф. М. А. Родионова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – С. 24–31.

266. Яремко, Н. Н. Корректные и некорректные задачи математической физики : учеб.-метод. пособие / Н. Н. Яремко, Ю. А. Парфенова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. – 80 с.

267. Яремко, О. Э. Математическая корректность : учеб. пособие / О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2014. – 192 с.

268. Yaremko, O. E. Transformation operators and their applications for modeling in two-layer media / O. E. Yaremko, N. N. Yaremko // Global Journal of Mathematical Analysis. – 2014. – № 2 (4). – P. 227–234. Science Publishing Corporation. – URL: www.sciencepubco.com/index.php/GJMA doi:10.14419/gjma.v2i3289.

269. Яремко, Н. Н. Понятие корректности и его реализация в математической подготовке бакалавров / Н. Н. Яремко // Современные проблемы физико-математических наук : тр. Междунар. заоч. науч.-практ. конф. «СПФМН-2013», посвящ. 70-летию освобождения г. Орла от немецко-фашистских захватчиков. – Орел : ФГБОУ ВПО «ОГУ», 2014. – С. 190–198.

270. Hadamard, J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique / J. Hadamard. – Princeton University Bulletin, 1902. – P. 49–52.

271. Denker, J. How to Deal with Ill-Posed Questions / J. Denker. – URL: www.av8n.com/physics/ill-posed.htm

272. Milgram, James R. The Mathematics Pre-Service Teacher Need to

Know» / James R. Milgram // Dep. of Math. – Stanford Univ., California, 2005. – 94305.

273. Polya, G. How to solve it / G. Polya. – Printed in the United States of America by Princeton University Press, Princeton, New Jersey, Second Printing, 1973. – 253 p.

274. Tikhonov, A. N. *Solutions of Ill-Posed Problem* / A. N. Tikhonov, V. Y. Arsenin. – Winston, New York, 1977.