

На правах рукописи



Савин Сергей Юрьевич

**РАЗВИТИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА
ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ФОРМЫ
К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА
УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК**

05.23.17 – Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Орел – 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс».

Научный руководитель: **Коробко Виктор Иванович**
доктор технических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Гордон Владимир Александрович**
доктор технических наук, профессор
ФГБОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК», зав. кафедрой «Высшая математика»

Ступишин Леонид Юлианович
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВПО «Юго-Западный государственный университет», зав. кафедрой «Городское, дорожное строительство и строительная механика»

Ведущая организация: **ФГБОУ ВПО «Тульский государственный университет»**

Защита состоится «13» декабря в 15-00 часов на заседании диссертационного Совета Д 212.182.05, созданного на базе ФГБОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК» по адресу: 302030, г. Орел, ул. Московская, д. 77, ауд. 426.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК» по адресу: 302020, г. Орел, Наугорское шоссе, д. 29.

Автореферат разослан «12» ноября 2013 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
к.т.н., доцент



А.И. Никулин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Конструкции в виде пластинок находят широкое применение в современном строительстве, авиа-, машино- и кораблестроении. При этом использование новых композитных материалов (в том числе органического происхождения), приводит к тому, что допущение об изотропности материала пластинки перестает соответствовать действительности – он ведет себя иначе. Тот же эффект достигается для пластинок, подвергнутых специальной обработке (гофрирование) либо усиленных частой постановкой ребер жесткости. Такие пластинки и облочки в общем случае называются анизотропными. Однако на практике довольно часто приходится сталкиваться с частным случаем анизотропии – ортотропией, когда в каждой точке тела проходят три ортогональные плоскости упругой симметрии. Для расчета таких конструкций, как правило, прибегают к использованию приближенных численных методов, реализованных в программных комплексах на ЭВМ.

Тем не менее, не ослабевают интерес и потребность в развитии приближенных аналитических методов, которые при разумной точности давали бы наглядное представление о связи между физическими величинами, понимание сущности решаемых задач. Одним из таких методов является метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ), предложенный А.В. Коробко, в основе которого лежит аналогия между интегральной характеристикой формы области пластинки (коэффициент формы) и величинами её интегральных физико-механических характеристик (максимальный прогиб, основная частота колебаний, критическая сила). Основными преимуществами этого метода являются:

- возможность сведения решения сложных физических задач, описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа, к решению более простых геометрических задач;
- получение решений в аналитической форме;
- возможность двусторонней оценки результатов расчета;
- наглядное представление решений в виде зависимостей в координатных осях $F - K_f$, где F – некоторая физико-механическая характеристика, а K_f – коэффициент формы.

С применением МИКФ были получены решения задач изгиба и свободных колебаний изотропных пластинок сложного очертания при комбинированных граничных условиях. Сравнение полученных результатов с известными точными и приближенными решениями показали удовлетворительную для инженерных расчетов точность метода. Однако к расчету ортотропных пластинок МИКФ до настоящего времени не применялся. Поэтому выбранная для диссертационного исследования тема представляется актуальной.

Объект исследования. В качестве объекта исследования в работе приняты упругие ортотропные пластинки (прямоугольные, ромбические, параллелограммные, многоугольные, трапециевидные и др.) с комбинированными граничными условиями. Предметом исследования является

геометрический метод решения задачи по оценке максимальных прогибов таких пластинок, основанный на функциональной связи этой величины с коэффициентом формы и соотношениями цилиндрических жесткостей вдоль координатных осей.

Целью исследования является развитие и применение МИКФ для оценки жесткости упругих ортотропных пластинок в задачах поперечного изгиба.

Для реализации поставленной цели необходимо решить следующие **основные задачи**:

- развить теоретические основы МИКФ и разработать методику его применения к оценке жесткости в задачах поперечного изгиба упругих ортотропных пластинок при однородных и комбинированных граничных условиях пластинок по контуру;

- изучить изопериметрические свойства и закономерности изменения максимального прогиба упругих ортотропных пластинок в зависимости от изменения их коэффициента формы и цилиндрических жесткостей по направлениям координатных осей;

- с помощью метода конечных элементов найти значения максимальных прогибов упругих ортотропных пластинок определенных классов форм (прямоугольные, ромбические, в виде равнобедренных и прямоугольных треугольников, правильных многоугольников) при различных вариантах условий опирания;

- по полученным значениям максимальных прогибов построить граничные аппроксимирующие функции, необходимые для решения задач изгиба упругих ортотропных пластинок с комбинированными граничными условиями методом интерполяции по коэффициенту формы;

- провести экспериментальные исследования по изгибу квадратных пластинок из фанеры с целью проверки исходных предпосылок метода и результатов теоретических исследований;

- разработать алгоритм и программный комплекс для решения исследовательских и конструкторских задач поперечного изгиба упругих ортотропных пластинок с различными граничными условиями нагрузкой, равномерно распределенной по их поверхности, с помощью МИКФ.

Указанные задачи решаются при следующих **ограничениях**:

- 1 Исследуется задача поперечного изгиба тонких упругих ортотропных пластинок с малыми прогибами, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой;

- 2 Граничные условия многоугольных пластинок включают комбинации условий шарнирного опирания и жесткого защемления по сторонам; условия свободного края пластинок не рассматриваются.

Методы исследования. При проведении теоретических исследований поперечного изгиба упругих ортотропных пластинок использовался общенаучный метод аналогии, применялись метод конечных элементов и геометрические методы строительной механики (изопериметрический метод, МИКФ). Геометрическое моделирование форм областей пластинок осуществлялось с помощью метода аффинного подобия. Для провер-

ки исходных предпосылок метода и результатов теоретических исследований был проведен эксперимент по изгибу квадратных пластинок из фанеры. Обработка результатов эксперимента осуществлялась на основе методов математической статистики.

Достоверность научных положений и результатов исследования подтверждается использованием фундаментальных методов строительной механики, решением большого количества тестовых задач и сравнения результатов расчета с результатами, полученными с помощью других методов, а также результатами экспериментального исследования.

Научная новизна состоит в следующих результатах исследования:

- установлена функциональная связь максимального прогиба упругих ортотропных пластинок с коэффициентом формы и соотношениями цилиндрических жесткостей по направлениям координатных осей;

- построены аналитические зависимости между максимальными прогибами, коэффициентом формы и соотношениями цилиндрических жесткостей по направлениям координатных осей упругих ортотропных пластинок в виде многоугольников с комбинированными граничными условиями;

- разработана методика применения МИКФ к оценке жесткости в задачах поперечного изгиба упругих ортотропных пластинок при однородных и комбинированных граничных условиях пластинок по контуру;

- разработаны алгоритм и компьютерная программа для решения исследовательских и конструкторских задач поперечного изгиба упругих ортотропных пластинок с различными граничными условиями нагрузкой, равномерно распределенной по их поверхности, с помощью МИКФ.

Практическая ценность и реализация работы. Некоторые теоретические предпосылки, положенные в основу развития методики МИКФ для расчета ортотропных пластинок, получили экспериментальное подтверждение.

Разработанные в диссертационной работе алгоритм и программа для ЭВМ позволяют выполнять деформационные расчеты конструкций в виде упругих ортотропных пластинок на основе метода интерполяции по коэффициенту формы

Результаты работы использованы при проведении исследований по НИР, выполняемых в рамках:

- аналитической ведомственной целевой программы Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009 – 2011 гг.) по проекту №2.1.2/10201 «Разработка теоретических основ и развитие вибрационных методов диагностики состояния и контроля качества строительных конструкций балочного типа и пластинок»;

- государственного задания Министерства образования и науки РФ на оказание услуг (выполнения работ) по теме «Разработка и развитие инженерных методов решения задач технической теории пластинок на основе принципов симметрии и геометрического моделирования их формы» (2012 – 2014 гг.), регистрационный номер 7.587.2011.

Результаты исследований внедрены в учебный процесс ФГБОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК» и ФГБОУ ВПО «Брянская государственная инженерно-технологическая академия» в рамках дисциплин: «Строительная механика», «Основы теории упругости и пластичности», «САПР строительных конструкций», «Математическое моделирование при проектировании строительных конструкций»; в Центре повышения квалификации строителей ФГБОУ ВПО «Брянская государственная инженерно-технологическая академия».

На защиту выносятся следующие положения и результаты:

- методика применения МИКФ к оценке жесткости упругих ортотропных пластинок в задачах поперечного изгиба;
- аналитические зависимости для максимальных прогибов упругих ортотропных пластинок в виде треугольников, прямоугольников, ромбов и правильных многоугольников с комбинированными граничными условиями, в которых аргументами являются коэффициент формы и соотношения цилиндрических жесткостей вдоль координатных осей, используемые при выборе опорных решений по МИКФ;
- результаты экспериментальных исследований поперечного изгиба квадратных пластинок из фанеры нагрузкой, равномерно распределенной по поверхности;
- алгоритм и программа для ЭВМ, предназначенные для деформационного расчета упругих ортотропных пластинок с комбинированными граничными условиями с помощью МИКФ.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава ФГБОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК» (Орел, 2010...2012); на 2-ой Всероссийской конференции «Проблемы оптимального проектирования сооружений» (Новосибирск, 2011); Международных академических чтениях РААСН «Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения» (Курск, 2011); IV Международном симпозиуме «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Челябинск, 2012).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ, в том числе 8 статей в журналах, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки России, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора технических наук.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 204 страницах, включая 140 страниц основного текста, и состоит из введения, 3 глав, основных результатов и выводов, списка литературы, включающего 173 наименования и 3 приложений (64 стр.). В диссертации 68 рисунков и 30 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обоснование актуальности темы диссертационного исследования, обозначается объект для изучения и методы его исследования, приводятся основные характеристики работы и положения, выносимые автором на защиту.

В первой главе содержится краткий обзор точных и приближенных методов решения задач технической теории пластинок.

К настоящему времени теоретические основы расчета пластинок и оболочек в значительной степени сформированы и изложены в работах А. Лява, С.П. Тимошенко, П.Ф. Папковича, Б.Г. Галеркин, И.Г. Бубнова, С.Г. Лехницкого и ряда других.

Большой вклад в развитие теории пластинок внесли многие отечественные и зарубежные ученые: С.А. Амбарцумян, Л.С. Лейбензон, В.З. Власов, А.С. Вольмир, А.Л. Гольденвейзер, А.И. Лурье, Х.М. Муштари, К.З. Галимов, В.В. Новожилов, П.М. Варвак, В.И. Крылов, Л.В. Канторович, А.Ф. Рябов, Я.А. Пратусевич, Н.П. Абовский, А.Н. Андреев, В.В. Болотин, Л.А. Розин, Ю.В. Немировский, В.И. Коробко; И. Снеддон, М.Т. Хубер, В. Прагер, Ф.Г. Ходж, Э. Рейсснер, К.В. Йогансен, В. Ритц, Е. Треффц и многие другие.

На основании приведенного обзора методов решения задач об изгибе упругих пластинок можно сделать выводы о том, что несмотря на достаточно хорошую проработку общих теоретических основ расчета пластинок, остаётся актуальной проблема решения прикладных задач, имеющих важное практическое значение, среди которых следует выделить краевые, а также задачи, связанные с геометрической и физической нелинейностью и анизотропией упругих свойств материала. При этом точные аналитические методы решения задач могут быть применены для весьма ограниченного ряда случаев и по этой причине не имеют большого практического значения. Решение многих реальных задач требует использования приближенных методов, среди которых в настоящее время преобладают численные методы (МКЭ, МГЭ). Однако, помимо очевидных положительных сторон они имеют определенные недостатки – невозможность получения решений в аналитической форме; при расчете получают большой объем данных, не имеющих важного практического значения; трудно уследить за физической сущностью решаемой задачи. Вариационные методы дают приближение к точному решению сверху или снизу, и для сложных форм пластинок со сложными граничными условиями они практически не применяются.

Одним из эффективных методов решения задач об изгибе пластинок является МИКФ. Этот метод показал хорошие результаты при расчете изотропных пластинок со сложным контуром и неоднородными граничными условиями, однако к расчету ортотропных пластинок до настоящего времени не применялся. На основании этого сформулированы цели и задачи исследования. Выдвинута **гипотеза** о существовании функциональной связи между интегральными физико-механическими характери-

стиками пластинок, интегральной характеристикой их формы (коэффициентом формы), и соотношениями цилиндрических жесткостей упругих ортотропных пластинок в задачах поперечного изгиба.

Во второй главе представлены сведения об интегральной геометрической характеристике формы области – коэффициенте формы, выражение для которого имеет следующий общий вид:

$$K_{fa} = \oint_L \frac{ds}{h}, \quad (1)$$

где ds – линейный элемент контура области, h – перпендикуляр, опущенный из некоторого полюса внутри области D на линейный элемент контура ds (рисунок 1).

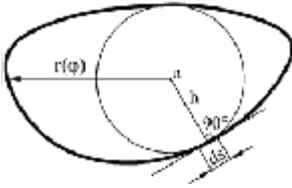


Рисунок 1 – Выпуклая область

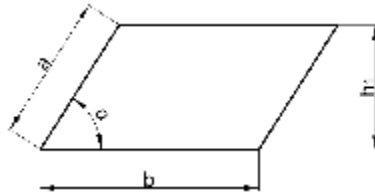


Рисунок 3 – Форма области в виде параллелограмма

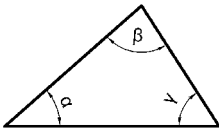


Рисунок 2 – Треугольная форма области

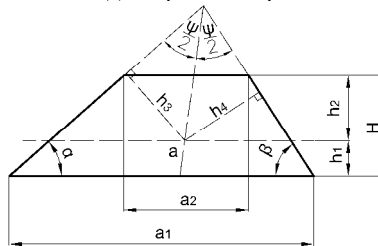


Рисунок 4 – Трапециевидная форма области

В любой выпуклой области существует точка a , и при этом единственная, для которой значение коэффициента формы минимально. В работе используются только минимальные значения коэффициента формы области.

В главе приведены выражения для определения значений коэффициента формы для представляющих наибольшее практическое значение областей:

– для треугольников (рисунок 2):

$$K_f = 2 \operatorname{ctg}(\alpha/2) \cdot \operatorname{ctg}(\beta/2) \cdot \operatorname{ctg}(\gamma/2); \quad (2)$$

– для параллелограммов (рисунок 3):

$$K_f = 4 \cdot \frac{a/b + b/a}{\sin \alpha}; \quad (3)$$

– для трапеций (рисунок 4):

$$K_{fa} = \frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{H - h_1} + \frac{H(1/\sin \alpha_1 + 1/\sin \alpha_2)^2}{a_1 - h_1(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2)}; \quad (4)$$

– для эллипсов:

$$K_f = \pi(a/b + b/a), \quad (5)$$

где a и b – полуоси эллипса.

На основании анализа выражений для коэффициента формы и графика зависимости $K_f - R/\rho$, где R/ρ – соотношения радиусов окружностей описанных вокруг многоугольников и вписанных в них соответственно, сделаны выводы о двусторонней ограниченности значений коэффициента формы.

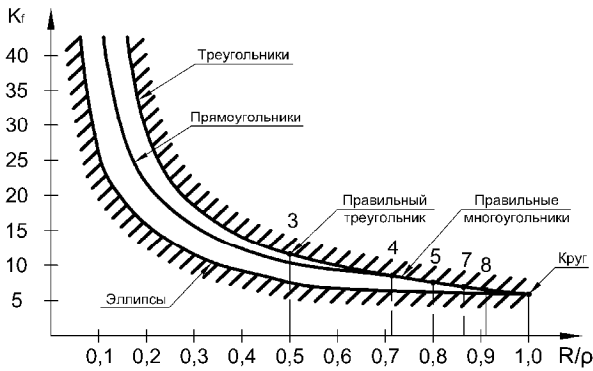


Рисунок 5 – График зависимости $K_f - R/\rho$

В работе А.В. Коробко для максимального прогиба пластинки было получено следующее выражение в изопериметрическом виде:

$$w_0 \approx \frac{4q}{D} \frac{A^2}{K_f^2} \frac{\int_0^1 g(\rho) \rho d\rho}{\Phi_g}, \quad (6)$$

где

$$\Phi_g = \int_0^1 (g''^2 \rho + 2g'' g' + g'^2 \rho^{-1}) d\rho.$$

В этих выражениях $g(\rho)$ – безразмерная функция прогибов в полярной системе координат, ρ – безразмерная полярная координата.

Для значений максимальных прогибов представлены графики изменения этой величины в зависимости от коэффициента формы для изотропных пластинок различного очертания жестко защемленных по контуру (рисунок 6).

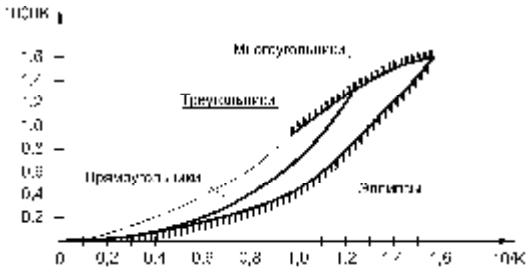


Рисунок 6 – График зависимости $K_w - 1/K_f$ для жестко защемленных по контуру пластинок

Все множество значений максимальных прогибов для пластинок с выпуклым очертанием контура ограничено снизу значениями максимальных прогибов для эллиптических пластинок и сверху – максимальными прогибами для пластинок в виде правильных многоугольников и равнобедренных треугольников. Данное утверждение справедливо и для случая шарнирного опирания по контуру.

Рассмотрим произвольную пластинку с выпуклым контуром, для которой неизвестно значение какой-либо интегральной физико-механической характеристики (ФМХ). Пусть форма области этой пластинки может быть получена путем некоторого геометрического преобразования из форм областей других пластинок, для которых известны значения искомой ФМХ (опорные решения). На основании функциональной связи между коэффициентом формы и интегральными физическими характеристиками, можно сделать вывод о том, что все множество значений ФМХ пластинок, формы областей которых объединены некоторым геометрическим преобразованием, лежит на одной кривой. Поэтому, для того чтобы найти значение неизвестной ФМХ пластинки, необходимо осуществить интерполяцию между известными решениями по коэффициенту формы. Вышеизложенная последовательность действий составляет сущность метода интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ), предложенного А.В. Коробко.

Для получения значений максимальных прогибов по опорным решениям с применением методики МИКФ используются аппроксимирующие функции следующего вида:

$$w = w_1 \cdot \left(K_f / K_{f1} \cdot A_1 / A \right)^n; \quad (7)$$

$$w = C \cdot \frac{A^2}{B \cdot K_f + K_f^2}. \quad (8)$$

Для ортотропной пластинки при её поперечном изгибе из теории упругости известно следующее дифференциальное уравнение:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q, \quad (9)$$

где $H = D_1 + 2D_{xy}$, $D_1 = D_x \nu_y = D_y \nu_x$. В этих выражениях D_x , D_y , D_{xy} – цилиндрические жесткости пластинки, ν_x , ν_y – коэффициенты Пуассона по соответствующим направлениям. Разделив правую и левую части уравнения (9) на H , имеем:

$$\frac{D_x}{H} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_y}{H} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{H}. \quad (10)$$

В этом случае при прочих одинаковых условиях (форма пластинки, нагрузка q , граничные условия и цилиндрической жесткости H) решение будет зависеть от двух параметров этого уравнения – D_x/H ; D_y/H .

В изопериметрическом виде выражение для определения максимальных прогибов изотропной пластинки представляется зависимостью:

$$w_0 = K_w \frac{q}{D} \frac{A^2}{K_f^2 + BK_f}. \quad (11)$$

В выражении (11) K_w – некоторая функция, зависящая от граничных условий, постоянная для пластин с формой области одного класса (прямоугольные, трапециевидные и т.д.). Однако для ортотропных пластин функция K_w будет также зависеть и от соотношения цилиндрических жесткостей D_x/H и D_y/H .

Осуществим замену отношения $K_w / (K_f^2 + BK_f)$ на функцию $f(K_f; D_x/H; D_y/H)$. Тогда выражение (11) для ортотропных пластин примет следующий вид:

$$w_0 = f(K_f; D_x/H; D_y/H) \frac{qA^2}{H}. \quad (12)$$

Из выражения (12) следует, что максимальный прогиб ортотропных пластинок функционально связан с коэффициентом формы области и соотношениями цилиндрических жесткостей вдоль координатных осей. Однако при решении конкретных задач строительной механики значения D_x/H и D_y/H могут быть приняты постоянными для пластинок, формы областей которых объединены одним геометрическим преобразованием. Это обстоятельство позволяет выполнить переход от четырехмерного пространства $w_0 - K_f - D_x/H - D_y/H$ к плоскости $w_0 - K_f$. Таким образом, ранее установленные закономерности изменения значений максимальных прогибов изотропных пластинок могут быть распространены на множество ортотропных пластинок, объединенных некоторым геометрическим преобразованием.

Для применения МИКФ к оценке жесткости упругих ортотропных пластинок при поперечном изгибе для ряда базовых форм областей (рав-

нобедренные и прямоугольные треугольники, прямоугольники, ромбы, правильные многоугольники и эллипсы) построены поверхности максимальных прогибов, образующие границы изменения данной интегральной физико-механической характеристики для всего множества ортотропных пластинок с выпуклым контуром.

Построение граничных поверхностей выполнялось по значениям максимальных прогибов при заданных значениях K_f и $D_x/H = n$, $D_y/H = k$, где $n, k = 1, 2, \dots, 5$. При этом значения максимальных прогибов упругих ортотропных пластинок были получены путем численного решения соответствующих задач с помощью МКЭ (по программному комплексу SCAD).

Выбор густоты разбиения пластинок на конечные элементы обусловлен следующим обстоятельством: для пластинок решались тестовые задачи при разной густоте разбиения на конечные элементы (250, 500, 1000). При увеличении числа конечных элементов, приходящихся на одну пластинку, начиная с 500, значения максимальных прогибов практически совпадали. Поэтому в работе использовались модели пластин с густотой не менее 500 конечных элементов. Обработка результатов расчета ортотропных пластинок и построение аппроксимирующих функций осуществлялись с применением программного комплекса Table Curve.

Для пластинок в виде равнобедренных треугольников в случае комбинированных граничных условий f будет различной для пластин с углом при основании $\alpha < 60^\circ$ и $\alpha \geq 60^\circ$. Если материал пластинок обладает ортотропией упругих свойств, то на величину f также будет влиять соотношение характеристик D_x/H и D_y/H . С учетом указанных особенностей функцию f будем искать в виде выражения

$$f = g_1(K_f) \cdot g_2(D_x/H; D_y/H; \alpha), \quad (13)$$

где $g_1(K_f)$ – некоторая функция, зависящая от формы области и граничных условий, принятая для заданного интервала значений угла α при основании пластинки в виде равнобедренного треугольника; $g_2(D_x/H; D_y/H; \alpha)$ – функция, учитывающая соотношение упругих характеристик ортотропной пластины, а также различие в значениях интегральных физических характеристик для пластин в виде равнобедренных треугольников с углом при основании $\alpha < 60^\circ$ и $\alpha \geq 60^\circ$.

По результатам численных расчетов получены функции следующего вида:

$$g_1(K_f) = 1 / (a K_f^2 + b K_f - c), \quad (14)$$

$$g_2(D_x/H; D_y/H; \alpha) = D\alpha^3 + C\alpha^2 + B\alpha + A. \quad (15)$$

В этих выражениях a, b, c – коэффициенты, зависящие от варианта граничных условий; α – угол при основании равнобедренного треугольника; A, B, C, D – некоторые однотипные функции параметров $D_x/H, D_y/H$. На-

пример, для функции A получено выражение следующего вида:

$$A = A_1 + A_2 \frac{H}{D_x} + A_3 \frac{H}{D_y} + A_4 \frac{H^2}{D_x^2} + A_5 \frac{H^2}{D_y^2} + A_6 \frac{H^2}{D_x D_y} + \\ + A_7 \frac{H^3}{D_x^3} + A_8 \frac{H^3}{D_y^3} + A_9 \frac{H^3}{D_x D_y^2} + A_{10} \frac{H^3}{D_x^2 D_y}, \quad (16)$$

где A_i – коэффициенты, постоянные при заданном типе граничных условий.

Для ортотропных пластинок в виде прямоугольных треугольников, прямоугольников, ромбов и правильных многоугольников неизвестная функция f из выражения (12) была получена следующим образом. По значениям максимальных прогибов, используя программный комплекс Table Curve 3D, были построены аппроксимирующие функции $\phi(D_x/H; D_y/H)$:

$$\phi = a + b \frac{H}{D_x} + c \frac{H}{D_y} + d \frac{H^2}{D_x^2} + e \frac{H^2}{D_y^2} + f \frac{H^2}{D_x D_y} + \\ + g \frac{H^3}{D_x^3} + h \frac{H^3}{D_y^3} + i \frac{H^3}{D_x D_y^2} + j \frac{H^3}{D_x^2 D_y}. \quad (17)$$

При этом коэффициенты $a \dots j$ изменяются в зависимости от формы пластинки. Учитывая это обстоятельство, коэффициенты $a \dots j$ следует искать в виде функций $\psi(K_f)$, постоянных для определенных подклассов форм областей при заданных граничных условиях. Используя программный комплекс Table Curve 2D были получены следующие выражения для $\psi(K_f)$:

– для пластинок в виде прямоугольных треугольников:

$$\psi(K_f) = A + \frac{B}{K_f} + \frac{C}{K_f^2} + \frac{D}{K_f^3} + \frac{E}{K_f^4}; \quad (18)$$

– для прямоугольных пластинок:

$$\psi(K_f) = \frac{A + CK_f^{m/2} + EK_f^m + GK_f^{3m/2} + IK_f^{2m}}{1 + BK_f^{m/2} + DK_f^m + FK_f^{3m/2} + HK_f^{2m}}, \quad (19)$$

где $m = 1, 2, 4$;

– для ромбических пластинок, оси ортотропии которых проходят через вершину ромба:

$$\psi(K_f) = A + \frac{B}{K_f} + \frac{C}{K_f^2} + \frac{D}{K_f^3} + \frac{E}{K_f^4} + \frac{F}{K_f^5} + \frac{G}{K_f^6} + \frac{H}{K_f^7} + \frac{I}{K_f^8} + \frac{J}{K_f^9}; \quad (20)$$

– для ромбических пластинок, одна из осей ортотропии которых перпендикулярна стороне ромба:

$$\psi(K_f) = A + \frac{B}{K_f} + \frac{C}{K_f^2} + \frac{D}{K_f^3} + \frac{E}{K_f^4} + \frac{F}{K_f^5} + \frac{G}{K_f^6}; \quad (21)$$

– для правильных многоугольников, одна из осей ортотропии которых направлена параллельно его стороне:

$$\psi(K_f) = A + \frac{B}{K_f} + \frac{C}{K_f^2} + \frac{D}{K_f^3} + \frac{E}{K_f^4}; \quad (22)$$

– для правильных многоугольников, оси ортотропии которых проходят через их вершины:

$$\psi(K_f) = A + \frac{B}{K_f} + \frac{C}{K_f^2}. \quad (23)$$

В этих выражениях $A \dots J$ – коэффициенты, постоянные для соответствующих подклассов форм областей и граничных условий.

Для прямоугольных пластинок для определенных граничных условий были получены функции $\psi(K_f)$ иного вида, отличающиеся от (19), более точно описывающие зависимость между K_f и коэффициентами $a \dots j$ выражения (17):

$$\psi(K_f) = \left(\frac{A + CK_f^{m/2} + EK_f^m + GK_f^{3m/2} + IK_f^{2m}}{1 + BK_f^{m/2} + DK_f^m + FK_f^{3m/2} + HK_f^{2m}} \right)^{1/2}, \quad (24)$$

$$\psi(K_f) = \left(A + C(\ln K_f)^{m/2} + E(\ln K_f)^m + G(\ln K_f)^{3m/2} + I(\ln K_f)^{2m} \right) \times \\ \times \left(1 + B(\ln K_f)^{m/2} + D(\ln K_f)^m + F(\ln K_f)^{3m/2} + H(\ln K_f)^{2m} \right)^{-1}. \quad (25)$$

В данной главе представлены графики функций $\phi(D_x/H; D_y/H)$ для пластинок определенных классов форм областей и $\psi(K_f)$ для некоторых значений соотношения цилиндрических жесткостей. Приводятся методика реализации МИКФ к расчету упругих ортотропных пластинок и примеры ее использования при решении задач поперечного изгиба пластинок. Рассматриваются различные варианты геометрических преобразований и их влияние на точность вычислений.

В третьей главе представлены решения большого числа тестовых задач для упругих ортотропных пластинок в виде произвольных треугольников, параллелограммов и равнобочных трапеций, демонстрирующие точность результатов расчета с помощью МИКФ. Сравнение результатов этих расчетов со значениями, полученными с применением МКЭ, показывает, что разница по сравнению с последними не превышает 5,24 %.

Для подтверждения исходных предпосылок метода была проведена экспериментальная проверка для квадратных пластинок с длиной стороны 1 м и толщиной 12 мм, выполненных из фанеры марки ФК. Рассматривались одно-родные граничные условия и два варианта направления волокон наружных шпонов относительно сторон пластинки (вдоль стороны и под углом 45°).

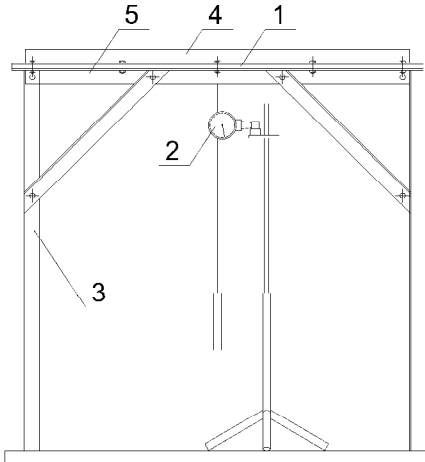


Рисунок 7 – Схема испытательного стенда: 1 – испытываемая пластинка; 2 – прогибомер; 3 – стойки стенда; 4 – верхняя часть горизонтальной рамы стенда; 5 – нижняя, неподвижная часть горизонтальной рамы стенда

«б» – шарнирное опирание. Цифрами обозначены: 1 – испытываемая пластинка; 2 – уголки верхней и нижней горизонтальных рам стенда.

При статическом испытании (определение максимальных прогибов) пластинки загружались равномерно распределенной нагрузкой, моделируемой пакетами с песком. Прогибы измерялись с помощью прогибомеров типа 6 – ПАО, установленных под пятью точками на пластинке и одной на раме, для контроля ее перемещений.

При проведении динамических испытаний определялись основные частоты собственных колебаний упругих ортотропных пластинок. Их измерения выполнялись при помощи пьезоэлектрического датчика марки КД-32, соединенного с перьевым самописцем марки НЗ38-2П. Датчик закреплялся снизу в центре пластинки, затем на самописце устанавливалась подача миллиметровой бумаги с определенной скоростью, и в центре пластинки сверху производился удар прорезиненной киянкой.

Сравнение экспериментальных данных и значений, полученных теоретически с помощью МКЭ и МИКФ, показывает удовлетворительные результаты для случая шарнирного опирания пластинок по всему контуру и значительное расхождение для жесткого защемления, вызванное податливостью пластинок в узлах заделки.

Для исследования пластинок был создан испытательный стенд, схема которого приведена на рисунке 7. Стенд представляет собой пространственную раму, состоящую из вертикальных стоек с закрепленной на них горизонтальной рамой, выполненной из стальных горячекатаных равнополочных уголков 40×4 мм, соединенных между собой болтами (рисунок 8). Для придания дополнительной жесткости горизонтальная рама и стойки соединены раскосами, выполненными из равнополочных уголков 25×4 мм.

В зависимости от того, какие граничные условия требовалось получить, пластинку закрепляли между уголками по одному из вариантов, изображенных на рисунке 9, где схеме «а» соответствует жесткое защемление,



Рисунок 8 – Испытательный стенд

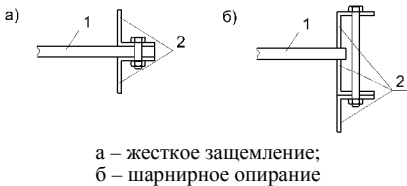


Рисунок 9 – Варианты закрепления пластинки на стенде

раметром U , было подобрано такое его значение жесткости, при котором результаты численного расчета совпали с экспериментальными значениями.

Представленное сравнение результатов эксперимента с результатами теоретического расчета, проведенного с учетом податливости связей, показывает удовлетворительную точность последних. На основании этого делается вывод о достоверности полученных с помощью МКЭ значений максимальных прогибов и основных частот собственных колебаний ортотропных пластинок в виде правильных четырехугольников для однородных граничных условий и удовлетворительной для инженерных расчетов точности аппроксимирующих функций максимального прогиба, которые могут использоваться при решении задач с помощью МИКФ.

Для определения максимальных прогибов упругих ортотропных пластинок в виде треугольников, прямоугольников, ромбов, параллелограммов, равнобоких трапеций и правильных многоугольников при однородных и комбинированных граничных условиях от действия нагрузки, равномерно распределенной по их поверхности, была разработана программа OrthPlate (рисунки 10, 11).

Также приводится описание экспериментального исследования, направленного на определение податливости в узлах заделки для жестко защемленных по контуру пластинок. Испытаниям подвергался образец в виде квадрата со стороной 300 мм и толщиной 12 мм, выполненный из того же материала, что и испытываемые пластинки. Образец жестко закреплялся на стенде, вдоль одной из его сторон на глубину 50 мм и нагружался двумя симметрично приложенными сосредоточенными силами 7,5 Н на расстоянии 25 мм от свободных краев. Для определения податливости узла заделки выполнялось построение конечно-элементной модели (с использованием программного комплекса SCAD Office), в которой вместо жесткого защемления ограничивалось перемещение по вертикали и вводились связи конечной жесткости U , ограничивающие поворот в узле заделки. Варьируя па-



Рисунок 10 – Общий алгоритм работы программы «OrthPlate»

Для расчета пластинок в программе используются непосредственно граничные функции, полученные в предыдущей главе (пластинки в виде равнобедренных и прямоугольных треугольников, прямоугольников, ромбов, правильных многоугольников), а также методика МИКФ (произвольные треугольники, параллелограммы, равнобедренные трапеции).

Для написания программы был использован язык Object Pascal (среда объектного программирования Delphi 7), что обеспечивает его работу на персональных компьютерах с операционными системами Windows 9x\2000\NT\XP\Vista\Seven. При разработке программного комплекса использовались выражения для граничных аппроксимирующих функций и геометрические преобразования, полученные ранее во второй главе. В отдельном окне программы автоматически в осях $W - K_f$ отображается графическая интерпретация применения МИКФ к расчёту рассматриваемой пластинки. В

виду того, что при геометрическом преобразовании значения Dx/H , Dy/H остаются постоянными, соответствующие оси координат на графике не выводятся.

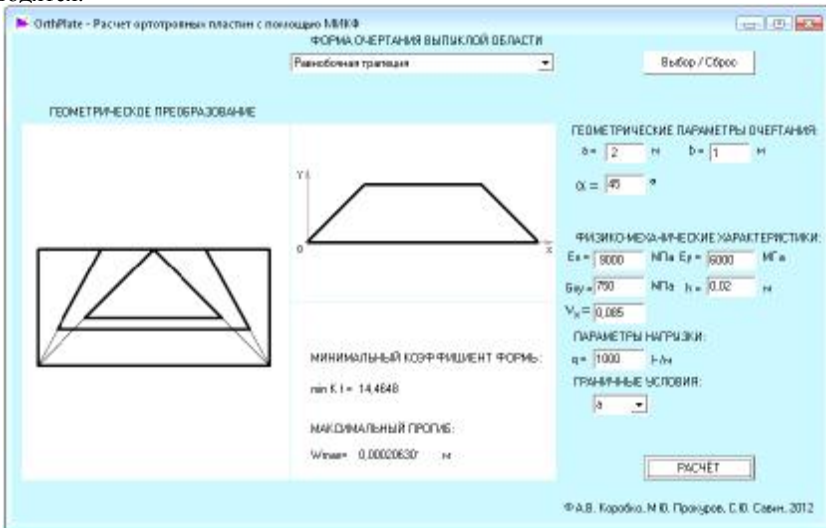


Рисунок 11 – Экранное представление работы программы «OrthPlate»

В приложении 1 приводится сравнение результатов деформационного расчета упругих ортотропных пластинок с помощью МКЭ и МИКФ, в приложении 2 представлены значения коэффициентов в аппроксимирующих функциях для упругих ортотропных пластинок, в приложении 3 – сведения о введении результатов работы.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ПО ДИССЕРТАЦИИ

Обобщая результаты проведенного исследования, сформулированы следующие выводы.

1 На основании теоретических выводов и численных исследований установлена связь между коэффициентом формы области, соотношениями цилиндрических жесткостей вдоль координатных осей и максимальными прогибами упругих ортотропных пластинок в задачах о поперечном изгибе равномерно распределенной нагрузкой для случаев однородных и комбинированных граничных условий.

2 Получены аналитические зависимости для определения значений максимальных прогибов упругих ортотропных пластинок, аргументами в которых являются коэффициент формы и соотношения цилиндрических жесткостей. Эти функции могут быть использованы непосредственно для нахождения значений максимальных прогибов пластинок либо для получения опорных значений при решении задач методом интерполяции по коэффициенту формы.

3 Разработана методика применения МИКФ к оценке жесткости в задачах поперечного изгиба упругих ортотропных пластинок при однородных и комбинированных граничных условиях пластинок по контуру

4 С помощью метода конечных элементов и метода интерполяции по коэффициенту формы решено большое количество тестовых задач для упругих ортотропных пластинок в виде треугольников, параллелограммов и равнобоочных трапеций. Сравнение решений, полученных по этим двум методам, показывает хорошую точность метода интерполяции по коэффициенту формы применительно к расчету таких конструкций.

5 Проведенное экспериментальное исследование изгиба квадратных пластинок из фанеры, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки, подтверждает некоторые теоретические предпосылки, положенные в основу развития методики МИКФ для расчета упругих ортотропных пластинок.

6 Составлен алгоритм деформационного расчета упругих ортотропных пластинок в виде прямоугольников, треугольников, ромбов, параллелограммов, равнобоочных трапеций и правильных многоугольников для основных возможных комбинаций жесткого защемления и шарнирного опирания вдоль их сторон. На основании алгоритма разработан программный комплекс, позволяющий производить в автоматизированном режиме деформационный расчет таких конструкций.

7 По материалам диссертационной работы получено свидетельство о регистрации программы по расчету четырехугольных и треугольных ортотропных пластинок с помощью МИКФ.

8 Результаты исследований внедрены в учебный процесс ФГБОУ ВПО «Госунiversитет – УНПК» и ФГБОУ ВПО «Брянская государственная инженерно-технологическая академия» в рамках дисциплин: «Строительная механика», «Основы теории упругости и пластичности», «САПР строительных конструкций», «Математическое моделирование при проектировании строительных конструкций»; в Центре повышения квалификации строителей ФГБОУ ВПО «Брянская государственная инженерно-технологическая академия».

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России

1 Коробко, В.И. Расчет треугольных ортотропных пластинок с однородными граничными условиями методом интерполяции по коэффициенту формы / В.И. Коробко, С.Ю. Савин // Строительство и реконструкция. – 2010. – № 4. – С. 8-12 (0,31 / 0,15 п.л. автора).

2 Коробко, А.В. Расчет прямоугольных ортотропных пластинок с однородными граничными условиями методом интерполяции по коэффициенту формы / А.В. Коробко, С.Ю. Савин // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – №1. – С. 11-15 (0,31 / 0,15 п.л. автора).

3 Коробко, В.И. Изгиб ортотропных пластин в виде правильных многоугольников, шарнирно опертых по контуру / В.И. Коробко, С.Ю. Савин // Строительство и реконструкция. – 2011. – №1. – С. 3-11 (0,56 / 0,28 п.л. автора).

4 Коробко, В.И. Изгиб прямоугольных ортотропных пластинок с однородными и комбинированными граничными условиями / В.И. Коробко, С.Ю. Савин // Строительство и реконструкция. – 2011. – № 5. – С. 33-39 (0,31 / 0,15 п.л. автора).

5 Коробко, В.И. Изгиб треугольных ортотропных пластинок с однородными и комбинированными граничными условиями / В.И. Коробко, С.Ю. Савин, С.В. Бояркина // Строительство и реконструкция. – 2012. – № 1. – С. 7-14 (0,5 / 0,16 п.л. автора).

6 Коробко, В.И. Изгиб ортотропных пластинок в виде параллелограмма с однородными и комбинированными граничными условиями / В.И. Коробко, С.Ю. Савин // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. – №2. – С. 18-23 (0,38 / 0,19 п.л. автора).

7 Коробко, В.И. Изгиб ортотропных пластинок в виде ромбов с комбинированными граничными условиями / В.И. Коробко, С.Ю. Савин // Строительство и реконструкция. – 2012. – № 3. – С. 25-30 (0,38 / 0,19 п.л. автора).

8 Коробко, А.В. Программа определения максимального прогиба упругих ортотропных пластинок на основе метода интерполяции по коэффициенту формы / А.В. Коробко, М.Ю. Прокуров, С.Ю. Савин // Строительство и реконструкция. – 2012. – № 12. – С. 35-41 (0,44 / 0,14 п.л. автора).

Публикации в других изданиях

9 Коробко, А.В. Изгиб ортотропных пластин в виде правильных многоугольников, шарнирно опертых по контуру / А.В. Коробко, С.Ю. Савин // Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады 2-й Всероссийской конференции. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин). – 2011. – С. 184-190 (0,22 / 0,11 п.л. автора).

10 Савин, С.Ю. Изгиб ортотропных пластинок в виде прямоугольных треугольников с однородными и комбинированными граничными условиями / С.Ю. Савин // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения: материалы международных академических чтений РААСН. – Курск: КурскГУ. – 2011. – С. 161-170 (0,31 п.л.).

11 Коробко, В.И. Изгиб ортотропных пластин в виде параллелограмма с комбинированными граничными условиями / В.И. Коробко, С.Ю. Савин // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: тезисы докладов IV Международного симпозиума. – Челябинск: ЮУрГУ. – 2012. – С. 187-189 (0,09 / 0,04 п.л.автора).

Программы для ЭВМ

12 Свидетельство № 2013613307 о государственной регистрации программы для ЭВМ. «OrthPlate» – Расчет ортотропных пластинок с помощью МИКФ («OrthPlate») / А.В. Коробко, М.Ю. Прокуров, С.Ю. Савин; заявитель и правообладатель ФГБОУ ВПО «Государственный университет – УНПК»; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 01.04.2013.

Подписано к печати 30.10.2013 г. Формат 60x84 1/16.

Объем 1,0 усл. п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 1815

Отпечатано с готового оригинал-макета на полиграфической базе
ФГБОУ ВПО «Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс»
302020, г. Орел, Наугорское шоссе, 29.