

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ПРИОКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

---

На правах рукописи

УДК 624.04

**МАРФИН КИРИЛЛ ВАСИЛЬЕВИЧ**

**ВЗАИМОСВЯЗЬ МАКСИМАЛЬНЫХ ПРОГИБОВ  
И СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ  
КОЛЕБАНИЙ СОСТАВНЫХ ПЛАСТИН  
НА ПОДАТЛИВЫХ СВЯЗЯХ**

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук,  
доцент А.В. Турков

Орел – 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ	5
1	СУЩЕСТВО ВОПРОСА. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ	12
1.1	Методы расчета сплошных изотропных пластин на статические нагрузки	12
1.2	Методы расчета сплошных изотропных пластин на динамические нагрузки	22
1.3	Методы расчета составных пластин	28
1.4	Методы динамического контроля качества конструкций	31
1.5	Направление и задачи исследования	33
2	ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СОСТАВНЫХ ПЛАСТИН	35
2.1	Функциональная связь максимального прогиба упругих изотропных составных пластинок с их основной частотой колебаний	35
2.2	Численные исследования составных квадратных пластин	44
2.2.1	Влияние количества конечных элементов в расчётной схеме при моделировании составной пластины на точность определения частоты собственных колебаний и прогиба составных пластин	45
2.2.2	Определение влияния жесткости связей сдвига на частоты собственных колебаний и прогиба составных пластин	50
2.2.3	Влияние количества симметрично и регулярно расположенных связей сдвига на частоты собственных колебаний и прогиба составных пластин	55
2.3	Теоретические исследования составных круглых пластин	59
2.3.1	Определение влияния количества конечных элементов при моделировании составной пластины на частоты собственных колебаний и прогиба составных пластин	60
2.3.2	Определение влияния жесткости связей сдвига на частоты собственных колебаний и прогиба составных пластин	65
2.3.3	Определение влияния количества симметрично и регулярно расположенных связей сдвига на частоты собственных колебаний и прогиба составных пластин	71

2.4	Выводы по главе 2	75
3	ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ ШВА СОСТАВНЫХ ПЛАСТИН С ЧАСТОТОЙ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ	76
3.1	Функциональная взаимосвязь коэффициента жёсткости шва составной пластины с основной частотой её собственных колебаний	76
3.2	Теоретические исследования коэффициента жесткости шва составных квадратных пластин	81
3.2.1	Оценка влияния жесткости связей сдвига на коэффициент жесткости шва для составных квадратных пластин	82
3.2.2	Оценка влияния локально симметрично установленных связей сдвига на коэффициент жесткости шва для составных квадратных пластин	84
3.3	Теоретические исследования коэффициента жесткости шва составных круглых пластин	87
3.3.1	Определение влияния жесткости связей сдвига на коэффициент жесткости шва для составных круглых пластин	88
3.3.2	Определение влияния локальных симметрично установленных связей сдвига на коэффициент жесткости шва для составных круглых пластин	91
3.4	Выводы по главе 3	94
4	ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СОСТАВНЫХ ПЛАСТИН НА ПОДАТЛИВЫХ СВЯЗЯХ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ	95
4.1	Экспериментальная установка для испытания составных пластин различного очертания в плане. Методика проведения статических и динамических испытаний пластин	96
4.2	Методика проведения экспериментальных исследований составных пластин	100
4.2.1	Методика проведения статических испытаний	100

4.2.2	Методика проведения динамических испытаний составных пластин	101
4.3	Определение кратковременного модуля упругости материала слоёв составной пластины	102
4.4	Учет податливости заделки на опоре экспериментальной составной пластины	107
4.4.1	Моделирование жесткого защемления путем введения дополнительных стержней	107
4.4.2	Моделирование жесткого защемления путем введения связей конечной жесткости	109
4.4.3	Оценка степени податливости жесткого защемления двухслойной пластины	111
4.5	Экспериментальные исследования двухслойных составных квадратных пластин на податливых связях	112
4.5.1	Статические и динамические испытания квадратных составных пластин	112
4.5.2	Сопоставление экспериментальных и теоретических данных	117
4.6	Экспериментальные исследования двухслойных составных пластин круглого очертания на податливых связях	119
4.6.1	Статические и динамические испытания круглых составных пластин	119
4.6.2	Сопоставление экспериментальных и теоретических данных	124
4.7	Использование результатов исследования сплошных пластин произвольной формы для расчёта составных пластинок	126
4.8	Выводы по главе 4	132
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	133
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	134
	ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ	144

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Пластинки, как конструктивные элементы зданий и сооружений, машин и механизмов, воспринимающие различные комбинации статических и динамических нагрузок, широко используются в строительстве и машиностроении. В последние десятилетия в нашей стране существенно возросли объемы работ по реконструкции существующих зданий и сооружений под новые технологические нужды. При этом часто возникает необходимость усиления несущих конструкций, которое для пластин выполняется методом наращивания или подрачивания, в результате чего они превращаются в составные конструкции. Методы расчета составных пластин существенно отличаются от методов расчета пластин сплошного сечения за счет учета податливости механических связей, соединяющих слои составной конструкции.

В современной проектной практике задачи расчета несущих конструкций на статические и динамические нагрузки осуществляются раздельно без учета существующих взаимосвязей между физико-механическими параметрами конструкций, характерных для каждого вида воздействия внешних нагрузок.

Новый подход к исследованию однослойных пластин был предложен профессором В.И. Коробко, который выявил фундаментальную закономерность в строительной механике для упругих изотропных сплошных пластин, основу которой представляет функциональная взаимосвязь между максимальным прогибом нагруженных конструкций и их основной частотой колебаний в ненагруженном состоянии. Однако, учитывая, что в этой закономерности взаимосвязь произведение максимального прогиба на квадрат основной частоты колебаний не зависит от жесткостных характеристик пластин, можно предположить, что эта закономерность будет справедлива и для составных пластин на податливых связях. Не вызывает сомнения наличие функциональной связи как максимального прогиба составной пластинки от коэффициента жесткости соединительного шва, так и основной частоты колебаний. Для подтверждения этих предположений требуется проведение комплекса дополнительных теоретических и эксперимен-

тальных исследований.

Следует отметить, что математическая модель указанной закономерности легла в основу нового научного направления, связанного с развитием динамических (вибрационных) методов диагностики и контроля качества строительных конструкций, в том числе и находящихся в условиях эксплуатации, при использовании которых существенно уменьшается трудоемкость эксперимента как за счёт значительного сокращения подготовительного периода по сравнению со статическими испытаниями, так и за счёт проведения самих испытаний. При использовании фундаментальной закономерности В.И. Коробко для составных изотропных пластин во многих случаях достаточно использовать только динамические испытания при определении критериев жесткости.

Еще одной задачей, которую возможно решить вибрационными методами, является уточнение расчетных схем конструкций, находящихся в эксплуатации. Так, при расчете и проектировании конструкций используют идеализированные расчетные схемы, однако, при эксплуатации они не отражают действительных условий опирания, а само понятие «жесткое сопряжение» не всегда приемлемо.

Для изотропных пластин различного очертания использование взаимосвязи максимального прогиба и частот собственных колебаний позволяет упростить решения многих инженерных задач. Однако для расчета составных пластин Указанная фундаментальная закономерность еще не применялась. Поэтому выбранная тема для диссертационного исследования представляется актуальной.

**Объект и предмет исследования.** Объектами исследования являются составные пластины на упругоподатливых связях квадратного и круглого очертания в плане с шарнирным опиранием и защемлением по контуру. Предметом исследования являются методы определения жесткостных параметров таких пластин при их нагружении равномерно распределенной нагрузкой и основной частоты колебаний в ненагруженном состоянии.

**Целью диссертационной работы** является теоретическое и экспериментальное доказательства наличия функциональной связи между жесткостными параметрами составных пластин (максимальным прогибом и коэффициентом

жёсткости соединительного шва) с их динамическими параметрами.

Основными задачами исследования являются:

- теоретические и экспериментальные исследования взаимосвязи между максимальным прогибом и основной частотой колебаний составных пластин на податливых связях;

- определение влияния жесткости и количества регулярно и симметрично установленных связей сдвига на максимальный прогиб и основные частоты колебаний составных пластин;

- определение зависимости коэффициента жесткости шва составных пластин на податливых связях от частоты собственных колебаний составной пластины;

- разработка методики оценки податливости заделки пластин по контуру по прогибам и частотам собственных колебаний пластин;

- разработка и изготовление стенда для проведения экспериментальных исследований составных пластин различного очертания;

- проведение серии экспериментальных исследований составных пластин с изменяющимся числом податливых связей (нагелей) и различными условиями закрепления по контуру;

- разработка способа определения максимального прогиба двухслойных пластин по их основной (или первой резонансной), частоте колебаний с использованием аналитической зависимости  $w_0 - \omega$ , построенной для упругих однослойных пластин.

**Методология и методы исследования.** При проведении теоретических исследований использовались классические (аналитические и численные) методы строительной механики и теории сооружений. При использовании численных методов расчета применялся программный комплекс «SCAD», реализующий метод конечных элементов. При проведении экспериментальных исследований и обработке полученных результатов использовались методы математической статистики.

**Достоверность** научных положений и полученных результатов подтверждается их сравнением с известными результатами, полученными другими исследователями, найденными с помощью фундаментальных методов строительной механики, а также результатами экспериментальных исследований.

**Научная новизна и практическая ценность полученных результатов.**

При проведении теоретических и экспериментальных исследований получены следующие новые научные результаты:

– теоретически доказано и экспериментально подтверждено, что составные изотропные пластины на податливых связях независимо от жесткости поперечных связей и связей сдвига между слоями, очертания в плане, а также условий опирания по контуру подчиняются известной фундаментальной закономерности, справедливой для упругих изотропных пластинок сплошного сечения;

– выявлена зависимость частот собственных колебаний и максимального прогиба составных пластин от жесткости связей сдвига, их количества при регулярной и симметричной постановке;

– получена функциональная зависимость коэффициента жесткости шва от частот собственных поперечных колебаний составной пластинки;

– разработана методика оценки степени податливости заделки составных пластин по контуру;

– разработана методика проведения статических и динамических испытаний составных пластин на податливых связях;

– предложен способ определения жесткости составных пластин по их основной частоте колебаний с использованием аналитических зависимостей, полученных для пластин сплошного сечения.

Разработанные в диссертации динамические методы исследования составных пластин на податливых связях могут найти широкое применение при проектировании, усилении и обследовании подобных конструкций.

Кроме того, результаты работы рекомендуется использовать в учебном процессе строительных вузов при изучении дисциплины «Строительная меха-



ника», «Конструкции из дерева и пластмасс» и «Обследование и испытание сооружений».

**На защиту выносятся следующие положения и результаты:**

– доказательство закономерности о функциональной связи максимального прогиба составных пластин различного очертания на упругоподатливых связях от основной частоты колебаний независимо от жесткости поперечных связей и связей сдвига, регулярно и симметрично расположенных по пластине, их количества и условий опирания пластин;

– зависимость коэффициента жесткости шва от основной частоты собственных поперечных колебаний составной пластинки;

– методика оценки степени податливости заделки составных пластин по контуру;

– результаты теоретических и экспериментальных исследований составных пластин на упруго-податливых связях;

– способ определения максимального прогиба составной пластины произвольного очертания по ее основной частоте колебаний в ненагруженном состоянии с использованием аналитических зависимостей, полученных для пластин сплошного сечения.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы обсуждались и докладывались на ежегодных научно-практических конференциях «Госуниверситета – УНПК» (2012–2015 гг.), IV Международном симпозиуме «Актуальные проблемы компьютерного моделирования» (Челябинск, 2012 г.); на XVI Международной научно-практической конференции студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых «Строительство – формирование среды жизнедеятельности» (Москва, 2013); на Международном семинаре «Теория расчета конструктивных систем зданий и сооружений» (Курск, 2014); на Международной научно-технической конференции «Строительная наука – XXI век: теория, образование, практика, инновации Северо-Арктическому региону» (Архангельск, 2015).

**Публикации.** По теме исследования опубликовано 14 научных работ, в том числе 11 статей в журналах, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки России, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора технических наук.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы включающего 87 наименований и приложения. Работа изложена на 145 страницах, включая 84 рисунка, 38 таблиц.

#### **Содержание работы.**

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертации, даётся ее общая характеристика, формулируются основные цели и задачи исследования, обсуждается достоверность и научная новизна результатов работы, их практическая ценность, а так же содержится информация по апробации работы.

**В первой главе** приводятся существующие методы расчета сплошных и составных пластин на статические и динамические нагрузки. Рассмотрена проблема динамического контроля пластин как строительных конструкций. Сформулирована основная цель и задачи научного исследования.

**Вторая глава** посвящена теоретическим исследованиям составных изотропных пластин квадратного и круглого очертания с упруго-податливыми поперечными связями и связями сдвига. Выявлена взаимосвязь между основной частотой собственных колебаний составных пластин и максимальными прогибами от равномерно распределенной статической нагрузки. Исследовано влияние жесткости и количества симметрично локально установленных связей сдвига на частоты собственных колебаний и прогибы составных пластин различного очертания.

**В третьей главе** исследуется влияние коэффициента жесткости шва составных пластин на собственные частоты колебаний. Выявлена функциональная связь коэффициента жесткости шва составной пластины с основной частотой её собственных колебаний. Проведена оценка влияния жесткости и количе-

ства локально симметрично установленных связей сдвига на коэффициент жесткости шва для составных пластин различного очертания.

**Четвертая глава** посвящена экспериментальным исследованиям составных пластин на податливых связях на динамические и статические нагрузки. Приведена методика проведения статических и динамических испытаний составных пластин. Разработана методика учета податливости заделки пластин на опоре при проведении эксперимента. Приводятся данные экспериментального исследования максимального прогиба и частот собственных колебаний составных пластин различного очертания. Проведено сопоставление теоретических и экспериментальных данных испытания составных пластин при статических и динамических нагрузках. Выявлено, что экспериментальные данные подтверждают результаты теоретических исследований.

По результатам исследований сделаны **основные выводы**.

## 1 СУЩЕСТВО ВОПРОСА. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

### 1.1 Методы расчета сплошных изотропных пластин на статические нагрузки

Пластинки нашли широкое применение в качестве конструктивных элементов в строительстве и машиностроении. Их формы могут быть разнообразны, а граничные условия могут представлять различные комбинации из условий шарнирного опирания, жесткой или податливой заделки, свободного края.

Решение задачи по расчету пластинки на статическую нагрузку заключается в нахождении выражения прогиба  $w(x,y)$ , которое удовлетворяло бы основному уравнению изгиба пластинки и условиям на опорном контуре. Воспользуемся выражением для прогиба, найдем изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы, а по ним – напряжения. Для описания выражения изгиба пластинки применяются дифференциальные уравнения.

Основное дифференциальное уравнение изгиба пластин (уравнение Эйлера – Лагранжа) [3] при действии равномерно распределённой по поверхности пластины нагрузки имеет вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1.1)$$

или

$$\Delta^2 \Delta^2 W = \frac{q}{D}. \quad (1.2)$$

Реализация аналитического метода связана с определёнными трудностями. В настоящее время найдены аналитические решения для ограниченного типа задач, в основном для пластин правильных форм (квадрат, круг, треугольник, кольцевые пластины и т.п.) при действии равномерно распределённых или симметрично расположенных сосредоточенных нагрузок при однородных граничных условиях на контуре. Не всегда удаётся найти аналитическое решение при приложении распределённых нагрузок сложного вида, например, описываемых нелинейными функциями, при действии несимметрично расположенных сосредоточенных сил разной интенсивности, а также при неоднородных

граничных условиях на контуре пластины. Поэтому с начала XX века начинают развиваться приближенные методы расчёта пластинок.

В 1908 году Вальтер Ритц [68] показал, что для приближенного решения задач по отысканию экстремума определенного интеграла не обязательно решать уравнение Эйлера-Лагранжа (1.1), а достаточно применить прямой путь нахождения разрешающей функции:

$$v(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x), \quad (1.3)$$

где  $c_i$  – свободные независимые параметры, базисные функции;  $f_i(x)$  – допустимые функции задачи.

Использование метода Ритца построено на выборе определенного семейства функций, которые будут являться приближенным решением задачи и зависящим от нескольких параметров. При решении задачи ограничивают подкласс допустимых функций, после чего находят из этих функций такие, при использовании которых получается минимум полной энергии системы. После чего находится минимум полученного функционала по каждому из неизвестных параметров. В результате получается система  $m$  алгебраических уравнений с  $m$  неизвестными. Решая эту систему, находят значения неизвестных параметров и получают приближенное решение задачи.

В 1910 году С.П. Тимошенко [70], применяя метод Ритца для решения задач устойчивости стержней и пластинок, сделал некоторые изменения в этом методе. Он предположил, что в состоянии безразличного равновесия при отклонении системы от устойчивой формы равновесия приращение энергии равно нулю. Но данный нюанс скорее является частным случаем метода Ритца.

В 1915 году Б.Г. Галёркин в своих работах [13,14] представил способ решения дифференциальных уравнений изгиба пластинок. Так, искомую функцию задают в виде ряда, в котором функции линейно независимы и удовлетворяют условиям на границе. Рассматриваемая задача сводится к решению некоторого дифференциального уравнения при заданных граничных условиях:

$$M(y) - PL(y) = 0, \quad (1.4)$$

где  $P$  – некоторый параметр;  $M(y)$  и  $L(y)$  – однородные линейные дифференциальные выражения, которые конструируют в виде ряда:

$$y = \sum_{i=1}^N c_i g_i(x), \quad (1.5)$$

где  $c_i$  – произвольные постоянные,  $g_i(x)$  – координатные функции, являющиеся функциями сравнения.

Основная операция метода Б.Г. Галеркина состоит в том, что функции-ошибки  $L(x, P, c_1, c_2, \dots, c_N)$  ортогонализируют ко всем координатным функциям. Для этого ее поочередно умножают на все функции  $g_i(x)$  и интегралы от производных приравнивают нулю.

В научной и учебной литературе этот подход к решению дифференциальных уравнений можно встретить как метод Бубнова-Галёркина [68]. Это связано с более ранними работами И. Г. Бубнова над этим вопросом, но, к сожалению, в то время это осталось не замеченным. В настоящее время этот метод получил широкое распространение, что определяется его относительной простотой и достаточной точностью получаемых результатов.

Например, при определении прогиба для прямоугольной пластинки, защемленной по контуру, при действии равномерно распределённой нагрузки граничные условия имеют вид: при  $x = \pm a$  и  $y = \pm b$

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (1.6)$$

Выбирается функция прогибов в виде степенной зависимости, которая удовлетворяет всем граничным условиям:

$$\begin{aligned} w &= \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \dots = \\ &= a_1 \cdot (x^2 - a^2)^2 \cdot (y^2 - b^2)^2 + a_2 \cdot (x^2 - a^2)^2 \cdot (y^2 - b^2)^3 + \\ &+ a_3 \cdot (x^2 - a^2)^3 \cdot (y^2 - b^2)^2 + a_4 \cdot (x^2 - a^2)^3 \cdot (y^2 - b^2)^3 + \dots \end{aligned}$$

В первом приближении

$$w = \varphi_1(x, y) = a_1 \cdot (x^2 - a^2)^2 \cdot (y^2 - b^2)^2.$$

Уравнение Галёркина принимает следующий вид:

$$a_1 C_{11} = \Delta_{1q},$$

$$C_{ik} = \iint \nabla^4 \varphi_i \cdot \varphi_k dx dy \quad \text{и} \quad \Delta_{kq} = \iint \frac{q}{D} \cdot \varphi_k dx dy. \quad (1.6)$$

Найдем производные, входящие в выражения (1.6):

$$\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^4} = 24(y^2 - b^2)^2, \quad \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} = 24(x^2 - a^2)^2,$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y^2} = 16(3x^2 - a^2)(3y^2 - b^2).$$

Подставляя эти производные в выражения (1.6), получим:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \iint \left( \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^4} \varphi_1 + 2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y^2} \varphi_1 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} \varphi_1 \right) dx dy = \\ &= 4 \int_0^a \int_0^b [24(x^2 - a^2)^2 \cdot (y^2 - b^2)^4 + \\ &+ 32(3x^2 - a^2) \cdot 3(y^2 - b^2) \cdot (x^2 - a^2)^2 \cdot (y^2 - b^2)^2 + \\ &+ 24(x^2 - a^2)^4 \cdot (y^2 - b^2)^2] dx dy = \\ &= \frac{4 \cdot 128 \cdot 64}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} \cdot a^5 \cdot b^5 \cdot \left( a^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + b^4 \right); \\ \Delta_{1q} &= \frac{q}{D} \iint \varphi_1 dx dy = \\ &= 4 \frac{q}{D} \int_0^a \int_0^b (x^2 - a^2)^2 \cdot (y^2 - b^2)^2 dx dy = \frac{4q}{D} \frac{64}{225} a^5 b^5. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в каноническое уравнение Галёркина, найдём:

$$a_1 = \frac{\Delta_{1q}}{C_{11}} = \frac{7}{128D} \cdot \frac{1}{a^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + b^4}.$$

Тогда

$$w = a_1 \varphi_1 = \frac{7}{128} \cdot \frac{q}{D} \cdot \frac{1}{a^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + b^4} \cdot (x^2 - a^2)^2 \cdot (y^2 - b^2)^2.$$

Наибольший прогиб будет в центре пластинки ( $x = y = 0$ ):

$$w_0 = \frac{7}{128} \cdot \frac{q}{D} \cdot \frac{a^4 b^4}{a^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + b^4}$$

Для квадратной пластинки ( $a = b$ )

$$w_0 = \frac{7}{128} \cdot \frac{q}{D} \cdot \frac{a^4}{1 + 4/7 + 1} = 0,02127 \frac{qa^4}{D}.$$

Развитие метода Бубнова-Галёркина получило в работах Е. Треффца [71], который предложил выбирать функции таким образом, чтобы они были частным решением дифференциального уравнения задачи.

Методы Ритца, Бубнова-Галеркина, Треффца различаются лишь способом определения коэффициентов при координатных функциях. Кроме того, вариационные методы очень сложно применить к пластинкам неправильных форм и с неоднородными граничными условиями. Вариационные методы являются приближенными, это их главный недостаток – они, как правило, дают оценку искомой функции либо сверху, либо снизу.

Среди численных методов решения задач об изгибе пластин широкое применение получил метод конечных разностей [3, 62]. Производные, находящиеся в дифференциальных уравнениях, заменяют линейной комбинацией значений функций в узлах (разностные соотношения). В результате дифференциальное уравнение преобразуют в систему алгебраических уравнений, а начальные и краевые условия заменяют разностными начальными и краевыми условиями, где искомой остается значение функции в узлах сетки.

Для реализации этого метода пластинка разбивается квадратной сеткой с шагом  $\Delta$  (рисунок 1.1), тогда для каждого узла, воспользовавшись бигармоническим оператором, записывается уравнение:

$$(\nabla^2 \nabla^2 w)_k = \frac{q_k}{D} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.7)$$

где  $q_k$  – средняя нагрузка в узле  $k$ , приходящаяся на площадку  $\Delta \times \Delta$  вокруг этого узла. После чего накладываются граничные условия на уравнение (1.7)



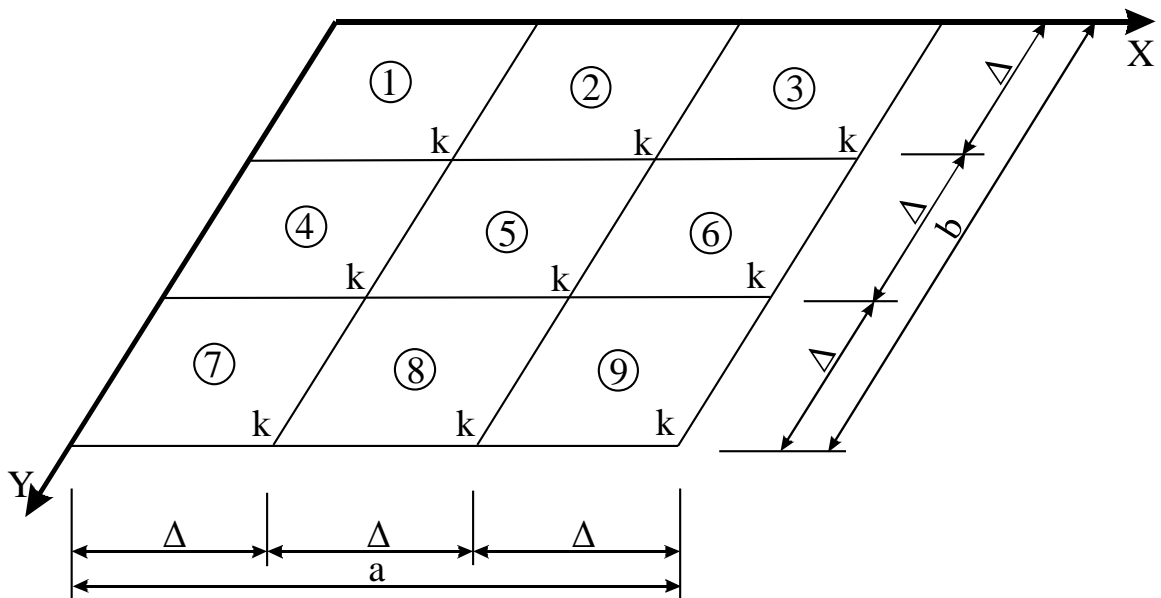


Рисунок 1.1 – Сетка элементов при реализации МКР

Впервые метод конечных разностей был применён Рунге [68] в исследовании задачи кручения стержня. Далее этот метод применил Г. Маркус в расчетах на изгиб пластин в 1924 году. В России этот метод получил развитие в работах П.М. Варвака [10].

В 1955 году Дж. Аргирис применяет метод конечных элементов для расчета авиационных конструкций. Предложение разделить конструкцию на несколько частей более простой формы (треугольник, прямоугольник), определить жесткости отдельных участков, а потом объединить их, вызвало большой резонанс, после чего популярность данного метода стала резко возрастать. Кинематические граничные условия задаются в узлах, расположенных на границе пластинки. Распределенная нагрузка заменяется сосредоточенными силами, прикладываемыми в узлах. Узлами являются вершины треугольников или прямоугольников, на которые разбита пластинка. Неизвестными в каждом из узлов остается прогиб и два угла поворота нормали.

Сущность метода заключается в следующем. Пусть известны все функции  $f_i(x, y)$ , называемые функциями формы элемента, с помощью которых можно подсчитать перемещения  $w(x, y)$  любой точки внутри элемента, если его  $i$ -я вершина получила перемещение  $\delta_i = 1$ :

$$\{w\} = [f][\delta]. \quad (1.8)$$

По найденным перемещениям определяются деформации и напряжения по формулам:

$$\{\varepsilon\} = |B||\delta|, \quad \{\sigma\} = |D||\varepsilon|, \quad (1.9)$$

где  $|B|$  – матрица перехода от перемещений узлов к деформациям;  $|D|$  – матрица упругости.

Развитие МКЭ в задачах теории упругости и строительной механики нашло в работах авторов: О.К. Зенкевича [18], Тернера [68], Л.А. Розина [58], Клаффа, Мартина.

В 1961 на русский язык переводятся статьи Дж. Аргириса, что дает существенный толчок в работах советских ученых А.М. Масленникова [45, 46], Н.Н. Шапошникова [82] и других.

Метод конечных элементов отличает от других методов инвариантность по отношению к геометрии конструкции и физическим характеристикам материалов, высокая степень приспособляемости к автоматизации всех этапов расчета, а также процедура МКЭ не зависит от характера граничных условий задачи. Следует отметить, что МКЭ получил своё развитие только с внедрением в практику расчётов строительных конструкций вычислительных комплексов.

Среди приближенных аналитических методов, интенсивно развивающихся в настоящее время, необходимо отметить изопериметрический метод [33] и метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) [23, 24], являющийся логическим продолжением изопериметрического метода.

Еще в начале II в. до н.э. древнегреческим математиком Зенодором были сформулированы основные геометрические изопериметрические теоремы. Однако, впервые изопериметрический метод, в привычном для нас виде, был представлен в работах Сен-Венана [63] и Релея [86].

Так основу изопериметрического метода составляют три основные теоремы:

1) Из всех изопериметрических плоских фигур наибольшую площадь имеет круг. Теорема представлена неравенством:

$$A \leq \pi r^2, \quad (1.10)$$

где  $A$  – площадь фигуры;  $r$  – радиус круга.

Рассматривая подмножества плоских геометрических фигур, можно выделить «малые» изопериметрические теоремы, как, например: из всех изопериметрических четырехугольников наибольшую площадь имеет квадрат, и т.п.

2) Наименьший периметр из всех плоских фигур равной площади имеет круг. Теорема представлена неравенством:

$$L \geq 2\pi r, \quad (1.11)$$

где  $L$  – периметр фигуры.

Малая изопериметрическая теорема для четырехугольников по второй формулировке изопериметрической проблеме будет выглядеть следующим образом: из всех равновеликих четырехугольников наименьший периметр имеет квадрат

3) Из всех плоских фигур наибольшее изопериметрическое частное имеет круг. Чтобы понять, чем представлено изопериметрическое частное, выразим из неравенства (1.11)  $r$  и подставим его в (1.10). Запишем два вида неравенств:

$$\frac{L^2}{4\pi A} \geq 1, \quad \frac{4\pi A}{L^2} \leq 1. \quad (1.12)$$

В левой части первого неравенства стоит величина, называемая изопериметрическим частным, которая не зависит от размеров фигуры, а зависит лишь от ее формы.

Сформулируем малые изопериметрические теоремы, например: из всех четырехугольников наибольшее изопериметрическое частное имеет квадрат.

Изопериметрический метод для решения прикладных задач технической теории пластинок оказался эффективным и перспективным.

Впервые применил изопериметрический метод для решения задач строительной механики В.И. Коробко [32] в своей докторской диссертации. Новый подход заключался в замене труднодоступных физических величин легкодоступными геометрическими характеристиками пластинок, таких как площадь, периметр, коэффициент формы и т.д. Были получены решения для определения

частот собственных колебаний, максимального прогиба и критической силы при потере устойчивости пластинок различного очертания.

При решении задач строительной механики пластинок изопериметрическим подходом, связанных с выпуклой областью, основные интегральные физико-механические и геометрические характеристики оцениваются по изопериметрическим неравенствам, границы которых будут известными решениями для одной или двух фигур (при односторонних и двухсторонних неравенствах соответственно). Однако оценить реальную погрешность для промежуточного множества фигур достаточно сложно, но возможно оценить максимально возможную для них погрешность. Так, если эта погрешность будет значительной, то ценность полученных оценок резко снизится. Этот недостаток можно компенсировать при использовании метода интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ).

Разработка основ метода интерполяции по коэффициенту формы принадлежит А.В. Коробко [23, 24]. При анализе множества фигур, выделим минимум две, решения для которых известны. Представим известные решения  $F_1$  и  $F_2$  в виде степенных функций, найденных в ходе анализа известных решений теории пластинок

$$F_1 = KQ \left( \frac{K_{f1}}{A_1} \right)^n, \quad (1.13)$$

$$F_2 = KQ \left( \frac{K_{f2}}{A_2} \right)^n, \quad (1.14)$$

где  $K$  – коэффициент пропорциональности (различный для каждого ограниченного подмножества фигур), который зависит от вида рассматриваемой задачи и граничных условий;  $Q$  – обобщённая физическая или геометрическая константа;  $n$  – показатель степени;  $K_{f1}$  и  $K_{f2}$  – коэффициенты формы первой и второй фигур соответственно;  $A_1$  и  $A_2$  – площади первой и второй фигур соответственно;

Разделив выражение (1.14) на (1.13), найдем  $n$ :

$$n = \frac{\ln(F_2/F_1)}{\ln(K_{f2}/K_{f1} \times A_1/A_2)}. \quad (1.15)$$

Если  $A_1 = A_2 = \text{const}$ , то выражение (1.15) примет вид:

$$n = \frac{\ln(F_2/F_1)}{\ln(K_{f2}/K_{f1})}. \quad (1.16)$$

Представим выражение для определения интегральной характеристики любой фигуры из рассматриваемого множества по аналогии с формулами (1.13) и (1.14):

$$F = KQ\left(\frac{K_f}{A}\right)^n, \quad (1.17)$$

Разделив выражение (1.17) на (1.13), найдем  $F$ :

$$F = F_1 \left( \frac{K_f}{K_{f1}} \cdot \frac{A_1}{A} \right)^n. \quad (1.18)$$

Если  $A_1 = A = \text{const}$ , то выражение (1.18) примет вид:

$$F = F_1 \left( \frac{K_f}{K_{f1}} \right)^n. \quad (1.19)$$

На рисунке 1.20 графически изображена рассматриваемая аппроксимация. Действительные значения  $F$  (или  $1/F$ ) изображает кривая I. Приближённым решениям, которые получены по формуле (1.19), соответствует кривая II.

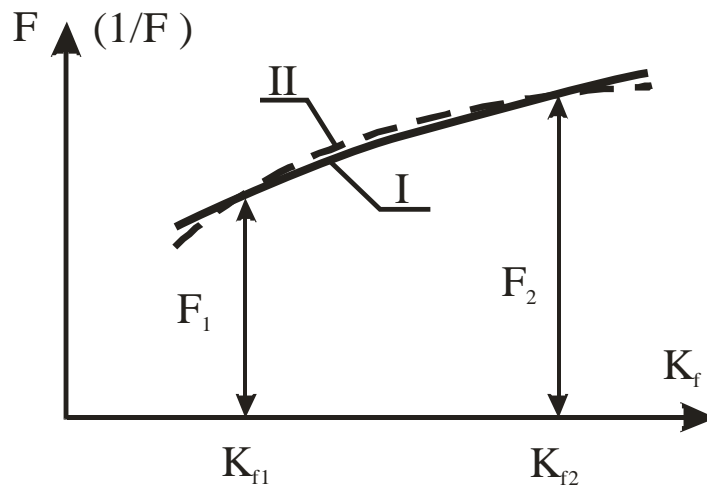


Рисунок 1.2 - Графическое изображение рассматриваемой аппроксимации в осях  $K_f - F$

При наличии более двух известных решений точность аппроксимации может существенно возрасти.

Метод интегрирования по коэффициенту формы позволяет получить доста-

точно простые аналитические зависимости, при помощи которых, решая задачи строительной механики, можно определить интегральные характеристики, связанные с выпуклой плоской областью. Помимо этого МИКФ дает возможность проверить верность полученных результатов решений иными приближенными способами.

В настоящее время МИКФ получил широкое развитие при решении задач устойчивости пластинок и оболочек [19, 81], динамических задач теории пластинок [64] и задач об изгибе пластинок [15, 44, 72].

## 1.2 Методы расчета сплошных изотропных пластин на динамические нагрузки

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки (1.1) преобразуем в дифференциальное уравнение колеблющейся пластинки, добавив действующие силы инерции на пластину:

$$D \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = q - m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (1.20)$$

или

$$D \Delta^2 \Delta^2 W = q - m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \quad (1.21)$$

Если же внешняя статическая нагрузка отсутствует, то уравнение (1.21) примет вид:

$$D \Delta^2 \Delta^2 W + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \quad (1.22)$$

Первым исследовал собственные колебания струны, стержня и пластины Релей [86]. Им была задана приближенная форма колебания струны, которая подчинялась следующему закону:

$$w = \left[ 1 - \left( \frac{2x}{l} \right)^n \right] \cos(\omega t), \quad (1.23)$$

где  $l$  – длина струны;  $n$  – положительное число (при параболической форме колебаний  $n = 2$ ).

При исследовании колебаний круглых жестко заземленных по контуру пластин Л. Релей в 1877 году сформулировал следующее положение: «из всех жестко заземленных пластинок с заданной площадью, круглая имеет минимальную основную частоту колебаний» [86 с. 72].

При использовании метода Релея для определения частот колебаний необходимо сделать допущение о форме кривой изгиба. Выбор определенной формы кривой изгиба приводит заданную систему к системе с одной степенью свободы, что ведет к увеличению жесткости системы, и, в конечном итоге, несколько повышает частоту колебаний по сравнению с истинными значениями.

Лучшую сходимость для приближенных методов определения частот колебаний показывает метод Ритца, который является развитием метода Релея. При использовании этого метода принимается уравнение кривой изгиба, представляющее форму колебаний с несколькими параметрами, которые необходимо выбрать таким образом, чтобы обратить в минимум частоту колебаний.

Например, для определения частот колебаний квадратной пластины положим:

$$v_0 = v_0 \cos \omega t, \quad (1.24)$$

где  $v_0$  – функция  $x$  и  $y$ , определяющая форму колебаний.

Подставив (1.24) в предварительно выведенные формулы для потенциальной энергии изгиба пластины и кинетической энергии колеблющейся пластины, получим соответственно:

$$V_{\max} = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\nu \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + 2(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (1.25)$$

$$T_{\max} = \frac{\gamma h}{2g} r^2 \iint v_0^2 dx dy. \quad (1.26)$$

Тогда

$$\omega^2 = \frac{2g}{\gamma h} \frac{V_{\max}}{\iint v_0^2 dx dy}, \quad (1.27)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $\frac{\gamma h}{g}$  – масса

единицы площади пластины.

Ритц применил этот метод для квадратной пластины со свободными краями и взял функцию  $v_0$  в виде:

$$v_0 = \sum \sum a_{min} u_m(x) v_n(y), \quad (1.28)$$

где  $u_m(x)$  и  $v_n(y)$  – нормальные функции колебаний для призматического стержня со свободными концами,  $a$  – постоянная, зависящая от формы колебаний для трех низших форм колебаний (коэффициент Пуассона принят равным 0,225) значения этой постоянной следующие:

$$a_1=14,10; \quad a_2=20,56; \quad a_3=23,91.$$

Тогда частота низших и высших частот колебаний определяется выражением:

$$\omega = \frac{a}{a^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}. \quad (1.29)$$

Из выражения (1.29) можно сделать выводы, относящиеся также и для других случаев колебаний пластинок:

- период любой нормальной формы колебаний изменяется пропорционально квадрату линейных размеров, если толщина остается неизменной.

- если все размеры пластины, включая толщину, увеличить в одинаковое число раз, то период увеличивается пропорционально увеличению линейных размеров.

- период колебаний изменяется обратно пропорционально квадратному корню из модуля упругости и прямо пропорционально квадратному корню из плотности материала.

Метод Галёркина [14], как и метод Ритца – один из способов прямого решения задачи на экстремум. В качестве конечного ряда базисных функций выбираем:



$$\begin{cases} X_i(x) = \sin \frac{\lambda_i x}{a} + A_i \cos \frac{\lambda_i x}{a} + B_i \operatorname{sh} \frac{\lambda_i x}{a} + C_i \operatorname{ch} \frac{\lambda_i x}{a}; \\ Y_j(y) = \sin \frac{\lambda_j y}{b} + A_j \cos \frac{\lambda_j y}{b} + B_j \operatorname{sh} \frac{\lambda_j y}{b} + C_j \operatorname{ch} \frac{\lambda_j y}{b}, \end{cases} \quad (1.30)$$

где  $\lambda_i = k_i a$ ,  $\lambda_j = k_j b$ ,  $k = \sqrt[4]{\omega^2 m/D}$ ;  $a, b$  – длины сторон прямоугольной пластинки, параллельных осям  $OX$  и  $OY$  соответственно.

Постоянные интегрирования  $A_i, B_i, C_i$  и  $A_j, B_j, C_j$  находятся из граничных условий для функций  $X_i$  и  $Y_j$ .

Подставив (1.30) в уравнение

$$\iint_A (D \nabla^2 \nabla^2 w - m \omega^2 w) \cdot \delta w dA = 0, \quad (1.31)$$

Получим:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \sum_{k=1}^n a_k \iint_A (D \nabla^2 \nabla^2 \varphi_k - m \omega^2 \varphi_k) \cdot \varphi_i dA \right] \delta a_i = 0. \quad (1.32)$$

К численным способам решения динамической задачи изотропных пластинок относятся метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). При решении задачи МКР проводится замена непрерывной области дискретной. Преобразуем дифференциальное уравнение собственных колебаний пластинки (1.21):

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - \beta^2 w = 0, \quad (1.33)$$

где  $\beta^4 = m \omega^2 / D$  – собственное значение дифференциального уравнения.

Для квадратной сетки ( $\Delta x = \Delta y = \Delta$ ,  $\alpha = 1$ ) после преобразования с учетом представления бигармонических операторов в конечных разностях получим:

$$\begin{aligned} & [(20 - \beta^2 \Delta^4) w_k - 8(w_a + w_b + w_c + w_d) + \\ & + 2(w_e + w_f + w_g + w_h) + (w_\ell + w_m + w_n + w_i)] = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Метод конечных разностей нашел широкое применение в связи с быстрым развитием вычислительной техники. При её применении результаты получаются с достаточно малой погрешностью. Точность решения повышается при

уменьшении шага сетки.

Применяя метод конечных элементов (МКЭ) для системы с бесконечно большим числом степеней свободы мы разбиваем ее на множество элементов конечных размеров, заменяя, таким образом, на систему с конечным числом степеней свободы. Распределенную массу элементов меняем на узловую. Далее проводим исследования напряженно-деформированное состояние полученных элементов. Для определения собственных частот колебаний пластинок необходимо составить матричное уравнение:

$$|K^{-1}||M| - \lambda_i|E| = 0, \quad (1.35)$$

где  $|K|^{-1}$  – матрица податливости системы,  $|M|$  – матрица масс,  $|E|$  – единичная матрица,  $\lambda_i = 1/\omega^2$ .

Рассмотрим метод конечных элементов на примере квадратной изотропной пластинки, шарнирно опертой по контуру. Для этого разобьем ее на 4 элемента и составим матрицу жесткости и матрицу масс:

$$|K| = \begin{vmatrix} r_{11} & (r_{15} + r_{1-12}) \\ r_{51} & r_{55} \end{vmatrix} = D \begin{vmatrix} \frac{10,8}{\Delta^2} & \frac{4,4}{\Delta} \\ \frac{2,2}{\Delta} & 1,6 \end{vmatrix}; \quad (1.36)$$

$$|M| = \frac{\Delta^2 m}{5} \begin{vmatrix} \frac{1727}{2520} & -\frac{137\Delta}{2520} \cdot 2 \\ -\frac{137\Delta}{2520} & \frac{\Delta^2}{63} \end{vmatrix} = \frac{\Delta^2 m}{5} \begin{vmatrix} 0,68532 & -0,10873\Delta \\ -0,05437\Delta & 0,01587\Delta^2 \end{vmatrix}. \quad (1.37)$$

Выполним обращение матрицы (1.36) и составим характеристическое уравнение:

$$|K^{-1}||M| = \frac{\Delta^4 m}{38D} \begin{vmatrix} 1,21613 & -0,20888\Delta \\ -\frac{3,60260}{\Delta} & 0,64981 \end{vmatrix}. \quad (1.38)$$

Найдем корни, введя обозначения  $b = \Delta^4 m / (38D)$ , и основную частоту колебаний по формуле:

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\max}}} = \sqrt{\frac{38D}{1,84549\Delta^4 m}} = \frac{4,54}{\Delta^2} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{18,16}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (1.39)$$

Это решение отличается от точного  $\omega_{\min} = 19,739 \sqrt{D/m}/a^2$  на 8%, что говорит о том, что деление пластинки на 4 элемента дает достаточно грубый результат и необходимо увеличить сетку конечных элементов.

Однако, заземленная квадратная пластина будет иметь всего одно неизвестное при делении на 4 конечных элемента и решение примет вид:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \frac{8,88}{\Delta^2} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{35,52}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad (1.40)$$

Так, значение для основной частоты колебаний отличается от точного на 1,3%.

При решении задач МКЭ широкое распространение получил метод перемещений из-за более простой матрицы коэффициентов по сравнению с методом сил.

Изопериметрический метод решения задач колебания пластинок нашел свое развитие в работах В.И. Коробко [26...30, 38]. Для нахождения основных частот были разработаны приемы построения одно- и двусторонних изопериметрических неравенств для различных форм и однородных граничных условий. Этот метод даёт во многих случаях хорошую сходимость с действительными значениями, однако, достаточно часто получаемые результаты основной частоты были довольно неточными.

Для нахождения собственных частот колебаний методом интерполяции по коэффициенту формы обратимся к работам И.А. Колесника и А.В. Коробко [21, 22, 24, 31]. Авторы используют степенную зависимость для того, чтобы задать аппроксимирующую функцию, немного отличающуюся от того вида, который получается при представлении рассматриваемой задачи в изопериметрическом виде. При использовании такой аппроксимирующей функции решение даёт более точные результаты, чем в работах В.И. Коробко.

### 1.3 Методы расчета составных пластин

В теории составных пластин и оболочек применяется ряд гипотез, заключающиеся в принятии различных предположений относительно распределения напряжений по толщине или перемещений. В этом методе существует два подхода: кинематический и статический. Первый основывается на кинематических гипотезах для каждого слоя, при этом число уравнений зависит от числа слоев. В статическом подходе гипотезы записываются для всего пакета в целом (число уравнений не зависит от числа слоев).

Классическая теория составных пластин и оболочек основана на гипотезах Кирхгофа-Лява [40] для целого пакета. Однако, эта теория применима только для тонких изотропных пластин и оболочек, у которых жесткости слоев одного порядка.

На сегодняшний день существует целый ряд работ, которые позволяют учесть факторы, не учтенные в классической теории. Модель С.П. Тимошенко [49, 69] позволяет более точно описать напряженно-деформированное состояние пластин, которая учитывает поперечные сдвиги: предполагается, что нормаль остается прямой, но ее ортогональность к нейтральной поверхности нарушается вследствие деформации поперечного сдвига. Тем самым устраняется противоречия, присущие модели Кирхгофа-Лява – равенство нулю касательных напряжений при перерезывающих усилиях, не равных нулю.

В работе В.В. Болотина и Ю.Н. Новичкова [7] для каждого слоя принимаются различные условия. Для одних слоев можно воспользоваться гипотезой Кирхгофа-Лява, для других С.П. Тимошенко, для третьих гипотезу С.П. Тимошенко, но с учетом изменения длины нормали. Этот подход к решению задачи занимает промежуточное место по точности между подходом, основанном на уравнениях теории упругости, и подходах, базирующихся на гипотезах для всего пакета в целом.

Гипотеза ломанной линии по толщине С.В. Андреева[5] служит основой для ряда теорий. Им были получены основные соотношения нелинейной теории

составных оболочек со слоями переменной толщины и записаны линеаризованные уравнения устойчивости, учитывающие поперечные сдвиги.

Э.И. Григолюк и П.П. Чулков [17] предложили свою теорию изгиба многослойных пластин и оболочек, в которой для отдельных слоев была справедлива гипотеза прямой линии, а тангенциальные перемещения  $k$ -го слоя определялись по формуле:

$$U_i^k = U_i + \sum_{j=1}^{k-1} h_j \alpha_0 + (X_i + \delta_{k-1}) \alpha_i^k, \quad (1.41)$$

где  $h_k$  – толщина  $k$ -го слоя;  $\delta_{k-1}$  – расстояние от исходной поверхности до верха  $(k-1)$ -го слоя;  $\alpha_{ik}$  – угол поворота нормали в  $k$ -слое;  $U_i$  – тангенциальные перемещения срединной поверхности;  $X_i$  – поперечная координата.

Новый подход излагается в работах Л.П. Хорошуна [49]. Им предлагается свести трехмерные уравнения теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и оболочек. Осуществляется переход на основе представлений об однородном (по части координат) напряженно-деформированном состоянии элемента произвольной структуры по толщине. Построены эффективные уравнения упругости, связывающие усилия и моменты в элементе. Приводится методика уточнения соотношений упругости, которая позволяет полностью учитывать кривизну элемента тонкостенного элемента оболочки.

Во всех вышеперечисленных теориях, исключая исследования А.Р. Ржаницына, для расчета составных пластин не рассматривается работа швов, не учитывается проскальзывание между слоями. При построении линейной теории изгиба составных пластин А.Р. Ржаницын [60] считал справедливой гипотезу Кирхгофа-Лява для каждого слоя. Описывая работу шва, А.Р. Ржаницын ввел следующие функции, позволяющие учитывать проскальзывание между слоями:

$$\tau_x^i = \xi_i \Delta U_i; \tau_y^i = \xi_i \Delta V_i, \quad (1.42)$$

где  $\tau_x^i, \tau_y^i$  – касательные напряжения в связях  $i$ -го шва;  $\xi_i$  – коэффициент жесткости связей сдвига  $i$ -го шва;  $\Delta U_i, \Delta V_i$  – разность продольных смещений в направлении осей  $X$  и  $Y$  соответственно.

Получив аналитическое решение системы уравнений в общем виде, А.Р. Ржаницын применил его для пластинки, состоящей из слоев с различными модулями упругости и коэффициентами Пуассона.

Дальнейшее развитие этой теории [60] получило в работах В.И. Кучерюка, А.Д. Дорогина, В.П. Бочагова [40]. Ими была введена функция напряжений для осевых усилий в сочетании с функцией, описывающей работу шва.

$$\sigma_x^i = \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} - \frac{1}{h^i} \cdot (T^i - T^{i-1}); \sigma_y^i = \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2} - \frac{1}{h^i} \cdot (T^i - T^{i-1}),$$

$$\tau_{xy}^i = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}, \quad (1.43)$$

где  $T_i, T_{i-1}$  – потенциальная функция от касательных напряжений в связях сдвига  $i$ -го и  $(i-1)$ -го шва,

$$\tau_x^i = \frac{\partial T^i}{\partial x}, \tau_y^i = \frac{\partial T^i}{\partial y}. \quad (1.44)$$

Такой подход позволил снять ограничения по коэффициенту Пуассона для отдельных слоёв пластинки.

Д.М. Подольский [54] применил теорию составных стержней А.Р. Ржаницына в синтезе с теорией тонкостенных стержней В.З.Власова для расчета зданий повышенной этажности, которые рассматривал в виде составного тонкостенного стержня. Упругоподатливые поперечные связи он делил на ортогональные и неортогональные.

В.И. Кучерюк [39] в своей работе учел пластические деформации материала и трещинообразование в растянутой зоне многослойной пластины.

Развитию теории составных пластин и оболочек посвящены работы Ю.Е. Якубовского и его учеников. Ю.Е. Якубовским, В.П. Бочаговым, А.А. Фокиным [83] в совместной работе изложена методика расчета напряженно-деформированного состояния в угловых зонах составных пластин в линейной постановке при шарнирном опирании.

К настоящему моменту скопился большой опыт по расчету составных пластин. Имеется достаточно много теорий составных пластин как в линейной, так и

в нелинейной постановке. Тем не менее, единого подхода к решению задач изгиба составных пластин не существует.

#### **1.4 Методы динамического контроля качества конструкций**

Проблема контроля качества строительных конструкций на современном этапе принимает особо важное значение. Это связано не только с повышенными потребительскими запросами и достаточно большой конкуренцией на рынке, но и с необходимостью реконструировать и «обновлять» фонды, оставшиеся со времен СССР, под новые стандарты качества.

Контроль качества строительной продукции можно условно поделить на три направления:

- контроль качества конструкций на этапе выпуска (изготовления) с целью подтверждения (проверки) свойств нормативной документации;
- фактическое определение расчетных схем конструкций, находящихся в эксплуатации;
- выявление действительной несущей способности конструкций при реконструкции зданий и сооружений или усилении его элементов.

В первом направлении конструкция может быть представлена отдельным элементом, испытания качества которого могут проводиться на специализированном стенде предприятия-изготовителя и почти всегда не представляет сложности для подобного контроля.

Важной задачей, решаемой вибрационными методами, является уточнение расчетных схем конструкций. Использование идеализированных расчетных схем при статическом расчете конструкций не всегда способно верно отразить фактические условия опирания и схемы приложения нагрузки. При составлении таких расчетных схем достаточно часто используют как шарнирное опирание, так и жесткое защемление. Однако, в реальных условиях и одно, и другое условие достаточно тяжело реализовать.

Шарнирное опирание предполагает отсутствие препятствий повороту сечения в узле. На практике этому условию могут препятствовать следующие факты: трение в шарнире, дополнительные не учтенные связи. В результате че-

го, в опоре возникают изгибающие моменты, которые могут оказать значительное влияние на напряженно-деформированное состояние узла опирания, и работы конструкции в целом.

Жесткое сопряжение элементов в реальных условиях также сложно реализуемо, и неучёт податливости узла сопряжения может сказаться на результатах расчета. Стоит отметить, что для конструкций из железобетона и металла неучёт податливости не так критичен. За счет высокого сопротивления железобетона и металла смятию контактируемых поверхностей, а также больших значений модуля упругости подобных материалов, деформацией в заделке пренебрегают.

Понятие «жесткое защемление» для материалов с низким модулем упругости и обладающих пониженным сопротивлением смятию вообще неприемлемо. Древесина, имеющая невысокий модуль упругости и малое расчетное сопротивление поперек волокон, не позволяет создавать жесткие узлы. Степень податливости, помимо материала, зависит от конструктивного оформления узла, вида связей, площади смятия и т.п. Степень податливости узлов статически неопределимых системах может сказаться на перераспределении усилий

Использование вибрационного метода дает возможность по динамическим характеристикам конструкции определить податливость заделки элементов, а также учесть защемление в шарнирном узле.

Следующей важнейшей задачей, решаемой вибрационным методом, является интегральный метод определения действительной несущей способности конструкций и элементов при реконструкции зданий и сооружений.

Неотъемлемой частью, предшествующей реконструкции, является комплексное обследование зданий и сооружений. Это мероприятие включает в себя определение физико-механических свойств строительных материалов, составление дефектных ведомостей, определение диаметра, толщины защитного слоя и расположение арматуры и т.п.

На основании данных обследований проводят поверочные расчеты, с учетом дефектов и факторов, влияющих на конструкции, а по величине максимальной нагрузки судят о действительной несущей способности. Этот подход



достаточно эффективен, когда исследуемая конструкция имеет заведомо известную расчетную схему с определенными условиями опирания. Если эти факторы не учтены, то результаты поверочных расчетов могут быть как завышены, так и занижены по сравнению с фактическими.

Для конструкций с неопределенной расчетной схемой определение фактической несущей способности проводится, как правило, путем статических испытаний конструкций. Для проведения таких испытаний необходим достаточно большой период времени, который может быть связан с прекращением технологического процесса, что не всегда осуществимо. Проведение статических испытаний связано с большой трудоемкостью подготовительных работ и непосредственно статическими испытаниями с необходимой выборкой.

### **1.5 Направление и задачи исследования**

Работа многослойных изотропных пластин на податливых механических связях является актуальной проблемой. Пластинки разнообразной формы в настоящее время являются распространенными строительными конструктивными элементами, которые подвержены воздействию не только статических, но и динамически нагрузок. А при эксплуатации конструкций под машиностроительные станки и агрегаты, динамических воздействий, порой, не удастся избежать.

Еще одной проблемой при проектировании, усилении и обследовании является определение фактических условий опирания пластины, а также выявление степени податливости жесткого защемления. В статически неопределимых системах выявление перераспределения усилий, вызванное податливостью «жесткой опоры» является важной задачей.

Точных методов решения задач направленных на определение собственных частот колебаний составных пластин мало и они определяются, в основном, приближенными численными методами. Проведение натуральных статических испытаний влечет за собой достаточно длительную подготовительную работу и может привести к остановке технологического цикла.

Решение подобных задач стало возможным после выявления д.т.н., профессором А.В. Коробко фундаментальной закономерности в строительной ме-

ханике. Новый подход представлен функциональной взаимосвязью между максимальным прогибом нагруженных конструкций и их основной частотой колебаний в ненагруженном состоянии. Данная закономерность относится к изотропным сплошным пластинам. Однако, учитывая, что в этой закономерности взаимосвязь прогибов и частот колебаний не зависит от жесткостных характеристик пластины, можно предположить, что эта закономерность будет справедлива и для составных пластин на податливых связях. Для подтверждения этого предположения требуется проведение комплекса дополнительных теоретических и экспериментальных исследований.

Основной целью данного научного исследования является теоретические и экспериментальные доказательства наличия функциональной связи между максимальным прогибом и коэффициентом жесткости соединительного шва с динамическими параметрами составных пластинок.

Для реализации поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- теоретические и экспериментальные исследования взаимосвязи между максимальным прогибом и основной частотой колебаний составных пластин на податливых связях;
- определение влияния жесткости и количества локально симметрично установленных связей сдвига на максимальный прогиб и основные частоты колебаний составных пластин;
- определение зависимости коэффициента жесткости шва составных пластин на податливых связях от частоты собственных колебаний составной пластины;
- разработка методики оценки податливости заделки пластин по контуру по прогибам и частотам собственных колебаний пластин;
- разработка и изготовление стенда для проведения экспериментальных исследований составных пластин различного очертания;
- проведение серии экспериментальных исследований составных пластин с изменяющимся числом податливых связей (нагелей) и различными условиями закрепления по контуру.

## 2 ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СОСТАВНЫХ ПЛАСТИН

### 2.1 Функциональная связь максимального прогиба упругих изотропных пластинок с их основной частотой колебаний

В строительной механике хорошо известно, что жесткость пластинки конструкций оценивается частотами её собственных колебаний и прогибами от действия статической нагрузки. Эти параметры при решении практических задач определяются независимо друг от друга, что определяет ценность таких исследований с точки зрения оценки жёсткости конструкций по прогибам и частотам собственных колебаний. Функциональная связь максимального прогиба и частоты основного тона собственных поперечных колебаний упругих изотропных пластинок установлена В.И. Коробко [35...38].

Дифференциальные уравнения поперечного изгиба и свободных колебаний сплошных пластинок имеют следующий вид [68]:

$$\begin{cases} D \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) - q(x, y) = 0; \\ D \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + m \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Воспользуемся бигармоническими операторами. Тогда уравнения примут вид:

$$\begin{cases} D \Delta^2 \Delta^2 W - q(x, y) = 0; \\ D \Delta^2 \Delta^2 W + m \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $W = W(x, y)$  – функция прогибов пластинки при поперечном изгибе;  $W = W(x, y, t)$  – функция прогибов свободно колеблющейся пластинки;  $D = EH^3/(12(1-\nu^2))$  – цилиндрическая жесткость пластинки;  $q(x, y)$  – закон изменения поперечной нагрузки;  $m$  – масса единицы площади пластинки;  $E, \nu$  – соответственно, модуль упругости материала и коэффициент Пуассона;  $\Delta^2 \Delta^2$  – бигармонический оператор.

Если колебания являются гармоническими

$$W = W(x, y) \cos(\omega t), \quad (2.3)$$

то второе уравнение из (2.1) можно преобразовать к следующему виду:

$$D\Delta^2\Delta^2W - m\omega^2W = 0 \quad \text{или} \quad D\Delta^2\Delta^2W - \beta^2W = 0, \quad (2.4)$$

где  $\beta^2 = m\omega^2/D$  – собственное значение дифференциального уравнения колебаний пластинок.

Данные уравнения справедливы для сплошных изотропных пластинок. Для перехода к составным пластинкам воспользуемся теорией А.Р. Ржаницина [60].

Рассмотрим распределение нормальных напряжений в составных балках при изгибе (рисунок 2.1) в предположении, что сечения и модули упругости слоёв равны.

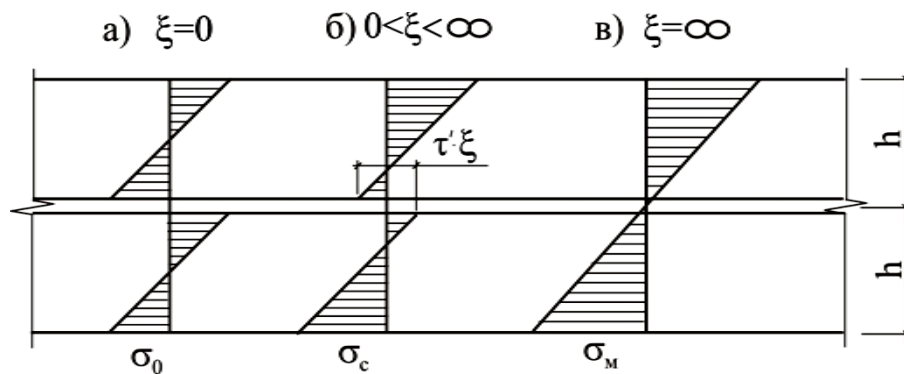


Рисунок 2.1 – Эпюры нормальных напряжений в сечении составной балки

Эпюра продольных (нормальных) напряжений в составном стержне получается ступенчатой, при этом угол наклона к вертикали во всех слоях составной балки одинаков (рисунок 2.1, б). Скачки в эпюре напряжений в каждом шве равны  $\tau_i' \cdot \xi$ , где  $\xi$  – коэффициент жёсткости шва, являющийся одним из основных параметров составных стержней, который оказывает сопротивление при взаимном сдвиге слоёв и зависит от вида и количества связей в шве. При  $\xi = 0$  (рисунок 2.1, а) получаем составную балку, состоящую из отдельных брусьев, и определение нормальных напряжений осуществляется методами сопротивления материалов при изгибной жёсткости балки, равной:

$$EI = \sum EI_i. \quad (2.5)$$

При  $\xi = \infty$  (рисунок 2.1,в) получаем монолитную балку с высотой сечения  $2h$  и определение нормальных напряжений осуществляется также методами сопротивления материалов при изгибной жёсткости:

$$EI = E \frac{b(2h)^3}{12}. \quad (2.6)$$

Для определения касательных напряжений  $\tau_{xy}$  в  $i$ -том стержне (слое) составной балки рассмотрим равновесие призмы длиной  $dx$  и высотой  $h+z_i$ , вырезанной из  $i$ -го стержня (рисунок 2.2).

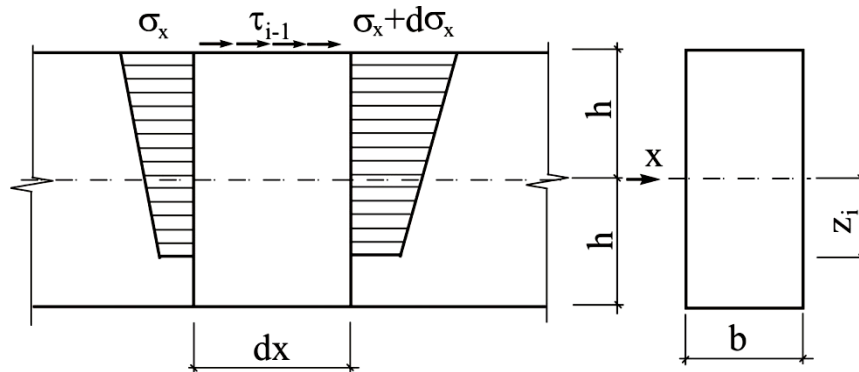


Рисунок 2.2 – Распределение напряжений в сечении слоя

Проектируя все усилия на ось  $X$  получим:

$$b \cdot \tau_{xy} = -\frac{d}{dx} \int_{-h/2}^{z_i} b \cdot \sigma_x(z) dz + \tau_{i-1}, \quad (2.7)$$

где

$$\sigma_i = \frac{M_i \cdot z_i}{I_i}. \quad (2.8)$$

Здесь  $z_i$  – расстояние от центра тяжести сечения  $i$ -го стержня до рассматриваемого волокна для составной балки.

С учётом (2.8) получим:

$$\tau_{xy} = \frac{1}{b} \left[ -\frac{M_i \cdot S(z_i)}{I_i} + \tau_{i-1} \right], \quad (2.9)$$

где  $S(z_i)$  – статический момент отсечённой части выше уровня  $z_i$ .

Дифференцируя (2.9) и зная коэффициент жёсткости шва  $\xi$ , можно определить нормальные напряжения в крайних волокнах слоя составной (на рисунке 2.1 – двухслойной) балки. Введём коэффициент  $\psi$  (обозначения приняты по [60]):

$$\psi = \frac{\sigma_c}{\sigma_M} < 1. \quad (2.10)$$

Очевидно, что этот коэффициент можно ввести для оценки деформативности составной балки, приняв для неё изгибную жёсткость через жёсткость монолитной балки:

$$EI_{\text{сост}} = \psi EI_M. \quad (2.11)$$

По аналогии с составными балками представим цилиндрическую жёсткость составной пластины через цилиндрическую жёсткость сплошной (монолитной) пластинки. Для двухслойной составной пластины с толщиной слоёв  $h$  получим:

$$D_C = \psi \cdot D_M = \psi \cdot \frac{E \cdot (2h)^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}. \quad (2.12)$$

Заменив в исходных уравнениях (2.1) цилиндрическую жёсткость сплошной пластинки на цилиндрическую жёсткость составной, получим:

$$\begin{cases} D_C \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) - q(x, y) = 0; \\ D_C \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + m \frac{\partial^4 W}{\partial t^4} = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Точные решения представленных дифференциальных уравнений справедливо лишь для частных случаев. При решении прикладных задач воспользуемся приближенными методами решения.

Выразим функцию прогибов в виде произведения максимального прогиба  $W_0$  на единичную функцию  $f(x, y)$ . Затем подставим это выражение в дифференциальные уравнения поперечного изгиба и свободных колебаний пластинок:

$$W(x, y) = W_0 f(x, y), \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} D_C W_0 \Delta^2 \Delta^2 f - q(x, y) = 0; \\ D_C \Delta^2 \Delta^2 f + \omega^2 m f = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Если пластинка воспринимает равномерно распределенную нагрузку  $q$ , то проинтегрировав уравнения (2.14) и (2.15) по всей площади пластины, после необходимых преобразований получим:

$$W_0 = \frac{q}{D_c} \frac{A}{\iint_A \Delta^2 \Delta^2 f dA}, \quad \omega^2 = \frac{D_c}{m} \frac{\iint_A \Delta^2 \Delta^2 f dA}{\iint_A f dA}. \quad (2.16)$$

Функцию прогибов  $W(x, y)$  приближенно можно записать в однопараметрическом виде в полярной системе координат:

$$W(x, y) = W_0 f(x, y) = W_0 g \left[ \frac{t}{r(\varphi)} \right] = W_0 g(\rho), \quad (2.17)$$

где  $r = r(\varphi)$  – уравнение контура пластинки в полярной системе координат,  $t$  и  $\varphi$  – полярные координаты,  $\rho = t/r(\varphi)$  – безразмерная полярная координата. Эта функция описывает поверхность, линии уровня которой подобны контуру пластины и подобно расположены. Запись выражения функции прогибов обосновано тем, что через неё можно записать точное решение задачи поперечного изгиба жестко заземленной эллиптической пластинки, воспринимающей равномерно распределенную нагрузку  $q$  [24]. Дальнейшие результаты носят приближенный характер, ввиду того, что лишь в единственном случае удастся представить действительную функцию максимальных прогибов в виде выражения (2.17).

Преобразуем интегралы из (2.16) с учетом (2.17). Тогда:

$$\iint_A f dA = \int_0^{2\pi} \int_0^r g(\rho) t dt d\varphi.$$

Умножив и разделив правую часть этого равенства на  $r^2$  и выполнив необходимые преобразования получим:

$$\iint_A f dA = 2A \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho. \quad (2.18)$$

Выполнив преобразования интеграла от бигармонического оператора по [72], окончательно запишем:

$$I \approx \frac{K_f^2 \Phi_{g1} + K_f \Phi_{g2}}{2} = \frac{K_f (K_f \Phi_{g1} + \Phi_{g2})}{A}. \quad (2.19)$$

где

$$\Phi_{g1} = \frac{1}{2} \int_0^1 (g^{IV} \rho - 12g''' - 21g'' \rho^{-1} - 3g' \rho^{-2}) d\rho,$$

$$\Phi_{g2} = \frac{1\pi}{2} \int_0^1 (2g^{IV} \rho - 14g''' + 22g'' \rho^{-1} + 3g' \rho^{-2}) d\rho.$$

Знак приближения в (2.19) появился при преобразовании интегралов с помощью неравенства Буняковского [6].

Подставим в выражения (2.15) интегралы (2.18) и (2.19). После необходимых преобразований получим:

$$\begin{cases} W_0 \approx \frac{qA^2}{D_c} \frac{1}{K_f^2 \Phi_{g1} + K_f \Phi_{g2}}; \\ \omega^2 \approx \frac{D_c}{2A^2 m} \frac{K_f^2 \Phi_{g1} + K_f \Phi_{g2}}{\int_0^1 g \rho d\rho}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Ввиду того, что значения интегралов выражения (2.20) являются числами, зависящими от точности выбора функции  $g(\rho)$ , то представим их в качестве коэффициентов пропорциональности  $K_w$ ,  $K_\omega$  и  $B$ :

$$W_0 = K_w \frac{q}{D_c} \frac{A^2}{K_f^2 + BK_f}, \quad \omega^2 = K_\omega \frac{D_c}{m} \frac{K_f^2 + BK_f}{A^2}, \quad (2.21)$$

$$\text{где } K_w = \frac{1}{\Phi_{g1}}; \quad K_\omega = \frac{1}{\int_0^1 g \rho d\rho}; \quad B = \frac{\Phi_{g2}}{\Phi_{g1}}.$$

Ввиду приближенности задания функции  $g(\rho)$ , а также (2.20) в выражениях (2.21) будет корректнее поставить знаки неравенств.

Умножим выражения (2.21) друг на друга:

$$W_0 \omega^2 = K_w K_\omega \frac{q}{m} = K \frac{q}{m}. \quad (2.22)$$

Коэффициенты  $K_w$  и  $K_\omega$  зависят от формы пластинки. На основе выражения (2.13) сформулируем закономерность: для упругих изотропных пластинок одинаковых форм и однородными граничными условиями: произведение максимального прогиба от действия равномерно распределенной нагрузки  $q$  на квадрат их основной частоты колебаний в ненагруженном состоянии  $\omega^2$  с точностью до размерного множителя  $q/m$  есть величина постоянная. Существенной



особенностью закономерности (2.22) является отсутствие в выражении размеров конструкции и жесткости.

Рассмотрим частные случаи определения прогиба и частот колебания изотропных пластин. Основная частота свободных колебаний пластины определяется по формуле:

$$\omega = \beta^2 \frac{1}{A} \sqrt{\frac{D}{m}},$$

где  $\beta^2$  – собственное значение дифференциального уравнения колебаний пластин (зависит от граничных условий),  $m$  – масса на единицу площади пластинки. Максимальный прогиб пластины определяется из выражения:

$$W_0 = \alpha \frac{qA^2}{D},$$

где  $\alpha$  – собственное значение дифференциального уравнения изгиба пластины. Тогда произведение максимального прогиба на квадрат основной частоты колебаний:

$$W_0 \omega^2 = \alpha \beta^4 \frac{q}{m}.$$

В таблице 2.1 представлены максимальные прогибы и частоты собственных колебаний для пластин круглого и квадратного очертания в плане.

Таблица 2.1 – Сопоставление произведения  $W_0 \cdot \omega^2$  для пластинок круглого и квадратного очертания

Форма пластинки	Максимальный прогиб $W_0 = \alpha \frac{qA^2}{D_c}$	Основная частота колебаний $\omega = \beta^2 \frac{1}{A} \sqrt{D_c/m}$	Произведение $W_0 \omega^2 = \alpha \beta^4 \frac{q}{m}$
1	2	3	4
Жесткое защемление пластинки по контуру			
Круг	1,583	32,08	1,629
Квадрат	1,262	35,72	1,610
Шарнирное опирание пластинки по контуру			
Круг (для $\nu = 0,3$ )	6,454	15,64	1,579
Квадрат	4,060	19,74	1,582

Примечания: 1. Коэффициенты пропорциональности  $\alpha$  и  $\beta^2$  приведены к единой площади. Значения параметра  $\alpha$  увеличены в  $10^3$  раз. 2. Данные колонок 2 и 3 взяты из работы [30].

Стоит отметить, что значение выражение  $W_0 \cdot \omega^2$  для пластин любой формы лежит в интервале [30]:

$$\frac{4}{\pi} \frac{q}{m} \leq W_0 \omega^2 \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{q}{m}. \quad (2.23)$$

Учитывая это, рассмотрим график на рисунке 2.3.

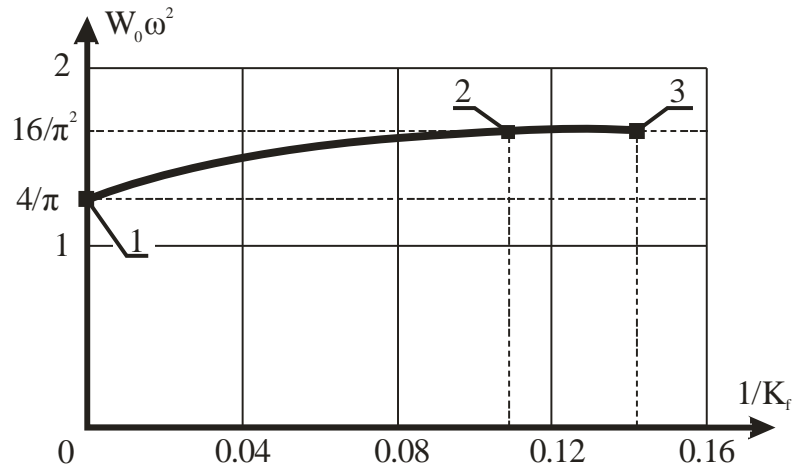


Рисунок 2.3 – Зависимость  $w_0 \omega^2 - 1/K_f$ :

Здесь  $K_f$  – геометрическая характеристика формы области (коэффициент формы пластины), количественно характеризующая ее «правильность» (или симметричность), точка 3 соответствует пластине круглого очертания, 2 – квадратной пластине, 1 – бесконечно вытянутой пластине (балка).

Сформулируем закономерность для всего множества пластинок. Для упругих изотропных пластинок постоянного сечения с произвольными граничными условиями произведение максимального прогиба  $W_0$  от действия равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , на квадрат их основной (или резонансной) круговой частоты колебаний в ненагруженном состоянии  $\omega^2$  ограничено с двух сторон: одна из границ соответствует бесконечно вытянутым пластинкам (балкам) и равна  $\approx 4/\pi$ , а другая – соответствует круглым пластинкам и равна  $\approx (4/\pi)^2$ , с точностью до размерного множителя  $q/m$ .

Для пластинок одинаковой формы независимо от вида граничных условий произведение  $W_0 \omega^2$  есть величина постоянная.

$$W_0 \omega^2 = const. \quad (2.24)$$

Эта закономерность носит фундаментальный характер, она позволяет по частоте колебаний пластинки найти ее максимальный прогиб и, наоборот, по величине максимального прогиба найти ее основную частоту колебаний. Тем самым, методы определения максимального прогиба пластинок обогащаются методами определения основной частоты колебаний и наоборот. Кроме того, указанная закономерность открывает широкие возможности по развитию и совершенствованию вибрационных методов диагностики и контроля качества строительных конструкций. Применение этой закономерности также возможно в области развития методов геометрического и физико-механического моделирования строительных конструкций. Подтверждением этому являются многочисленные работы, авторские свидетельства и патенты, опубликованные и полученные творческим коллективом, под руководством В.И. Коробко. Однако, закономерность, сформулированная выше, имеет существенное ограничение, она справедлива лишь для изотропных материалов и конструкций (балок и пластинок) с постоянной изгибной жесткостью [35]. Это существенное ограничение, так как этой закономерностью не охватывается достаточно широкий используемый на практике класс составных конструкций. Поэтому исследование под указанным углом зрения функциональной связи максимального прогиба с основной частотой колебаний составных пластин на податливых связях нам представляется весьма важным и перспективным направлением в области строительной механике пластинок.

Сложностью расчета составных пластин обусловлена неопределенностью значений их изгибной жесткости вследствие неопределённости жёсткости поперечных связей и связей сдвига. Это обстоятельство выражено в первую очередь значительной податливостью связей, соединяющих слои этих пластин. Для определения действительной податливости связей и совместности работы слоев для составных пластин используют экспериментальные методы. На сегодняшний день это практически единственно доступный вариант решения поставленной задачи. Однако, закономерность (2.22) позволит упростить ее решение.

## 2.2 Численные исследования составных квадратных пластин

Численные исследования составных двухслойных пластин на податливых связях проводились методом конечных элементов. В ходе теоретических исследований определялся максимальный прогиб и частота собственных колебаний конструкций. Были рассмотрены составные пластины квадратного очертания в плане, сторона которого равна 1 метру. Опоры по контуру плиты располагались в узлах конечных элементов конструкции, при этом граничные условия слоёв были однородными. В работе рассмотрено шарнирное опирание (рисунок 2.4) и жесткое защемление по контуру (рисунок 2.5).

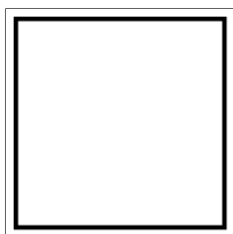


Рисунок 2.4 – Шарнирное опирание пластины по контуру

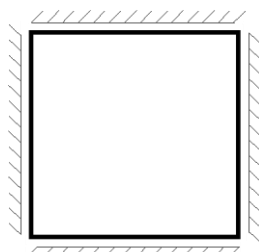


Рисунок 2.5 – Жесткое защемление пластины по контуру

Для конечных элементов слоев вводился модуль упругости, равный 2600 МПа, плотность материала слоёв принята  $\rho = 740 \text{ кг/м}^3$ . Толщина пластин составляет 8 мм. Расстояние между слоями принималось равным расстоянию между срединными поверхностями слоёв. Пластины загружались равномерно распределенная нагрузка  $q = 1 \text{ кН/м}^2$ , которая прикладывалась к верхнему слою составной пластины. Для нахождения частот собственных колебаний в узлы конечных элементов прикладывались сосредоточенные массы от собственного веса слоев в зависимости от грузовой площади узла.

Определение прогибов и частот колебаний проводилось в программном комплексе «СКАД». Все исследования производились в предположении упругой стадии работы материала слоев, поперечных связей и связей сдвига.

Критерием точности во всех исследованиях служил коэффициент  $K$ , который определялся из (2.22):

$$K = \frac{W_0 \omega^2}{q/m}. \quad (2.25)$$

Этот коэффициент для квадратных пластин с жестким защемлением по контуру составляет  $K = 1,610$ , а при шарнирном опирании  $K = 1,582$ .

### 2.2.1 Влияние количества конечных элементов в расчётной схеме при моделировании составной пластины на точность определения частоты собственных колебаний и прогиба составных пластин

В силу изначальной неопределенности количества конечных элементов (КЭ), на которые необходимо разбивать исследуемую пластину для получения необходимой точности результатов, следует определить рациональное число конечных элементов.

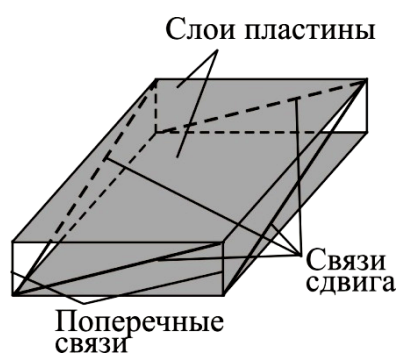


Рисунок 2.6 – Конечный элемент составной пластины

Рассмотрим три варианта количества КЭ, на которые разбивается каждая пластина –  $20 \times 20$  КЭ (всего 400 КЭ),  $40 \times 40$  КЭ (всего 1600 КЭ) и  $80 \times 80$  КЭ (всего 6400 КЭ). При разбиении квадратной пластины со стороной 1 метр размеры КЭ составили  $50 \times 50$  мм,  $25 \times 25$  мм и  $12,5 \times 12,5$  мм соответственно (рисунок 2.6).

Жесткость поперечных связей принималась постоянной  $E A_{\text{пс}} = 8^3$  кН. Жесткость связей сдвига  $E A_{\text{сс}}$  для всех пластин изменялась в пределах от  $10^{-6}$  до  $10^9$  кН.

Результаты расчета и их сопоставление для шарнирно опёртой пластины с различным числом конечных элементов приведены в таблице 2.2. По данным таблицы 2.2 построены графики изменения максимальных прогибов, частот колебаний и коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига  $E A_{\text{сс}}$  и сетке разбиения (рисунки 2.7 и 2.8).

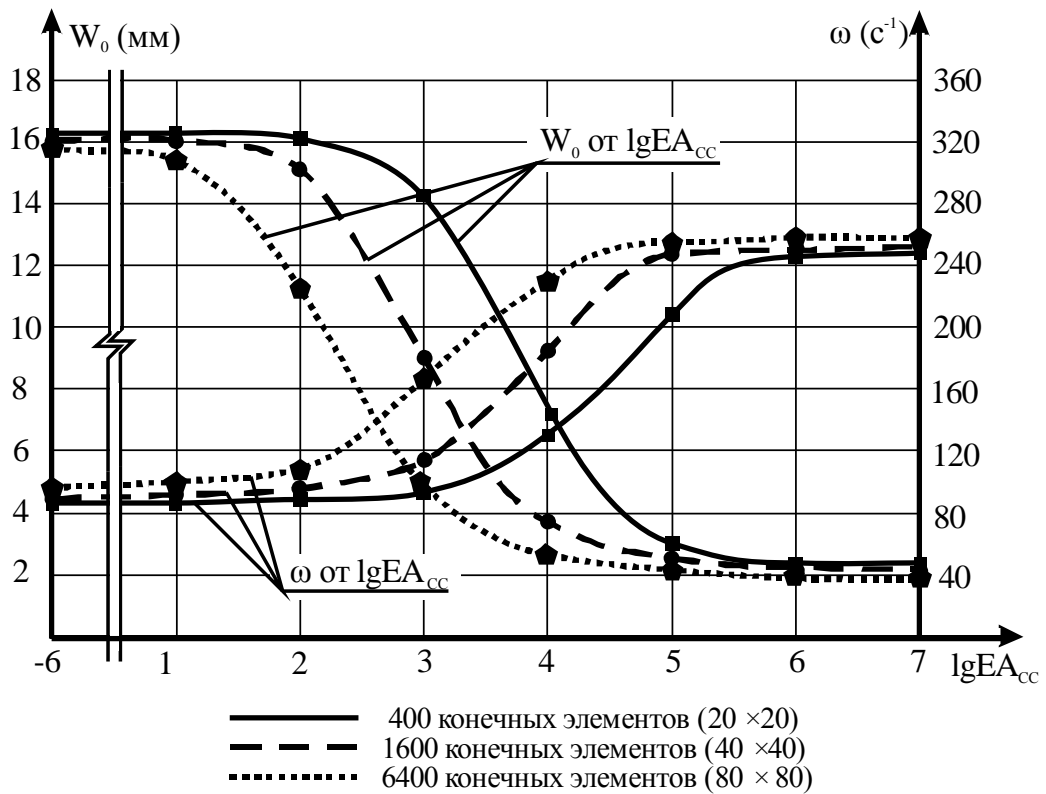


Рисунок 2.7 – Изменение основных частот собственных колебаний и максимальных прогибов в зависимости от жесткости связей сдвига и количества конечных элементов при шарнирном опирании по контуру

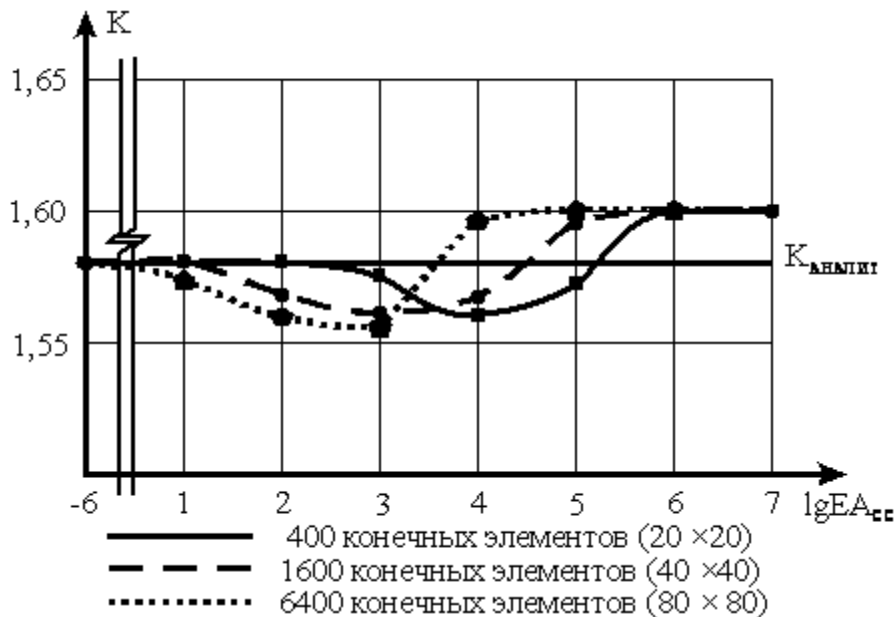


Рисунок 2.8 – Изменение коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига и количества конечных элементов при шарнирном опирании пластины по контуру

Таблица 2.2 – Результаты численных исследований составной квадратной изотропной пластины размером  $a \times b = 1000 \times 1000$  мм, шарнирно опертой по контуру

№ п/п	lgEA <sub>cc</sub>	Круговая частота основного тона, $\omega$ (с <sup>-1</sup> ) при сетке разбиения			Максимальный прогиб, $W_0$ (мм) при сетке разбиения			K= $W_0 \omega^2/(q/m)$ при сетке разбиения:			$K_{\text{аналит}}=W_0 \omega^2 / (q/m)$ на основе аналит. $W_0$ и $\omega$	Отклонение K от $K_{\text{аналит}}$ (%) при сетке разбиения		
		20×20	40×40	80×80	20×20	40×40	80×80	20×20	40×40	80×80		20×20	40×40	80×80
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-6	89,66566	89,59647	89,57919	16,6282	16,65353	16,65987	1,582885	1,582850	1,582842	1,582	0,056	0,054	0,053
2	-5	89,66566	89,59647	89,57919	16,6282	16,65353	16,65987	1,582885	1,582850	1,582842		0,056	0,054	0,053
3	0	89,67251	89,64578	89,85115	16,625600	16,63486	16,557260	1,582879	1,582816	1,582659		0,056	0,052	0,042
4	1	89,7342	90,08585	92,1892	16,602320	16,46965	15,712440	1,582838	1,582520	1,581086		0,053	0,033	-0,058
5	2	90,34669	94,15061	108,8649	16,373710	15,18586	11,191150	1,582426	1,593813	1,570371		0,027	0,747	-0,735
6	3	96,06995	118,6968	163,8908	14,446460	9,382638	4,909575	1,578659	1,565145	1,561366		-0,211	-1,065	-1,304
7	3,3	101,711	133,9673	187,6151	12,859670	7,340593	3,771490	1,575134	1,559841	1,571811		-0,434	-1,401	-0,644
8	3,7	115,4829	160,4815	216,9951	9,928076	5,117327	2,851189	1,567661	1,560432	1,589562		-0,906	-1,363	0,478
9	3,9	126,1609	176,2409	229,0127	8,295525	4,258339	2,570910	1,563310	1,566049	1,596459		-1,181	-1,008	0,914
10	4	132,1401	183,9248	233,8067	7,553140	3,919406	2,470369	1,561523	1,569830	1,598923		-1,294	-0,769	1,070
11	4,3	154,006	206,96	245,1452	5,552847	3,122296	2,253938	1,559347	1,583429	1,603764		-1,432	0,090	1,376
12	4,7	186,9285	231,099	253,6887	3,790800	2,526556	2,107832	1,568316	1,597632	1,606164		-0,865	0,988	1,527
13	4,9	202,9561	239,273	256,2006	3,232847	2,353976	2,067266	1,576671	1,595663	1,606602		-0,337	0,864	1,555
14	5	209,8751	242,9886	257,0963	3,031048	2,293101	2,053040	1,580761	1,603049	1,606722		-0,078	1,331	1,563
15	5,3	227,5594	250,3134	259,0234	2,596200	2,164091	2,022838	1,591767	1,605445	1,606907		0,617	1,482	1,574
16	5,7	242,017	255,4545	260,3248	2,307794	2,0793	2,002739	1,600444	1,606556	1,606968		1,166	1,552	1,578
17	5,9	246,3395	256,8811	260,6812	2,230809	2,056535	1,997273	1,602811	1,600666	1,606973		1,315	1,180	1,579
18	6	247,8639	257,3747	260,8042	2,204549	2,04873	1,995391	1,603607	1,583803	1,606974		1,366	0,114	1,579
19	7	253,7738	259,252	261,27	2,106811	2,019378	1,988278	1,606463	1,604543	1,606970		1,546	1,425	1,578
20	8	254,4075	259,4508	261,319	2,096695	2,016301	1,987530	1,606744	1,607005	1,606969		1,564	1,581	1,578
21	9	254,4714	259,4708	261,324	2,095679	2,015991	1,987455	1,606773	1,607005	1,606969		1,566	1,581	1,578

Таблица 2.3 – Результаты численных исследований составной квадратной изотропной пластины размером  $a \times b = 1000 \times 1000$  мм, жестко зашумленной по контуру

№ п/п	lgEA <sub>cc</sub>	Круговая частота основного тона, $\omega$ (с <sup>-1</sup> ) при сетке разбиения:			Максимальный прогиб $W_0$ (мм) при сетке разбиения:			K= $W_0 \omega^2/(q/m)$ при сетке разбиения:			$K_{аналит} = W_0 \omega^2 / (q/m)$ на основе аналит. $W_0$ и $\omega$	Отклонение K от $K_{аналит}$ (%) при сетке разбиения:		
		20×20	40×40	80×80	20×20	40×40	80×80	20×20	40×40	80×80		20×20	40×40	80×80
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	-6	163,6421	163,3792	163,3157	5,168224	5,1846	5,188503	1,638638	1,638538	1,638512	1,61	1,779	1,773	1,771
2	-5	163,6421	163,7792	163,3157	5,168224	5,1846	5,188503	1,638638	1,646571	1,638512		1,779	2,272	1,771
3	0	163,6466	163,4121	163,4977	5,167923	5,1824	5,176411	1,638633	1,638507	1,638339		1,778	1,771	1,760
4	1	163,6875	163,707	165,1104	5,165219	5,1628	5,071047	1,638594	1,638225	1,636810		1,776	1,753	1,665
5	2	164,0945	166,5769	179,1467	5,138399	4,9782	4,274443	1,638202	1,635511	1,624235		1,752	1,585	0,884
6	3	168,0135	189,2976	241,1858	4,890357	3,8093	2,314408	1,634484	1,616174	1,594025		1,521	0,383	-0,992
7	3,3	172,0728	206,6624	265,969	4,651646	3,1736	1,906988	1,630733	1,604808	1,597209		1,288	-0,322	-0,794
8	3,7	182,728	237,3603	292,9444	4,101556	2,39	1,585590	1,621476	1,594280	1,611065		0,713	-0,976	0,066
9	3,9	191,6204	254,3928	302,9296	3,713715	2,0809	1,489490	1,614521	1,594448	1,618351		0,281	-0,966	0,519
10	4	196,8023	262,2531	306,765	3,512703	1,96	1,455251	1,610844	1,596037	1,621441		0,052	-0,867	0,711
11	4,3	216,7181	284,1191	315,4789	2,876708	1,6796	1,382245	1,599697	1,605328	1,628836		-0,640	-0,290	1,170
12	4,7	248,6947	304,6307	321,6219	2,176008	1,4742	1,334348	1,593475	1,619728	1,634226		-1,026	0,604	1,505
13	4,9	264,9714	311,4409	323,3112	1,920416	1,4153	1,321636	1,596412	1,625398	1,635705		-0,844	0,956	1,597
14	5	272,1675	313,9433	323,8921	1,823195	1,3947	1,317307	1,599033	1,627553	1,636211		-0,681	1,090	1,628
15	5,3	291,1892	319,3983	325,086	1,603297	1,3514	1,308475	1,609593	1,632326	1,637245		-0,025	1,387	1,692
16	5,7	307,7181	323,044	325,8573	1,447025	1,3237	1,303031	1,622310	1,635525	1,638179		0,765	1,585	1,750
17	5,9	312,9154	324,0146	326,0165	1,403200	1,3164	1,301647	1,626766	1,633324	1,638038		1,041	1,449	1,742
18	6	314,786	324,3447	326,0799	1,387966	1,314	1,301183	1,628401	1,625437	1,638091		1,143	0,959	1,745
19	7	322,2877	325,5658	326,3104	1,329471	1,305	1,299499	1,635001	1,636545	1,638285		1,553	1,649	1,757
20	8	323,1239	325,6912	326,3336	1,323189	1,3041	1,299329	1,635730	1,637805	1,638304		1,598	1,727	1,758
21	9	323,2087	325,7037	326,336	1,322555	1,304	1,299312	1,635805	1,637816	1,638306		1,603	1,728	1,758



Результаты расчета жестко защемлённой по контуру пластины приведены в таблице 2.3. По данным таблицы 2.3 построены графики изменения прогибов, частот колебаний и коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига  $EA_{cc}$  (рисунки 2.9 и 2.10).

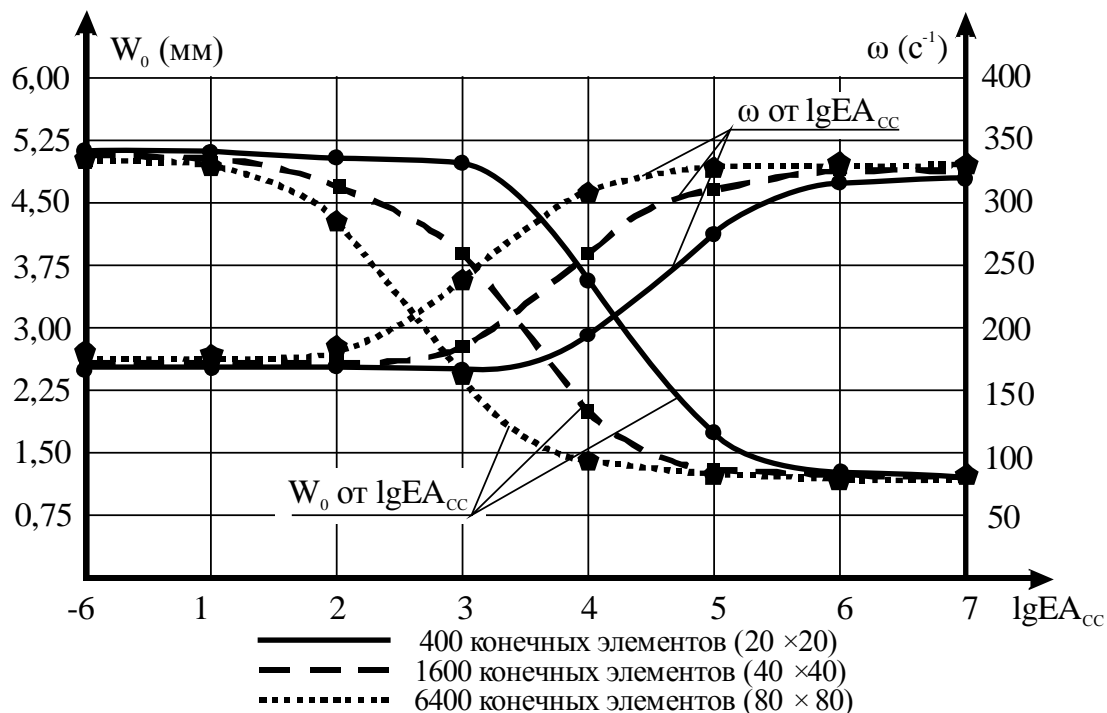


Рисунок 2.9 – Изменение основных частот собственных колебаний и максимальных прогибов в зависимости от жесткости связей сдвига и количества конечных элементов при жестком защемлении по контуру

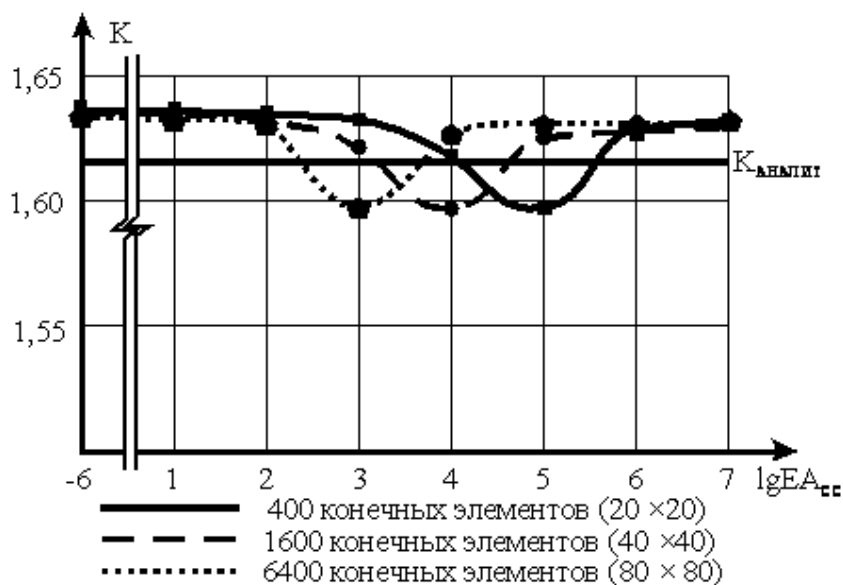


Рисунок 2.10 – Изменение коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига и количества конечных элементов при жестком защемлении пластины по контуру

Анализ данных показывает, что независимо от жесткости связей сдвига (жесткости шва между слоями) составной пластины фундаментальная зависимость (2.22) выполняется, а количество разбиений незначительно влияет на точность расчета. Для дальнейших исследований принята сетка разбивки пластинок  $25 \times 25$  конечных элементов, что определяется удобством расстановки связей сдвига в расчётной схеме конструкции.

### 2.2.2 Определение влияния жесткости связей сдвига на частоты собственных колебаний и прогибы составных пластин

Для оценки влияния жесткости связей сдвига на частоты собственных колебаний и прогибы двухслойной составной изотропной пластины рассмотрена квадратная в плане пластинка размерами  $a \times b = 1000 \times 1000$  мм. Пластина была разбита на 625 конечных элементов (сетка разбивки  $25 \times 25$ ). Конечные элементы пластин связаны как поперечными связями, препятствующие сближению и расхождению слоёв относительно друг друга, так и связями сдвига. Жесткость поперечных связей принималась постоянной  $EA_{\text{пс}} = 8^3$  кН. Жесткость связей сдвига  $EA_{\text{сс}}$  для всех пластин изменялась в пределах от  $10^{-6}$  до  $10^9$  кН.

Аналитические значения прогибов  $W_0$  и частот собственных колебаний  $\omega$  определялись по формулам из [2, 3]:

– для шарнирно опертых пластинок

$$W_0 = 0,00406 \frac{qa^4}{D}, \quad (2.26)$$

$$\omega = \frac{19,739}{a^4} \sqrt{\frac{D}{m}}; \quad (2.27)$$

– для жестко защемленных пластинок

$$W_0 = 0,001262 \frac{qa^4}{D}, \quad (2.28)$$

$$\omega = \frac{35,985}{a^4} \sqrt{\frac{D}{m}}; \quad (2.29)$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость,  $m$  – масса, распределённая по поверхности

пластины (слоя),  $a$  – длина стороны квадратной пластины.

Значения прогибов и частот колебаний определялись в соответствии с физико-механическим характеристикам материала слоёв, представленном в параграфе 2.2. Для составной пластины с жесткостью связей сдвига  $\lg EA_{cc} = -6$  (практически связи сдвига отсутствуют) цилиндрическая жесткость определялась по формуле:

$$D_0 = \sum_{i=1}^n D_i; \quad D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (i = 1, 2). \quad (2.30)$$

Для связей сдвига, обладающих жесткостью  $\lg EA_{cc} = 9$  (практически абсолютно жесткие связи сдвига) по формуле:

$$D_{\text{усл}} = \frac{E}{12(1 - \mu^2)} \sum_{i=1}^{n+1} h_i^3. \quad (2.31)$$

где  $D_0$  – цилиндрическая жесткость составной пластинки, лишенной связей сдвига,  $D_{\text{усл}}$  – цилиндрическая жесткость условно сплошной пластинки,  $\mu$  – коэффициент Пуассона ( $\mu=0,3$ );  $h_i$  – толщина  $i$ -го слоя,  $n$  – количество слоев.

Результаты расчета шарнирно опертой и жестко защемленной по контуру пластины приведены в таблицах 2.4 и 2.5 соответственно. По данным таблиц 2.4 и 2.5 построены графики изменения прогибов, частот колебаний и коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига  $EA_{cc}$ . (рисунки 2.11...2.14).

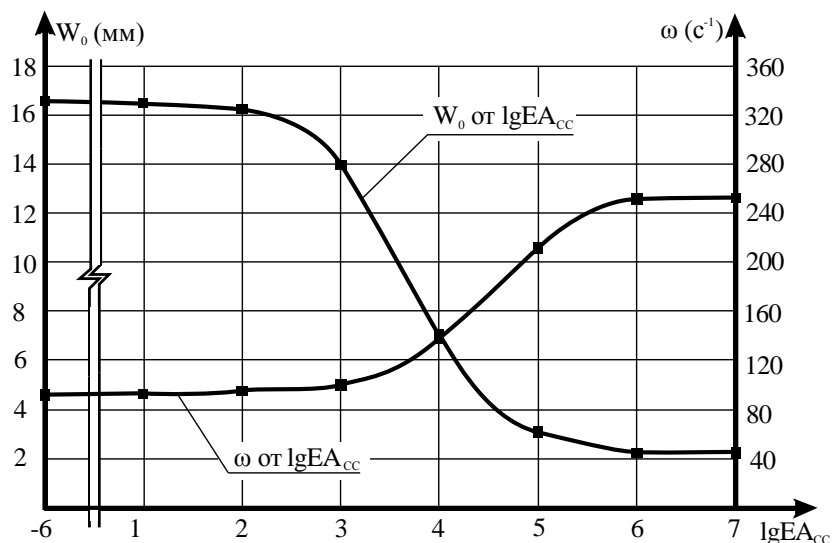


Рисунок 2.11– Изменение основных частот собственных колебаний пластины и максимальных прогибов в зависимости от жесткости связей сдвига при шарнирном опирании по контуру

Таблица 2.4 – Результаты численных исследований составной квадратной изотропной пластины, шарнирно опертой по контуру

№ п/п	$IgEA_{cc}$	Круговая частота основного тона, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб, $W_0$ (мм)	Круговая частота основного тона, вычисленная аналитически $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб, вычис- ленный аналити- чески, $W_0$ (мм)	$K=W_0 \omega^2/(q/m)$	$K_{аналит} =$ $=W_0 \omega^2/(q/m)$ на основе ана- литических $W_0$ и $\omega$	Отклонение $K$ от $K_{аналит}$ (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-6	89,633	16,580	88,718	16,652	1,577	1,582	-0,307
2	-5	89,633	16,580			1,577		-0,307
3	0	89,641	16,577			1,577		-0,307
4	1	89,720	16,547			1,577		-0,312
5	2	90,498	16,258			1,577		-0,347
6	3	97,526	13,959			1,572		-0,633
7	3,3	104,098	12,220			1,568		-0,894
8	3,7	119,159	9,278			1,560		-1,405
9	3,9	130,248	7,745			1,556		-1,665
10	4	136,324	7,063			1,554		-1,762
11	4,3	158,108	5,249			1,554		-1,796
12	4,7	190,376	3,648			1,565		-1,048
13	4,9	206,003	3,134			1,575		-0,461
14	5	212,743	2,946			1,579		-0,210
15	6	249,956	2,160			1,598		1,001
16	7	255,928	2,063			1,600		1,130
17	8	256,580	2,052			1,599		1,104
18	9	256,646	2,051	250,931	2,082	1,600		1,107

Таблица 2.5 – Результаты численных исследований составной квадратной изотропной пластины жестко защемленной по контуру

№ п/п	$lgEA_{cc}$	Круговая частота основного тона, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб, $W_0$ (мм)	Круговая частота основного тона, вычисленная аналитическим методом, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб вычисленный аналитическим методом, $W_0$ max (мм)	$K=W_0 \omega^2/(q/m)$	$K=W_0 \omega^2/(q/m)$ на основе аналитических $W_0$ и $\omega$	Отклонение $K$ от $K_{аналит}$ %
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-6	161,715	5,147	161,736	5,176	1,594	1,61	-1,012
2	-5	161,715	5,147			1,594		-1,012
3	0	161,720	5,147			1,594		-1,006
4	1	161,773	5,144			1,594		-0,999
5	2	162,288	5,110			1,593		-1,026
6	3	167,215	4,799			1,589		-1,320
7	3,3	172,262	4,510			1,585		-1,580
8	3,7	185,241	3,874			1,574		-2,240
9	3,9	195,785	3,451			1,566		-2,719
10	4	201,811	3,241			1,563		-2,928
11	4,3	224,160	2,610			1,553		-3,554
12	4,7	257,318	1,980			1,552		-3,588
13	4,9	272,874	1,767			1,558		-3,242
14	5	279,460	1,688			1,561		-3,052
15	6	314,671	1,354			1,587		-1,404
16	7	320,149	1,315			1,596		-0,881
17	8	320,743	1,307			1,592		-1,118
18	9	320,804	1,307	323,471	1,294	1,593		-1,081

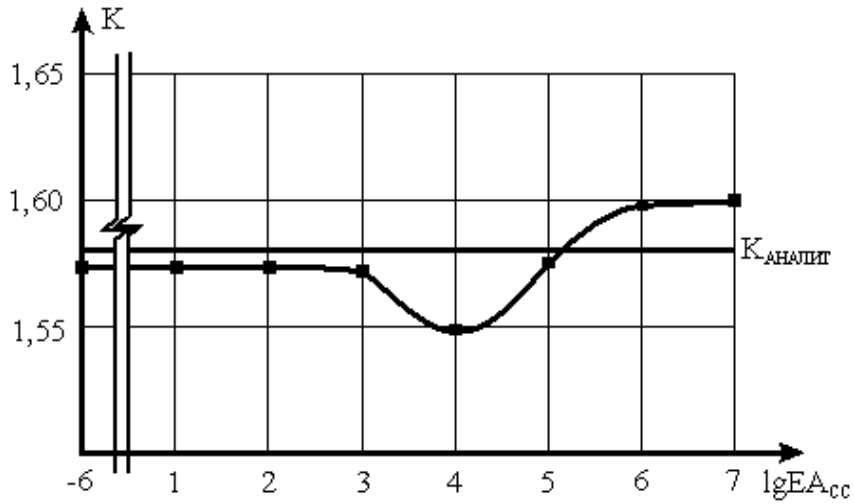


Рисунок 2.12 – Изменение коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига при шарнирном опирании по контуру

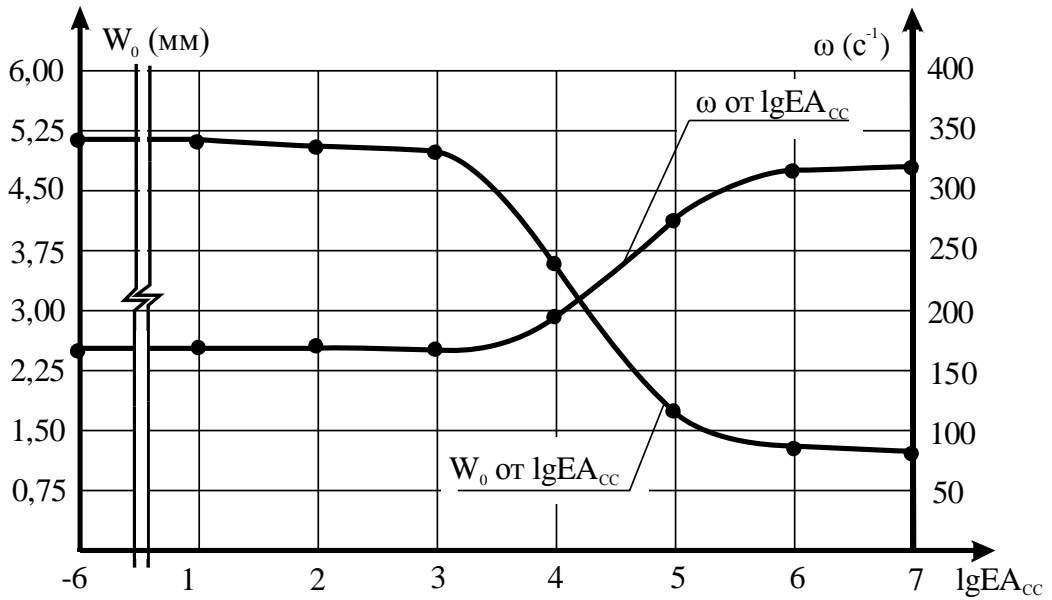


Рисунок 2.13 – Изменение основных частот собственных колебаний пластины и максимальных прогибов в зависимости от жесткости связей сдвига при жестком защемлении пластины по контуру

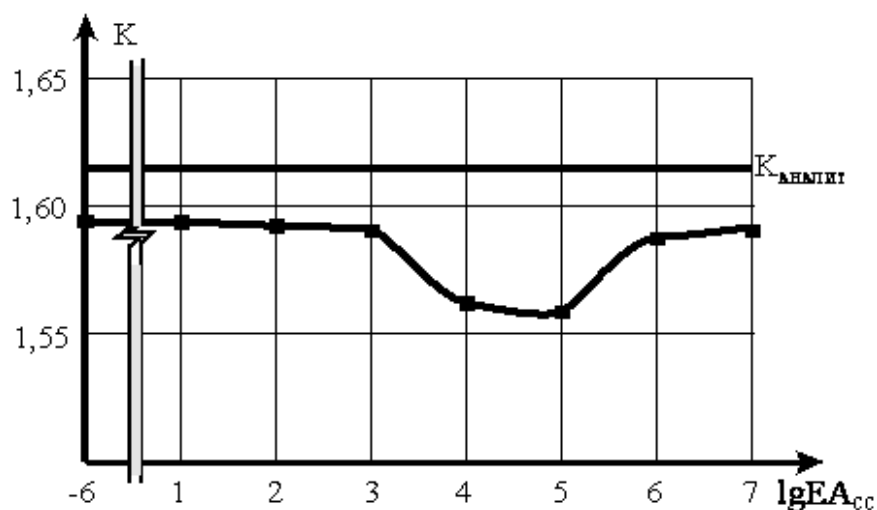


Рисунок 2.14 – Изменение коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига квадратной пластины при жестком защемлении пластины по контуру

Анализ полученных результатов показывает, что независимо от жесткости связей сдвига в составных пластинах фундаментальная зависимость (2.22) выполняется с точностью от -1,796 до +1,130% для составных пластин, шарнирно опёртых по контуру, и с точностью от -0,881% до -3,588 для составных пластин, жёстко защемлённых по контуру.

### 2.2.3 Влияние количества симметрично и регулярно расположенных связей сдвига на частоты собственных колебаний и прогибы составных пластин

Для оценки влияния количества симметрично расположенных связей сдвига были приняты составные пластинки, аналогичные рассмотренным в параграфе 2.2.2. Связи сдвига были расставлены в конечных элементах в соответствии с рисунком 2.15.

В результате исследований определялся максимальный прогиб  $W_0$  и частота основного тона поперечных колебаний  $\omega$ . Результаты исследований приведены в таблице 2.6.

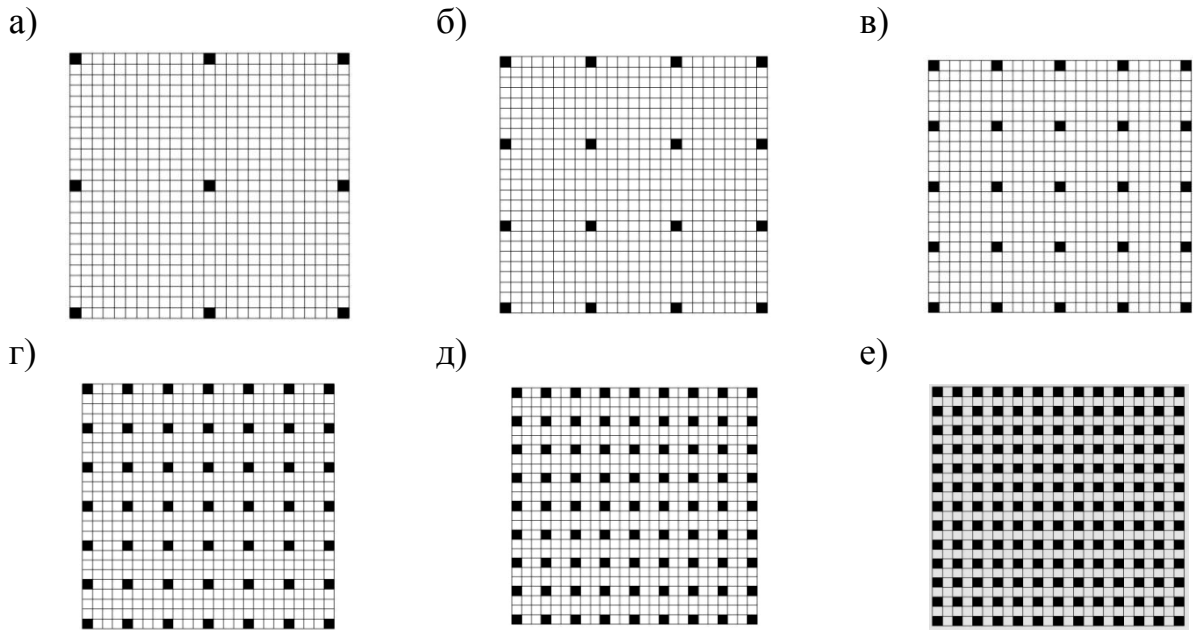


Рисунок 2.15 – Схемы расстановки связей сдвига в составных пластинах:

(а – 9 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ} = 9/625 = 0,015$ ); б – 16 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ} = 0,025$ ); в – 25 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ} = 0,04$ ); г – 49 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ} = 0,078$ ); д – 81 конечный элемент с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ} = 0,130$ ); е – 169 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ} = 0,270$ ))

Таблица 2.6 – Результаты численных исследований составной квадратной пластины, шарнирно опертой по контуру

№ п/п	Кол-во КЭ со связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}$ )	Круговая частота основного тона $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб $W_0$ (мм)	$K = W_0 \omega^2 / (q/m)$	$K_{аналит.}$ на основе аналит. $W_0$ и $\omega$	Отклонение $K_{факт}$ от $K_{аналит}$ (%)
1	0 (0,00)	89,632	16,58006	1,577133	1,582	-3,28673
2	9 (0,015)	91,728	15,8529	1,579324		-3,06758
3	16 (0,025)	93,539	15,21489	1,576206		-3,37938
4	25 (0,04)	95,74952	14,52379	1,57654		-3,34604
5	49 (0,078)	101,1232	12,99665	1,573565		-3,64348
6	81 (0,13)	107,3554	11,50517	1,569974		-4,00257
7	169 (0,27)	120,8683	9,03314	1,562483		-4,75171
8	625 (1,00)	157,8278	5,268047	1,553704		-5,62958

Для шарнирно опертой составной пластинки были построены графики изменения прогибов, частот колебаний и коэффициента  $K$  в зависимости от количества связей сдвига  $E A_{cc}$  (рисунки 2.16 и 2.17).



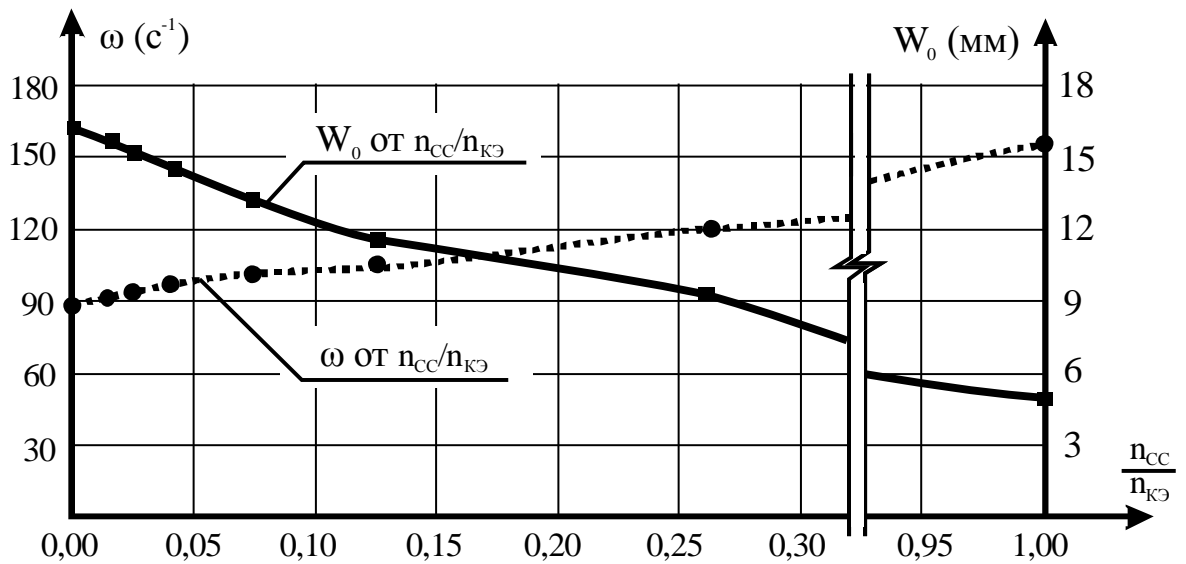


Рисунок 2.16 – Изменение частот собственных колебаний и максимальных прогибов в зависимости от количества связей сдвига  $n_{cc}$  при шарнирном опирании пластины по контуру

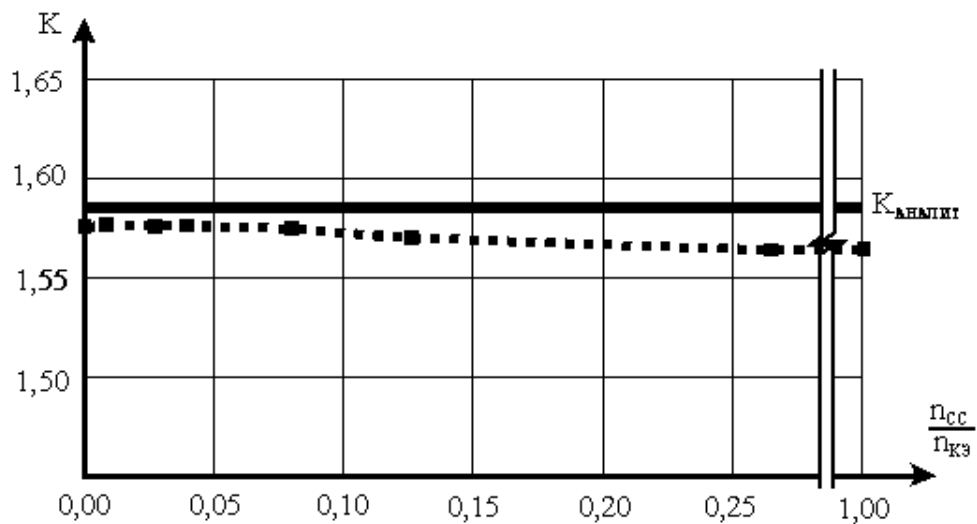


Рисунок 2.17– Изменение коэффициента  $K$  в зависимости от количества связей сдвига при шарнирном опирании пластины по контуру

Результаты исследований пластинок, жестко защемлённых по контуру, приведены в таблице 2.7.

Таблица 2.7 – Результаты численных исследований составной квадратной пластины, жестко защемленной по контуру

№ п/п	Кол-во КЭ со связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}$ )	Круговая частота основного тона, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб, $W_0$ (мм)	$K=W_0 \omega^2 / (q/m)$	Каналит, на основании аналит. $W_0$ и $\omega$	Отклонение $K_{факт}$ от $K_{аналит}$
1	0 (0,00)	163,5149	5,147352	1,629485	1,61	1,948451
2	9 (0,015)	163,583	5,143177	1,629519		1,951931
3	16 (0,025)	164,8321	5,056446	1,6266		1,659959
4	25 (0,04)	166,2708	4,972253	1,62756		1,755957
5	49 (0,078)	170,063	4,741702	1,623699		1,36994
6	81 (0,13)	174,9667	4,467269	1,619215		0,921534
7	169 (0,27)	187,1158	3,881802	1,609185		-0,08149
8	625 (1,00)	226,6585	2,61002	1,587594		-2,24056

Построены графики изменения максимальных прогибов, частот колебаний и коэффициента  $K$  в зависимости от количества связей сдвига  $EA_{cc}$  (рисунки 2.18 и 2.19).

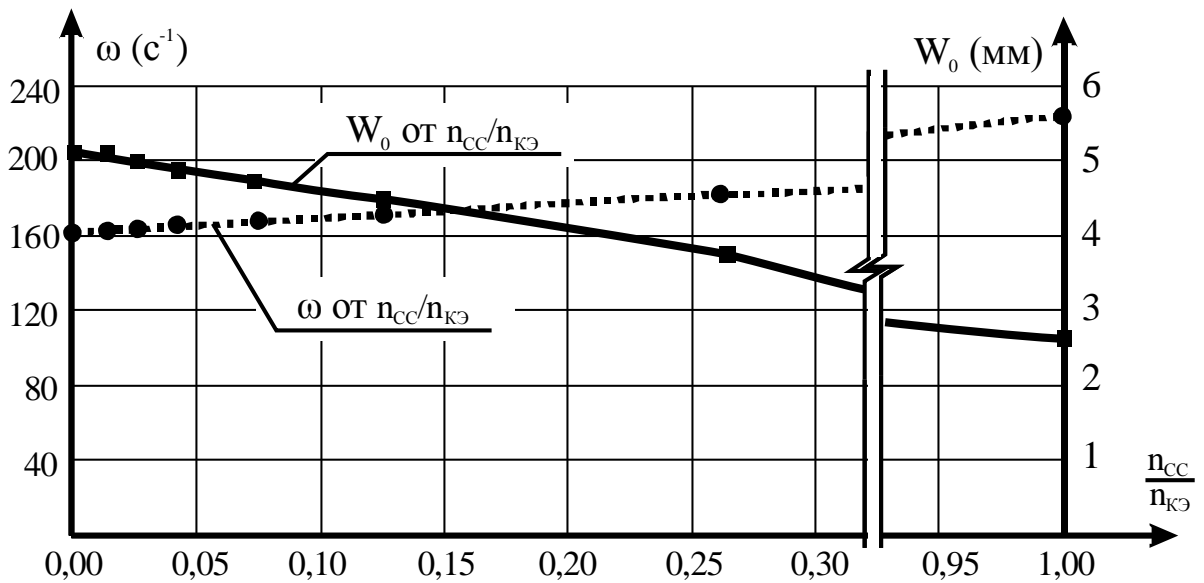


Рисунок 2.18– Изменение частот собственных колебаний и прогибов в зависимости от количества связей сдвига при жестком защемлении пластины по контуру

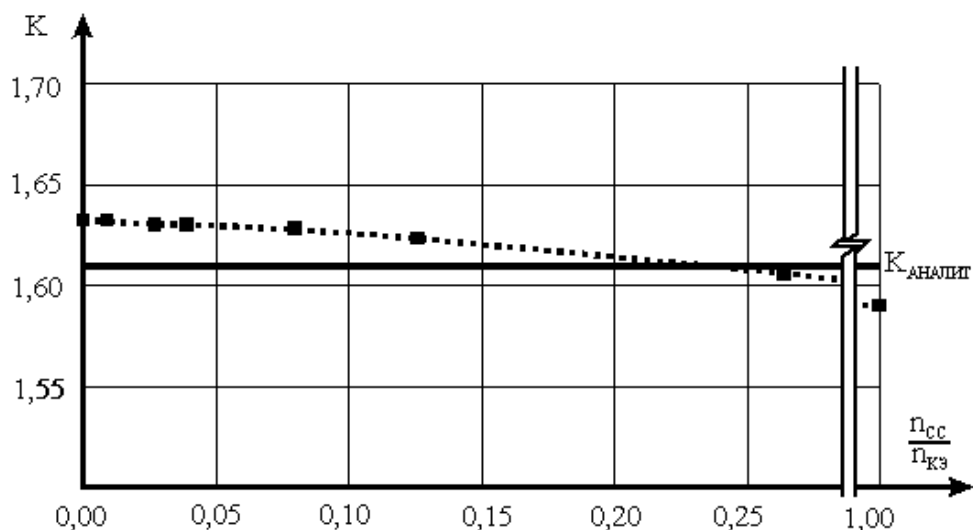


Рисунок 2.19 – Изменение коэффициента  $K$  в зависимости от количества связей сдвига при жестком защемлении пластины по контуру

Анализируя данные можно сделать вывод, что независимо от количества симметрично расположенных связей сдвига в двухслойной составной пластине, фундаментальная зависимость (2.22) выполняется с точностью от -3,06 до -5,63% для составных пластин, шарнирно опёртых по контуру, и с точностью от -2,24 до +1,95% для составных пластин, жёстко защемлённых по контуру.

### 2.3 Теоретические исследования составных круглых пластин

Теоретические исследования двухслойных составных пластин проводились методом конечных элементов. В ходе численного эксперимента определялся максимальный прогиб и частота собственных колебаний. Были рассмотрены круглые в плане пластины с радиусом  $r = 0,5$  метра. При расчете пластин исследовалось две схемы опирания по контуру – шарнирное и жесткое (рисунки 2.20 и 2.21).

Материал и толщина слоёв принимался таким же, как при исследованиях квадратных пластин. Составная пластина загружалась равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q = 1 \text{ кН/м}^2$ , приложенной к верхнему слою пластины. Для нахождения частот собственных колебаний в узлы

конечных элементов прикладывались сосредоточенные массы от собственного веса слоев в соответствии с грузовой площадью узла. Жесткость поперечных связей оставалась неизменной  $E A_{\text{пс}} = 8^3$  кН, а жесткость связей сдвига  $E A_{\text{сс}}$  для всех пластин изменялась в пределах от  $10^{-6}$  до  $10^9$  кН.

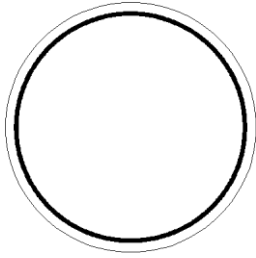


Рисунок 2.20 – Шарнирное опирание пластины по контуру

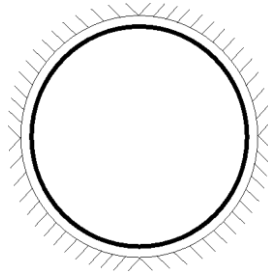


Рисунок 2.21 – Жесткое защемление пластины по контуру

Определение прогибов и частот колебаний проводилось в программном комплексе «СКАД». Все исследования производились в предположении упругой стадии работы материала слоёв, вертикальных связей и связей сдвига.

Критерием точности во всех исследованиях принимался коэффициент  $K$  по формуле (2.25). Для круглых пластин, жестко защемленных по контуру, коэффициент  $K = 1,629$ , а при шарнирном опирании  $K = 1,579$ .

### 2.3.1 Определение влияния количества конечных элементов при моделировании составной пластины на частоты собственных колебаний и прогибы составных пластин

Первоначальной задачей исследования ставилось определение количества конечных элементов (КЭ), на которые необходимо разбивать исследуемую пластину. Рассмотрено два варианта разбиения составной пластины: на 240 и на 960 КЭ. 240 конечных элементов получались при задании в расчётной схеме 24 радиальных и 10 кольцевых линий (рисунок 2.22), 960 конечных элементов – при 48 радиальных и 20 кольцевых линиях (рисунок 2.23).

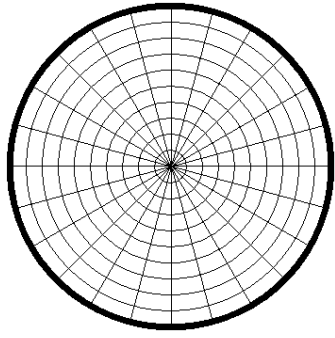


Рисунок 2.22 – Разбивка составной круглой пластины на 240 КЭ

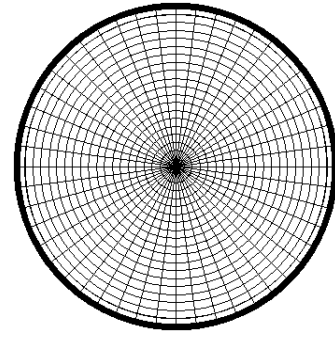


Рисунок 2.23 – Разбивка составной круглой пластины на 960 КЭ

Результаты расчета и сравнения шарнирно опертой пластины с различным числом конечных элементов приведены в таблице 2.8. По данным таблицы 2.8 построены графики изменения прогибов, частот колебаний и коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига  $EA_{cc}$  и сетке разбиения (рисунки 2.24 и 2.25). Результаты расчета жестко защемленной по контуру пластины приведены в таблице 2.9.

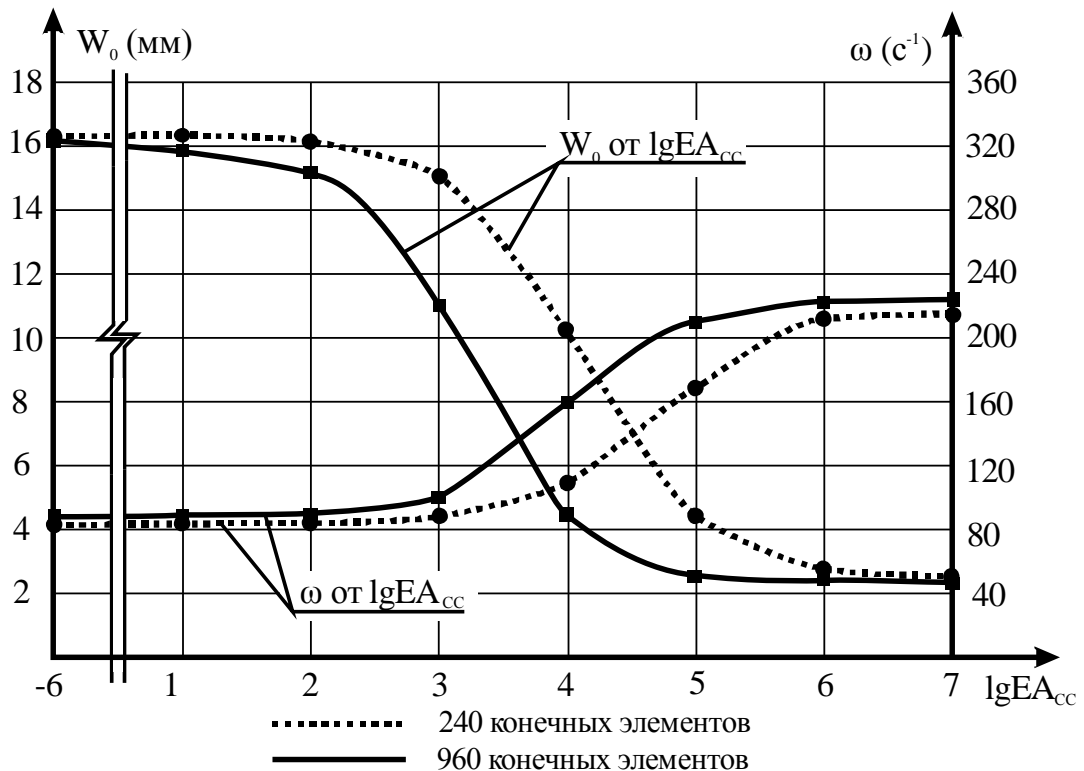


Рисунок 2.24 – Изменение основных частот собственных колебаний и максимальных прогибов в зависимости от жесткости связей сдвига и количества конечных элементов при шарнирном опирании пластины по контуру

Таблица 2.8 – Результаты численных исследований составной круглой изотропной пластины радиусом  $r = 500$  мм, шарнирно опертой по контуру

№ п/п	lgEA <sub>сс</sub>	Круговая частота основного тона $\omega$ (с <sup>-1</sup> ) при сетке разбиения:		Максимальный прогиб, W <sub>0max</sub> (мм) при сетке разбиения:		K=W <sub>0</sub> w <sup>2</sup> /(q/m) при сетке разбиения:		K <sub>аналит</sub>	Отклонение K от K <sub>аналит</sub> (%) при сетке разбиения:	
		240 КЭ	960 КЭ	240 КЭ	960 КЭ	240 КЭ	960 КЭ		240 КЭ	960 КЭ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-6	89,1626	89,43915	16,30018	16,01235	1,564014	1,545942	1,579	-0,949	-2,094
2	-5	89,1626	89,43915	16,30018	16,01235	1,564014	1,545942		-0,949	-2,094
3	0	89,1656	89,46068	16,29905	16,004320	1,564010	1,545910		-0,949	-2,096
4	1	89,1924	89,6539	16,28884	15,932480	1,563970	1,545626		-0,952	-2,114
5	2	89,4594	91,53955	16,18765	15,255610	1,563575	1,542872		-0,977	-2,288
6	3	92,041	106,8494	15,25519	11,045870	1,559777	1,522043		-1,217	-3,607
7	3,3	94,7356	119,0612	14,36368	8,815766	1,555875	1,508284		-1,465	-4,479
8	3,7	101,914	142,0739	12,33182	6,131919	1,545892	1,493852		-2,097	-5,392
9	3,9	108,026	155,8689	10,91899	5,092825	1,537880	1,493346		-2,604	-5,425
10	4	111,647	162,5525	10,19346	4,688677	1,533546	1,495272		-2,879	-5,303
11	4,3	126,002	182,4709	7,929912	3,752909	1,519506	1,508127		-3,768	-4,488
12	4,7	150,899	203,4761	5,49439	3,059154	1,509991	1,528660		-4,370	-3,188
13	4,9	164,765	211,135	4,619077	2,855252	1,513455	1,536199		-4,151	-2,711
14	5	171,229	214,0658	4,286946	2,782424	1,516999	1,538865		-3,927	-2,542
15	5,3	189,536	220,7482	3,533558	2,625421	1,532072	1,544102		-2,972	-2,210
16	5,7	207,286	225,5675	2,988722	2,518728	1,549920	1,546739		-1,842	-2,043
17	5,9	213,346	226,9421	2,831597	2,489089	1,555548	1,547224		-1,485	-2,012
18	6	215,601	227,4248	2,776055	2,478747	1,557446	1,547357		-1,365	-2,004
19	7	225,224	229,3265	2,553716	2,438265	1,563451	1,547648		-0,985	-1,986
20	8	226,388	229,539	2,528144	2,433758	1,563838	1,547651		-0,960	-1,985
21	9	226,508	229,5871	2,525526	2,433300	1,563872	1,548008		-0,958	-1,963

Таблица 2.9 – Результаты численных исследований составной круглой изотропной пластины радиусом  $r = 500$  мм, жестко заземленной по контуру

№ п/п	lgEA <sub>cc</sub>	Круговая частота основного тона $\omega$ (с <sup>-1</sup> ) при сетке разбиения:		Максимальный прогиб, $W_{0max}$ (мм) при сетке разбиения:		K= $W_0w^2/(q/m)$ при сетке разбиения:		K <sub>аналит</sub>	Отклонение K от K <sub>аналит</sub> (%) при сетке разбиения:	
		240 КЭ	960 КЭ	240 КЭ	960 КЭ	240 КЭ	960 КЭ		240 КЭ	960 КЭ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-6	188,3618	185,9263	3,835799	3,887632	1,642571	1,621995	1,629	0,833	-0,430
2	-5	188,3618	185,9263	3,835799	3,887632	1,642571	1,621995		0,833	-0,430
3	0	188,364	185,9427	3,835697	3,886872	1,642566	1,621964		0,833	-0,432
4	1	188,3843	186,09	3,83478	3,880049	1,642527	1,621683		0,830	-0,449
5	2	188,5865	187,5451	3,82564	3,813628	1,642132	1,618946		0,806	-0,617
6	3	190,573	200,4591	3,737522	3,291021	1,638284	1,596118		0,570	-2,019
7	3,3	192,7071	212,1507	3,646119	2,905102	1,634214	1,578095		0,320	-3,125
8	3,7	198,6929	237,3967	3,406589	2,278157	1,623182	1,549586		-0,357	-4,875
9	3,9	204,1355	254,4907	3,208466	1,969091	1,613679	1,539190		-0,941	-5,513
10	4	207,5047	263,2965	3,09433	1,836586	1,608071	1,536682		-1,285	-5,667
11	4,3	221,9215	291,6141	2,669443	1,501342	1,586727	1,540917		-2,595	-5,407
12	4,7	250,816	324,999	2,053017	1,228405	1,558783	1,565988		-4,310	-3,868
13	4,9	268,9973	338,0599	1,777184	1,145536	1,552069	1,580079		-4,723	-3,003
14	5	277,9872	343,1604	1,663781	1,115918	1,551774	1,586022		-4,741	-2,638
15	5,3	305,295	354,9019	1,388471	1,052686	1,561920	1,600288		-4,118	-1,763
16	5,7	334,4859	363,2684	1,175629	1,011210	1,587481	1,610569		-2,549	-1,131
17	5,9	345,0372	365,5728	1,11303	1,000215	1,599269	1,613332		-1,825	-0,962
18	6	349,025	366,3646	1,090915	0,996473	1,603935	1,614267		-1,539	-0,904
19	7	366,1851	369,3341	1,003611	0,982570	1,624237	1,617652		-0,292	-0,697
20	8	368,2395	369,6436	0,993835	0,981127	1,626514	1,617984		-0,153	-0,676
21	9	368,45	369,6748	0,992838	0,980982	1,626740	1,618018		-0,139	-0,674

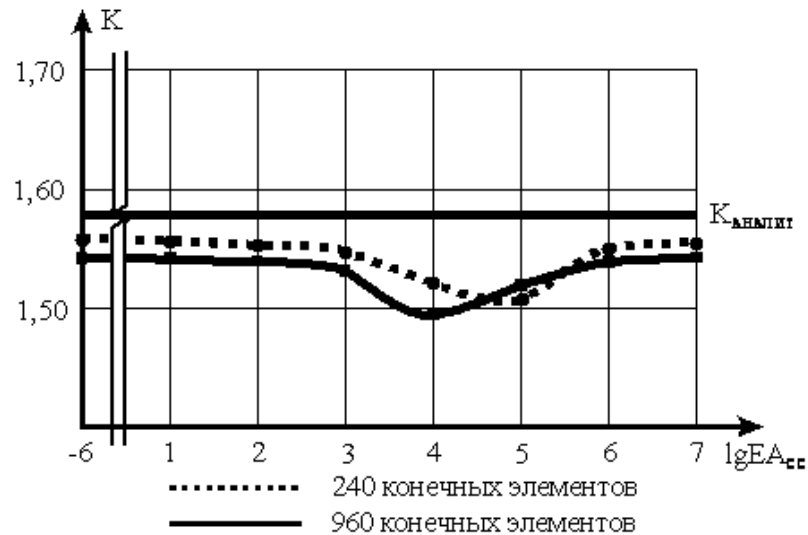


Рисунок 2.25 – Изменение коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига и количества конечных элементов при шарнирном опирании пластины по контуру

По данным таблицы 2.9 построены графики изменения прогибов, частот колебаний и коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига  $EA_{cc}$  (рисунки 2.26 и 2.27).

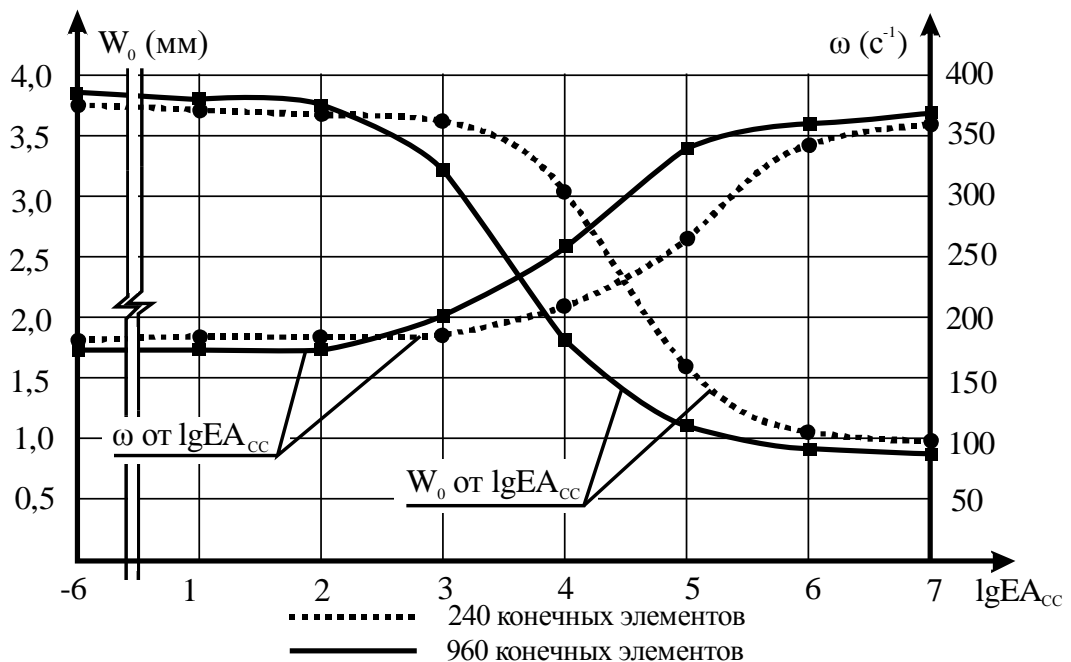


Рисунок 2.26 – Изменение основных частот собственных колебаний и максимальных прогибов в зависимости от жесткости связей сдвига и количества конечных элементов при жестком закреплении пластины по контуру



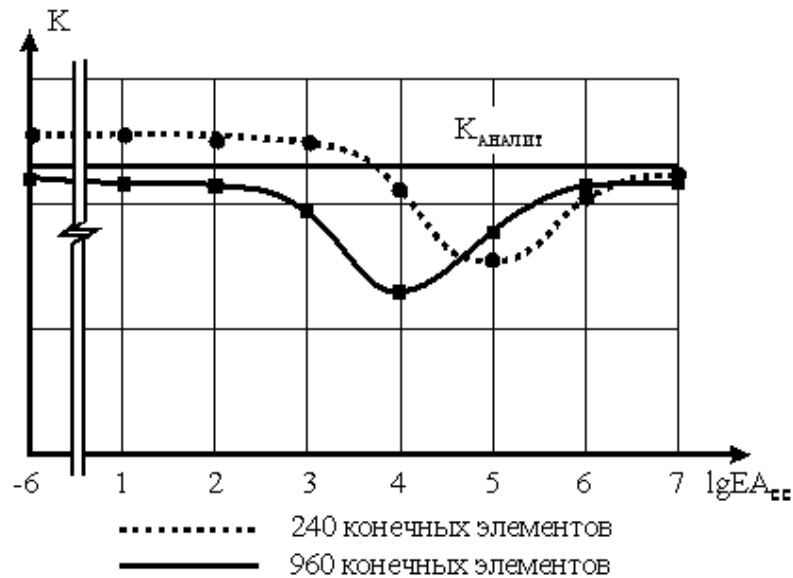


Рисунок 2.27 – Изменение коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига и количества конечных элементов при жестком защемлении пластины по контуру

В результате численных исследований круглой составной пластины на податливых связях было доказано, что независимо от количества конечных элементов в расчётной схеме и жесткости шва фундаментальная зависимость (2.22) выполняется, а количество разбиений незначительно влияет на точность расчета.

### 2.3.2 Определение влияния жесткости связей сдвига на частоты собственных колебаний и прогибы составных пластин

В качестве исследуемой конструкции была принята 48-угольная пластина радиусом  $r = 500$  мм, аналогичная представленной в параграфе 2.3.1 (рисунок 2.23).

Аналитические значения прогибов  $W_0$  и частот собственных колебаний  $\omega$  определялись по данным параграфа 2,3:

– для шарнирно опертых пластинок

$$W_0 = 0.0637 \frac{qR^4}{D}, \quad (2.32)$$

$$\omega^2 = 2.231^4 \frac{D}{mR^4}; \quad (2.33)$$

– для жестко защемленных пластинок

$$W_0 = 0.01563 \frac{qR^4}{D}, \quad (2.34)$$

$$\omega^2 = 3.196^4 \frac{D}{mR^4}, \quad (2.35)$$

где  $D$  – цилиндрическая жесткость,  $m$  – погонная масса,  $R$  – радиус пластины. Все значения определялись по характеристикам аналогичным представленном в параграфе 2.3. Для составной пластины с жесткостью связей сдвига  $IgEA_{cc} = -6$ , т.е. практически их полное отсутствие, цилиндрическая жесткость определялась по формуле (2.36)

$$D_0 = \sum_{i=1}^n D_i; D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (i = 1, 2). \quad (2.36)$$

А для связей сдвига, обладающих жесткостью  $IgEA_{cc} = 9$ , то есть практически с абсолютно жесткими связями, по формуле (2.37):

$$D_{\text{усл}} = \frac{E}{12(1 - \mu^2)} \sum_{i=1}^{n+1} h_i^3. \quad (2.37)$$

где  $D_0$  – цилиндрическая жесткость составной пластинки, лишенной связей сдвига,  $D_{\text{усл}}$  – цилиндрическая жесткость некоторой условно сплошной пластинки,  $\mu$  – коэффициент Пуассона ( $\mu = 0,3$ );  $h_i$  – толщина  $i$ -го слоя,  $n$  – количество слоев.

Результаты расчета шарнирно опертой по контуру пластины приведены в таблице 2.10.

По данным таблицы 2.10 построены графики изменения прогибов, частот колебаний и коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига  $EA_{cc}$ . (рисунки 2.28 и 2.29).

Таблица 2.10 – Результаты численных исследований составной изотропной круглой пластины, шарнирно опёртой по контуру

№ № п/п	$IgEA_{cc}$	Круговая частота основного тона, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб, $W_0$ (мм)	Круговая частота основного тона, вычисленная аналитическим методом, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб вычисленный аналитическим методом, $W_0$ max (мм)	$K=W_0\omega^2/(q/m)$	$K=W_0w^2/(q/m)$ на основе аналитических $W_0$ и $\omega$	Отклонение $K$ от $K_{аналит}$ %
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-6	89,43915	16,012350	89,4836	16,32935	1,545942	1,579	-2,094
2	-5	89,43915	16,012350			1,545942		-2,094
3	0	89,46068	16,004320			1,545910		-2,096
4	1	89,65390	15,932480			1,545626		-2,114
5	2	91,53955	15,255610			1,542872		-2,288
6	3	106,84940	11,045870			1,522043		-3,607
7	3,3	119,06120	8,815766			1,508284		-4,479
8	3,7	142,07390	6,131919			1,493852		-5,392
9	3,9	155,86890	5,092825			1,493346		-5,425
10	4	162,55250	4,688677			1,495272		-5,303
11	4,3	182,47090	3,752909			1,508127		-4,488
12	4,7	203,47610	3,059154			1,528660		-3,188
13	4,9	211,13500	2,855252			1,536199		-2,711
14	5	214,06580	2,782424			1,538865		-2,542
15	6	227,42480	2,478748			1,547358		-2,004
16	7	229,32650	2,438265			1,547648		-1,986
17	8	229,53900	2,433758			1,547651		-1,985
18	9	229,58710	2,433300	253,0978	2,041168	1,548008		-1,963

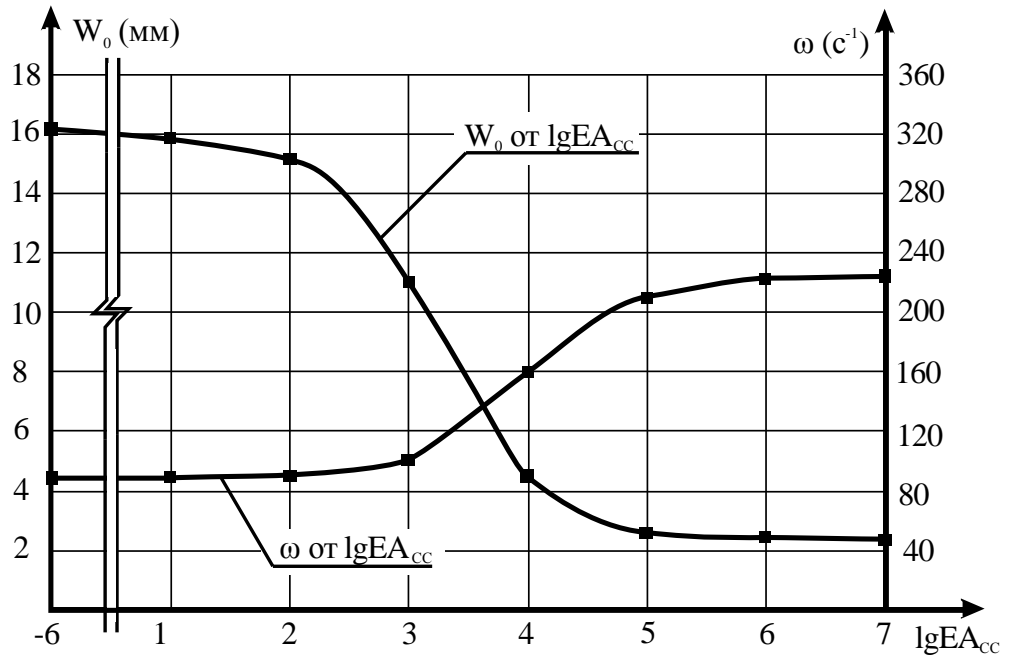


Рисунок 2.28 – Изменение основных частот собственных колебаний и максимальных прогибов в зависимости от жесткости связей сдвига при шарнирном опирании пластины по контуру

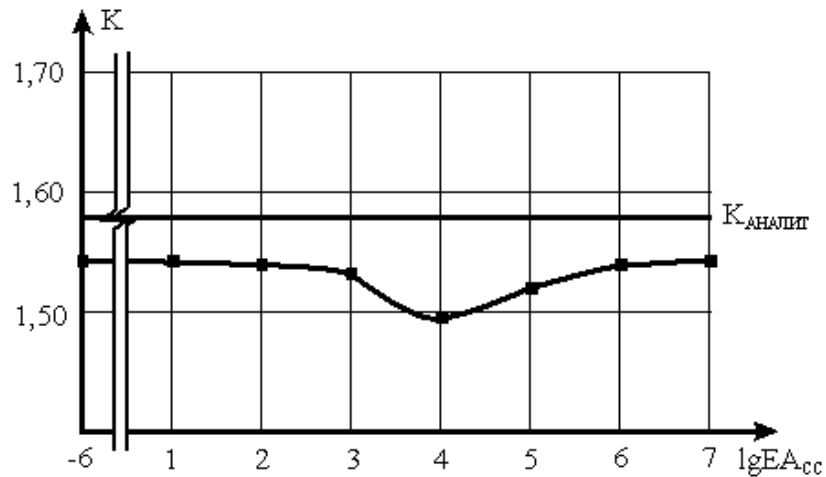


Рисунок 2.29 – Изменение коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига при шарнирном опирании пластины по контуру

Результаты расчета жестко заземленной по контуру пластины приведены в таблице 2.11.

По данным таблицы 2.11 построены графики изменения прогибов, частот колебаний и коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига  $EA_{cc}$ . (рисунки 2.30 и 2.31).

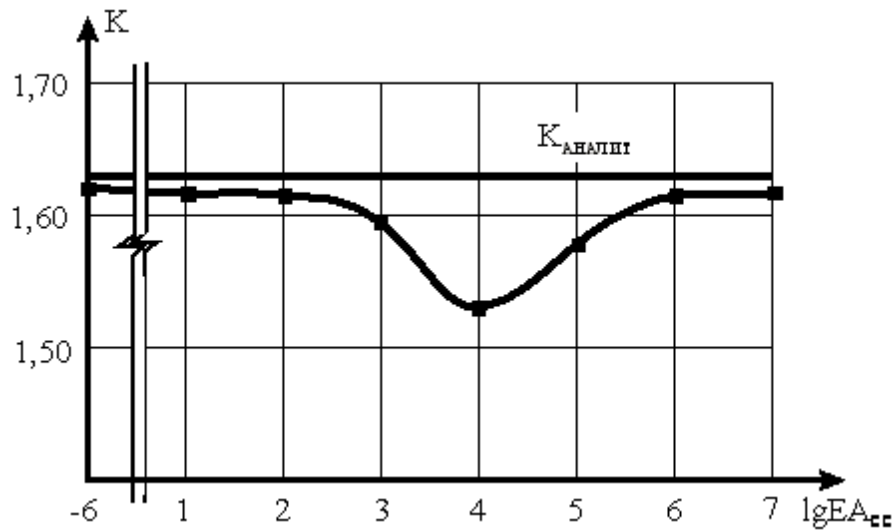


Рисунок 2.30 – Изменение коэффициента  $K$  в зависимости от жесткости связей сдвига при жестком защемлении пластины по контуру

Таблица 2.11 – Результаты численных исследований составной круглой изотропной пластины, жестко защемленной по контуру

№ п/п	$lgEA_{сдв}$	Круговая частота основного тона $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный Прогиб $W_0$ (мм)	Круговая частота основного тона, вычисленная аналитическим методом, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб вычисленный аналитическим методом $W_0 \text{ max}$ (мм)	$K=W_0\omega^2/(q/m)$	$K=W_0\omega^2/(q/m)$ на основе аналитических $W_0$ и $\omega$	Отклонение $K$ от $K_{\text{аналит}}$ (%)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-6	185,9263	3,887632	183,636	4,006714	1,621995	1,629	-0,430
2	-5	185,9263	3,887632			1,621995		-0,430
3	0	185,9427	3,886872			1,621964		-0,432
4	1	186,09	3,880049			1,621683		-0,449
5	2	187,5451	3,813628			1,618946		-0,617
6	3	200,4591	3,291021			1,596118		-2,019
7	3,3	212,1507	2,905102			1,578095		-3,125
8	3,7	237,3967	2,278157			1,549586		-4,875
9	3,9	254,4907	1,969091			1,539190		-5,513
10	4	263,2965	1,836586			1,536682		-5,667
11	4,3	291,6141	1,501342			1,540917		-5,407
12	4,7	324,999	1,228405			1,565988		-3,868
13	4,9	338,0599	1,145536			1,580079		-3,003
14	5	343,1604	1,115918			1,586022		-2,638
15	6	366,3646	0,996473			1,614267		-0,904
16	7	369,3341	0,982570			1,617652		-0,697
17	8	369,6436	0,981127			1,617984		-0,676
18	9	369,6748	0,980982	367,272	1,001678	1,618018		-0,674

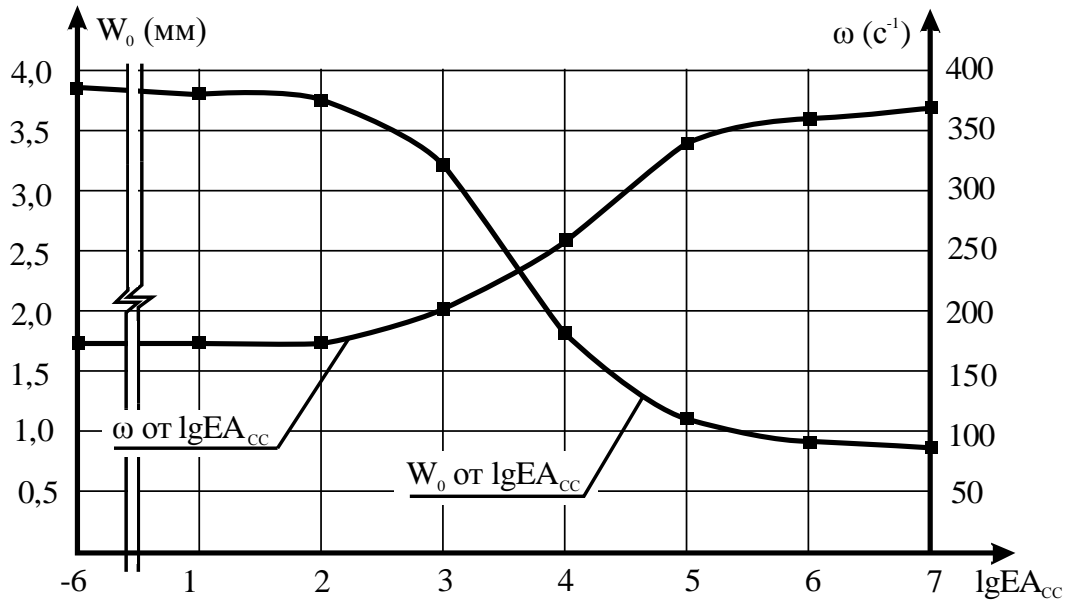


Рисунок 2.31 – Изменение частот собственных колебаний в зависимости от жесткости связей сдвига при жестком защемлении пластины по контуру

Анализ полученных результатов показывает, что независимо от жесткости связей сдвига в составных пластинах фундаментальная зависимость (2.22) выполняется с точностью от -5,425 до -1,963% для составных пластин, шарнирно опёртых по контуру, и с точностью от -5,667 до -0,430% для составных пластин, жёстко защемлённых по контуру.

### 2.3.3 Определение влияния количества симметрично и регулярно расположенных связей сдвига на частоты собственных колебаний и прогибы составных пластин

Для оценки влияния количества симметрично расположенных связей сдвига были приняты расчетные схемы согласно рисунку 2.32.

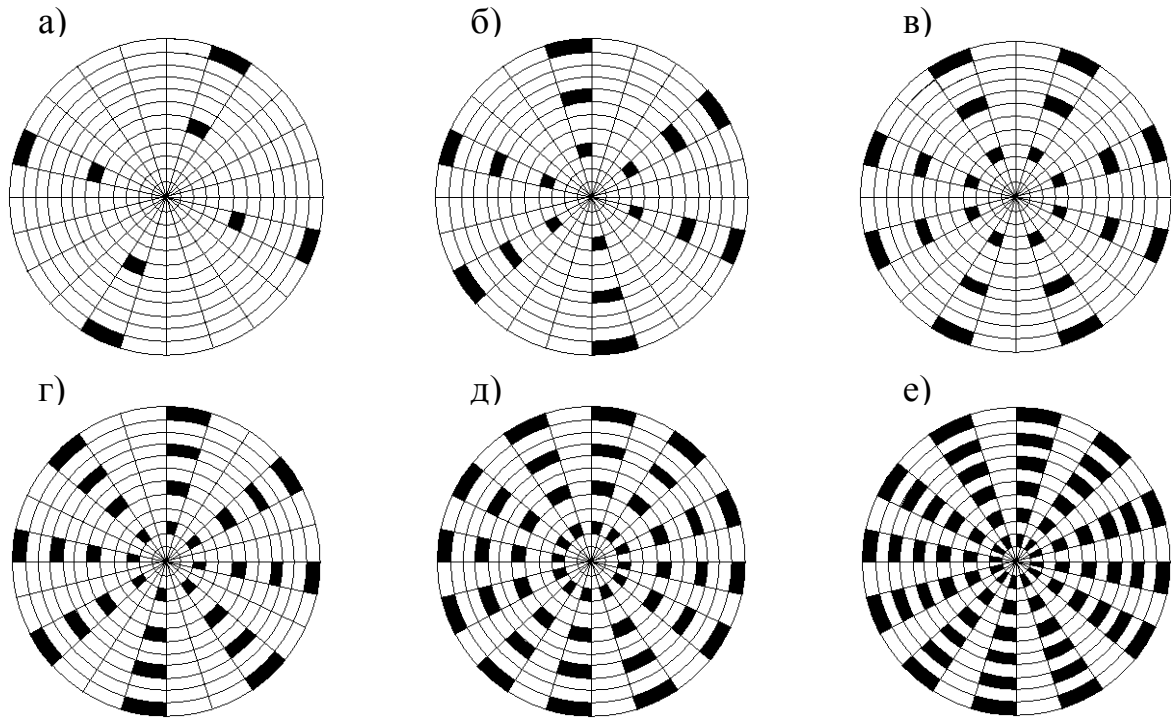


Рисунок 2.32 – Схема расстановки связей сдвига в круглых пластинках (а – 8 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,028$ ); б – 18 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,063$ ); в – 24 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,083$ ); г – 32 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,111$ ); д – 48 конечный элемент с связями сдвига  $n_{cc}/n_{кэ}=0,167$ ); е – 72 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,250$ ))

Жесткость связей сдвига принята равной  $E A_{cc} = 10$  кН на участке наиболее интенсивного изменения прогибов и частот колебаний. В качестве расчётной принята 24-угольная пластина, состоящая из 12 радиальных и 12 кольцевых линий, которая аппроксимировала круг радиусом  $r = 500$  мм. Радиальные и кольцевые линии разбивали расчетную схему на 288 конечных элементов. Количество конечных элементов было принято исходя из удобства симметричной расстановки связей сдвига, которые были расставлены в соответствии с рисунком 2.32. Результаты расчета шарнирно опертой по контуру пластины приведены в таблице 2.12.

Таблица 2.12 – Результаты численных исследований составной круглой изотропной пластины шарнирно опертой по контуру

№ п/п	Количество КЭ с связями ( $n_{cc}/n_{кэ}$ )	Круговая частота основного тона $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб $W_0$ (мм)	$K=W_0 \omega^2 / (q/m)$	$K_{аналит.}$ на основании анализ. $W_0$ и $\omega$	Отклонение $K$ от $K_{аналит.}$ (%)
1	0(0,000)	89,066	16,275	1,558	1,579	-2,075
2	8(0,028)	92,080	15,206	1,556		-2,285
3	18 (0,063)	94,976	14,256	1,552		-2,685
4	24(0,083)	96,809	13,705	1,550		-2,868
5	32(0,111)	98,579	13,191	1,547		-3,178
6	48 (0,167)	102,712	12,115	1,542		-3,636
7	72 (0,250)	107,199	11,071	1,535		-4,343
8	288 (1,000)	118,209	9,015	1,520		-5,856

По данным таблицы 2.12 построены графики изменения прогибов и частот колебаний (рисунок 2.33) и коэффициента  $K$  в зависимости от количества связей (рисунок 2.34).

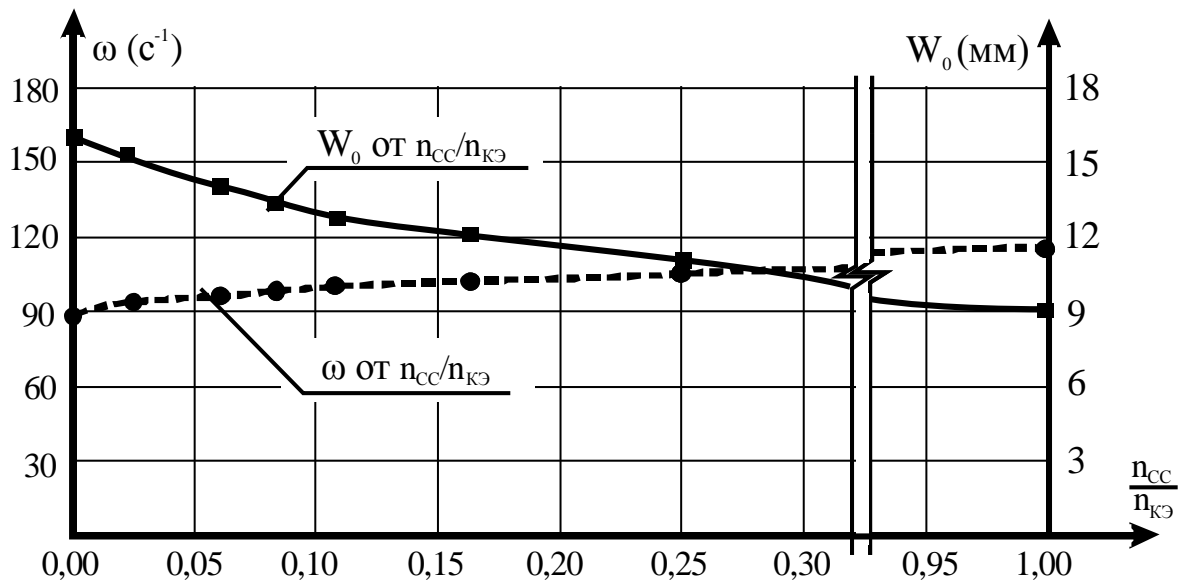


Рисунок 2.33 – Изменение основных частот собственных колебаний и максимальных прогибов в зависимости от количества связей сдвига при шарнирном опирании пластины по контуру



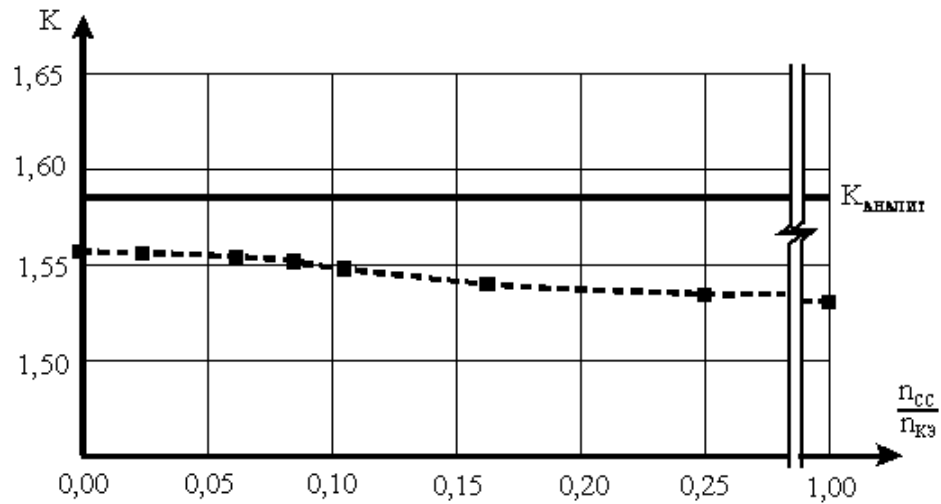


Рисунок 2.34 – Изменение коэффициента  $K$  в зависимости от количества связей сдвига при шарнирном опирании пластины по контуру

Результаты расчета жестко защемленной по контуру пластины приведены в таблице 2.13. По данным таблицы 2.13 построены графики изменения прогибов и частот колебаний и коэффициента  $K$  в зависимости от количества связей сдвига (рисунки 2.35 и 2.36).

Таблица 2.13 – Результаты численных исследований составной круглой изотропной пластины жестко защемленной по контуру

№ п/п	Количество КЭ с связями сдвига ( $n_{сс}/n_{кэ}$ )	Круговая частота основного тона, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб, $W_0$ (мм)	$K=W_0 \omega^2 / (q/m)$	$K_{аналит.}$ на основании аналит. $W_0$ и $\omega$	Отклонение $K$ от $K_{аналит.}$ (%)
1	0 (0,028)	189,168	3,810	1,645	1,629	1,691
2	8 (0,028)	190,817	3,740	1,643		1,466
3	18 (0,063)	192,936	3,647	1,638		0,962
4	24 (0,083)	194,149	3,596	1,636		0,732
5	32 (0,111)	195,779	3,529	1,632		0,389
6	48 (0,167)	198,853	3,409	1,627		-0,185
7	72 (0,250)	203,272	3,247	1,619		-0,968
8	288 (1,000)	214,778	2,875	1,601		-2,794

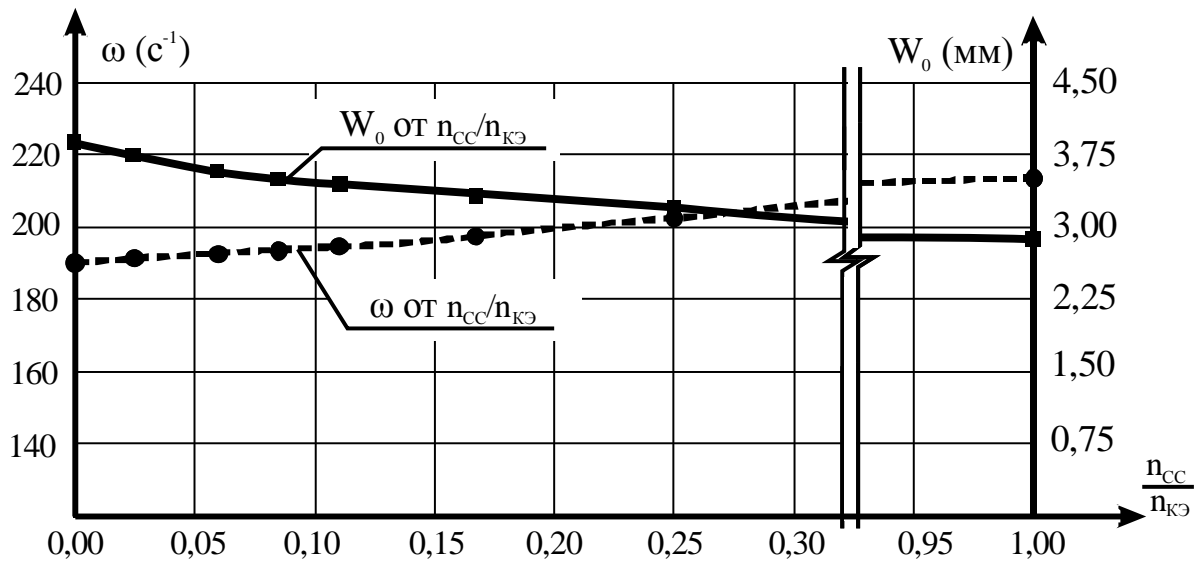


Рисунок 2.35 – Изменение основных частот собственных колебаний и максимальных прогибов в зависимости от количества связей сдвига при жестком защемлении пластины по контуру

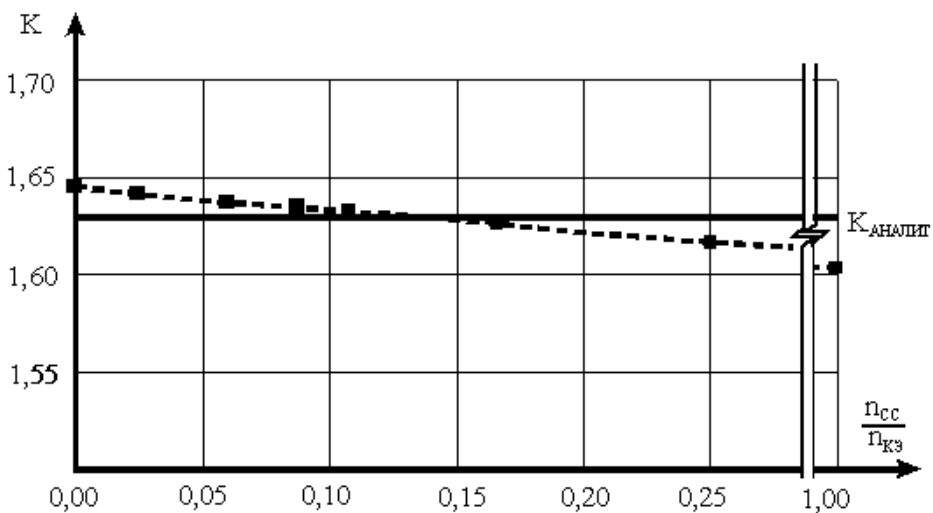


Рисунок 2.36 – Изменение коэффициента K в зависимости от количества связей сдвига при жестком защемлении пластины по контуру

Анализируя данные можно сделать вывод, что независимо от количества симметрично расположенных связей сдвига в двуслойной составной пластине, фундаментальная зависимость (2.22) выполняется с точностью от -5,86 до -2,08% для составных пластин, шарнирно опёртых по контуру, и с точностью от -2,79 до +1,69% для составных пластин, жёстко защемлённых по контуру.

## 2.4 Выводы по главе 2

1. Разработаны расчётные схемы квадратной и круглой составных пластин на упруго-податливых связях.

2. По результатам численных исследований составных квадратной и круглой пластин на податливых связях доказано, что количество конечных элементов, образующихся в результате разбиений слоёв составной пластины на конечные элементы, незначительно влияет на точность расчёта.

3. На основе численных исследований квадратной двухслойной пластины на податливых связях было доказано, что независимо от жесткости связей сдвига и граничных условий составная пластина подчиняется фундаментальной зависимости (2.22). Анализ полученных данных при шарнирном опирании пластины по контуру показывает, что коэффициент  $K$  соответствует аналитическому значению с точностью от  $-1,80$  до  $+1,13\%$ , а при жестком защемлении по контуру с точностью от  $-3,59$  до  $-0,88\%$ .

4. По результатам численных исследований составной квадратной пластины на податливых связях доказано, что независимо от количества симметрично расположенных связей сдвига коэффициент  $K$  соответствует аналитическому значению с точностью от  $-3,06$  до  $-5,63\%$  при шарнирном опирании пластины по контуру, и с точностью от  $-2,24$  до  $+1,95\%$  при жестком защемлении по контуру.

5. На основе численных исследований квадратной двухслойной пластины на податливых связях было доказано, что независимо от жесткости связей сдвига пластина подчиняется фундаментальной зависимости (2.22). Анализ полученных данных при шарнирном опирании пластины по контуру показывает, что коэффициент  $K$  соответствует аналитическому значению с точностью от  $-5,425$  до  $-1,963\%$ , а при жестком защемлении составной пластины по контуру с точностью от  $-5,667$  до  $-0,430\%$ .

6. По результатам численных исследований составной квадратной пластины на податливых связях доказано, что независимо от количества симметрично расположенных связей сдвига, коэффициент  $K$  соответствует аналитическому значению с точностью от  $-5,86$  до  $-2,08\%$  при шарнирном опирании пластины по контуру, и с точностью от  $-2,79$  до  $+1,69\%$  при жестком защемлении по контуру.

### **3 ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ ШВА СОСТАВНЫХ ПЛАСТИН С ЧАСТОТОЙ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ**

#### **3.1 Функциональная взаимосвязь коэффициента жёсткости шва составной пластины с основной частотой её собственных колебаний**

При усилении строительных конструкций в виде плит часто прибегают к методу наращивания или подращивания дополнительной плиты к существующей. При этом с расчётной точки зрения получается составная пластина, слои которой соединены механическими связями. В большинстве случаев такие связи обладают определённой податливостью, что необходимо учитывать в расчётах. В настоящее время расчёт составных пластин в основном выполняется по теории, разработанной А.Р. Ржаницыным [60]. В разрешающие уравнения этой теории входит параметр, учитывающий жесткость связей сдвига между слоями, который определяется, как правило, экспериментально путём испытаний непосредственно соединений или моделей составных конструкций на статические нагрузки. Следует отметить, что проведение статических испытаний весьма трудоемко, а иногда, в случае испытания эксплуатируемых конструкций, не всегда выполнимо.

Для определения жесткости связей сдвига предлагается способ, основанный на определении коэффициента жесткости шва  $\xi$  по основной частоте колебаний составных пластин при динамических испытаниях.

Рассмотрим составную пластину, состоящую из некоторого количества слоёв, соединенных между собой не только связями сдвига, но и поперечными связями, которые препятствуют удалению или сближению слоёв. Данный подход основан на теории составных пластин А.Р. Ржаницына [60]. Для каждого слоя будет справедлива гипотеза прямых нормалей. Число швов (промежутков между пластинами) принимаем  $n$ , а общее число слоев равно  $n+1$  (рисунок 3.1).

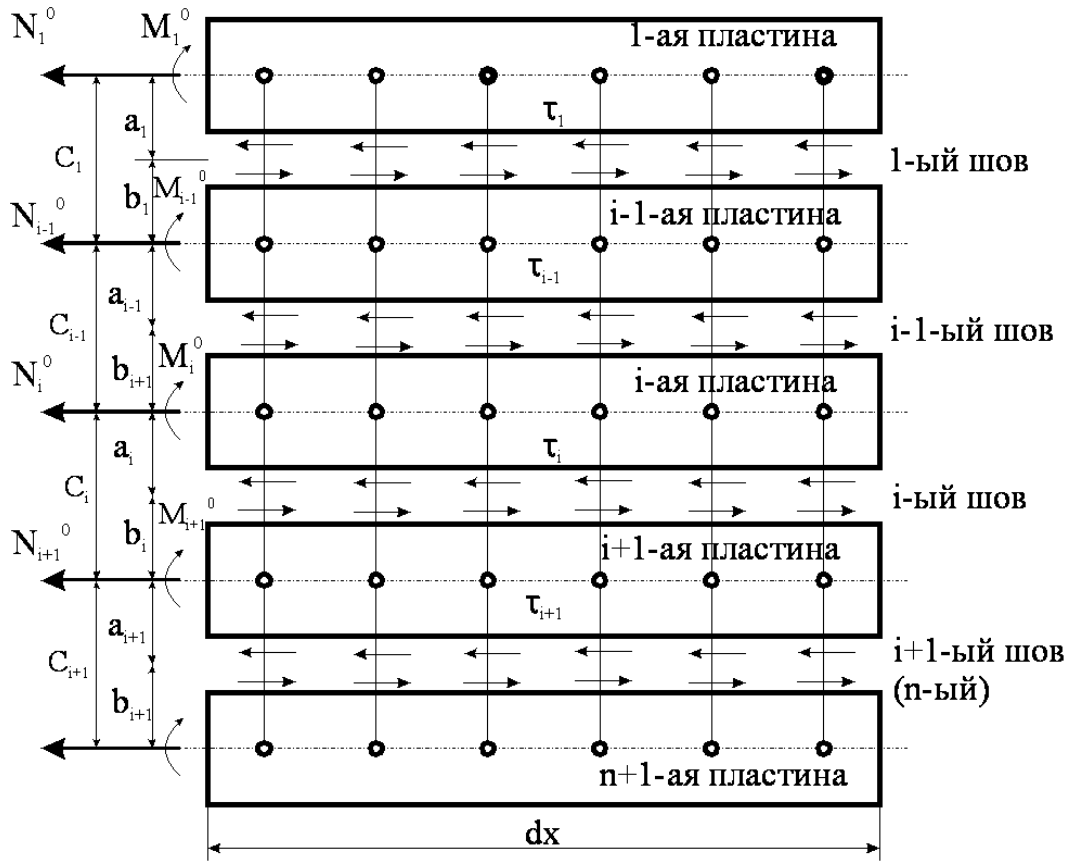


Рисунок 3.1 – Принятые обозначения для составной пластины

Между разностями продольных перемещений и касательными напряжениями в связях сдвига  $i$ -го шва существует линейная зависимость:

$$\tau_x^i = \xi_i \Delta u_i; \quad \tau_y^i = \xi_i \Delta v_i, \quad (3.1)$$

где

$$\Delta u_i = \frac{dw}{dx} c_i + u_{i+1} - u_i; \quad \Delta v_i = \frac{dw}{dy} c_i + v_{i+1} - v_i, \quad (3.2)$$

$c_i$  – расстояние между срединными плоскостями слоев, лежащих по обе стороны  $i$ -го шва;  $\xi_i$  – коэффициент жесткости связей сдвига  $i$ -го шва.

Для изгибающих и крутящих моментов в  $i$ -ом шве:  $M_x^i$ ,  $M_y^i$  и  $M_{xy}^i$  можно составить уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dM_x^i}{dx} + \frac{dM_{xy}^i}{dy} = Q_x^i + m_x^i + m_x^{i-1}; \\ \frac{dM_y^i}{dy} + \frac{dM_{xy}^i}{dx} = Q_y^i + m_y^i + m_y^{i-1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Преобразовав правую часть системы и выразив поперечные усилия через сумму моментных нагрузок в соседних слоях, имеем:

$$\frac{d^2 M_x^i}{dx^2} + 2 \frac{d^2 M_{xy}^i}{dx dy} + \frac{d^2 M_y^i}{dy^2} = -q_i + \frac{d(m_x^i + m_x^{i-1})}{dx} + \frac{d(m_y^i + m_y^{i-1})}{dy}. \quad (3.4)$$

В результате преобразований получим:

$$\frac{d^2 M_x^i}{dx^2} + 2 \frac{d^2 M_{xy}^i}{dx dy} + \frac{d^2 M_y^i}{dy^2} = -q_i - \sum_{i=1}^n C_i \cdot \left( \frac{d\tau_x^i}{dx} + \frac{d\tau_y^i}{dy} \right). \quad (3.5)$$

Выразим через бигармонический оператор от прогиба левую часть уравнения:

$$D_0 \nabla^2 \nabla^2 w = q_i + \sum_{i=1}^n C_i \cdot \left( \frac{d\tau_x^i}{dx} + \frac{d\tau_y^i}{dy} \right), \quad (3.6)$$

где  $D_0$  – цилиндрическая жесткость составной пластинки, лишенной связей сдвига, определяется по формуле:

$$D_0 = \frac{E}{12(1 - \mu^2)} \sum_{i=1}^{n+1} h_i^3, \quad (3.7)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $h_i$  – толщина  $i$ -го слоя.

Приняв

$$\frac{d\tau_x^i}{dx} + \frac{d\tau_y^i}{dy} = A_i, \quad (3.8)$$

подставим  $A_i$  в уравнение (3.6):

$$D_0 \nabla^2 \nabla^2 w = q + \sum_{i=1}^n C_i A_i, \quad (3.9)$$

и понизив порядок, получим:

$$D_0 \nabla^2 \nabla^2 w = -M + \sum_{i=1}^n C_i \cdot T_i, \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) аналогично уравнению теории упругих составных стержней с абсолютно жесткими поперечными связями [60]. Проведя подобные преобразования в соответствии с [60], получим:

$$\frac{\nabla^2 T_i}{\xi_i} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} T + \frac{1 + \mu_i^2}{E_i h_i} N_i + \frac{1 + \mu_{i+1}^2}{E_{i+1} h_{i+1}} N_{i+1} - \frac{c_i M}{D_0}, \quad (3.11)$$

где  $\delta$  – коэффициент.

В составном стержне  $T_j$  является суммарным сдвигающим усилием в  $i$ -ом шве, равным  $\int_0^x \tau dx$ ,  $N_i$  – продольные силы в  $i$ -ом слое.

Изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  будем считать равными суммарным изгибающим моментам в составной пластинке, лишенной связей сдвига:

$$\sum_{i=1}^{n+1} M_x^i = M_x; \quad \sum_{i=1}^{n+1} M_y^i = M_y; \quad \sum_{i=1}^{n+1} M_{xy}^i = M_{xy}; \quad \sum_{i=1}^{n+1} q_i = q, \quad (3.12)$$

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \mu_{ysl}}, \quad (3.13)$$

где  $\mu_{ysl}$  – коэффициент Пуассона условной сплошной пластинки.

Рассмотрим частный случай составной пластины из двух слоев. Для этого примем  $n = 1$  для уравнений (3.12) и (3.13). Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\nabla^2 T}{\xi} = \delta T + \frac{N_1}{E_1^* h_1} - \frac{N_2}{E_2^* h_2} - \frac{cM}{D_0}; \\ D_0 \nabla^2 \omega = -M + cT. \end{cases} \quad (3.14)$$

где  $D_0$  – фактическая цилиндрическая жесткость, равная:

$$D_0 = \sum_{i=1}^n D_i; \quad D_i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \mu_i^2)} \quad (i = 1, 2), \quad \delta = \frac{c^2}{D} + \frac{1}{E_1^* h_1} + \frac{1}{E_1^* h_1},$$

$$E_i^* = \frac{E_i}{1 - \mu_1^2} \quad (i = 1, 2). \quad (3.15)$$

где  $E_i^*$  – модуль упругости слоёв в составе составной пластины, при этом индексы швов опускаем, так как шов один.

Исключая из системы уравнений (3.14)  $T$ , получим:

$$\begin{cases} T = \frac{D_0}{c} \nabla^2 w + \frac{M}{c}; \\ \frac{D_0}{c\xi} \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{c\xi} \nabla^2 \omega = \frac{\delta D_0}{c} \nabla^2 w + \frac{\delta}{c} M + \frac{N_1}{E_1^* h_1} - \frac{N_1}{E_1^* h_1} - \frac{cM}{D_0}, \end{cases} \quad (3.16)$$

или

$$\nabla^2 \nabla^2 W + \xi \delta \nabla^2 \omega = -\frac{\nabla^2 M}{D_0} + \frac{\xi \delta}{D_0} M + \frac{c \xi}{D_0} \left( \frac{N_1}{E_1^* h_1} - \frac{N_2}{E_2^* h_2} \right) - \frac{\xi c^2 M}{D_0^2}. \quad (3.17)$$

При отсутствии осевых нагрузок  $N_1$  и  $N_2$ , уравнение (3.17) примет вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 W + \xi \delta \nabla^2 \omega = -\frac{\nabla^2 M}{D_0} + \xi M \delta \frac{\delta D_0 - c^2}{\delta D_0^2}. \quad (3.18)$$

Зная, что:

$$\nabla^2 M = -q, \quad \nabla^2 \nabla^2 W = -\frac{\nabla^2 M}{D_{\text{усл}}} = \frac{q}{D_{\text{усл}}}, \quad \nabla^2 W = -\frac{M}{D_{\text{усл}}}, \quad (3.19)$$

где  $D_{\text{усл}}$  – цилиндрическая жесткость некоторой условной сплошной пластинки.

После преобразований получим:

$$\frac{q}{D_{\text{усл}}} + \xi \delta \frac{M}{D_{\text{усл}}} = \frac{q}{D_0} + \xi \delta M \frac{\delta D_0 - c^2}{\delta D_0^2}. \quad (3.20)$$

Для пластинки:

$$D_M = \frac{\delta D_0^2}{(\delta D_0 - c^2)}, \quad (3.21)$$

где  $D_M$  – цилиндрическая жесткость монолитной пластинки с продольным модулем упругости в зоне шва, равным нулю. Тогда:

$$\frac{q}{D_{\text{усл}}} + \xi \delta \frac{M}{D_{\text{усл}}} = \frac{q}{D_0} + \xi \delta \frac{M}{D_M}. \quad (3.22)$$

Выразим из этого уравнения коэффициент жесткости шва:

$$\xi = \frac{q \left( \frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_{\text{усл}}} \right)}{\delta M \left( \frac{1}{D_{\text{усл}}} - \frac{1}{D_M} \right)}, \quad (3.23)$$



### 3.2 Теоретические исследования коэффициента жесткости шва составных квадратных пластин

Исследование составных двухслойных пластин проводилось методом конечных элементов, для чего каждый слой составной пластины был разбит на 625 КЭ (сетка  $25 \times 25$  КЭ). В качестве расчётной конструкции принята квадратная пластина со стороной 1 м. Было рассмотрено два условия закрепления пластины по контуру – шарнирное опирание (рисунок 3.2) и жесткое защемление (рисунок 3.3). При статическом расчёте учитывался лишь собственный вес пластин. Для динамического расчета массы в узлах собирались в соответствии с объемным весом слоя и грузовой площадью узла. В качестве расчётной принята пластина толщиной 8 мм, расстояние между слоями равно расстоянию между средними плоскостями слоев.

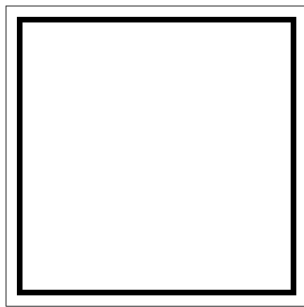


Рисунок 3.2 – Шарнирное опирание составной пластины по контуру

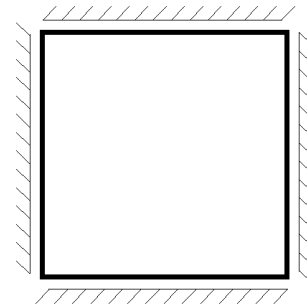


Рисунок 3.3 – Жесткое защемление составной пластины по контуру

Средняя плотность материала слоёв  $\rho = 740 \text{ кг/м}^3$ , жесткость поперечных связей двухслойной пластины принята постоянной  $E A_{\text{пс}} = 8^3 \text{ Н}$ . Коэффициент жесткости шва определялся по формуле (3.23), где значение изгибающих моментов пластины определялось в программном комплексе SCAD, наряду с основными частотами колебаний.

В рамках исследования составной квадратной пластины решались две задачи: оценка влияния жесткости связей сдвига и влияние локальных симметрично установленных связей сдвига на коэффициент жесткости шва.

### 3.2.1 Оценка влияния жесткости связей сдвига на коэффициент жесткости шва для составных квадратных пластин

В каждый конечный элемент наряду с поперечными связями вводятся связи сдвига, жесткость которых  $E A_{cc}$  изменяется в пределах от  $10^{-6}$  до  $10^9$  кН (рисунок 3.4).

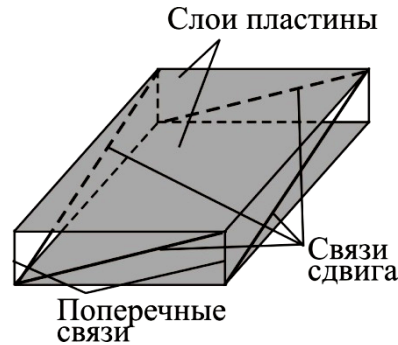


Рисунок 3.4 – Конечный элемент квадратной составной пластины

Результаты расчета жестко заземленной и шарнирно опертой пластины приведены в таблицах 3.1 и 3.2 соответственно.

Таблица 3.1 – Численные исследования жестко заземленной по контуру пластины при изменении жесткости связей сдвига

№ п/п	$\lg E A_{cc}$	Круговая частота основного тона колебаний, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Изгибающий момент, $M_x$ ( $M_y$ ) ( $H \times M/M$ )	Максимальный момент, по (3.13), $M$ ( $H \times M/M$ )	Коэффициент жесткости шва, $\xi \times 10^6$ ( $H/M^3$ )
1	-6	163,514	1,349	2,075	91,834
2	-5	163,514	1,349	2,075	91,834
3	0	163,526	1,3492	2,075	91,834
4	1	163,631	1,346	2,072	91,992
5	2	164,667	1,324	2,038	93,524
6	3	174,178	1,1483	1,766	107,898
7	4	226,658	0,602	0,927	205,610
8	5	299,308	0,371	0,571	333,474
9	6	321,189	0,343	0,528	360,512
10	7	324,081	0,3402	0,523	364,204
11	8	324,383	0,3402	0,523	364,204
12	9	324,413	0,3402	0,523	364,204

Таблица 3.2 – Численные исследования шарнирно опертой по контуру пластины при изменении жесткости связей сдвига

№ № п/п	$\lg EA_{cc}$	Круговая частота основного тона $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Изгибающий момент $M_x$ ( $M_y$ ) ( $H \times m/m$ )	Максимальный момент по (3.13), $M$ ( $H \times m/m$ )	Коэффициент жесткости шва $\xi \times 10^6$ ( $H/m^3$ )
1	-6	89,632	2,827	4,349	43,824
2	-5	89,632	2,827	4,349	43,824
3	0	89,649	2,826	4,347	43,842
4	1	89,807	2,815	4,331	44,004
5	2	91,345	2,713	4,174	45,661
6	3	104,090	2,040	3,138	60,735
7	4	157,827	0,883	1,359	140,225
8	5	229,756	0,551	0,848	224,656
9	6	253,162	0,506	0,778	244,751
10	7	256,312	0,501	0,771	247,018
11	8	256,445	0,501	0,771	247,018
12	9	256,451	0,501	0,771	247,018

По данным таблиц 3.1 и 3.2 построены графики зависимости жесткости шва от жёсткости связей сдвига и частот колебаний составной пластины (рисунок 3.5).

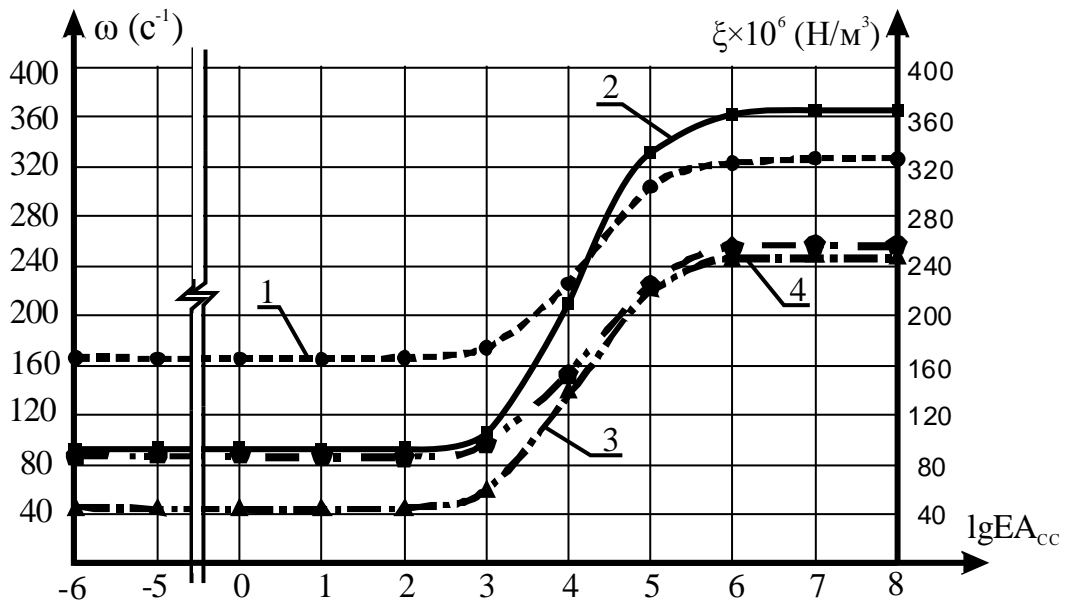


Рисунок 3.5 – Изменение основных частот собственных колебаний ( $\omega$ ) и коэффициента жесткости шва ( $\xi$ ) в зависимости от жесткости связей сдвига

$\lg EA_{cc}$ .

(1 - зависимость « $\omega - \lg EA_{cc}$ » при жестком защемлении; 2 - зависимость « $\xi - \lg EA_{cc}$ » при жестком защемлении; 3 - зависимость « $\omega - \lg EA_{cc}$ » при шарнирном опирании; 4 - зависимость « $\xi - \lg EA_{cc}$ » при шарнирном опирании)

Анализ данных показывает, что с ростом жесткости связей сдвига в двухслойной квадратной пластине возрастает как частота её собственных колебаний, так и коэффициент жесткости шва.

На основе данных, приведенных в таблице 3.1 и 3.2 построены графики зависимости частота собственных колебаний ( $\omega$ ) от коэффициента жесткости шва ( $\xi$ ) (рисунок 3.6).

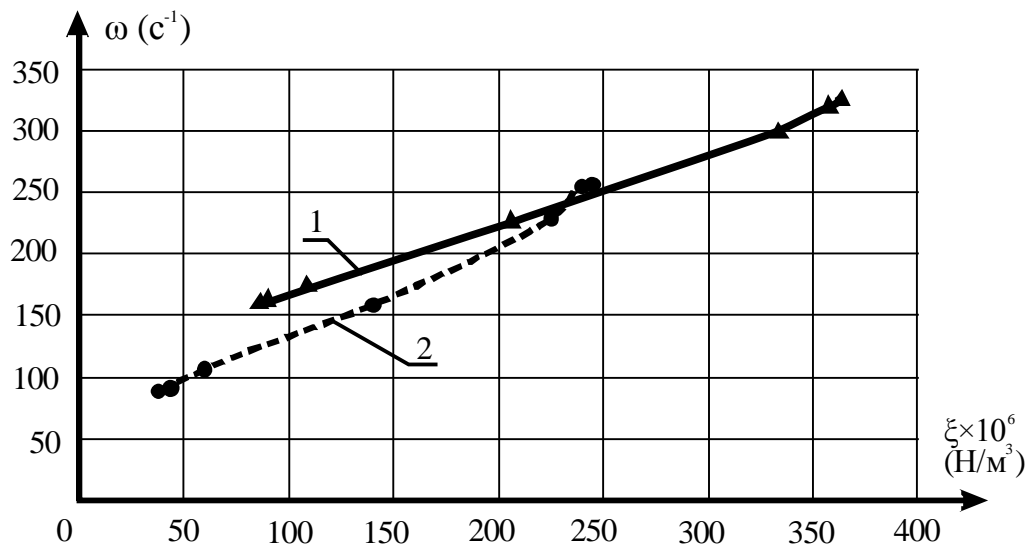


Рисунок 3.6 – Изменение основных частот собственных колебаний ( $\omega$ ) от коэффициента жесткости шва ( $\xi$ ) при:  
 1 – изменении жесткости связей сдвига для заземленной пластины; 2 – то же для шарнирно опертой пластины

Анализируя график 3.6, можно сделать вывод, что с увеличением коэффициента жесткости шва в двухслойной составной пластине квадратного очертания, при изменении жесткости связей сдвига, увеличивается и частота ее собственных колебаний.

### 3.2.2 Оценка влияния локально симметрично установленных связей сдвига на коэффициент жесткости шва для составных квадратных пластин

Для оценки влияния количества симметрично расположенных связей сдвига были приняты расчетные схемы согласно рисунков 3.2 и 3.3. Жесткость связей сдвига была принята равной  $E A_{cc} = 10$  кН. Двухслойная пластина была разбита на 625 конечных элементов для более удобной установки

локальных связей сдвига. Они были расставлены в соответствии с рисунком 3.6.

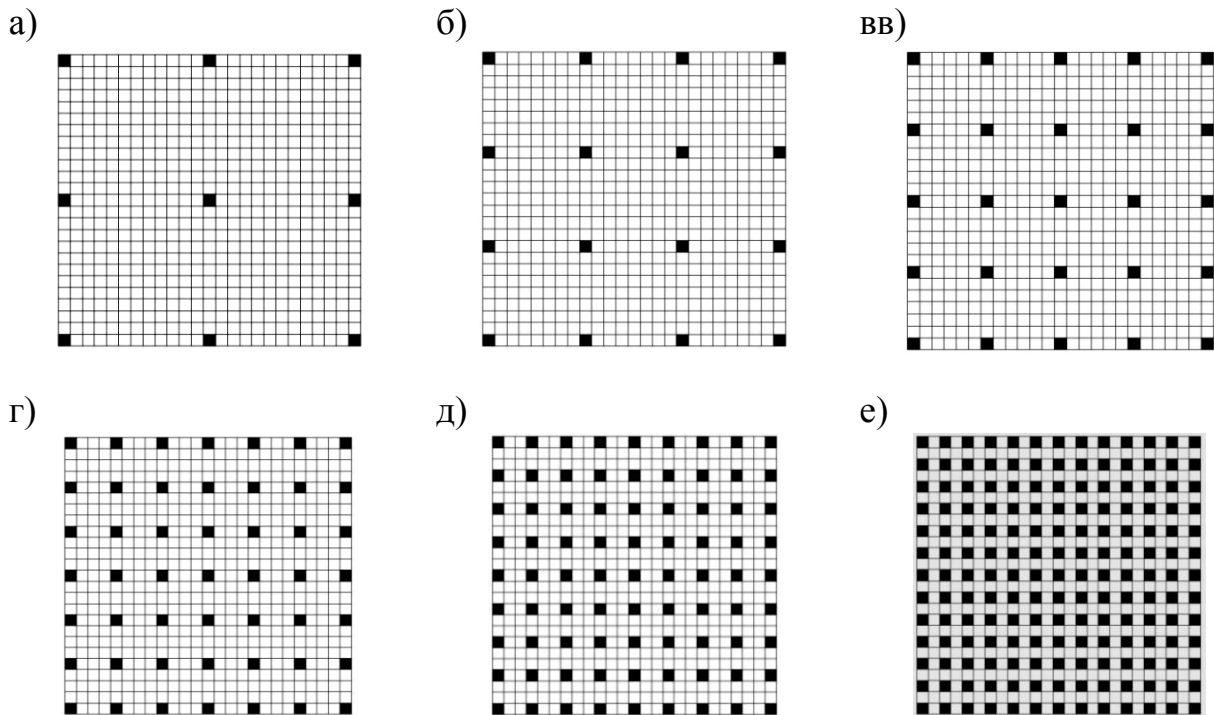


Рисунок 3.7 – Схемы расстановки связей сдвига:

(а - 9 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,015$ ); б - 16 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,025$ ); в - 25 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,04$ ); г - 49 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,078$ ); д - 81 конечный элемент с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,130$ ); е - 169 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,270$ ))

Результаты численных исследований квадратной пластины представлены в таблицах 3.3 и 3.4.

Таблица 3.3 – Численные исследования жестко защемленной по контуру составной пластины при изменении количества симметрично расположенных связей сдвига в соответствии со схемами 1...6 рисунка 3.7

№ № схемы	Кол-во КЭ с связями сдвига, ( $n_{cc}/n_{кэ}$ )	Круговая частота ос- новного то- на, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Изгибаю- щий момент, $M_x$ ( $M_y$ ) ( $H \times m/m$ )	Максималь- ный момент, по (3.13), $M$ ( $H \times m/m$ )	Коэффициент жесткости шва, $\xi \times 10^6$ ( $H/m^3$ )
0	0 (0,000)	163,514	1,349	2,075	91,831
1	9 (0,015)	163,583	1,348	2,073	91,910
2	16 (0,025)	164,832	1,316	2,025	94,098
3	25 (0,040)	166,270	1,300	2,000	95,275
4	49 (0,078)	170,063	1,228	1,889	100,858
5	81 (0,130)	174,966	1,142	1,757	108,443
6	169 (0,270)	187,115	0,962	1,480	128,718
7	625 (1,000)	226,658	0,602	0,927	205,603

Таблица 3.4 – Численные исследования шарнирно опертой по контуру пластины, при изменении количества симметрично расположенных связей сдвига в соответствии со схемами 1...6 рисунка 3.7

№ № схемы	Кол-во КЭ с связями сдвига, ( $n_{cc}/n_{кэ}$ )	Круговая частота ос- новного тона, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Изгибающий момент, $M_x$ ( $M_y$ ) ( $H \times M/M$ )	Максималь- ный момент, по ф-ле (3.13), $M$ ( $H \times M/M$ )	Коэффициент жёсткости шва, $\xi \times 10^6$ ( $H/M^3$ )
0	0 (0,000)	89,632	2,827	4,349	43,824
1	9 (0,015)	91,728	2,730	4,201	45,370
2	16 (0,025)	93,539	2,606	4,010	47,533
3	25 (0,040)	95,749	2,504	3,853	49,472
4	49 (0,078)	101,123	2,230	3,431	55,550
5	81 (0,130)	107,355	1,958	3,013	63,255
6	169 (0,270)	120,868	1,514	2,329	81,834
7	625 (1,000)	157,827	0,883	1,359	140,225

Примечание к таблицам 3.5 и 3.6. За схему 0 принята схема двухслойной пластины без связей сдвига, за схему 7 – составная пластина со связями сдвига во всех конечных элементах.

По результатам выполненных расчетов были построены графики зависимости частот колебаний и коэффициента жёсткости шва от количества связей сдвига, которые представлены на рисунке 3.8.

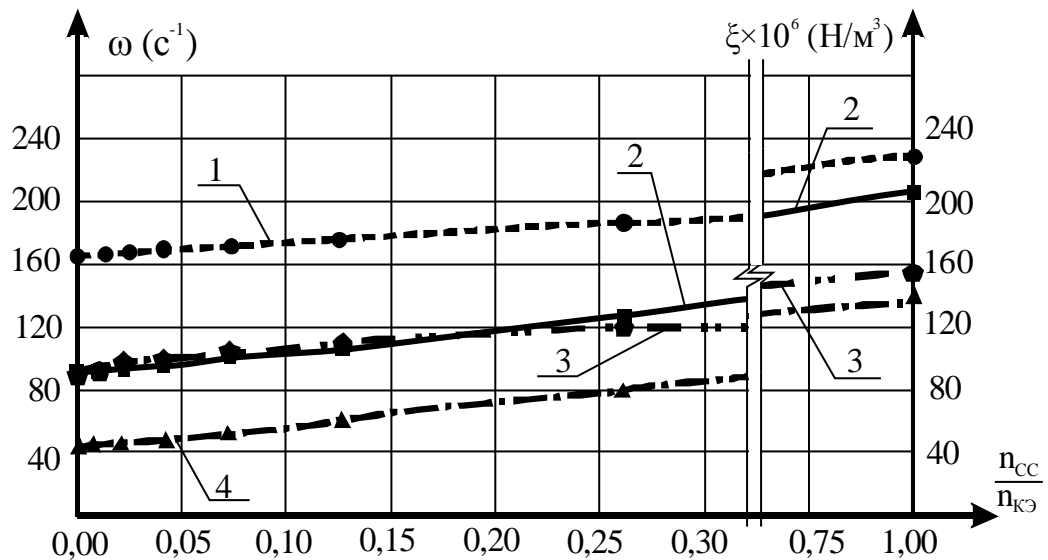


Рисунок 3.8 – Изменение основных частот собственных колебаний ( $\omega$ ) и коэффициента жесткости шва ( $\xi$ ) в зависимости от количества связей сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}$ )

(1 - зависимость « $\omega - n_{cc}/n_{кэ}$ » при жестком заземлении; 2 - зависимость « $\xi - n_{cc}/n_{кэ}$ » при жестком заземлении; 3 - зависимость « $\omega - n_{cc}/n_{кэ}$ » при шарнирном опирании; 4 - зависимость « $\xi - n_{cc}/n_{кэ}$ » при шарнирном опирании)

Анализ данных показывает, что с ростом количества симметрично расположенных связей сдвига в двухслойной квадратной пластине возрастает как частота её собственных колебаний, так и коэффициент жесткости шва.

На основе данных, приведенных в таблице 3.3 и 3.4, построены графики зависимости частоты собственных колебаний ( $\omega$ ) от коэффициента жесткости шва  $\xi$  (рисунок 3.9).

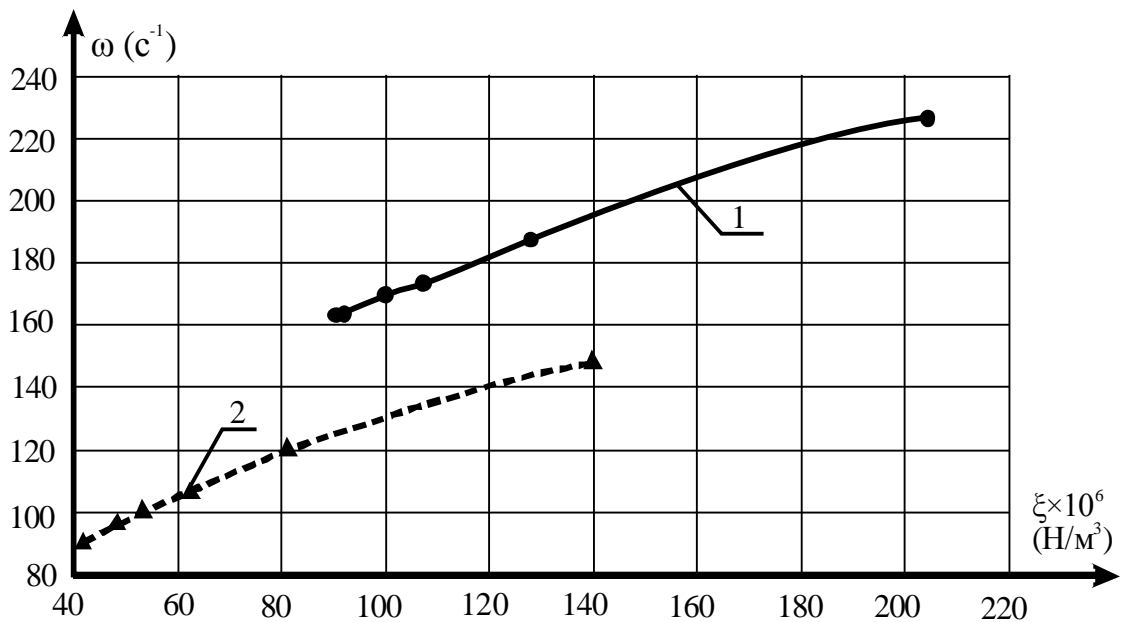


Рисунок 3.9 - Изменение основных частот собственных колебаний ( $\omega$ ) от коэффициента жесткости шва ( $\xi$ ) при:

1 – изменению количества симметрично расположенных связей сдвига для жестко заземленной пластины; 2 – то же для шарнирно опертой пластины.

Анализируя график 3.9, можно сделать вывод, что с увеличением коэффициента жесткости шва в двухслойной составной пластине квадратного очертания при изменении количества симметрично расположенных связей сдвига, увеличивается и частота ее собственных колебаний.

### 3.3 Теоретические исследования коэффициента жесткости шва составных круглых пластин

Численное исследование составной двухслойной пластины круглого очертания проводилось методом конечных элементов, для чего каждый слой составной пластинки был разбит на 288 конечных элементов 24-мя радиальными и 12-тью кольцевыми линиями. Диаметр пластины составил 1 метр,

толщина слоев принята 8 мм, а расстояние между ними в расчётной схеме было принято расстоянию между срединными линиями. Рассмотрены два условия закрепления пластины по контуру – шарнирное опирание (рисунок 3.10) и жесткое защемление (рисунок 3.11). Для динамического расчета массы в узлах собирались в соответствии с объемным весом слоя и грузовой площадью узла. Средняя плотность материала слоёв пластин  $\rho = 740 \text{ кг/м}^3$ , жесткость поперечных связей двухслойной пластины принята постоянной  $E A_{\text{пс}} = 8^3 \text{ Н}$ . Коэффициент жесткости шва определялся по формуле (3.23), где значение изгибающих моментов пластины определялось в программном комплексе SCAD наряду с основными частотами колебаний.

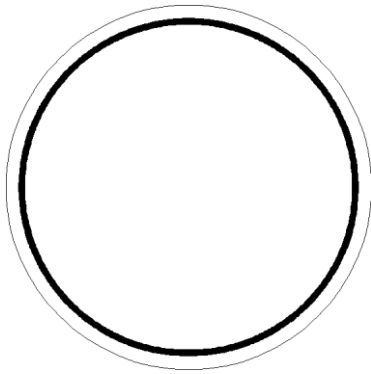


Рисунок 3.10 – Шарнирное опирание пластины по контуру

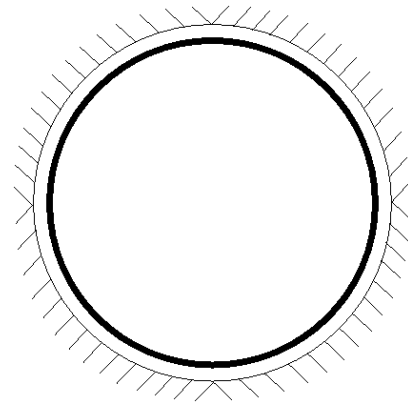


Рисунок 3.11 – жесткое защемление пластины по контуру

### 3.3.1 Определение влияния жесткости связей сдвига на коэффициент жесткости шва для составных круглых пластин

В каждый конечный элемент наряду с поперечными связями вводятся связи сдвига, жесткость которых  $E A_{\text{сд}}$  изменяется в пределах от  $10^{-6}$  до  $10^9$  кН (рисунок 3.12).



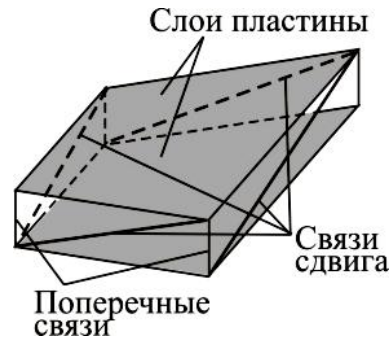


Рисунок 3.12 – Конечный элемент круглой составной пластины

Результаты расчета жестко защемленной и шарнирно опертой пластины приведены в таблице 3.5 и 3.6 соответственно.

Таблица 3.5 – Численные исследования жестко защемленной по контуру пластины при изменении жесткости связей сдвига

№ № п/п	$\lg EA_{cc}$	Круговая частота основного тона, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Изгибающий момент, $M_x$ ( $M_y$ ) ( $H \times M/M$ )	Максимальный момент, по (3.13), $M$ ( $H \times M/M$ )	Коэффициент жесткости шва, $\xi \times 10^6$ ( $H/M^3$ )
1	-6	189,168	0,887	1,365	107,355
2	-5	189,168	0,887	1,365	107,355
3	0	189,172	0,887	1,365	107,355
4	1	189,200	0,887	1,365	107,355
5	2	189,487	0,882	1,358	108,007
6	3	192,281	0,834	1,283	114,252
7	4	214,778	0,568	0,873	167,785
8	5	292,838	0,262	0,404	362,965
9	6	355,001	0,219	0,338	433,787
10	7	367,761	0,217	0,333	439,143
11	8	369,220	0,217	0,333	439,143
12	9	369,369	0,217	0,333	439,143

Таблица 3.6 – Численные исследования шарнирно опертой по контуру пластины при изменении жесткости связей сдвига

№ № п/п	$\lg EA_{cc}$	Круговая частота основного тона, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Изгибающий момент, $M_x$ ( $M_y$ ) ( $H \times M/M$ )	Максимальный момент, по (3.13), $M$ ( $H \times M/M$ )	Коэффициент жесткости шва, $\xi \times 10^6$ ( $H/M^3$ )
1	-6	89,066	2,326	3,579	40,964
2	-5	89,066	2,326	3,579	40,964
3	0	89,070	2,325	3,578	40,979
4	1	89,108	2,323	3,574	41,027
5	2	89,484	2,296	3,533	41,505
6	3	93,077	2,060	3,170	46,255
7	4	118,209	1,147	1,765	83,044
8	5	186,412	0,476	0,732	200,209
9	6	256,393	0,357	0,549	266,779
10	7	300,003	0,306	0,471	311,113
11	8	325,639	0,279	0,430	340,932
12	9	337,741	0,268	0,413	354,524

По данным таблиц 3.5 и 3.6 построены графики зависимости жесткости шва от частот колебаний составной пластины (рисунок 3.13).

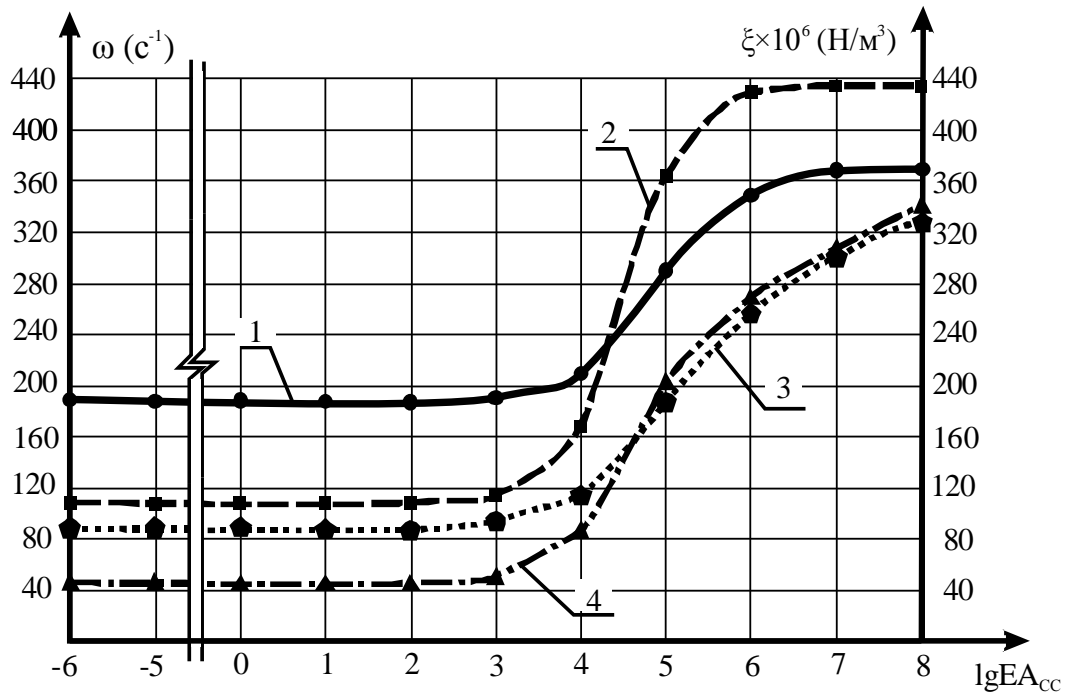


Рисунок 3.13 – Изменение основных частот собственных колебаний ( $\omega$ ) и коэффициента жесткости шва ( $\xi$ ) от жесткости связей сдвига ( $\lg EA_{cc}$ ):

(1 - зависимость « $\omega$  -  $\lg EA_{cc}$ » при жестком заземлении; 2 - зависимость « $\xi$  -  $\lg EA_{cc}$ » при жестком заземлении; 3 - зависимость « $\omega$  -  $\lg EA_{cc}$ » при шарнирном опирании; 4 - зависимость « $\xi$  -  $\lg EA_{cc}$ » при шарнирном опирании)

Анализируя данные, можно сделать вывод, что с ростом жесткости связей сдвига в двухслойной круглой пластине наряду с возрастанием частоты её собственных колебаний возрастает и коэффициент жесткости шва.

На основе данных, приведенных в таблице 3.5 и 3.6 построены графики зависимости частота собственных колебаний ( $\omega$ ) от коэффициента жесткости шва ( $\xi$ ) (рисунок 3.14).

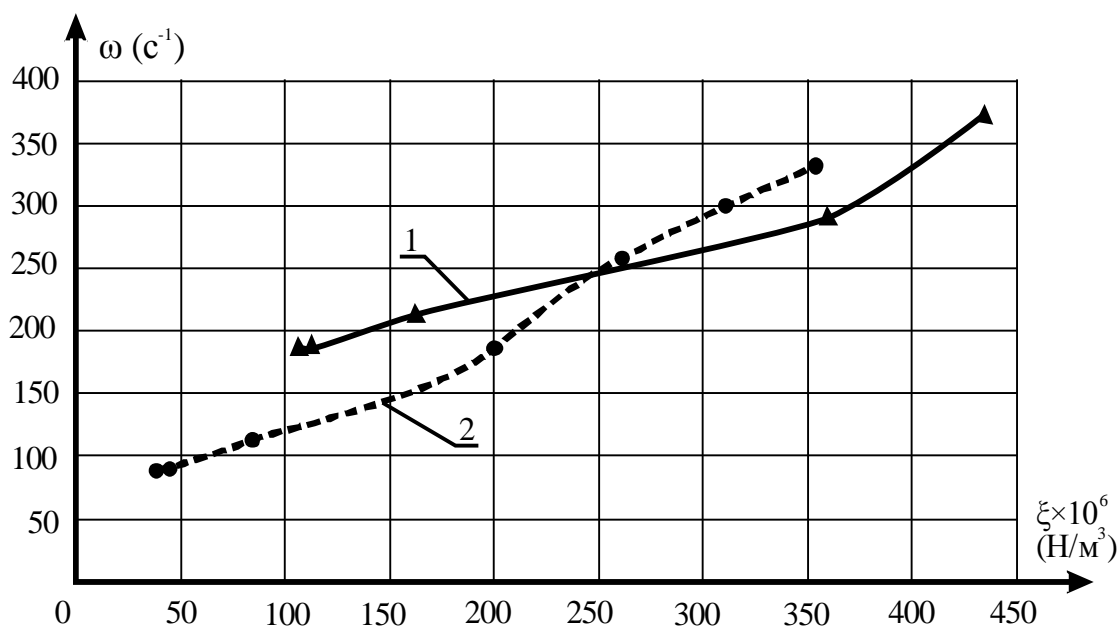


Рисунок 3.14 - Изменение основных частот собственных колебаний ( $\omega$ ) от коэффициента жесткости шва ( $\xi$ ) при:  
 1 – изменении жесткости связей сдвига для заземленной пластины; 2 – то же для шарнирно опертой пластины.

Анализируя график 3.14, можно сделать вывод, что с увеличением коэффициента жесткости шва в двухслойной составной пластине круглого очертания, при изменении жесткости связей сдвига, увеличивается и частота ее собственных колебаний.

### 3.3.2 Определение влияния локальных симметрично установленных связей сдвига на коэффициент жесткости шва для составных круглых пластин

Локально расположенные связи сдвига располагаем согласно схемам на рисунке 3.15. Жесткость связей сдвига во всех случаях была принята равной  $E A_{cc} = 10$  кН. Результаты численных исследований представлены в таблицах 3.7 и 3.8.

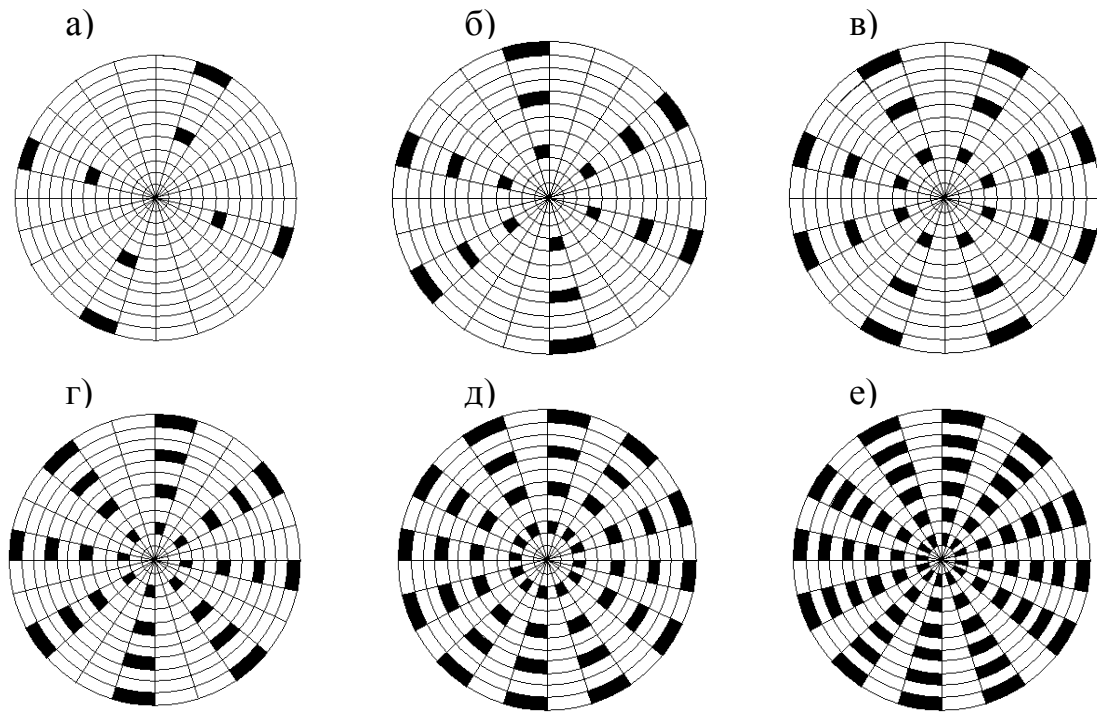


Рисунок 3.15 – Схема расстановки связей сдвига в круглых пластинках (а – 8 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,028$ ); б – 18 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,063$ ); в – 24 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,083$ ); г – 32 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,111$ ); д – 48 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,167$ ); е – 72 конечных элементов с связями сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}=0,250$ ))

Таблица 3.7 – Численные исследования жестко заземленной по контуру составной пластины при изменении количества симметрично расположенных связей сдвига

№ № схемы	Кол-во КЭ с связями сдвига, ( $n_{cc}/n_{кэ}$ )	Круговая частота основного тона $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Изги- бающий момент $M_x$ ( $M_y$ ) ( $H \times m/m$ )	Макси- мальный момент, по (3.13), М ( $H \times m/m$ )	Коэффициент жесткости шва $\xi \times 10^6$ ( $H/m^3$ )
0	0 (0,000)	189,168	0,887	1,365	107,355
1	8 (0,028)	190,817	0,868	1,335	109,785
2	18 (0,063)	192,936	0,832	1,280	114,497
3	24 (0,083)	194,149	0,815	1,254	116,880
4	32 (0,111)	195,779	0,784	1,206	121,539
5	48 (0,167)	198,853	0,741	1,140	128,568
6	72 (0,250)	203,272	0,677	1,041	140,780
7	288 (1,000)	214,778	0,568	0,873	167,785

Таблица 3.8 – Численные исследования шарнирно опертой по контуру пластины, при изменении количества симметрично расположенных связей сдвига

№ № схемы	Кол-во КЭ с связями сдвига, ( $n_{cc}/n_{кэ}$ )	Круговая частота ос- новного то- на, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Изгибаю- щий мо- мент, $M_x$ ( $M_y$ ) ( $H \times M/M$ )	Максималь- ный момент, по ф-ле (3.13), $M$ ( $H \times M/M$ )	Коэффициент же- сткости шва, $\xi \times 10^6$ ( $H/M^3$ )
0	0 (0,000)	89,066	2,326	3,579	40,964
1	8 (0,028)	92,080	2,171	3,340	43,896
2	18 (0,063)	94,976	1,998	3,074	47,703
3	24 (0,083)	96,809	1,908	2,936	49,935
4	32 (0,111)	98,579	1,798	2,766	53,011
5	48 (0,167)	102,711	1,624	2,499	58,665
6	72 (0,250)	107,199	1,453	2,235	65,588
7	288 (1,000)	118,209	1,147	1,765	83,044

Примечание к таблицам 3 и 4. За схему 0 принята схема двухслойной пластины без связей сдвига, за схему 7 – составная пластина со связями сдвига во всех конечных элементах.

По результатам выполненных расчетов были построены графики зависимости « $\omega - n_{cc}/n_{кэ}$ » и « $\xi - n_{cc}/n_{кэ}$ », представленные на рисунке 3.16.

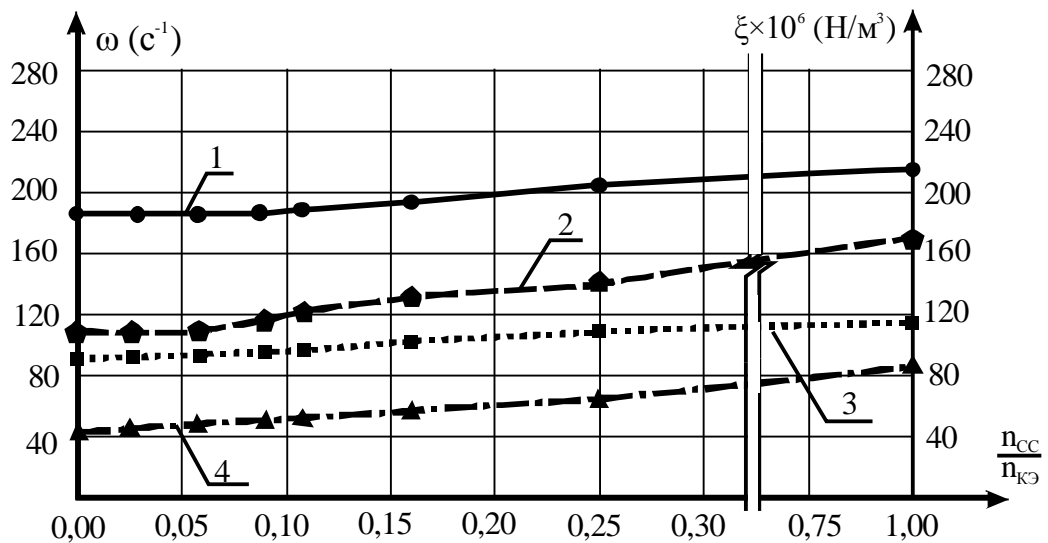


Рисунок 3.16 – Изменение основных частот собственных колебаний ( $\omega$ ) и коэффициента жесткости шва ( $\xi$ ) от количества связей сдвига ( $n_{cc}/n_{кэ}$ ): (1 - зависимость « $\omega - n_{cc}/n_{кэ}$ » при жестком защемлении; 2 - зависимость « $\xi - n_{cc}/n_{кэ}$ » при жестком защемлении; 3 - зависимость « $\omega - n_{cc}/n_{кэ}$ » при шарнирном опирании; 4 - зависимость « $\xi - n_{cc}/n_{кэ}$ » при шарнирном опирании)

Анализ данных показывает, что с ростом количества симметрично расположенных связей сдвига в двухслойной пластине круглого очертания воз-

растает как частота её собственных колебаний, так и коэффициент жесткости шва. На основе данных, приведенных в таблице 3.7 и 3.8 построены графики зависимости частота собственных колебаний ( $\omega$ ) от коэффициента жесткости шва ( $\xi$ ) (рисунок 3.17).

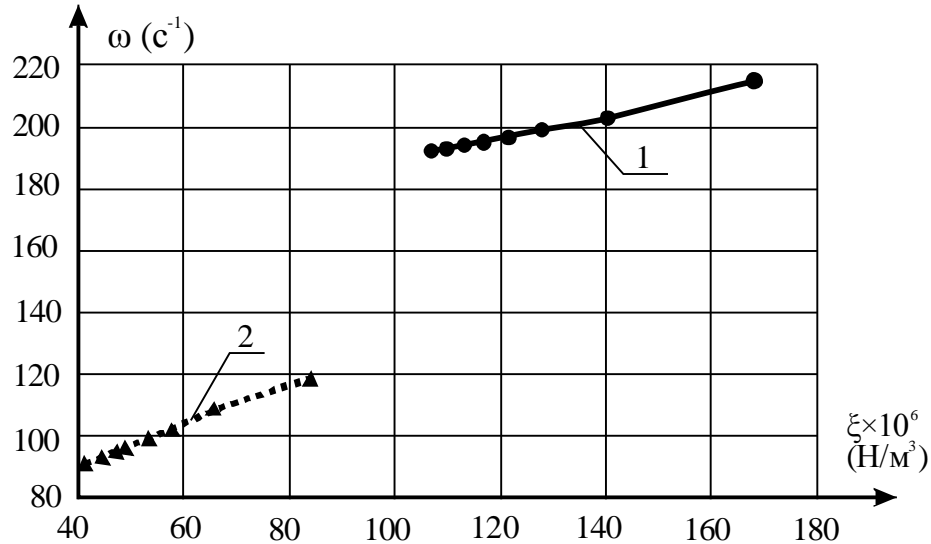


Рисунок 3.17 – Изменение основных частот собственных колебаний ( $\omega$ ) от коэффициента жесткости шва ( $\xi$ ) при:

1 – изменении количества симметрично расположенных связей сдвига для жестко защемленной пластины; 2 – то же для шарнирно опертой пластины.

Анализируя график 3.17, можно сделать вывод, что с увеличением коэффициента жесткости шва в двухслойной составной пластине круглого очертания, при изменении количества симметрично расположенных связей сдвига, увеличивается и частота ее собственных колебаний.

### 3.4 Выводы по главе 3

1. По результатам теоретических исследований установлена аналитическая зависимость коэффициента жесткости шва составной пластины от цилиндрической жесткости слоев и усилий в слоях.

2. В ходе численных исследований выявлены зависимости жесткости шва двухслойных пластин квадратного и круглого очертания от жесткости связей сдвига и от количества симметрично установленных связей сдвига.

3. По результатам исследований установлена зависимость коэффициента жесткости шва от частот собственных колебаний составных пластин при различных граничных условиях.

#### **4 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СОСТАВНЫХ ПЛАСТИН НА ПОДАТЛИВЫХ СВЯЗЯХ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ**

Целью экспериментальных исследований являлось изучение поведения составных пластин на податливых связях при статическом и динамическом нагружении. При проведении испытаний определялся максимальный прогиб составной пластины, а также основная частота собственных поперечных колебаний в ненагруженном состоянии. Данные, полученные в ходе эксперимента, необходимы для оценки и сопоставления их с результатами теоретического исследований.

Для решения поставленной цели экспериментальных исследования были сформулированы следующие задачи:

- разработка методики определения частот собственных поперечных колебаний и прогибов для двухслойных пластин на податливых связях;
- разработка и изготовление испытательного стенда;
- разработка и изготовление опытных образцов квадратной и круглой в плане двухслойной пластины;
- определение модуля упругости материала слоёв составной пластины;
- разработка методики учета податливости жесткого защемления при проведении экспериментальных исследований;
- проведение статических испытаний для определения прогибов двухслойных пластин на податливых связях;
- проведение динамических испытаний с определением собственных частот колебаний двухслойных пластин на податливых связях;
- анализ и сопоставление данных, полученных в результате численных и экспериментальных исследований.

#### 4.1 Экспериментальная установка для испытания составных пластин различного очертания в плане. Методика проведения статических и динамических испытаний пластин

Статические и динамические испытания двухслойных пластин проводились на специально изготовленном стенде (рисунок 4.1).



Рисунок 4.1 – Испытательный стенд для экспериментальных исследований квадратных составных пластин

Он состоит из вертикальных стоек из стальных горячекатаных равнополочных уголков  $40 \times 4$  мм с закрепленной на них несъемной горизонтальной квадратной рамой, выполненной также из стальных горячекатаных равнополочных уголков  $40 \times 4$  мм. К торцам стоек приварены стальные пластины размерами  $200 \times 200$  мм толщиной 6 мм, через которые посредством болтов вся установка закреплена на стальной горизонтальной плите толщиной 10 мм. Для уменьшения деформативности опорного контура пластины по четырём сторонам выполнены стальные подкосы, что уменьшило пролёт опорной рамы до 320 мм. Для укрепления контура испытательного стенда и повышения жёсткости установки в горизонтальной плоскости установлена горизонталь-



ная крестовая связь. Чертеж испытательного стенда приведён на рисунках 4.2...4.4.

Экспериментальные исследования проводились как для пластин квадратного, так и для круглого очертания в плане. Для трансформации стенда переставлялись стойки, а квадратные неподвижная и съёмная рамы заменялись на круглые (рисунок 4.5).

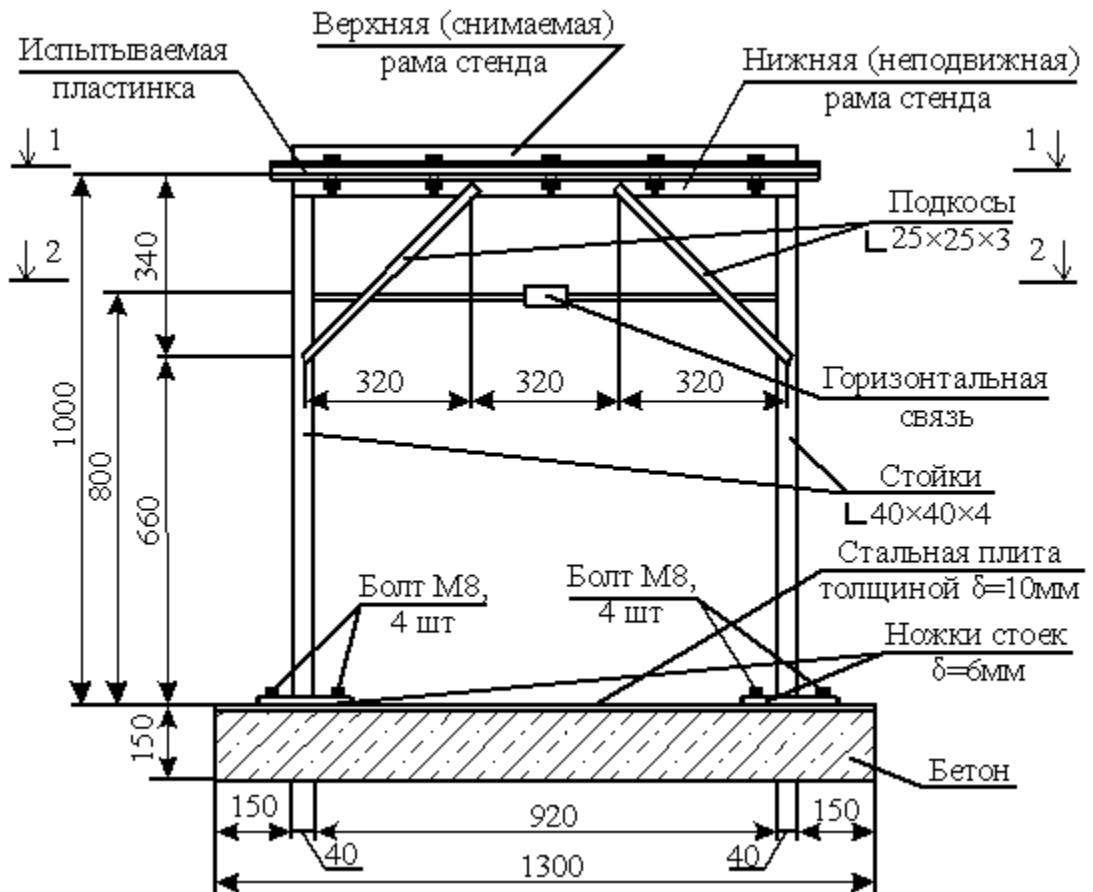


Рисунок 4.2 –Испытательного стенда

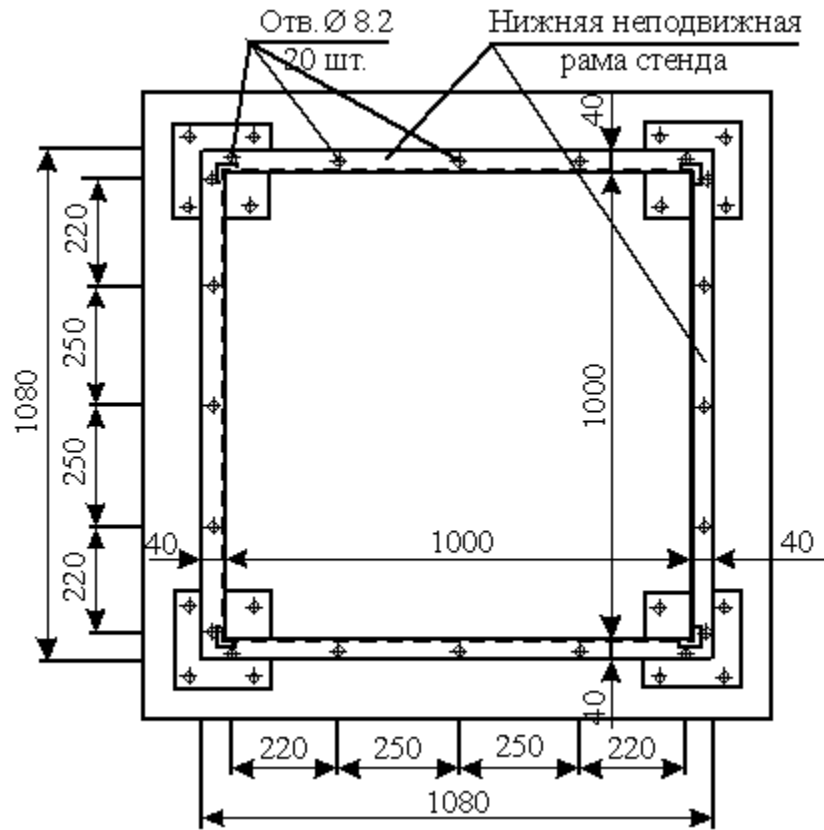


Рисунок 4.3 – Сечение 1-1 испытательного станда в уровне нижней неподвижной рамы

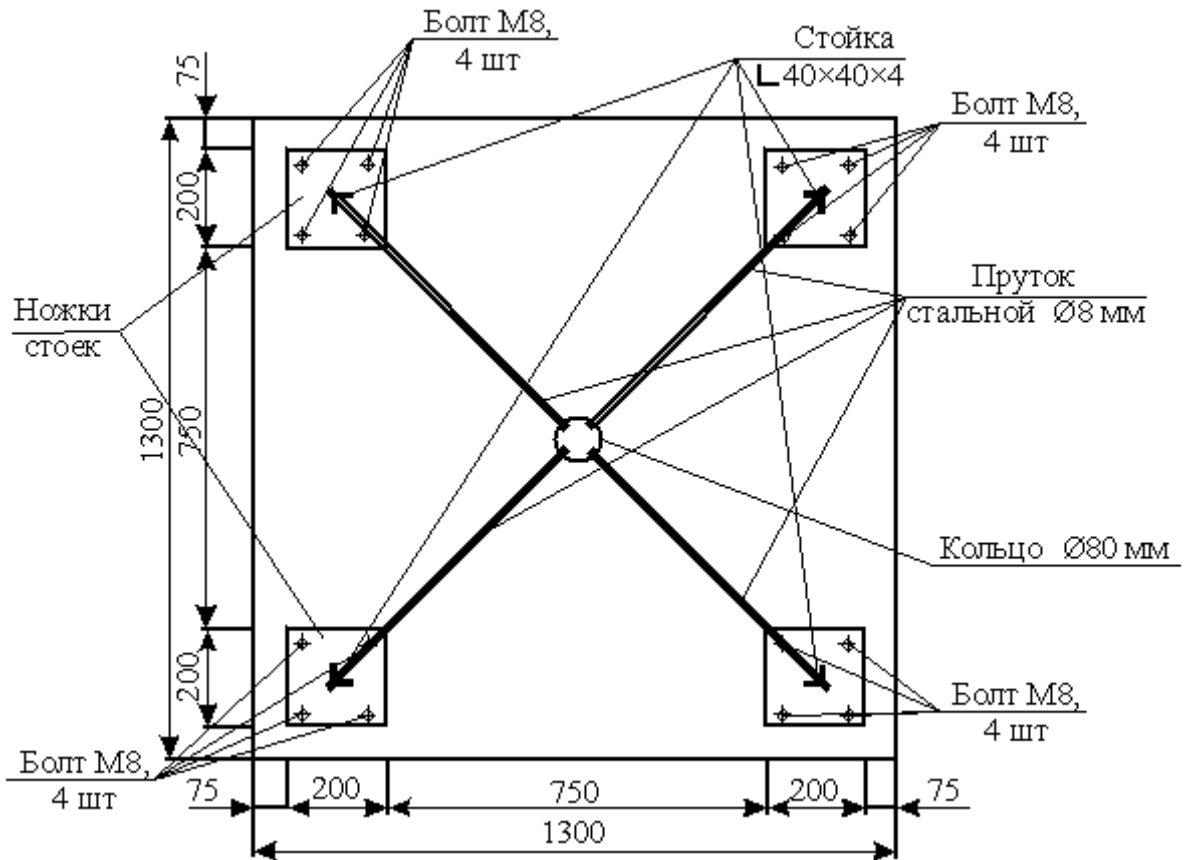
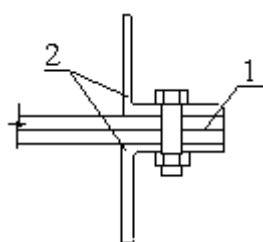


Рисунок 4.4 – Сечение 2-2 испытательного станда в уровне горизонтальной связи

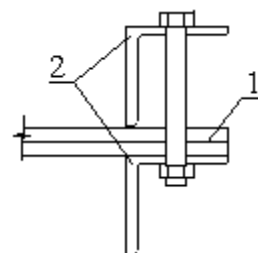


Рисунок 4.5 – Испытательный стенд для исследования круглых составных пластин

Для закрепления пластинок и моделирования условий защемления по контуру верхняя рама стенда является съёмной, нижняя – неподвижной. Пластины закрепляли между горизонтальными рамами по одному из двух вариантов (рисунок 4.6).



а) жесткое защемление



б) шарнирное опирание

Рисунок 4.6 – Условия закрепления составной пластины по контуру (1 – испытываемая составная пластина; 2 – уголки верхней и нижней горизонтальных рам)

При шарнирном закреплении болты закручивались без натяга, только с целью предотвращения отрыва конструкции от опоры при динамическом нагружении. В качестве связей между слоями использовались стальные болты диаметром 2 мм.

## 4.2 Методика проведения экспериментальных исследований составных пластин

### 4.2.1 Методика проведения статических испытаний

Для определения прогиба двухслойная составная пластина загружалась равномерно распределенной нагрузкой. Для моделирования распределенной нагрузки использовались запаянные полиэтиленовые пакеты с песком, вес каждого составлял  $10 \pm 0,05$  Н. Загружение производилось в четыре ступени, общий вес каждой ступени составил 250 Н для квадратных пластин и 200 Н для круглых. Максимальная распределенная нагрузка была равна  $q = 1$  кН/м<sup>2</sup>. Общий вид загрузки квадратной и круглой пластин представлен на рисунках 4.7 и 4.8.



Рисунок 4.7 – Загружение квадратной пластины статической нагрузкой



Рисунок 4.8 – Загружение круглой пластины статической нагрузкой

Измерение прогибов производилось в центре пластины индикатором часового типа ИЧ-25 с ценой деления 0,01 мм, укрепленном на штативе (рисунок 4.9).



Рисунок 4.9 – Индикатор часового типа ИЧ-25 для измерения прогибов составной пластины

Снятие показаний по индикатору часового типа ИЧ-25 проводилось на каждой ступени нагружения примерно через  $30 \pm 10$  секунд после стабилизации показаний прибора. После снятия показания по индикатору от максимальной нагрузки, которая составила  $1 \text{ кН/м}^2$ , пластина разгружалась и после пятнадцати минут «отдыха» загружалась вновь. Для каждого типа составной пластинки (количество нагелей, условия закрепления) испытания проводились не менее трёх раз до получения стабильных значений экспериментальных прогибов.

#### **4.2.2 Методика проведения динамических испытаний составных пластин**

В ходе проведения динамических испытаний определялись основные частоты собственных колебаний двухслойной изотропной пластины в зависимости от количества и диаметра нагелей и условий закрепления. Измерения основных частот колебаний выполнялись при помощи виброанализатора «ВИБРАН – 2.0» (рисунок 4.10). Датчик закреплялся снизу в центре пластинки, а сверху производился удар резиновой киянкой.



Рисунок 4.10 – Виброанализатор «ВИБРАН – 2.0»

Значения частот собственных круговых частот поперечных колебаний определялись из виброграмм, исключая переходной процесс стабилизации колебаний по формуле:

$$\omega = 2\pi f, \quad (4.1)$$

где  $f$  – техническая частота колебаний (число полных колебаний за интервал времени  $t = 1\text{с}$ ).

Для каждого типа составной пластинки динамические испытания проводились также не менее трёх раз до получения стабильных значений экспериментальных частот поперечных колебаний.

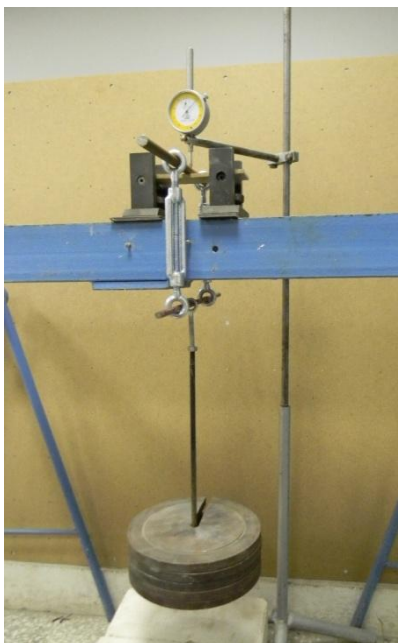
Для каждой составной пластинки изменялось количество регулярно симметрично установленных нагелей и граничные условия – защемление и шарнирное опирание. В качестве поперечных связей и связей сдвига использовались стальные болты диаметром 3 мм.

#### **4.3 Определение кратковременного модуля упругости материала слоёв составной пластины**

В качестве материала экспериментальной пластины была выбрана древесноволокнистая плита толщиной 5,5 мм. Этот выбор обусловлен возможностью смоделировать податливость связей сдвига, а также физико-механическими свойствами испытываемого материала.

Для определения действительного модуля древесноволокнистой плиты был изготовлена испытательная установка в соответствии с ГОСТ 10635-88 «Плиты древесностружечные. Методы определения предела прочности и модуля упругости при изгибе», представленная на рисунке 4.11.

а)



б)

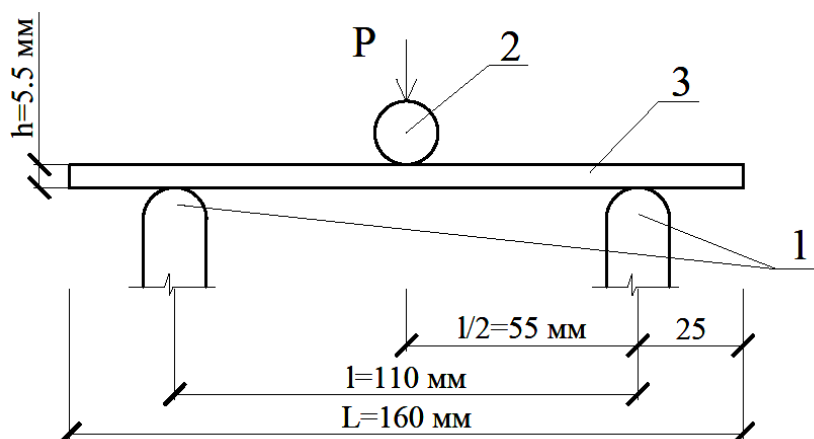


Рисунок 4.11 – Установка для определения кратковременного модуля упругости древесноволокнистой плиты

(а – общий вид установки; б- схема нагружения образца; 1 – неподвижные опоры, 2 – стержень, передающий нагрузку на образец, 3 опытный образец)

Образцы для испытаний вырезались из обоих слоёв предварительно испытанной составной пластинки как вдоль листа древесноволокнистой плиты, из которой изготавливались опытные конструкции, так и поперёк (рисунок 4.12).

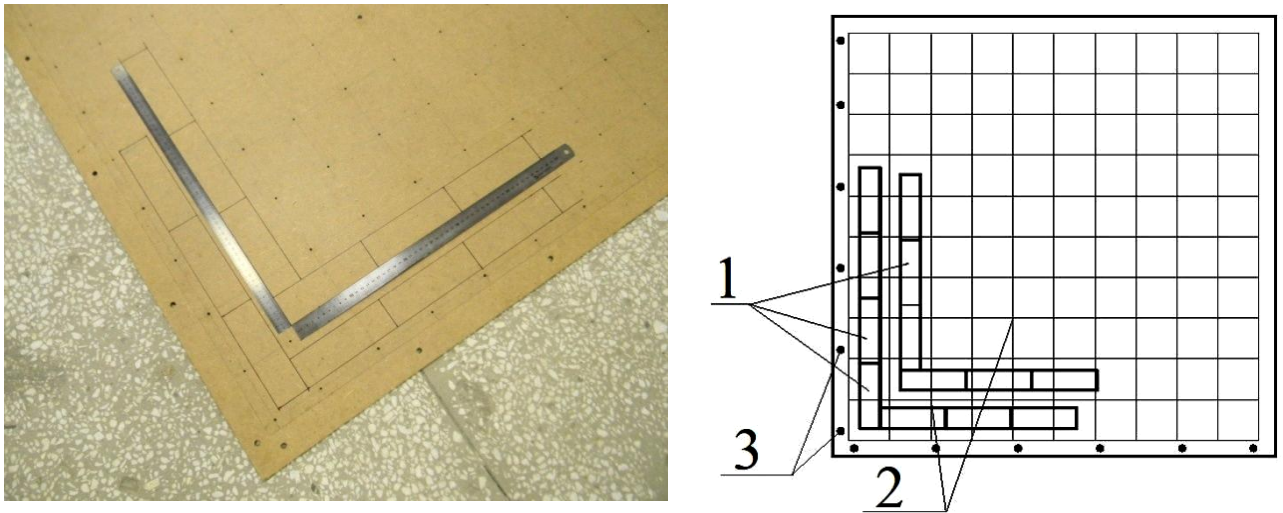


Рисунок 4.12 – Раскрой образцов для определения кратковременного модуля упругости древесноволокнистой плиты

(1 – образцы для испытаний; 2 – существующая сетка отверстий под нагели; 3 – отверстия под нагели на опоре)

Ширина образцов составляла 50 мм, а длина 20-кратна толщине плюс 50 мм, что составило 160 мм. Согласно изменения №1 ГОСТ 10635-88 «Плиты древесностружечные. Методы определения предела прочности и модуля упругости при изгибе», пункт 3.5 скорость нагружения составила 1...2 мм/мин и снимались не менее 8 показаний индикатора часового типа ИЧ-25 (класс 1, цена деления 0,01 мм, диапазон измерений 25 мм) через равные интервалы приращения нагрузки, составлявшие 15 Н. Максимальная нагрузка составила 150 Н, что составляет 33,3% разрушающей нагрузки, которая предварительно была определена на отдельных трех образцах и равнялась в среднем 450 Н. Результаты испытаний приведены в таблице 4.1.

В ходе статической обработки результатов измерения задались доверительной вероятностью  $p_d=0,95$  в соответствии с [48]. Также вычислялось наибольшее нормированное отклонение  $v$ :

$$v = \frac{\max|X_i - \bar{X}|}{\sigma}, \quad (4.2)$$

где  $X_i$  – результаты измерений;  $\bar{X}$  – средняя величина результата измерения;  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение.

При проведении статистической обработки результатов испытаний было выявлено, что полученное значение наибольшего нормированного откло-



нения меньше максимально допустимого  $v < v_q = 2,294$ . Таким образом, можно считать, что все результаты испытаний являются достоверными.

Таблица 4.1 – Показания индикатора часового типа и вычисленные прогибы при экспериментальном определении модуля упругости древесноволокнистой плиты

№	Показания индикатора часового типа и прогибы S (мм) при нагрузке P (Н)										
	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
1	1541	<u>1532</u> 0,09	<u>1523</u> 0,18	<u>1508</u> 0,33	<u>1493</u> 0,48	<u>1481</u> 0,61	<u>1468</u> 0,73	<u>1452</u> 0,89	<u>1436</u> 1,05	<u>1424</u> 1,17	<u>1412</u> 1,29
2	1511	<u>1499</u> 0,13	<u>1486</u> 0,25	<u>1472</u> 0,39	<u>1458</u> 0,53	<u>1444</u> 0,67	<u>1430</u> 0,81	<u>1414</u> 0,97	<u>1398</u> 1,13	<u>1383</u> 1,29	<u>1367</u> 1,44
3	1544	<u>1530</u> 0,14	<u>1516</u> 0,28	<u>1501</u> 0,43	<u>1486</u> 0,58	<u>1469</u> 0,75	<u>1452</u> 0,92	<u>1438</u> 1,06	<u>1424</u> 1,20	<u>1408</u> 1,36	<u>1392</u> 1,52
4	1537	<u>1522</u> 0,15	<u>1507</u> 0,30	<u>1492</u> 0,45	<u>1477</u> 0,60	<u>1465</u> 0,72	<u>1453</u> 0,84	1434 1,03	<u>1415</u> 1,22	<u>1399</u> 1,39	<u>1382</u> 1,55
5	1528	<u>1517</u> 0,12	<u>1505</u> 0,23	<u>1489</u> 0,39	<u>1473</u> 0,55	<u>1459</u> 0,70	<u>1444</u> 0,84	<u>1428</u> 1,00	<u>1412</u> 1,16	<u>1396</u> 1,32	<u>1380</u> 1,48
6	1528	<u>1520</u> 0,08	<u>1512</u> 0,16	<u>1498</u> 0,30	<u>1484</u> 0,44	<u>1470</u> 0,58	<u>1456</u> 0,72	<u>1444</u> 0,85	<u>1431</u> 0,97	<u>1417</u> 1,12	<u>1402</u> 1,26
7	1517	<u>1504</u> 0,14	<u>1490</u> 0,27	<u>1476</u> 0,42	<u>1461</u> 0,56	<u>1447</u> 0,71	<u>1432</u> 0,85	<u>1418</u> 0,99	<u>1404</u> 1,13	<u>1389</u> 1,29	<u>1373</u> 1,44
8	1495	<u>1483</u> 0,12	<u>1471</u> 0,24	<u>1456</u> 0,39	<u>1441</u> 0,54	<u>1426</u> 0,69	<u>1411</u> 0,84	<u>1394</u> 1,02	<u>1376</u> 1,19	<u>1360</u> 1,35	<u>1344</u> 1,51
9	1496	<u>1485</u> 0,11	<u>1474</u> 0,22	<u>1461</u> 0,36	<u>1447</u> 0,49	<u>1435</u> 0,61	<u>1423</u> 0,73	<u>1406</u> 0,91	<u>1388</u> 1,08	<u>1371</u> 1,25	<u>1354</u> 1,42
10	1492	<u>1477</u> 0,15	<u>1462</u> 0,30	<u>1448</u> 0,45	<u>1433</u> 0,59	<u>1418</u> 0,74	<u>1403</u> 0,89	<u>1389</u> 1,04	<u>1374</u> 1,18	<u>1359</u> 1,34	<u>1343</u> 1,49
$S_{cp}$ , мм	-	0,122 ±0,01 7	0,243 ±0,03 4	0,390 ±0,03 5	0,536 ±0,03 7	0,677 ±0,04 2	0,817 ±0,04 9	0,974 ±0,05 1	1,130 ±0,05 6	1,290 ±0,06 2	1,440 ±0,06 9
$v$		1,75	1,75	1,82	1,85	1,63	1,4	1,82	2,07	1,98	1,87
$v_q$		2,294									
$E$ , МПа		-	-	4478	4096	4181	4270	4034	3822	3852	3883
$E_{cp}$ МПа		4020									

Примечание. В числителе приведены отсчёты по прибору, в знаменателе – прогибы.

По данным таблицы 4.1 построен график «Нагрузка – прогиб», где прогиб принимался по средним значениям для 10 образцов при каждом этапе нагружения (рисунок 4.13).

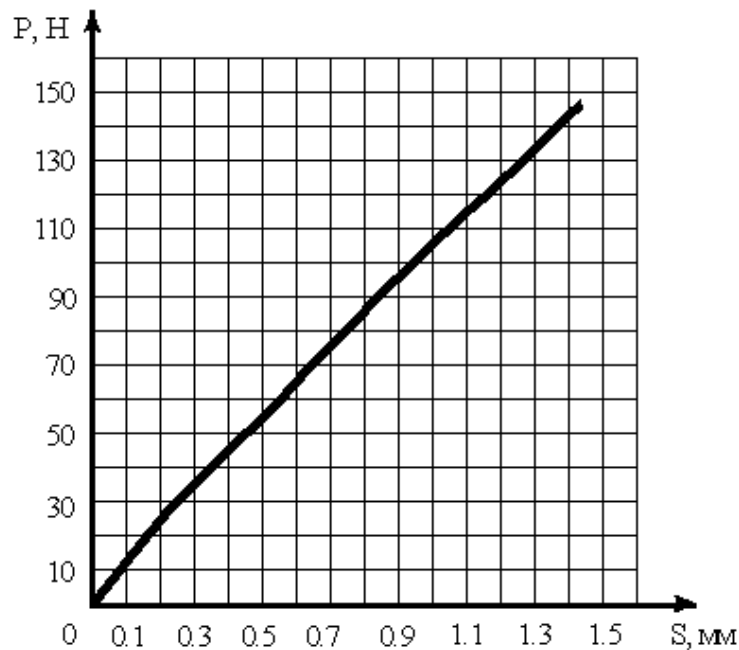


Рисунок 4.13 – Зависимость «Нагрузка – прогиб» при экспериментальном определении модуля упругости

По графику можно сделать вывод о линейной зависимости прогиба  $S$  от нагрузки  $F$ , что соответствует требованиям нормативного документа.

Модуль упругости при изгибе в таблице 4.1 в соответствии с [4] вычислялся по формуле (МПа):

$$E_i = \frac{l^3(P_2 - P_1)}{4bh^3(S_2 - S_1)}, \quad (4.3)$$

где  $l$  – расстояние между опорами испытательного устройства, мм;  $b$  – ширина образца, мм;  $h$  – толщина образца, мм;  $(P_2 - P_1)$  – фиксированное (3 интервала) приращение нагрузки, Н;  $(S_2 - S_1)$  – приращение прогиба, соответствующее фиксированному приращению нагрузки, определяемому по таблице с точностью до 0,01 мм.

Модуль упругости в интервале приращения нагрузки 15...45 Н является ошибкой в серии, это связано с первоначальным обмятием образцов на опорах и под ножом установки. Поэтому эти результаты из серии удалялись и находилось среднее арифметическое для модуля упругости по 7 результатам испытаний.

По результатам вычислений средний модуль упругости  $E$  для древесноволокнистой плиты составил  $E = 4020$  МПа.

#### 4.4 Учет податливости заделки на опоре экспериментальной составной пластины

При проведении испытаний пластин, граничными условиями которых является защемление, возникает необходимость в учете податливости заделки на контуре.

Экспериментальные исследования по оценке степени податливости заделки проводились на стенде, описанном в параграфе 4.1. Испытания выполнены для одной пластины из древесноволокнистой плиты толщиной 5,5 мм. Оценка степени податливости заделки выполнялась при статическом и динамическом нагружении по методике, приведённой в п. 4.2. Максимальная равномерно распределенная статическая нагрузка составила  $q = 250 \text{ Н/м}^2$ .

##### 4.4.1 Моделирование жесткого защемления путем введения дополнительных стержней

Моделируем пластину в программном комплексе SCAD Office и вводим дополнительные вертикальные стержни, которые обладают определенной продольной  $EA$  и изгибной  $EI_y$  и  $EI_x$  жесткостью (рисунок 4.14).

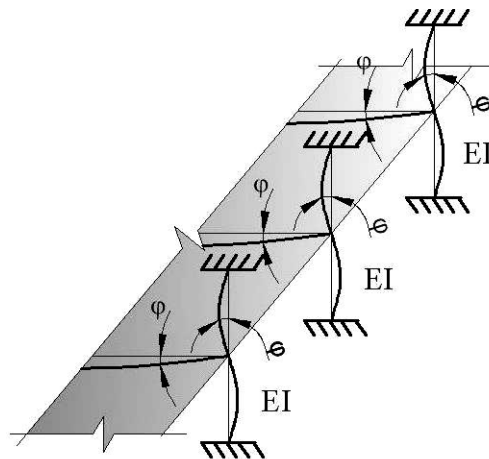


Рисунок 4.14 – Моделирование податливой заделки путем введения дополнительных стержней

Изменяя последовательно одновременно изгибную жесткость  $EI_y$  и  $EI_x$  вертикальных стержней от  $10^{-5}$  до  $10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$ , подбираем значение  $EI$ , при котором численные прогиб и частота собственных поперечных колебаний пластинки совпадут с экспериментальными. Длина дополнительных стержней

принята равной толщине пластины  $\delta = 5,5$  мм, концы вертикальных стержней ограничили линейными связями и углами поворота во всех направлениях. Результаты исследований приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Зависимость прогиба и частот собственных колебаний пластины в зависимости от изгибной жесткости дополнительных вертикальных стержней

Изгибная жесткость стержней $EI_x (EI_y)$ $\text{Н}\cdot\text{м}^2$	Численные данные		Экспериментальные данные	
	Прогиб $W_0$ , (мм)	Круговая частота, $\omega$ ( $\text{с}^{-1}$ )	Прогиб $W_0$ , (мм)	Круговая частота, $\omega$ ( $\text{с}^{-1}$ )
$10^{-5}$	8,65	99,490	3,05	164,2
$10^{-4}$	8,61	99,720		
$10^{-3}$	8,26	101,89		
0,01	6,19	118,30		
0,1	3,44	160,20		
1	2,77	178,65		
10	2,70	181,20		
100	2,69	181,40		
$10^3$	2,69	181,50		

По данным таблицы 4.2 построен график зависимости «Изгибная жесткость дополнительных стержней – прогиб» и «Изгибная жесткость дополнительных стержней – частота собственных колебаний» (рисунок 4.15).

Очевидно, что при значениях изгибной жесткости, близкой к нулю, получаем шарнирное опирание пластинки, а при очень больших значениях – жесткую заделку. Экспериментальные данные жестко заделанной пластины соответствуют смоделированной с дополнительными стержнями по контуру опирания длиной  $\delta = 5,5$  мм изгибной жесткости стержней  $EI_x = EI_y = 0,23 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$ . Максимальный прогиб при использовании данной расчетной схемы составил  $W_0=3,05$  мм, а частота собственных колебаний  $\omega = 164,2 \text{ с}^{-1}$ , что практически полностью совпадает с экспериментальными данными.

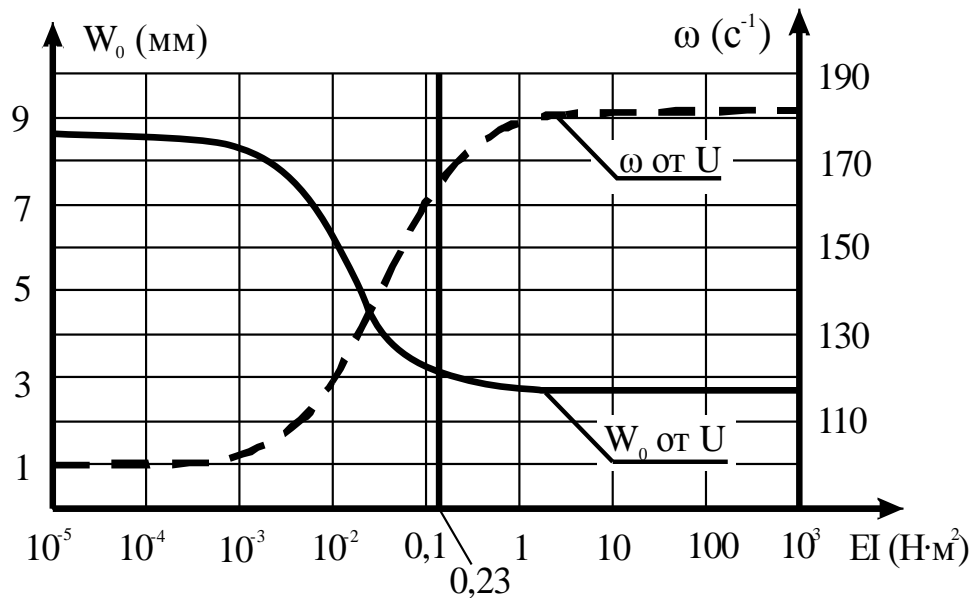


Рисунок 4.15 – Изменение частот собственных колебаний ( $\omega$ ) и максимального прогиба ( $W_0$ ) в зависимости от изгибной жесткости дополнительных стержней

#### 4.4.2 Моделирование жесткого защемления путем введения связей конечной жесткости

Ещё одним способом учёта податливости заделки на контуре пластины является введение в эти узлы связей конечной жесткости, ограничивающих поворот  $U_X$  и  $U_Y$  в узлах заделки (рисунок 4.16).

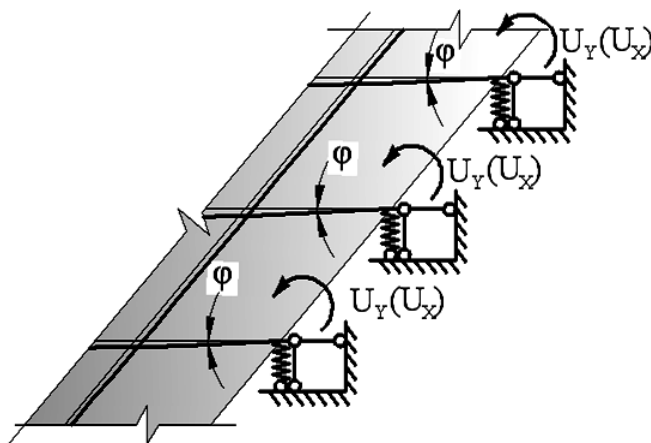


Рисунок 4.16 – Моделирование жесткого защемления путем введения связей конечной жесткости

Последовательно изменяя параметры  $U_X$  и  $U_Y$ , подбираем значение жёсткости связей, при котором численный прогиб пластинки совпадет с экспериментальным. Результаты исследований приведены в таблице 4.3.

Таблица 4.3 – Зависимость прогиба и частот собственных колебаний пластины в зависимости от жесткости связей конечной жесткости

Жесткость связей конечной жесткости, Н·м/рад	Численный эксперимент		Экспериментальные данные	
	Прогиб $W_0$ , (мм)	Круговая частота, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Прогиб $W_0$ , (мм)	Круговая частота, $\omega$ ( $c^{-1}$ )
0	7,7	101,87	3,05	164,2
50	4,1	141,40		
100	3,5	153,22		
150	3,3	158,95		
200	3,1	162,30		
250	3,0	164,60		
300	3,0	166,20		
350	2,9	167,40		
400	2,9	168,33		
450	2,9	169,07		
500	2,9	168,68		

По данным таблицы 4.3 построен график зависимости «Жесткость связей конечной жесткости – прогиб» и «Жесткость связей конечной жесткости – частота собственных колебаний» (рисунок 4.17).

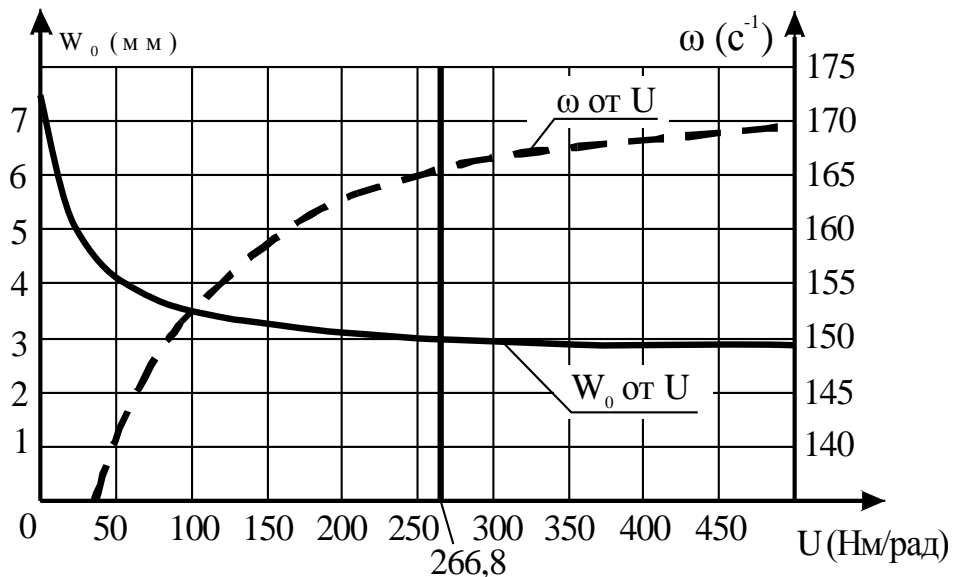


Рисунок 4.17 – Изменение частот собственных колебаний ( $\omega$ ) и максимального прогиба ( $W_0$ ) в зависимости от жесткости связей

Экспериментальные данные жестко зашумленной пластины соответствуют смоделированной с замененной жесткой заделки по контуру на шарнир с введением связей конечной жесткости  $U_x = U_y = 266,8$  Н·м/рад. Макси-

мальный прогиб при использовании данной расчетной схемы составил  $W_0=3,01\text{мм}$ , а частота собственных колебаний  $\omega = 165,2 \text{ с}^{-1}$ , различия с экспериментальными данными составляет чуть более 1%

#### 4.4.3 Оценка степени податливости жесткого защемления двухслойной пластины

##### А) Квадратная пластина

Величина связей конечной жесткости, вводимых взамен жесткого защемления, была посчитана в предыдущем параграфе 4.4.2, и составляет  $U_X = U_Y = 266,8 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ . Сравнение экспериментальных и теоретических данных одного слоя составной пластинки с учетом и без учета податливости защемления пластины по контуру приведено в таблице 4.4.

Таблица 4.4 – Сравнение экспериментальных и теоретических данных для 1 слоя жестко защемленной по контуру с учетом податливости узла заделки

	Круговая частота		Максимальный прогиб	
	$\omega \text{ 1/с}$	Отклонение от эксп-ных данных, %	$W_0 \text{ (мм)}$	Отклонение от эксп-ных данных, %
Экспериментальные значения	164,2	–	3,05	–
МКЭ без учета податливости	175,73	6,56	2,66	-14,47
МКЭ с учетом податливости	165,2	0,61	3,01	-1,16

Как видно из данных таблицы 4.4, неучёт податливости завышает частоты собственных колебаний двухслойной пластины примерно на 7% по сравнению с экспериментальными и занижает максимальный прогиб примерно на 15%

##### А) Круглая пластина

Оценка степени податливости проводилась по методике, описанной в параграфе 4.4.2. При моделировании податливой заделки в программном комплексе «SCAD» вводились связи конечной жесткости по контуру, вели-

чина которых составила  $U_x = U_y = 249,7 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$ . Сравнение экспериментальных и теоретических данных с учетом и без учета податливости заделки пластины при её заземлении по контуру приведено в таблице 4.5.

Таблица 4.5 – Сравнение экспериментальных и теоретических данных для 1 пластины жестко заземленной по контуру с учетом податливости узла заделки

	Круговая частота		Максимальный прогиб	
	$\omega$ 1/с	Отклонение от exper. данных, %	$W_0$ (мм)	Отклонение от exper. данных, %
Экспериментальные значения	133,14	–	5,07	–
МКЭ без учета податливости	146,24	11,27	4,1	-19,13
МКЭ с учетом податливости	131,42	-1,29	5,07	–

Неучёт податливости заделки по контуру пластины приводит к превышению частоты собственных колебаний примерно на 11% по сравнению с экспериментальными частотами и снижает максимальный прогиб примерно на 19%.

#### **4.5 Экспериментальные исследования двухслойных составных квадратных пластин на податливых связях**

##### **4.5.1 Статические и динамические испытания квадратных составных пластин**

Экспериментальная пластина закрепляется между верхней (снимаемой) и нижней (неподвижной) рамами, при помощи которых также моделируется условия закрепления. Двухслойную пластину древесноволокнистой плиты связывали между собой симметрично расположенными нагелями, которые представляли собой стальной болт диаметром 3 мм. Продольная жесткость связей составила  $EA = 1455390 \text{ Н}$ . Были рассмотрены схемы с 1, 25, 61 и 121 нагелем (рисунок 4.18).



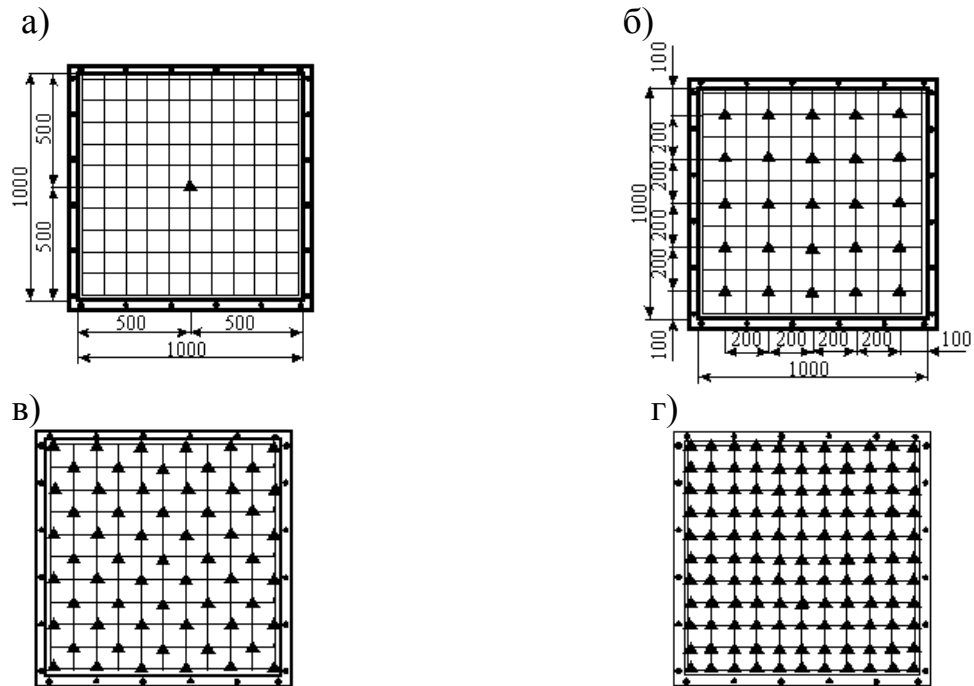


Рисунок 4.18 – Схема симметричной расстановки нагелей в двухслойной составной пластине

(а – 1 нагель, б – 25 нагелей, в – 61 нагель, г – 121 нагель)

#### **А) Статические испытания.**

Для определения максимального прогиба составная пластина подвергалась статическим испытаниям по методике, приведённой в пункте 4.2. Результаты экспериментальных исследований составной пластины приведены в таблице 4.6.

На основании экспериментальных прогибов двухслойной пластины на податливых связях, приведенных в таблице 4.6, были построены графики зависимости прогибов  $W_0$  от нагрузки  $q$  (рисунки 4.19 и 4.20).

Таблица 4.6 – Результаты экспериментальных исследований двухслойной составной пластины на податливых связях при изменении количества симметрично расположенных связей сдвига для шарнирного опирания и податливой заделки по контуру

Количество симметрично расположенных нагелей	Нагрузка $q$ (Н/м <sup>2</sup> )	Двухслойная пластина шарнирно оперта по контуру				Двухслойная пластина с податливой заделкой по контуру			
		Показания ИЧ-25 при соответствующей ступени загрузки $X_i$			Средний прогиб $X_i - X_0$ (мм)	Показания ИЧ-25 при соответствующей ступени загрузки $X_i$			Средний прогиб $X_i - X_0$ (мм)
		1	2	3		1	2	3	
1	0	19	20	20	-	130	238	249	-
	250	499	520	510	4,90	333	433	437	1,95
	500	840	845	843	8,23	493	598	590	3,55
	750	1065	1082	1074	10,54	675	782	763	5,34
	1000	1534	1522	1533	15,10	892	979	993	7,49
25	0	106	329	25	-	106	110	113	-
	250	520	769	471	4,33	265	277	287	1,67
	500	847	1089	800	7,59	412	428	430	3,14
	750	1089	1308	1030	9,89	543	563	558	4,45
	1000	1285	1496	1218	11,80	657	679	668	5,58
61	0	205	332	347	-	122	175	189	-
	250	504	609	606	2,78	296	315	323	1,49
	500	791	895	915	5,72	439	462	465	2,93
	750	1056	1105	1153	8,10	576	595	591	4,25
	1000	1169	1294	1295	9,58	639	659	658	4,90
121	0	408	405	368	-	278	271	286	-
	250	478	705	537	1,80	379	393	368	1,02
	500	817	823	797	4,19	478	489	462	1,98
	750	1023	1006	962	6,03	590	591	566	3,04
	1000	1171	1179	1152	7,74	714	710	717	4,35

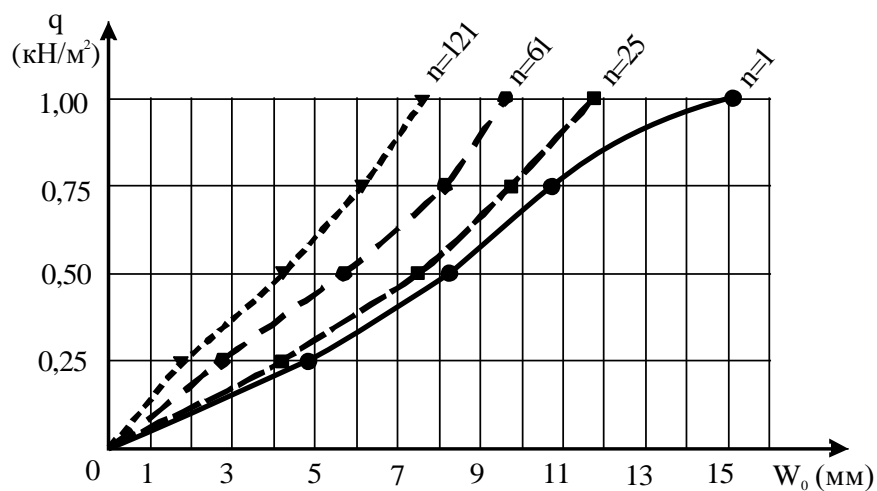


Рисунок 4.19 – Зависимость прогибов  $W_0$  от нагрузки  $q$  для двухслойной шарнирно опертой квадратной пластины

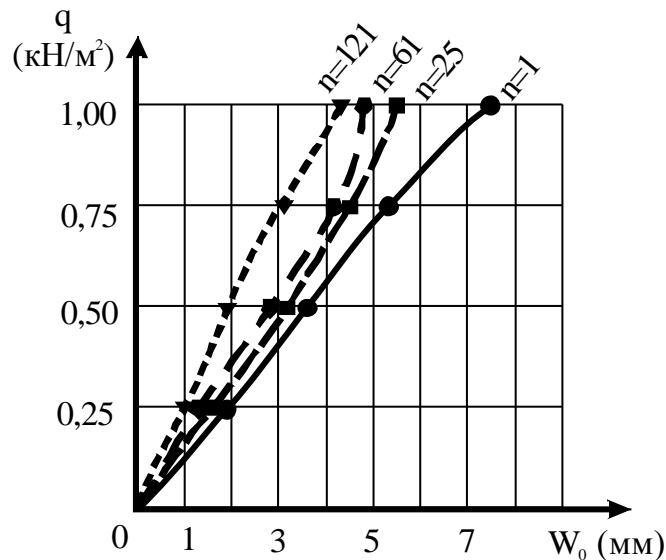


Рисунок 4.20 – Зависимость прогибов  $W_0$  от нагрузки  $q$  для двухслойной защемленной по контуру квадратной пластины

Результаты испытаний свидетельствуют, что деформирование экспериментальных составных пластинок происходит в упругой стадии.

#### **Б) Динамические испытания.**

Для определения частот собственных колебаний составная пластина подвергалась динамическим испытаниям по методике, описанной в пункте 4.2.

Виброграммы, полученные в ходе эксперимента, представлены на рисунке 4.21 при шарнирном опирании и на рисунке 4.22 при податливой заделке по контуру.

На виброграммах, изображенных на рисунках 4.21 и 4.22, имеется наложение второстепенных волн более низкой частоты, о чем свидетельствует искривление виброграммы. На наш взгляд, это незначительные паразитные токи, образующиеся в приборе или вибродатчике.

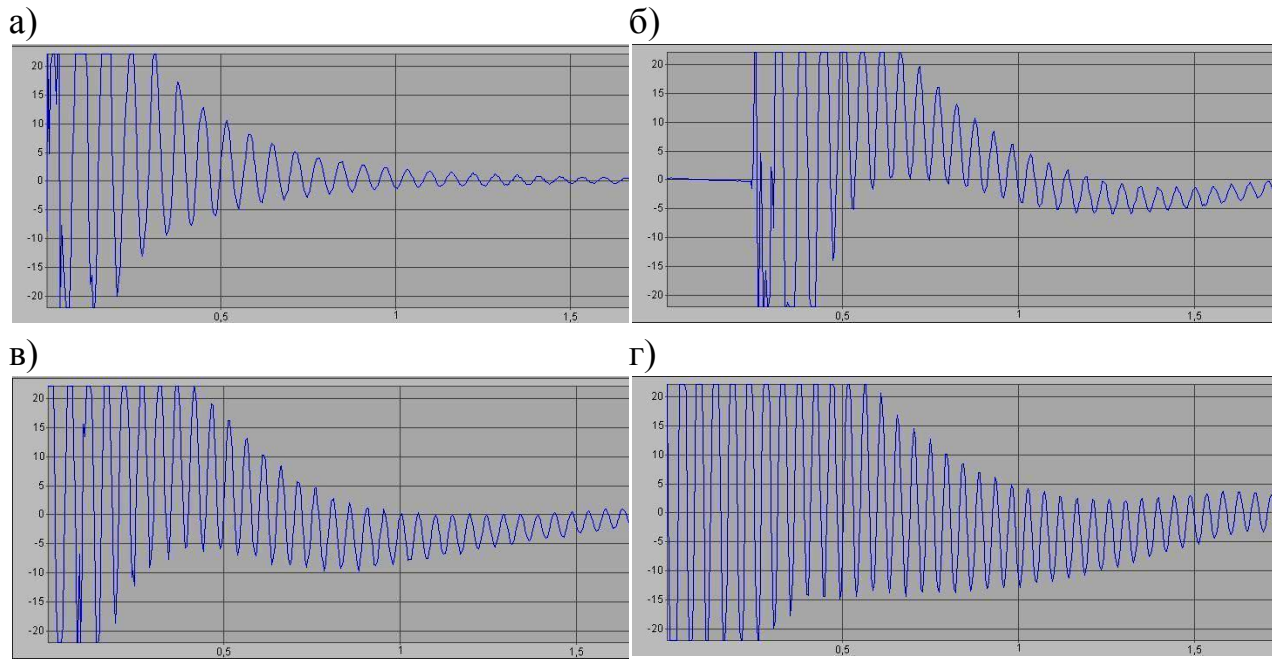


Рисунок 4.21 – Характерные виброграммы собственных колебаний составной пластинки шарнирно опертой по контуру  
(а) при 1 нагеле; б) при 25 нагелях; в) при 61 нагеле; г) при 121 нагеле)

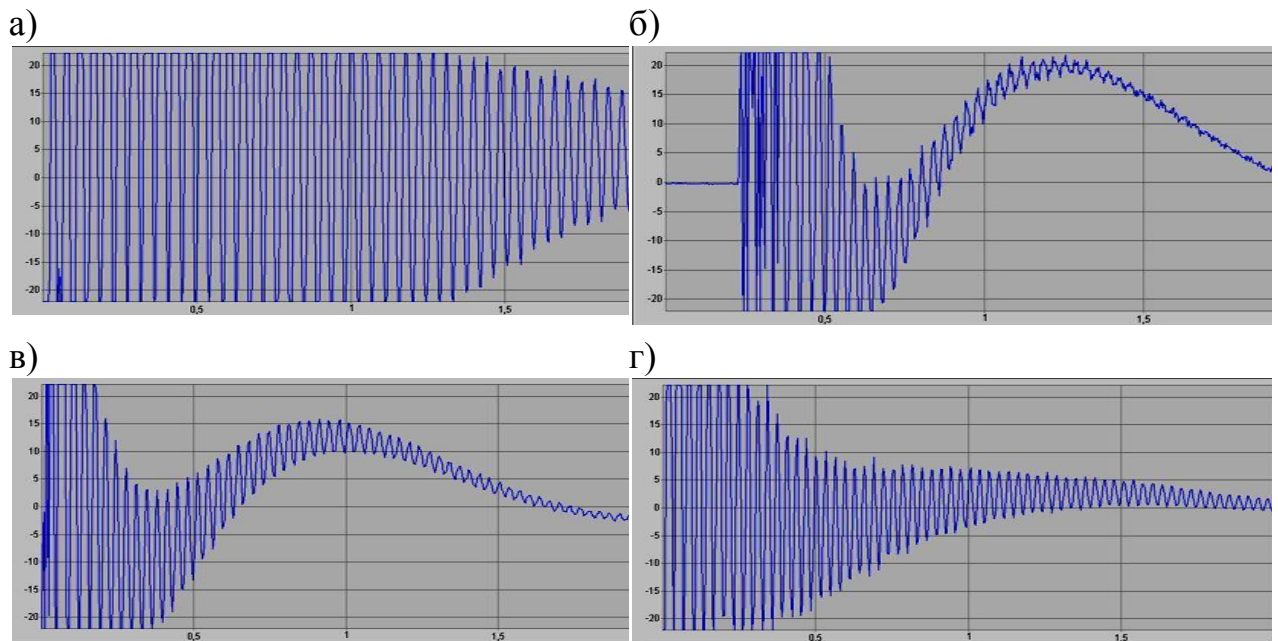


Рисунок 4.22 – Характерные виброграммы собственных колебаний составной пластинки защемленной по контуру  
(а – при 1 нагеле; б – при 25 нагелях; в – при 61 нагеле; г – при 121 нагеле)

Результаты динамических испытаний представлены в таблице 4.7.

Таблица 4.7 – Экспериментальным технические и круговые частоты колебаний пластин ( $\text{с}^{-1}$ ) с различным количеством симметрично расположенных нагелей

Количество симметрично расположенных нагелей	Двухслойная пластина шарнирно оперта по контуру		Двухслойная пластина податливо закреплена по контуру	
	Частота $f$	Круговая частота $\omega$	Частота $f$	Круговая частота $\omega$
1	15,90	99,85	22,15	139,1
25	19,00	119,32	28,00	175,84
61	20,50	128,74	30,20	189,65
121	21,60	135,65	31,81	199,74

#### 4.5.2 Сопоставление экспериментальных и теоретических данных

Полученные результаты экспериментальных и численных исследований представлены в таблицах 4.8 и 4.9. Критерием точности является коэффициент  $K$ , связывающий частоту собственных поперечных колебаний пластины  $\omega$  с распределенной массой  $m$  и максимальный прогиб  $W_0$  при действии равномерно распределенной нагрузки  $q$  в формуле В.И. Коробко (4.4):

$$W_0 \omega^2 = K \frac{q}{m}. \quad (4.4)$$

Этот коэффициент для квадратных пластин с жестким закрепленным контуром составляет  $K = 1,61$ , а при шарнирно опертом контуре  $K = 1,582$ .

В результате проведенных исследований была получена хорошая сходимость результатов экспериментальных и численных данных. Для коэффициента  $K$  разница между теоретическими и экспериментальными данными составила от +2,04% до 14,46% для шарнирного опирания. Для податливой заделки по контуру составной пластины расхождение экспериментальных и теоретических данных составила от +9,16% до -10,48%.

Таблица 4.8 – Результаты экспериментальных и теоретических значений максимальных прогибов и основных частот собственных колебаний составной пластины, шарнирно опертой по контуру

	Количество конечных элементов со связями сдвига							
	1		25		61		121	
	Численно	Эксперимент	Численно	Эксперимент	Численно	Эксперимент	Численно	Эксперимент
Круговая частота основного тона, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	100,9	99,85	110,42	116,18	120,17	128,74	137,7	135,7
Максимальный прогиб, $W_0$ (мм)	15,13	15,1	12,68	11,8	10,71	9,58	8,11	7,74
$K=W_0 \omega^2/(q/m)$	1,554	1,519	1,56	1,61	1,56	1,60	1,55	1,437
$K_{\text{АНАЛИТ}}$	1,582							
Отклонение $K$ от $K_{\text{аналит}}$ , %	-2,72	-6,27	-2,18	2,54	-2,13	2,04	-3,14	-14,5

Таблица 4.9 – Результаты экспериментальных и теоретических значений максимальных прогибов и основных частот собственных колебаний составной пластины с податливой заделкой по контуру

	Количество конечных элементов со связями сдвига							
	1		25		61		121	
	Численно*	Эксперимент	Численно*	Эксперимент	Численно*	Эксперимент	Численно*	Эксперимент
Круговая частота основного тона, $\omega$ ( $c^{-1}$ )	155,9	139,1	170,33	175,84	190,65	189,66	211,42	199,70
Максимальный прогиб, $W_0$ (мм)	6,61	7,49	5,54	5,58	4,42	4,9	3,57	4,35
$K=W_0 \omega^2/(q/m)$	1,62	1,463	1,622	1,741	1,621	1,779	1,61	1,751
$K_{\text{АНАЛИТ}}$ ,	1,61							
Отклонение $K$ от $K_{\text{аналит}}$ , %	-0,77	9,16	-0,75	-8,15	-0,70	-10,48	-0,02	-8,74

\* - Теоретические результаты с учетом податливости узла заделки

По нашему мнению, такое расхождение экспериментальных и численных значений коэффициента  $K$  может быть обосновано тем, что в численных расчётах не учтены силы трения между слоями двухслойной составной пластины. Если при статическом нагружении слоям хватало времени для преодоления сил трения, что выражалось в увеличении прогибов в течение 10...15

секунд после приложения очередной ступени нагрузки, то при колебаниях конструкции силы трения действовали на всём протяжении затухания колебаний

#### **4.6 Экспериментальные исследования двухслойных составных пластин круглого очертания на податливых связях**

##### **4.6.1 Статические и динамические испытания круглых составных пластин**

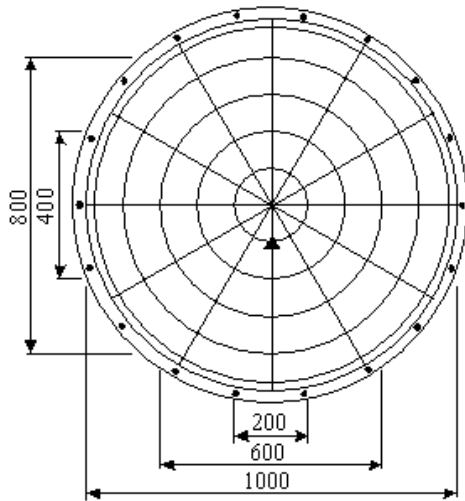
Исследуемая пластина закрепляется между верхней (снимаемой) и нижней (неподвижной) рамами, для чего в полках уголка обоих контуров просверлено равномерно 16 отверстий под болт М8 для моделирования жесткого или шарнирного опирания (рисунок 4.23). Несъемный контур установлен на стойки, выполненные из равнополочного уголка 40×4. Пространственную жесткость обеспечивают подкосы, выполненные из равнополочного уголка 25×3 мм.

Двухслойную пластину связывали между собой симметрично расположенными нагелями, которые представляли собой стальные болты диаметром 3 мм. Для численных исследований двухслойная составная пластина была разбита на 60 конечных элементов при помощи 12 радиальных и 5 кольцевых линий. Были рассмотрены схемы с 1, 12, 30 и 54 нагеля (рисунок 4.24).

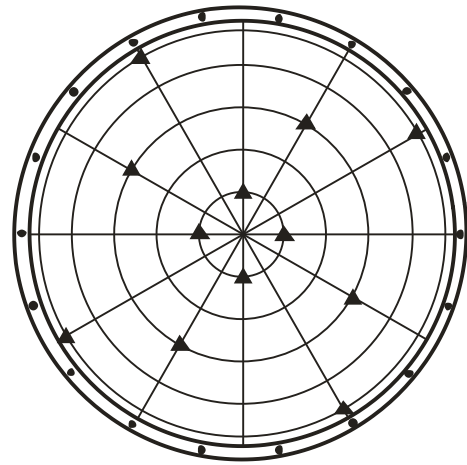


Рисунок 4.23 –Составная круглая пластина на испытательном стенде

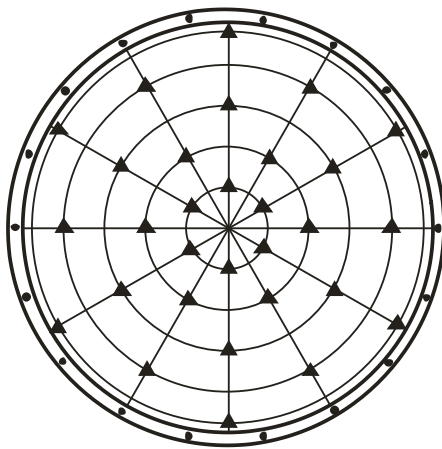
а)



б)



в)



г)

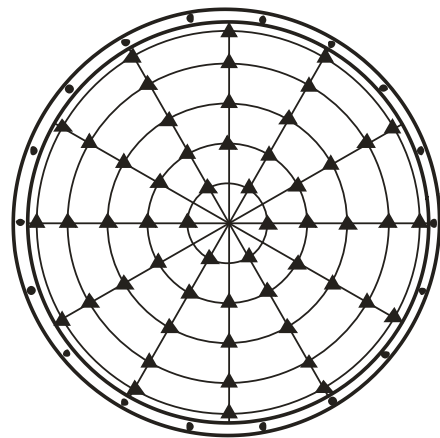


Рисунок 4.24 – Схема симметричной расстановки нагелей в двухслойной составной пластине

(а – 1 нагель, б – 12 нагелей, в – 30 нагелей, г – 54 нагеля)

#### **А) Статические испытания.**

Для определения максимального прогиба составная пластина подвергалась статическим испытаниям по методике, описанной в пункте 4.1. Результаты экспериментальных исследований приведены в таблице 4.10 для шарнирного опирания и податливой заделки по контуру.



Таблица 4.10 – Результаты статических испытаний двухслойной составной пластины на податливых связях при изменении количества симметрично расположенных связях сдвига для шарнирного опирания и податливой заделки по контуру

Количество симметрично расположенных нагелей	Нагрузка, Н	Двухслойная пластина, шарнирно опертая по контуру				Двухслойная пластина с податливой заделкой по контуру			
		Показания ИЧ-25 при соответствующем статическом нагружении, $X_i$			Средний прогиб по трём нагружениям	Показания ИЧ-25 при соответствующем статическом нагружении, $X_i$			Средний прогиб по трём нагружениям
		1	2	3		1	2	3	
1	0	195	172	24434	-	154	159	73	-
	250	765	820	25075	6,197	451	468	362	2,98
	500	1190	1249	25493	10,437	767	762	675	6,06
	750	1525	1496	25742	13,207	1020	1029	943	8,69
	1000	1744	1709	25950	15,340	1246	1240	1138	10,79
12	0	304	45	64	-	1444	648	639	-
	250	662	498	532	4,263	1584	796	836	1,62
	500	1040	794	858	7,597	1834	1052	1074	4,1
	750	1309	1058	1077	10,103	2039	1244	1251	6,01
	1000	1504	1211	1250	11,840	2185	1390	1392	7,45
30	0	72	117	278	-	631	69	468	-
	250	356	413	567	2,897	769	198	597	1,32
	500	604	663	824	5,413	915	348	739	2,78
	750	848	893	1058	7,773	1061	490	883	4,22
	1000	1064	1098	1286	9,937	1178	612	1000	5,41
54	0	5	245	386	-	353	375	373	-
	250	225	469	551	2,030	445	465	462	0,9
	500	417	665	834	4,267	538	560	556	1,84
	750	602	854	1044	6,213	637	656	647	2,8
	1000	782	1029	1193	7,893	735	750	737	3,74

На основании экспериментальных прогибов двухслойной пластины на податливых связях, приведенных в таблице 4.10, был построен график зависимости нагрузки  $P$  от прогибов  $W_0$  для шарнирного опирания и жесткого защемления (рисунок 4.25, 4.26).

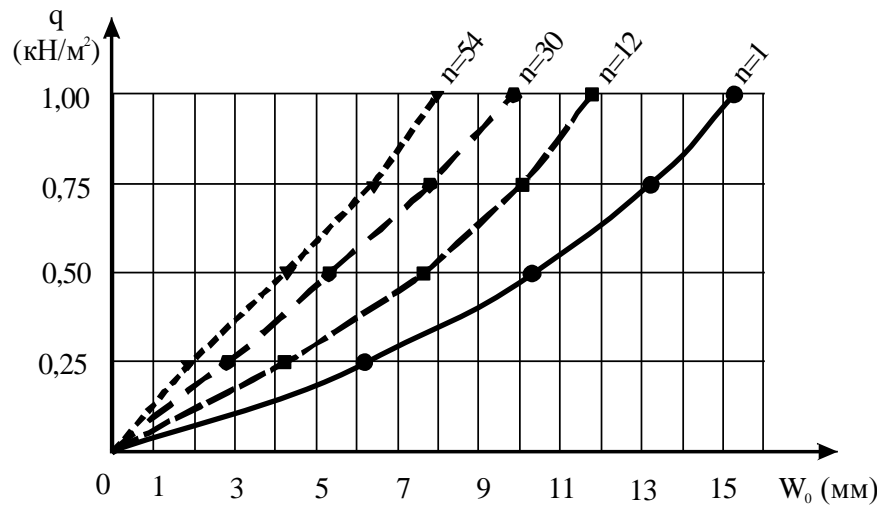


Рисунок 4.25 – График зависимости прогибов  $W_0$  от нагрузки  $q$  для двухслойной шарнирно опертой круглой пластины

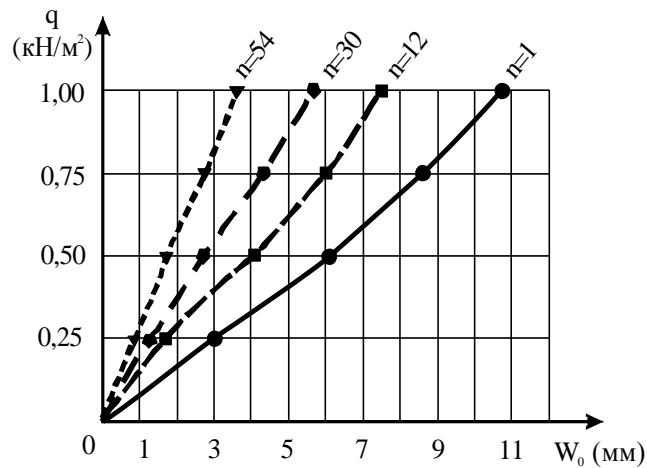


Рисунок 4.26 – График зависимости прогибов  $W_0$  от нагрузки  $q$  для двухслойной защемленной по контуру круглой пластины

Результаты испытаний свидетельствуют, что деформирование экспериментальных составных пластинок происходит в упругой стадии.

### **Б) Динамические испытания.**

Для определения частот собственных колебаний составная пластина подвергалась динамическим испытаниям по методике, приведённой в пункте 4.1

Характерные виброграммы, полученные в ходе эксперимента, представлены на рисунке 4.27 при шарнирном опирании, а также на рисунке 4.28 при податливой заделке по контуру.

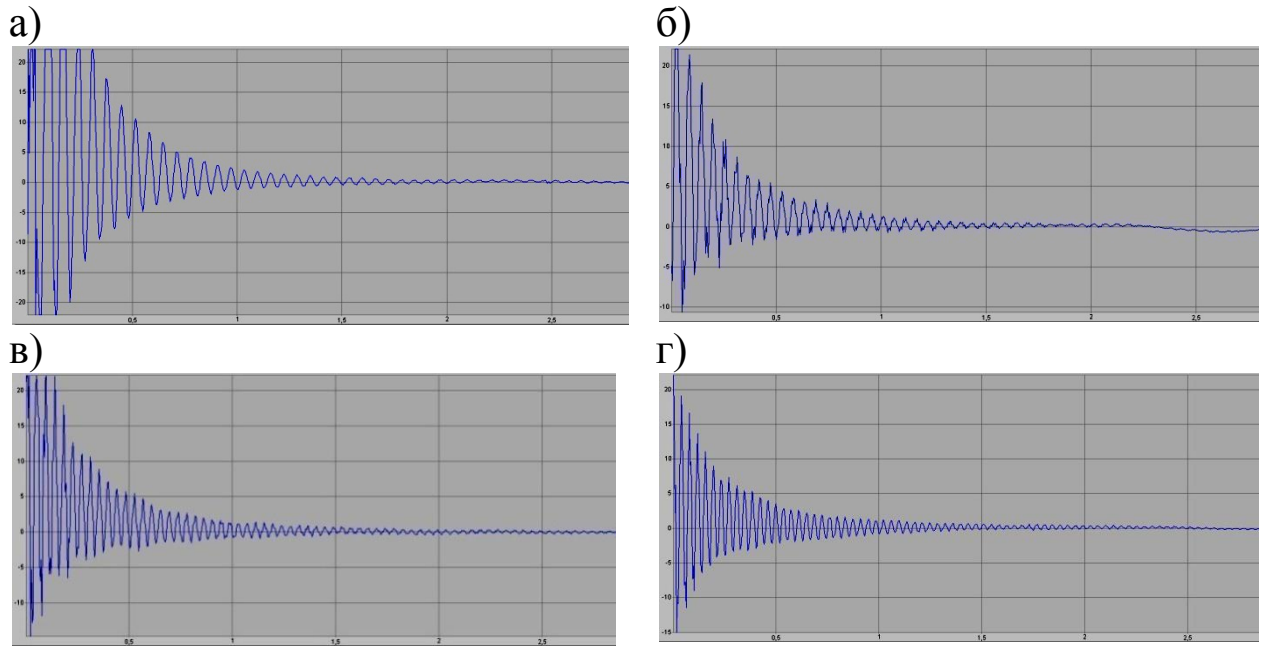


Рисунок 4.27 – Характерные виброграммы собственных колебаний составной пластинки, шарнирно опертой по контуру  
(а – 1 нагель, б – 12 нагелей, в – 30 нагелей, г – 54 нагеля)

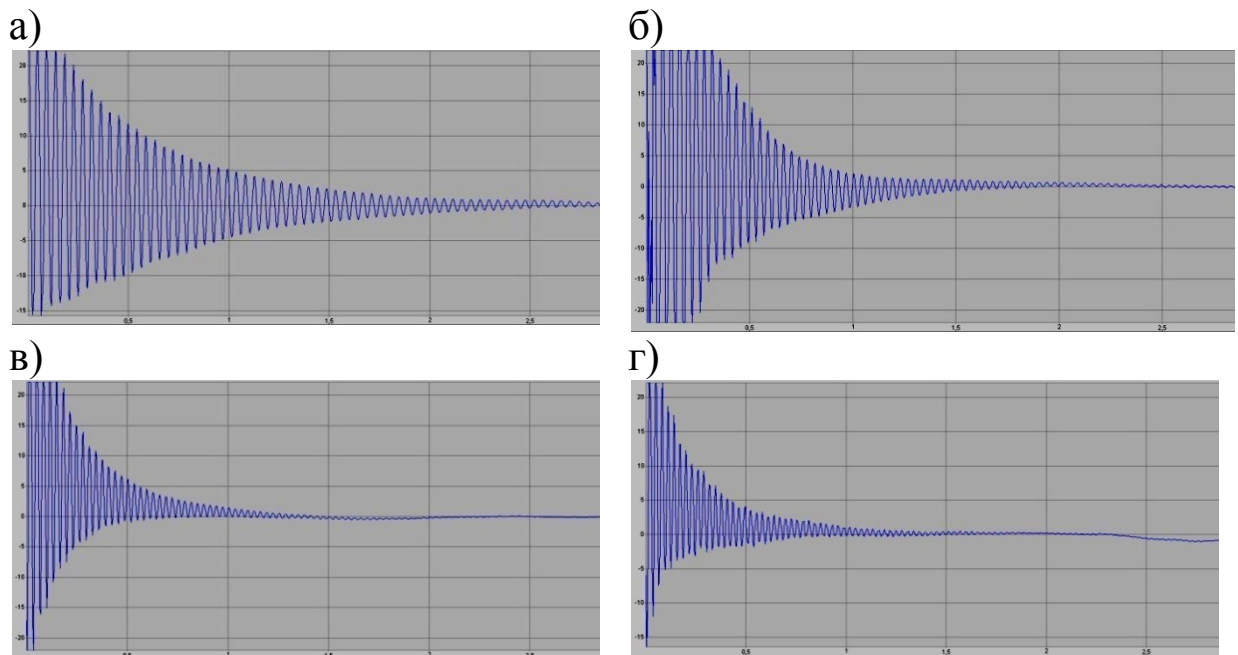


Рисунок 4.28 – Характерные виброграммы собственных колебаний составной пластинки при податливой заделке по контуру  
(а – 1 нагель, б – 12 нагелей, в – 30 нагелей, г – 54 нагель)

Результаты испытаний представлены в таблице 4.11.

Таблица 4.11 – Экспериментальные частоты собственных колебаний пластин ( $c^{-1}$ ) при различном количестве симметрично расположенных нагелей

Количество симметрично расположенных нагелей	Двухслойная пластина, шарнирно опертая по контуру		Двухслойная пластина при податливой заделке по контуру	
	Частота $f$	Круговая частота $\omega$	Частота $f$	Круговая частота $\omega$
1	15,75	98,91	22,20	139,42
12	19,10	119,95	26,0	164,54
30	23,80	149,46	31,00	197,68
54	26,70	167,68	34,89	219,12

#### 4.6.2 Сопоставление экспериментальных и теоретических данных

Полученные результаты экспериментальных и численных исследований представлены в таблице 4.12 для шарнирного опирания и в таблице 4.13 для податливой заделки. Критерием точности является коэффициент  $K$  в формуле В.И. Коробко (4.4). Этот коэффициент для круглых пластин с жестким защемленным контуром составляет  $K = 1,629$ , а при шарнирно опертом контуре  $K = 1,579$

Таблица 4.12 – Результаты экспериментальных и теоретических значений максимальных прогибов и основных частот собственных колебаний составной пластины, шарнирно опертой по контуру

	Количество конечных элементов со связями сдвига							
	1		12		30		54	
	Численно	Эксперимент	Численно	Эксперимент	Численно	Эксперимент	Численно	Эксперимент
Круговая частота основного тона $\omega$ ( $c^{-1}$ )	95,08	98,91	117,5	119,95	131,7	149,46	148,77	167,68
Максимальный прогиб $W_0$ (мм)	18,34	15,34	11,75	11,84	9,45	9,94	7,43	7,89
$K=W_0 \omega^2/(q/m)$	1,573	1,424	1,540	1,616	1,522	2,11	1,56	2,11
$K_{\text{АНАЛИТ}}$	1,579							
Отклонение $K$ от $K_{\text{АНАЛИТ}}$	0,39	9,83	2,50	2,35	1,52	33,38	1,2	33,33

Таблица 4.13 – Результаты экспериментальных и теоретических значений максимальных прогибов и основных частот собственных колебаний составной пластины, жестко заземленной по контуру

	Количество конечных элементов со связями сдвига							
	1		12		30		54	
	Численно*	Эксперимент	Численно*	Эксперимент	Численно*	Эксперимент	Численно*	Эксперимент
Круговая частота основного тона, $\omega$ (с <sup>-1</sup> )	128,02	139,42	139,28	164,54	162,58	197,68	196,9	219,11
Максимальный прогиб, $W_0$ (мм)	10,38	10,79	8,51	7,45	6,07	5,4	4,37	3,74
$K=W_0 \omega^2/(q/m)$	1,614	1,99	1,566	1,91	1,522	1,94	1,607	1,702
$K_{\text{АНАЛИТ}}$	1,629							
Отклонение $K$ от $K_{\text{аналит}}$ , %	0,93	22,17	1,61	17,51	6,56	19,34	1,33	4,47

\* - Теоретические результаты с учетом податливости узла заделки

Анализ полученных данных показывает, что экспериментальные прогибы меньше, а частоты – выше полученных численно независимо от схемы опирания и количества нагелей. Для шарнирно опёртой пластины разница между экспериментальными и численными значениями прогибов составляет от 0,7% до 16,4%, а разница между частотами составляет от 2% до 13,5%. Для пластинки с податливой заделкой по контуру разница между экспериментальными и численными значениями прогибов составляет от 3,9% до 14,4%, разница между частотами составляет от 8,9% до 21,6%.

По нашему мнению, такое расхождение экспериментальных и численных значений коэффициента  $K$  объясняется теми же обстоятельствами, что и при испытаниях квадратной пластины. Для коэффициента  $K$  разница между теоретическими и экспериментальными данными несколько выше – до 33%, что указывает на необходимость учёта сил трения для получения более точных результатов.

#### 4.7 Использование результатов исследования сплошных пластин произвольной формы для расчёта составных пластинок

Рассмотрим произведение максимального прогиба и основной круговой частоты колебаний пластинки [36]:

$$W_0\omega^2 = K_W K_\omega \frac{q}{m} = K \frac{q}{m}. \quad (4.5)$$

где  $K = K_w K_\omega^2$  зависит, как и образующие его коэффициенты, от формы области.

На практике встречаются пластинки самых разнообразных форм от самой совершенной круглой до бесконечно вытянутой, расчёт которой сводится к расчёту балки с заменой изгибной жёсткости  $EI$  на цилиндрическую жёсткость  $D$ . Очевидно, что для всех форм пластинок граничными решениями для произведения  $W_0 \cdot \omega^2$  будут решения для круглых пластин и балок.

Для балок основная частота колебаний

$$\omega = \beta^2 \frac{1}{A} \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad (4.6)$$

где  $\beta^2$  – собственное значение дифференциального уравнения колебаний пластин (зависит от граничных условий),  $m$  – масса на единицу площади пластины.

Максимальный прогиб пластины определяется из выражения:

$$W_0 = \alpha \frac{qA^2}{D}, \quad (4.7)$$

где  $\alpha$  – собственное значение дифференциального уравнения изгиба пластины.

В этом случае произведение максимального прогиба на квадрат основной частоты колебаний:

$$W_0\omega^2 = \alpha\beta^4 \frac{q}{m}. \quad (4.8)$$

Следует отметить, что значение выражение  $W_0 \cdot \omega^2$  для пластин любой

формы лежит в интервале [30]:

$$\frac{4}{\pi} \frac{q}{m} \leq W_0 \omega^2 \leq \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{q}{m}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим таблицы 4.14 и 4.15, в которой приведены данные по максимальным прогибам и частотам собственных колебаний для сплошных пластин различного очертания с однородными граничными условиями [30].

Таблица 4.14 – Сопоставление произведения  $W_0 \cdot \omega^2$  для пластинок, жёстко заземлённых по контуру

Форма пластинки	Максимальный прогиб $w_0 = \alpha \frac{qA^2}{D}$	Основная частота колебаний $\omega = \beta^2 \frac{1}{A} \sqrt{\frac{D}{m}}$	Произведение $w_0 \omega^2 = \alpha \beta^4 \frac{q}{m}$	Отклонение от $(4\pi)^2$ (%)
1	2	3	4	5
Круг	1,583	32,08	1,629	+0,48
Квадрат	1,262	35,72	1,610	-0,69
Шестиугольник	1,478	32,91	1,601	-1,24
Пятиугольник	1,409	33,62	1,593	-1,73
Треугольник	0,880	42,51	1,590	-1,92
Эллипс a/b=1	1,583	32,08	1,629	+0,48
Эллипс a/b=2	0,859	43,56	1,629	+0,48
Эллипс a/b=5	0,164	99,61	1,627	+0,36
Прямоугольник a/b=1	1,262	35,72	1,610	-0,69
Прямоугольник a/b=2	0,635	49,16	1,535	-5,31
Прямоугольник a/b=5	0,0978	115,60	1,262	-20,5
Ромб $\alpha=90^\circ$	1,262	35,72	1,610	-0,69
Ромб $\alpha=75^\circ$	1,089	37,96	1,570	-3,15
Ромб $\alpha=60^\circ$	0,801	44,05	1,554	-4,14
Ромб $\alpha=45^\circ$	0,476	56,68	1,529	-5,68

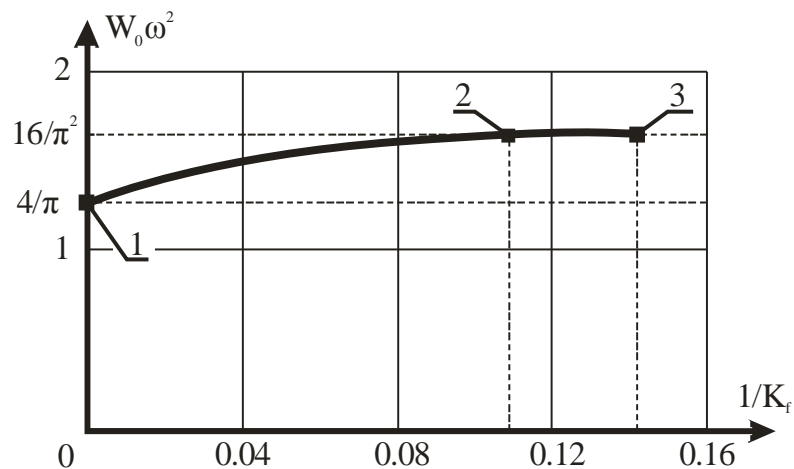
Примечания: 1. Коэффициенты пропорциональности  $\alpha$  и  $\beta^2$  приведены к единой площади. Значения параметра  $\alpha$  увеличены в  $10^3$  раз. 2. Данные колонок 2 и 3 взяты из работы [30].

Таблица 4.15 – Сопоставление произведения  $W_0 \cdot \omega^2$  для пластинок, шарнирно опёртых по контуру

Форма пластинки	Максимальный прогиб $w_0 = \alpha \frac{qA^2}{D}$	Основная частота колебаний $\omega = \beta^2 \frac{1}{A} \sqrt{\frac{D}{m}}$	Произведение $w_0 \omega^2 = \alpha \beta^4 \frac{q}{m}$	Отклонение от $(4\pi)^2$ (%)
1	2	3	4	5
Круг (для $\nu=0,3$ )	6,454	15,64	1,579	-2,60
Квадрат	4,060	19,74	1,582	-2,41
Треугольник	3,086	22,79	1,603	-1,12
Эллипс $a/b=1$	6,454	15,64	1,579	-2,60
Эллипс $a/b=2$	3,655	20,75	1,578	-2,66
Прямоугольник $a/b=1$	4,060	19,74	1,582	-2,41
Прямоугольник $a/b=1,5$	3,431	21,38	1568	-3,28
Прямоугольник $a/b=2$	2,533	24,67	1,542	-4,88
Прямоугольник $a/b=5$	0,519	515320	1,367	-15,50
Ромб $\alpha=90^\circ$	4,060	19,74	1,582	-2,41
Ромб $\alpha=60^\circ$	3,410	21,62	1,594	-1,67
Ромб $\alpha=45^\circ$	2,660	24,84	1,641	+1,23

Примечания: 1. Коэффициенты пропорциональности  $\alpha$  и  $\beta^2$  приведены к единой площади. Значения параметра  $\alpha$  увеличены в  $10^3$  раз. 2. Данные колонок 2 и 3 взяты из работы [30].

Рассмотрим график на рисунке 4.29, заимствованный из работы [30].

Рисунок 4.29 – Зависимость  $w_0 \omega^2 - 1/K_f$ :

Здесь  $K_f$  – геометрическая характеристика формы области (коэффициент



формы пластинки), количественно характеризующая ее «правильность» (или симметричность) [22, 23], точка 0 соответствует пластине круглого очертания, 4 – квадратной пластине, 3 – пластине в виде правильного треугольника.

Авторами [В.И. Коробко и А.В. Коробко] установлена фундаментальная закономерность для сплошных изотропных пластин, которая формулируется следующим образом: «Для всего множества упругих изотропных пластинок с выпуклым контуром, постоянной толщины и произвольной формы независимо от вида граничных условий произведение максимального статического прогиба на квадрат основной частоты их колебаний в ненагруженном состоянии, представленное в координатных осях  $W_0\omega - 1/K_f$ , вырождается в асимптотическую кривую линию, максимальная ордината которой равна  $(4/\pi)^2$  и соответствует круглым пластинкам, а асимптота равна  $4/\pi$  и соответствует бесконечно вытянутым пластинам (балкам)».

Аналитически кривая на рисунке 4.29 с достаточной точностью описывается следующим выражением:

$$W_0\omega^2 = \left( \frac{4}{\pi} + \frac{10.502}{K_f} - \frac{34.511}{K_f^{1.5}} + \frac{33.420}{K_f^2} \right) \frac{q}{m}. \quad (4.10)$$

Проведённые теоретические и численные исследования круглых и квадратных составных изотропных пластин на податливых связях, которые подтверждены численными и экспериментальными данными, показали, что выявленная фундаментальная закономерность (4.5), установленная для сплошных пластин, справедлива и для составных. Кроме того, исследования треугольных составных изотропных пластин на податливых связях [73] показали, что закономерность (4.5) справедлива и для составных пластин в виде правильного треугольника. Таким образом, на графике рисунка 4.29 решения для квадратных и круглых составных пластин, а также составной пластины в виде правильного треугольника с достаточной для инженерных расчетов точностью совпали с решениями для сплошных пластин соответствующего очертания. Логично будет предположить, что решения для составных пластин различного очертания будут также лежать на этой кривой.

На основании приведенных рассуждений можно предложить эффективный экспериментальный способ определения жесткости составных пластинок с произвольным выпуклым контуром и любыми граничными условиями (любая комбинация шарнирного опирания и жесткого защемления по контуру). Представим зависимость (4.10) в следующем виде:

$$W_0 = \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{4}{\pi} + \frac{10.502}{K_f} - \frac{34.511}{K_f^{1.5}} + \frac{33.420}{K_f^2} \right) \frac{q}{m}. \quad (4.11)$$

Здесь  $\omega$  - основная частота колебаний составной пластинки произвольного вида, определенной экспериментально. Подставляя эту частоту в выражение (4.11) и используя аналитическое выражение, представленное в скобках и справедливое для упругих пластинок сплошного сечения, получим величину максимального прогиба заданной составной пластинки с определенными граничными условиями.

В качестве примера для анализа жёсткости составных пластин по (4.11) приведём результаты теоретических исследований квадратных составных пластин (таблица 4.16) при различной жёсткости связей сдвига  $E A_{cc}$ , а также при различном количестве связей сдвига фиксированной жёсткости (таблица 4.17).

Таблица 4.16 – Результаты сопоставления теоретических прогибов по результатам численных исследований и по (4.11) квадратных составных пластинок при различной жёсткости связей сдвига  $E A_{cc}$ .

Жёсткость связей сдвига $I g E A_{cc}$	Частота основного тона $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб, $W_{0ч}$ (мм) (численно)	Максимальный прогиб, $W_{0ф}$ (мм) по (4.11)	Отклонение $W_{0ч}$ от $W_{0ф}$ %
Квадратная пластина, шарнирно опёртая по контуру				
2	90,486	16,258	16,429	1,35
3	97,526	13,959	14,147	2,51
4	136,324	7,063	7,240	0,91
5	212,743	2,946	2,973	0,30
6	249,956	2,160	2,154	-1,05

Квадратная пластина, защемлённая по контуру				
2	162,288	5,110	5,109	0,02
3	167,215	4,799	4,812	-0,28
4	201,811	3,241	3,304	-1,94
5	279,460	1,688	1,723	-2,07
6	314,671	1,354	1,359	-0,36

Примечание. Результаты численных исследований приняты по таблицам 2.4 и 2.5.

Таблица 4.17 – Результаты сопоставления теоретических прогибов по результатам численных исследований и по (4.11) квадратных составных пластинок при различном количестве связей сдвига

Количество связей сдвига, $n$	Частота основного тона $\omega$ ( $c^{-1}$ )	Максимальный прогиб, $W_{0ч}$ (мм) (численно)	Максимальный прогиб, $W_{0ф}$ (мм) по (4.11)	Отклонение $W_{0ч}$ от $W_{0ф}$ %
Квадратная пластина, шарнирно опёртая по контуру				
9	91,728	15,853	15,992	-0,87
16	93,539	15,215	15,378	-1,07
25	95,749	14,524	14,677	-1,05
49	101,123	12,977	13,158	-1,24
81	107,355	11,505	11,675	-1,48
169	120,868	9,033	9,120	-1,96
625	157,828	5,268	5,402	-2,54
Квадратная пластина, защемлённая по контуру				
9	163,583	5,143	5,028	2,23
16	164,832	5,056	4,952	2,04
25	166,271	4,972	4,867	2,11
49	170,063	4,652	4,652	1,89
81	174,967	4,395	4,395	1,61
169	187,116	3,882	3,843	1,00
625	226,659	2,610	2,619	-0,35

Примечание. Результаты численных исследований приняты по таблицам 2.6 и 2.7.

Анализ таблиц 4.16 и 4.17 показывает, что прогибы, вычисленные по зависимости (4.11), достаточно хорошо согласуются с численно определёнными прогибами, полученными для квадратной составной пластины. Отклонение составило от -2,54% до +2,51%.

Таким образом, доказано, что взаимосвязь максимальных прогибов, частот собственных колебаний и коэффициента формы для сплошных пластин справедлива и для составных пластин, что позволяет на уровне эксперимента оценивать по частотам собственных колебаний прогибы составных пластинок.

#### **4.8 Выводы по главе 4**

1. Разработана программа проведения экспериментальных исследований двухслойных составных пластин на статические и динамические нагрузки. Изготовлен оригинальный стенд для проведения статических и динамических испытаний составных пластин, подобраны приборы и оборудование, позволившие с необходимой точностью определить частоты собственных колебаний и максимальный прогиб конструкции.

2. Экспериментальным путем был найден кратковременный модуль упругости материала, из которого изготовлены опытные конструкции.

3. В результате экспериментальных исследований определена податливость заделки пластин по контуру по результатам статических и динамических испытаний.

4. Экспериментальные данные показывают, что характер изменения частот и прогибов составных двухслойных пластин хорошо согласуется с данными теоретических исследований.

5. Сопоставление экспериментальных и теоретических данных показывает, что экспериментальные частоты выше численных до 21,6%, а прогибы ниже до 16,4%. Это можно объяснить неучтенными при расчете силами трения между слоями конструкции.

6. Доказано, что взаимосвязь максимальных прогибов, частот собственных колебаний и коэффициента формы для сплошных пластин справедлива и для составных пластин, что позволяет в экспериментальных исследованиях оценивать прогибы конструкции по частотам их собственных колебаний.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщая результаты проведенных исследований, можно сформулировать следующие выводы:

1. Теоретически доказано и экспериментально подтверждено, что для квадратных и круглых составных пластинок вне зависимости от граничных условий, жесткости и количества симметрично и регулярно расположенных связей сдвига произведение максимального прогиба  $W_0$  от действия равномерно распределенной нагрузки  $q$  на квадрат основной частоты колебаний составной пластинки в ненагруженном состоянии  $\omega$  с точностью до размерного множителя  $q/m$  есть величина постоянная и описывается закономерностью:

$$W_0 \omega^2 = K \frac{q}{m}$$

2. Получены аналитические зависимости коэффициента жёсткости шва составной пластины от жёсткости и усилий в слоях. В результате численных исследований выявлены зависимости коэффициента жесткости шва составной пластины от жёсткости и от количества симметрично установленных связей сдвига.

3. Установлена зависимость коэффициента жёсткости шва от частот собственных колебаний составных пластин. Зависимость носит практически линейный характер независимо от граничных условий и количества связей сдвига.

4. Разработана методика оценки степени податливости заделки составных пластин по контуру по результатам статического и динамического испытания. Неучёт податливости заделки приводит к завышению частот собственных колебаний на 7 и 11% для квадратных и круглых пластин соответственно, и занижает максимальный прогиб на 15 и 19% для соответствующих пластин.

5. Разработана и реализована программа проведения экспериментальных исследований составных пластин на статические и динамические нагрузки. Данные, полученные в ходе эксперимента, подтвердили результаты численных исследований.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александров А. В. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ: В двух частях. [Текст] / А.В. Александров, Б.Я. Лащенко, Н.Н. Шапошников, В.А. Смирнов. - М.: Стройиздат, 1976.
2. Александров А.А. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы [Текст] / А.А. Александров, Б.Я. Лащенко - М.: Стройиздат, 1983
3. Александров А.В. Основы теории упругости и пластичности [Текст] / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. 400 с.
4. Александров, А.Я. Многослойные пластины и оболочки [Текст] / А.Я.Александров, Л.Н. Куршип. – В. кн.: Тр. Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин - Москва: Наука, 1970. – с. 714-721.
5. Андреев, С.В. К нелинейной теории трехслойных подкрепленных оболочек переменной жесткости [Текст] / С.В. Андреев // Прикладные проблемы механики оболочек. - Казань, 1989, – с. 4-9.
6. Беккенбах, Э. Неравенства [Текст] / Э. Беккенбах, Р. Беллман. – М.: Мир, 1965. – 276 с.
7. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций [Текст] / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – Москва: Машиностроение, 1980. – 375 с.
8. Вайнберг Д.В. Расчёт пластин. [Текст] / Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. – Киев: Будівельник, 1970. – 435 с.
9. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений [Текст] / М.М. Вайнберг. – Москва: Наука, 1972. – с. 416.
10. Варвак, П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластин [Текст] / П.М. Варвак. // Тр. ин-та строительной механики АН УССР. – 1949. - ч I – 136 с., ч. II – 115 с.
11. Габбасов Р.Ф. О расчете на устойчивость составных пластин по теории А.Р. Ржаницына [Текст] / Р.Ф. Габбасов, В.В. Филатов // Юбилейный

сборник докладов, посвященный 100-летию со дня рождения В.З. Власова, М., МГСУ, 2006, с.31-36.

12. Габбасов Р.Ф. Численный метод расчета составных стержней и пластин с абсолютно жесткими поперечными связями [Текст] / Р.Ф. Габбасов, В.В. Филатов. – М.: Изд-во АСВ, 2014, 200 с.
13. Галёркин, Б.Г. Напряженное состояние при изгибе прямоугольной плиты по теории толстых плит и теории плит тонких [Текст] : сочинения / Б.Г. Галеркин. – М. : Изд-во АН СССР, 1952. – Т. 1. – 391 с.
14. Галёркин, Б.Г. Собрание сочинений [Текст] / Б.Г. Галёркин. – М.: Изд-во АН СССР, 1953. – Т. 2. – 438 с.
15. Гефель, В.В. Развитие и применение МИКФ к решению задач технической теории пластинок, связанных с треугольной областью [Текст]: дис. канд. техн. наук : 05.23.17 / Гефель Владислав Владимирович. – Орел, 2006. – 168 с.
16. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек: Справочное пособие [Текст] / В.С. Гонткевич. – Киев: Наукова думка, 1964. – 288 с.
17. Григолюк Э.И. К вопросу о поведении круглой пластины после потери устойчивости [Текст] / Э.И. Григолюк // Вестник инженеров и техников. – 1949. - №3. – с. 103-106.
18. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О. Зенкевич. – М. : «Мир», 1975. – 543 с.
19. Киржаев, Ю.В. Развитие и применение метода интерполяции по коэффициенту формы к решению задач предельного равновесия пластинок [Текст] : дис. канд. техн. наук : 05.23.17 / Киржаев Юрий Викторович. – Орел, 2005. – 161 с
20. Киселёв В.А. Расчёт пластин [Текст] / В.А. Киселев. - М.: Стройиздат, 1973. – 152 с.
21. Колесник И.А. Определение основной частоты колебаний параллелограммных пластинок методом физико-геометрической аналогии [Текст]

- / И.А. Колесник, А.В. Коробко // Соппротивление материалов и теория сооружений. - Киев. - 1993. - N 61.
22. Колесник И.А. Оценка основных параметров в задачах строительной механики и теории упругости, связанных с треугольной областью [Текст] / И.А. Колесник, А.В. Коробко // Алгоритмизация решения задач прочности и оптимального проектирования конструкций. - Киев: Ин-т кибернетики АН Украины. - 1991. - С. 39-46.
23. Коробко А.В. Метод интерполяции по коэффициенту формы в механике деформируемого твердого тела [Текст] / А.В. Коробко - Ставрополь: Изд-во Ставропольского университета, 1995. - 165 с.
24. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формой области в двумерных задачах теории упругости [Текст] / А.В. Коробко – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 302 с.
25. Коробко А.В. Расчет трапециевидных пластинок (мембран, сечений) методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / А.В. Коробко // Изв. вузов. Авиационная техника, 1997. - № 2. - С. 103-107.
26. Коробко В.И. Графическое представление границ изменения геометрической жесткости сечений в виде выпуклых фигур [Текст] / В.И. Коробко // Изв. вузов. Машиностроение. - 1986. - N 3. - С. 2-7.
27. Коробко В.И. Графоаналитический способ определения основной частоты колебаний и критической нагрузки мембран произвольного вида [Текст] / В.И. Коробко // Тонкостенные пространственные конструкции покрытий зданий. - Таллинн. - 1986. - С. 71-72.
28. Коробко В.И. Изопериметрические неравенства в строительной механике пластинок [Текст] / В.И. Коробко. - М.: Стройиздат, 1992. - 208 с.
29. Коробко В.И. Некоторые геометрические методы решения задач технической теории пластинок (препринт) [Текст] / В.И. Коробко. - Хабаровск: ХабКНИИ ДВНЦ АН СССР. - 1978.- 66 с.



30. Коробко В.И. Оценка частот свободных колебаний пластинок [Текст] / В.И. Коробко // Изв. вузов. Строительство и архитектура. - 1979. - N 10. - С. 21-23.
31. Коробко В.И. Применение изопериметрического метода к решению задач технической теории пластинок (препринт) [Текст] / В.И. Коробко. - Хабаровск: ХабКНИИ ДВНЦ АН СССР. - 1978. - 66 с.
32. Коробко В.И. Развитие и применение изопериметрического метода к решению задач строительной механики пластинок [Текст]: – Дис. доктора техн. наук. 05.23.17 / Коробко Виктор Иванович. – Хабаровск, 1982. – 242 с.
33. Коробко В.И. Состояние и перспективы развития изопериметрического метода в строительной механике [Текст] / В.И. Коробко // Изв. вузов. Строительство, 1993. - N 11-12. - С. 125-135..
34. Коробко В.И., Идрисов Н.Д. Способ определения перемещения плоских элементов конструкций под нагрузкой. А.С. РФ № 1647345. Оpubл. БИ, 1991, № 14
35. Коробко, В. И. Закономерности золотой пропорции в строительной механике: Приложения в области обследования и испытания сооружений [Текст] / В. И. Коробко. – Ставрополь, СтПИ, 1990. – 108 с., ил.
36. Коробко, В. И. Изопериметрический метод в строительной механике: Теоретические основы изопериметрического метода [Текст] / В. И. Коробко. – М.: Изд-во АСВ, 1997. – 396 с.
37. Коробко, В.И. Интегральная оценка качества предварительно напряженных плит перекрытия вибрационным методом [Текст] / В.И. Коробко, Н.Д. Идрисов, Г.В. Слюсарев // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1990. – № 6. – С. 104-107.
38. Коробко, В.И. Об одной "замечательной" закономерности в теории упругих пластинок [Текст] / В.И. Коробко. // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1989. – № 11. – С. 32-36.

39. Кучерюк В.И. Расчет многослойных пластин с учетом неупругих свойств материала и трещинообразования [Текст] / В.И. Кучерюк, В.П. Бочагов, Л.И. Никитина, А.А. Фокин // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1988. - №11. – с. 31-40.
40. Кучерюк В.И. Расчет многослойных пластин экспериментально-теоретическими методами [Текст] / В.И. Кучерюк, А.Д. Дорогин, В.П. Бочагов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1983. - №2. – с. 69-74.
41. Линьков, В.И. Деревянные конструкции на основе составных элементов с соединением на наклонных металлических стержнях без применения клея [Текст] / В.И. Линьков. Автореф. дисс. докт. техн. наук – М.: 1994. – 44 с.
42. Лурье С.А. Изгиб слоистых балок [Текст] / С.А. Лурье, А.Н. Данилин // Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций. – Москва, 1988. – с. 19-23.
43. Ляв, А. Математическая теория упругости [Текст] / А. Ляв. – М. : ОНТИ, 1935. – 674 с.
44. Малинкин, Н.С. Развитие и применение метода интерполяции по коэффициенту формы к расчету параллелограммных пластинок [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 / Малинкин Николай Сергеевич. – Орел, 2003. – 212 с.
45. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами [Текст] / А.М. Масленников - Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. - 225 с.
46. Масленников, А.М. Расчет тонких плит методом конечных элементов [Текст] / А.М. Масленников. // Тр. ЛИСИ. – 1958. - № 57. С. 186 - 193.
47. Муромский А.С. Развитие и применение метода интерполяции по коэффициенту формы к решению задач колебаний упругих пластинок: Дисс. канд. техн. наук. – Орёл, 2001. - 200 с.

48. Нефедов В. И. Метрология и радиоизмерение [Текст] / В.И. Нефедов, А.С. Сигов, В.К. Битюков, В.И. Хахин - М.: Высшая школа, 2006. - 518 с.
49. Обобщенная теория неоднородных по толщине пластин и оболочек [Текст] / Л.И. Хорошун, С.В. Козлов, Ю.А. Иванов и др. – Киев: Наукова думка, 1988. – 152 с.
50. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью [Текст] / Б.Л. Пелех. – Киев: Наукова думка, 1973. – 246 с.
51. Пискунов В.Г. К задаче о колебаниях и устойчивости параллелограммных пластинок и мембран [Текст] / В.Г. Пискунов // Прикладная механика. - Киев, 1965. - Т. 1. - Вып. 3. - С. 67-71.
52. Пискунов В.Г. Определение частот собственных колебаний треугольных и трапецидальных пластинок [Текст] / В.Г. Пискунов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. - 1965. - N 9. - С. 58-62.
53. Пискунов В.Г. Частоты собственных колебаний ромбических пластинок при смешанных граничных условиях [Текст] / В.Г. Пискунов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. - 1969. - N4. - С. 44-46.
54. Подольский Д.Н. Пространственный расчет зданий повышенной этажности [Текст] / Д.Н. Подольский. – Москва: Стройиздат, 1975. – 158 с.
55. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в трёх томах [Текст] – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с; Т.2. – 463 с; Т.3 – 567 с.
56. Рвачёв, В.Л. Об одном методе решения задач изгиба пластинки, защемленной по контуру [Текст] / В.Л. Рвачев, Л.А. Учишвили // Прикл. механика. – 1968. – Т. 4. – № 4. – С. 123 – 128.
57. Ржаницын, А.Р. Колебания составных стержней [Текст] / А.Р. Ржаницын // Надежность и долговечность строительных конструкций. – Вып. II. – Волгоград, Волгоградский политехн. ин-т, 1976. – С. 73-79.
58. Ржаницын, А.Р. Работа связей в составных стержнях [Текст] / А.Р. Ржаницын // Проект и стандарт. – 1938. – №2. – С. 29-32.

59. Ржаницын, А.Р. Расчет составных пластинок с абсолютно жесткими поперечными связями [Текст] / А.Р. Ржаницын // В кн.: Исследования по теории сооружений, вып. XXII. – М.: Стройиздат, 1976. – С. 120-133.
60. Ржаницын, А.Р. Составные стержни и пластинки [Текст] / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
61. Ржаницын, А.Р. Теория составных стержней строительных конструкций [Текст] / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1948. – 192 с.
62. Самарский А. А. Разностные уравнения для эллиптических уравнений [Текст] / А.А. Самарский, В.В. Андреев. - М.: Наука, 1976. - 352 с.
63. Сен-Венан. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. - М.: Госматиздат. 1961.
64. Сенин, М.А. Определение динамических характеристик пластинок с комбинированными граничными условиями с помощью метода интерполяции по коэффициенту формы [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 / Сенин Максим Андреевич. – Орел, 2009. – 207 с.
65. Сехниашвили, Э.А. Интегральная оценка качества и надежности предварительно напряженных конструкций [Текст] / Э.А. Сехниашвили // АН СССР, АН ГССР, Ин-т вычисл. математики им. Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
66. Сехниашвили, Э.А. Основные положения неразрушающего динамического метода оценки несущих свойств готовых предварительно напряженных железобетонных конструкций серийного производства [Текст] / Э.А. Сехниашвили // Госстрой Грузии: Техн. инфор., 1969. – № 15. – 20 с.
67. Сехниашвили, Э.А. Состояние и перспективы интегральной оценки неразрушающими методами прочности, жесткости и трещиностойкости железобетонных конструкций [Текст] / Э.А. Сехниашвили // Материалы конф. «Неразрушающие методы контроля качества сборного железобетона». – М.: МДНТП, 1971. – Сб. № 1. – С. 21-30.

- 68.Справочник по теории упругости [Текст] / Под ред. П.М. Варвака, А.Ф. Рябова. – Киев: Будівельник, 1971. – 418 с.
- 69.Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле [Текст] / С.П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с.
- 70.Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
71. Треффц Е. Математическая теория упругости [Текст] / Е. Треффц. – Ленинград: ОНТИ, 1934. – 172 с.
- 72.Турков А.В.. Взаимосвязь задач динамики и статики сплошных и составных деревянных конструкций [Текст]: дис. доктора техн. наук: 05.23.01 / А.В. Турков. – Орел, 2008. – 386 с.
73. Турков А.В. Исследование коэффициентов жесткости шва составных треугольных изотропных пластин в зависимости от количества симметрично расположенных связей сдвига [Текст] / А.В. Турков, Е.В. Карпова // Строительство – формирование среды жизнедеятельности: сб. статей. – Москва, 2015. – с. 238-242.
- 74.Фетисова, М.А. Развитие и применение метода интерполяции по коэффициенту формы к решению задач поперечного изгиба пластинок с комбинированными граничными условиями [Текст] : дис.... канд. техн. наук : 05.23.17 / Фетисова Мария Александровна. – Орел, 2010. – 162 с.
- 75.Филатов В.В. К определению частоты основного тона колебаний изгибаемых составных пластин./ Сб. трудов II МНТК «Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы»./ Мос. гос. строит. ун-т – М.:МГСУ, 2009, с.309-311
- 76.Филатов В.В. Развитие теории и разработка численной методики расчета составных стержней и пластин. – Дис. доктора техн. наук. – Москва, 2015. – 292 с.
- 77.Филатов В.В., Мусса Сали. Об учете податливости поперечных связей в расчетах составных пластин по теории А.Р. Ржаницина [Текст] / В.В.

Филатов, Мусса Сали. Промышленное и гражданское строительство, №2, 2010, с. 28-29.

78. Хечумов, Р.А. Свободные колебания многослойных пластинок с абсолютно жесткими поперечными связями [Текст] / Р.А. Хечумов // В кн.: Сб. тр. МИСИ им В.В. Куйбышева и БТИСМ им И.А. Гришманова, вып. 28. – М.: ВТИСМ, 1978. – С. 94-98.
79. Хечумов, Р.А. Свободные колебания прямоугольных двухслойных пластин со смешанными краевыми условиями [Текст] / Р.А. Хечумов // В кн.: Сб. тр. МИСИ им В.В. Куйбышева и БТИСМ им И.А. Гришманова, т. 8.. – М.: БТИСМ, 1979. – С. 51-55.
80. Хечумов, Р.А. Собственные колебания двухслойных пластин со сложными очертаниями в плане [Текст] / Р.А. Хечумов // В кн.: Сб. тр. МИСИ им В.В. Куйбышева и БТИСМ им И.А. Гришманова, т. 8.. – М.: БТИСМ, 1979. – С. 56-58.
81. Чикулаев, А.В. Решение задач устойчивости оболочек с помощью метода интерполяции по коэффициенту формы [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 / Чикулаев Алексей Витальевич. – Орел, 2009. – 161 с
82. Шапошников, Н.Н. расчет пластинок на изгиб по методу конечных элементов [Текст] / Н.Н. Шапошников. // Тр. МИИТ. – 1968. В 250. - С. 134 - 144.
83. Якубовский Ю.Е. Напряженное состояние в угловых зонах шарнирно опертой составной пластины [Текст] / Ю.Е. Якубовский, В.П. Бочагов, А.А. Фокин // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1990. - №6. – с. 24-29.
84. Goldmann E. Anwendung der Ritzcher Method auf die Theorie der transversalisch Winkungen freischwingen der Platten von rechteckiger rhombischer, dreieckiger und elliptischer Begrenzung [Text] / E. Goldmann – Breslau, 1918.

85. Lowe, P.G. Isoperimetric inequalities in structural mechanics [Text] / P.G. Lowe // The ninth Australian Conference on the Mechanics of Structures and Materials. – Sydney : University of Sydney, 1984. – P. 147–151.
86. Rayleigh L. The theory of sound, 2nd edition. – London, 1894/96.
87. Schrem F. Computer implementation of the finite element method in Numerical Computer Methods in Structural Mechanics (Fenves S.J. et. al., eds.) [Text] / F. Schrem // Academic Press. – New York. – 1973. – P. 79–122.

**ПРИЛОЖЕНИЕ 1**  
**ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ**



УТВЕРЖДАЮ:



Первый проректор ФГБОУ ВПО  
«Государственный университет – УНПК»

*[Signature]* В.В. Светкин

*[Signature]* 2015 г.

## АКТ

о внедрении в учебный процесс результатов диссертационной работы соискателя степени кандидата технических наук К.В. Марфина «Взаимосвязь максимальных прогибов и собственных частот поперечных колебаний составных пластин на податливых связях»

В учебном плане и рабочих программах ФГБОУ ВПО «Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс» для студентов специальностей «Промышленное и гражданское строительство», «Городское строительство и хозяйство» включен материал по определению динамических и статических характеристик составных пластин в рамках изучения дисциплин «Строительная механика», «Основы теории упругости и пластичности», «Обследование и испытания зданий и сооружений». Также материалы диссертационного исследования К.В. Марфина использованы при составлении рабочей программы «Спецкурс по расчёту составных стержневых, плоских и пространственных конструкций», предназначенной для аспирантов, обучающихся по специальностям 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения и по специальности 05.23.17 – Строительная механика.

Зав. кафедрой «СКИМ»,  
к.т.н.

*[Signature]*

О.А. Ветрова