

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧЕРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ – УЧЕБНО – НАУЧНО –  
ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС

На правах рукописи

Мальцев Денис Николаевич

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ТРУБОГИБОЧНОГО ПРОИЗВОДСТВА  
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ ДЕФОРМИРОВАНИЕМ СЕЧЕНИЯ ЗАГОТОВОК

Специальность 05.02.09 – Технологии и машины обработки давлением

**Диссертация**

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель Вдовин Сергей Иванович, д. т. н., профессор

Орел 2014

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1 Аналитический обзор исследований гибки труб .....	7
1.1 Пластический изгиб трубы моментом .....	8
1.1.1 Овальзация сечения .....	9
1.1.2 Изгибающий момент .....	12
1.1.3 Изменение толщины стенки трубы .....	15
1.2 Технологический изгиб .....	17
1.2.1 Экспериментальное определение деформаций .....	18
1.2.2 Теоретические исследования .....	22
1.3 Другие виды изгиба труб .....	27
1.3.1 Изгиб морских трубопроводов .....	27
1.3.2 Сжатие прямой трубы по высоте сечения плитами .....	29
Выводы по разделу и задачи исследования .....	30
2. Математическое моделирование деформирования сечения прямой трубы .....	33
2.1 Постановка задачи .....	33
2.1.1 Исходные уравнения .....	35
2.2 Вывод расчетных формул .....	36
2.2.1 Нейтральная линия изгиба .....	36
2.2.2 Момент внутренних сил .....	36
2.2.3 Точка перехода через ноль момента внутренних сил .....	38
2.2.4 Размеры деформированного сечения трубы .....	40
2.2.5 Результаты математического моделирования .....	42
2.3 Оценка погрешности формулы момента внутренних сил .....	44
Выводы по разделу .....	45
3 Вариационная оценка размеров деформированного сечения прямой трубы .....	47
3.1 Постановка задачи .....	47
3.2 Координатные функции перемещений .....	48
3.3 Расчетные формулы деформаций .....	51
3.4 Вариационные уравнения .....	52

3.4.1 Вариация работы внешних сил .....	53
3.4.2 Система разрешающих уравнений .....	54
3.4.3 Объектно-ориентированный подход .....	55
3.5 Тестирование функции овальности сечения .....	57
3.5.1 Моменты внутренних сил.....	58
3.5.2 Выборочные условия равновесия .....	59
3.6 Результаты решения вариационной задачи .....	61
Выводы по разделу.....	63
4 Математическое моделирование изгиба трубы по круглому копиру.....	65
4.1 Постановка вариационной задачи .....	65
4.1.1 Вариация работы внешней силы.....	67
4.1.2 Формулы деформаций .....	68
4.2 Решение вариационной задачи .....	70
4.2.1 Расчет изменения толщины стенки трубы.....	72
4.3 Геометрическая модель переходного участка.....	75
4.3.1 Полином изгибного компонента прогиба оси.....	77
4.3.2 Полином сдвигового компонента прогиба оси .....	78
4.3.3 Геометрические параметры операции .....	80
4.3.4 Параметры изогнутой оси трубы.....	82
4.4 Конечно-элементное моделирование.....	84
Выводы по разделу.....	87
5 Расчеты гибки труб и предварительного деформирования сечения .....	90
5.1 Деформирование сечения прямой трубы.....	90
5.1.1 Область свободного изгиба.....	91
5.1.2 Расчет размеров деформированного сечения.....	94
5.1.3 Сравнение результатов расчета с данными эксперимента .....	96
5.1.4 Компенсация искажения сечения при гибке .....	98
5.2 Утонение стенки трубы при гибке по копиру .....	100
5.2.1 Учет анизотропии материала .....	101
5.2.2 Рассчитанное и фактическое утонение стенки .....	103

5.3 Совмещение предварительного деформирования сечения трубы с гибкой по копиру .....	107
Выводы по разделу.....	108
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	111
Основные результаты и выводы .....	111
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	114

## ВВЕДЕНИЕ

В производстве летательных аппаратов и энергетического оборудования, а также в других отраслях машиностроения широко применяется гибка труб по круглому копиру на станках с программным управлением. Возможное уменьшение высоты проходного сечения изогнутых участков отрицательно влияет на работоспособность трубопровода. При бездорновой гибке оно может превышать допустимые пределы; применение дорна, поддерживающего стенку трубы изнутри, усугубляет ее утонение, которое также жестко регламентируется.

В данной работе рассматривается двухэтапный процесс, предусматривающий придание обратной овальности сечениям прямой трубы с целью компенсации их последующего искажения на этапе бездорновой гибки. Предварительное деформирование участков заготовки, подлежащих изгибу, может выполняться плитами или роликами – как отдельная операция или совмещенная с гибкой. Практическое применение предлагаемой технологии затруднено не столько дополнительными материальными затратами, сколько неизученностью деформированного состояния трубы на каждом из этапов формоизменения.

Традиционным средством преодоления подобных “белых пятен” является решение вариационной задачи в деформациях, с использованием координатных (по Ритцу) функций перемещений. Отечественными и зарубежными исследователями (Ю.Н. Алексеев, Б.С. Билобран, E. Reissner, M.M. Seddeik, K.A. Stelson, L.C. Zhang и др.) получены вариационные оценки овальности изогнутых труб, оказавшиеся весьма различными. Использовались разнообразные конструкции координатных функций, выбор которых – вообще говоря, произвольный – связан лишь со “слабыми” кинематическими условиями.

Для получения адекватной математической модели и достоверного вариационного анализа деформаций трубы представляется целесообразным дополнить кинематические ограничения связями варьируемых параметров с напряжениями. Также нуждается в уточнении форма переходного участка

изгибаемой трубы с переменной – от нуля до обратной величины радиуса копира – кривизной оси. Длина названного участка, влияющая на утонение стенки, зависит от размеров и компоновки инструментов гибки, однако известные аналитические выражения этой зависимости игнорируют сдвиговый компонент прогиба оси трубы.

Применению вариационных методов в практике обработки металлов давлением долгое время препятствовали вычислительные трудности; сейчас они преодолеваются с помощью компьютерной программы типа MathCAD. На основании опыта ее применения разработана организация вычислений с элементами объектно-ориентированного подхода, ставшая частью методики расчетов предлагаемого процесса гибки труб.

Актуальность темы исследования подтверждается систематическим ужесточением допусков, устанавливаемых отраслевыми стандартами [1, 2, 3] на размеры трубопроводов ответственного назначения.

Цель работы: получение изогнутых труб, отвечающих жестким ограничениям искажения проходного сечения и утонения стенки.

Объектом исследования являются процессы деформирования плитам сечения прямой трубы и последующей гибки по круглому копиру.

Предметом исследования являются размеры сечения прямой трубы, деформированной плитам, и утонение стенки изогнутой трубы.

Методы исследования: инженерные методы решения задач в напряжениях и вариационной оценки деформаций с аппроксимацией функций перемещений и напряжений.

Автор защищает:

- математическую модель свободного деформирования сечения прямой трубы из упрочняемого материала, частично принимающего форму инструмента – плит с вогнутой рабочей поверхностью;

- вариационную оценку соотношения размеров овального сечения прямой трубы из жесткопластического материала, полученных в начальной стадии деформирования плитами;
- вариационную оценку изменения толщины стенки трубы из жесткопластического материала, изгибаемой по копиру, с варьируемым коэффициентом пропорциональности напряжений;
- математическую модель участка свободного изгиба трубы с полиномиальной аппроксимацией прогибов оси, вызванных поворотом и сдвигом сечений;
- методики инженерных расчетов размеров деформированного сечения прямой трубы и утонения стенки при последующей гибке по копиру.

## 1 Аналитический обзор исследований гибки труб

Теоретические исследования по данной тематике имеют сугубо прикладной характер и предпринимаются по мере возникновения практического интереса к тем или иным аспектам изгиба труб.

Изменение формы сечения трубы привлекло к себе внимание в начале прошлого века. Изучалась упругая податливость изогнутого элемента трубопровода, служащего компенсатором монтажных и эксплуатационных воздействий (А. Вантин, Th. V. Karman, 1910 – 1911 г.). Принцип минимума потенциальной энергии деформации впервые был применен к упругому чистому изгибу тонкостенной бесконечно длинной трубы (Brazier, 1927). Спустя полвека он, вкупе с аппроксимацией функций перемещений, нашел применение в расчетах различных процессов пластического формоизменения, включая деформирование сечения трубы, изогнутой моментом (Ю.Н. Алексеев, Б.С. Билобран, S. Clifford, L.C. Zhang, T.X. Yu и др).

Развитие вычислительной техники привело к разработке и внедрению в инженерную практику более точных, дискретных методов расчета, однако в последнее время снова возрастает интерес к аналитическим исследованиям. Помимо технологических вопросов рассматривается изгиб морских трубопроводов, вызванный неровностью дна и накладывающийся на эксплуатационные нагрузки. Очередные исследовательские задачи выдвигает также появление трубогибочного оборудования с элементами адаптивного управления.

### 1.1 Пластический изгиб трубы моментом

Постоянное обращение исследователей к изгибу моментом (чистому изгибу) объясняется сравнительно простой постановкой теоретической задачи, позволяющей получить формульное решение. Кривизну оси трубы и другие параметры деформированного состояния принимают одинаковыми по длине деформируемого объекта, включая форму поперечных сечений и торцов, остающихся плоскими и нормальными к оси.

Практика эксплуатации тяжело нагруженных трубопроводов показывает, что наибольшее число разрушений связано с утонением стенок и некруглостью проходного сечения в местах изгиба – явлениями, сопровождающими процессы гибки труб [4, 5, 6]. Первое из названных явлений регламентируют, исходя из давления рабочей среды и прочности материала на разрыв, второе – из цикличности эксплуатационного нагружения и усталостной прочности.



### 1.1.1 Овальзация сечения

А.И.Гальперин отмечает, что упругое деформирование овального сечения трубы при повышении внутреннего давления вызывает уменьшение овальности и – как следствие – дополнительные напряжения изгиба. Будучи растягивающими на внутренней поверхности стенки в окрестностях большей оси овала, они суммируются с напряжениями, вызванными внутренним давлением. Именно в этих местах образуются усталостные трещины при циклическом изменении давления рабочей среды, они зарождаются на внутренней поверхности трубы и видны лишь при сквозном разрушении, рисунок 1.

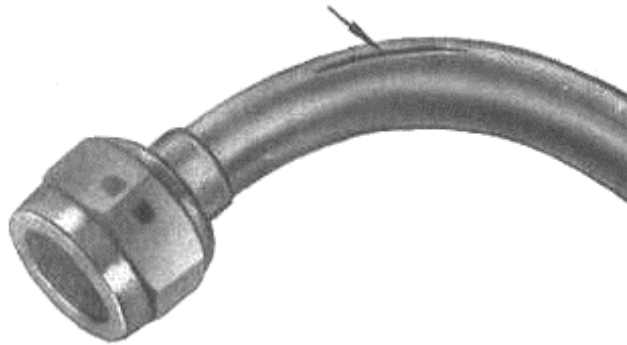


Рисунок 1– Характерное местоположение усталостного разрушения

В монографии [7] дана одна из первых теоретических оценок овальности сечения трубы, подвергнутой пластическому изгибу. Метод решения, ставший традиционным в расчетах пластических деформаций [8], предусматривает аппроксимацию неизвестных перемещений функциями координат, содержащими варьируемые параметры  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ). Значения последних находят решением системы  $l$  уравнений:

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial v_i} dV + \frac{\partial W}{\partial v_i} = 0, \quad (1)$$

где  $W$  и  $U$  – работа внешних и внутренних сил;

$V$  – объем деформируемого материала.

В классической интерпретации данного метода аппроксимирующие функции называют координатными (по Ритцу), предполагая сходимость решения задачи при достаточно большом числе варьируемых параметров – десятки и даже сотни [9] – неприемлемом в инженерной практике.

Автор монографии [7] Ю.Н. Алексеев вводит предельно простую координатную функцию

$$u_r = Cr \cos 2\alpha, \quad (2)$$

аппроксимирующую радиальное перемещение точек средней линии стенки трубы (окружности радиуса  $r$  в исходном состоянии), рисунок 2.

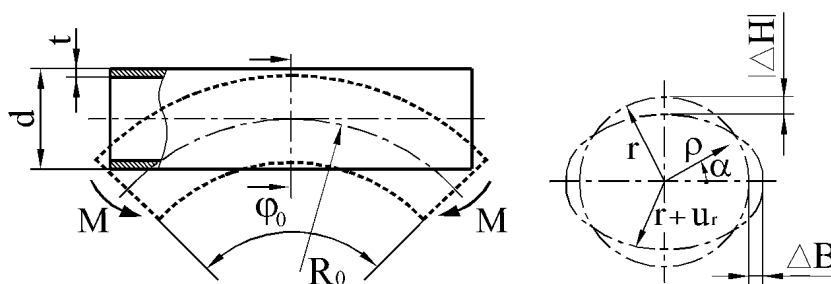


Рисунок 2 – Схема изгиба трубы с деформируемым сечением

Единственным варьируемым параметром принятой функции является коэффициент  $C$ , который определяется согласно (1) из условия  $\int \partial U / \partial C = 0$  в пренебрежении вариацией работы внешнего момента. Работа внутренних сил  $U = \int \sigma_i de_i = \sigma_0 e_i + \Pi e_i^2 / 2$  выражается через интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $e_i$ . Упрочнение материала учитывает линейная зависимость  $\sigma_i = \sigma_0 + \Pi e_i$ .

Используются формулы деформаций  $\varepsilon_\varphi = \frac{r + u_r}{R_0} \sin \alpha$ ;  $\varepsilon_\alpha = (\rho - r) \Delta \xi$ .

Изменение кривизны средней линии стенки трубы:

$$\Delta \xi = \frac{-1}{r^2} \left( \frac{d^2 u_r}{d\alpha^2} + u_r \right). \quad (3)$$

Принятые допущения, включая пренебрежение деформациями сдвига  $-\gamma_{\rho\alpha}$ , достаточно серьезны. Согласно приведенной выше формуле при  $\rho = r$  имеем  $\varepsilon_\alpha = 0$  и  $\varepsilon_\rho = -\varepsilon_\varphi$ . В действительности одноосному напряженному состоянию соответствуют соизмеримые значения деформаций  $\varepsilon_\alpha$  и  $\varepsilon_\rho$ .

Чтобы избавиться от радикала в выражении  $e_i$ , Ю.Н. Алексеев в дальнейшем принимает деформацию  $\varepsilon_\rho$  равной  $(\varepsilon_\varphi + \varepsilon_\alpha)/2$ . При этом не выполняется условие постоянства объема:

$$\varepsilon_\rho + \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\varphi = 0, \quad (4)$$

если учесть, что  $\varepsilon_\alpha = \frac{du_\alpha}{\rho d\alpha} + \frac{1}{\rho} \int \varepsilon_\rho d\rho$ . Но зато получились простые формулы:

$$e_i = \frac{\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\alpha}{\sqrt{3}}; \quad U = \frac{\pm \sigma_0}{\sqrt{3}} (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\alpha) + \frac{\Pi}{6} (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\alpha)^2; \quad \text{знак } \pm \text{ соответствует } \varepsilon_\varphi > 0 \text{ и } \varepsilon_\varphi < 0.$$

В уравнении (1), которое Ю.Н. Алексеев записывает в виде:

$$\int_0^{\varphi_0} \int_0^{2\pi} \int_{r-\frac{t}{2}}^{r+\frac{t}{2}} \frac{\partial U}{\partial C} d\varphi (R_0 + r \sin \alpha) d\alpha \rho d\rho = 0,$$

также заложено противоречие. Длина материального волокна принята переменной  $(R_0 + r \sin \alpha)\varphi_0$ , а толщина стенки  $t$  – постоянной. Было бы логичнее и проще интегрировать по объему недеформированной трубы. Решением данного уравнения определяется коэффициент функции (2). Его выражение

$$C = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}\sigma_0}{\Pi}}{1 + 1,5 \frac{t^2 R_0^2}{r^2}}$$

согласуется с практикой в том, что овальность сечения увеличивается с уменьшением толщины стенки и радиуса изгиба, а также с уменьшением модуля упрочнения материала. Одинаковое, но с противоположными знаками изменение ширины  $\Delta B$  и высоты  $\Delta H$  сечения трубы на рисунке 1, заданное функцией (2), противоречит данным физических и вычислительных экспериментов, согласно которым  $|\Delta H| > \Delta B$ .

Аналогичный подход к оценке овальности сечения трубы, изогнутой моментом, с применением функции (2) в работе [10] Б.С. Билобрана содержит ряд существенных отличий. Прежде всего – это корректное выражение интенсивности деформаций

$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_\varphi \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha^2}$ , преобразуемое к виду:

$e_i = \sqrt{\varepsilon_\varphi^2 + \frac{4}{3}(\rho - r)^2 \Delta \xi^2}$  благодаря принятой формуле деформации

$\varepsilon_\alpha = -0,5\varepsilon_\varphi + (\rho - r)\Delta \xi$ , в принципе вполне допустимой. Однако в данном случае она противоречит еще одной аппроксимирующей функции, которая введена для перемещений по периметру сечения:

$$u_\alpha = -\frac{1}{2}Cr \sin 2\alpha, \quad (5)$$

поскольку из нее с учетом (2) следует равенство нулю деформации  $\varepsilon_\alpha$  средней линии сечения.

По сравнению с [7], уточняется выражение деформации  $\varepsilon_\varphi = \frac{r}{R_0} \sin \alpha + u_r \sin \alpha + u_\alpha \cos \alpha$ , вместе с выражениями (2) и (3) оно преобразуется к

виду:  $\varepsilon_\varphi = \frac{r}{R_0} \sin \alpha (1 - C \sin^2 \alpha)$ . Пренебрегая вариацией работы внешнего момента,

автор [10] интегрирует уравнение (1) по исходным размерам трубы. Из-за наличия тригонометрических функций под знаком радикала в выражении  $e_i$  интегрирование выполняется с применением специальных функций.

### 1.1.2 Изгибающий момент

Большое внимание, которое уделяется расчету изгибающего момента  $M_{\text{изг}}$ , объясняется необходимостью учета пружинения, т.е. изменению кривизны оси трубы при разгрузке

$$\frac{1}{R_{ост}} - \frac{1}{R_0} = \frac{M_{изг}}{EI}.$$

Эта формула, содержащая радиус изгиба  $R_0$  и его остаточное значение  $R_{ост}$ , а также модуль Юнга  $E$  и момент инерции сечения  $I$ , основана на выражениях деформаций и условных напряжений разгрузки:

$$\varepsilon_{разг} = \left( \frac{1}{R_{ост}} - \frac{1}{R_0} \right) \rho \sin \alpha, \quad \sigma_{усл} = E \varepsilon_{разг}.$$

Из теории упругого изгиба кривых брусьев [11] следует более сложное выражение  $\varepsilon_{разг}$ . В данном контексте оно не находит практического применения, поскольку мало влияет на конечный результат по сравнению с разбросом механических свойств материала трубы.

Обычно исходят из схемы одноосного напряженного состояния, отождествляя зависимость положительных напряжений гибки  $\sigma_\varphi$  от деформации  $\varepsilon_\varphi$  с поведением материала при стандартном испытании образца на растяжение. Нейтральную линию эпюры  $\sigma_\varphi$  совмещают с центром сечения. Упрочнение материала учитывают функцией

$$\sigma_s = A \varepsilon_i^n. \quad (6)$$

Принимая  $\varepsilon_\varphi = \rho \sin \alpha / R_0$ , выражают изгибающий момент для жестко-пластического материала интегралом по  $1/4$  площади сечения  $F$  с неотрицательными значениями синуса  $\alpha$ :

$$M_{изг} = \frac{4A}{R_0^n} \int_{F/4} (\rho \sin \alpha)^{n+1} dF. \quad (7)$$

Значения момента получают численным интегрированием с помощью программы типа MathCAD.

В работах [12, 13] используют кусочно-линейную эпюру напряжений  $\sigma_\varphi$ , изгибающий момент выражают тремя интегралами – по упругой  $F_y$  и пластической  $F_n$  областям  $1/4$  поперечного сечения трубы:

$$M_{\text{изг}} = \frac{4\sigma_0}{y_1} \int_{F_y} y^2 dF + 4\sigma_0 \int_{F_n} y dF + 4 \frac{\sigma_n - \sigma_0}{0,5d - y_1} \int_{F_n} (y - y_1) y dF. \quad (8)$$

Первый интеграл относится к упругой области, ограниченной расстоянием  $y = y_1$  до нейтральной поверхности. Второй и третий интегралы учитывают по отдельности начальное напряжение текучести  $\sigma_0$  и его приращение. Напряжение на границе сечения ( $y = d/2$ ), обозначенное как  $\sigma_n$ , задают согласно истинной кривой упрочнения [12] или ее аппроксимации степенной функцией [13].

В публикации [14] функцию (6), аппроксимирующую напряжение гибки, применяют ко всему сечению трубы. При этом в окрестностях нейтральной линии абсолютные значения  $\sigma_\varphi$  завышаются, а вблизи границы упругой и пластической зон занижаются. В целом погрешность распространения функции (6) на упругую зону невелика, особенно при гибке на малый радиус, когда в преобладающей части сечения имеет место пластическое состояние.

Соотношение упругой и пластической зон иллюстрирует рисунок 3, где труба, нагруженная внешней силой, условно показана прямой, а различным сечениям поставлены в соответствие значения радиуса оси, переменного по ее длине [15].

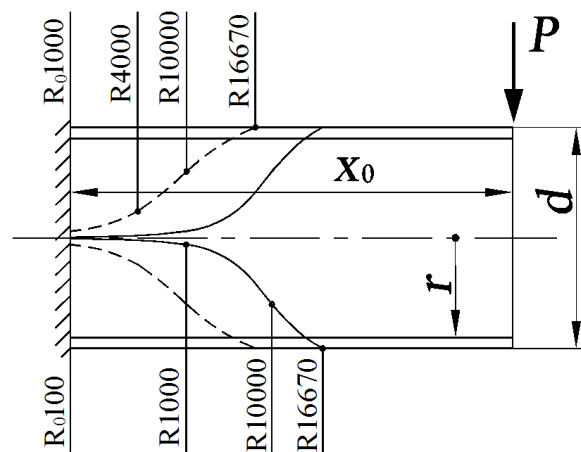


Рисунок 3 – Границы упругой и пластической областей при изгибе на радиусы  $R_0 = 2d$  и  $R_0 = 20d$  – сплошная линия и пунктир; материал трубы – сталь 20, размеры:  $d = 50$  мм,  $r = 22,5$  мм,  $x_0 = 2d$

Искажение формы сечения трубы оказывает двойное влияние на величину  $M_{\text{изг}}$  – через уменьшение высоты сечения и изменение напряженного состояния. Первый фактор можно учесть введением координатной функции радиального перемещения (2) в интегральное выражение момента внутренних сил. Изменение напряженного состояния, по сравнению с одноосным, вызывается, главным образом, изгибом стенки в соответствии с формулой (3). В результате расчетное значение изгибающего момента  $M_{\text{изг}}$  существенно уменьшается и, как показано в монографии [13], приближается к фактическому.

Овальность сечения изогнутой трубы уменьшает не только величину  $M_{\text{изг}}$ , но также и момент инерции сечения (причем – в большей степени), что в итоге приводит к увеличению пружинения [16]. В этом источнике обращается внимание также на изменение овальности сечения при разгрузке – эффект Кармана. Последний становится значимым при сравнительно малых величинах  $R_0t/r^2$  порядка 2,5 – 3.

### 1.1.3 Изменение толщины стенки трубы

В предыдущей части обзора не упоминались некоторые весьма важные аспекты гибки труб, что оправдано их слабой корреляцией с овальностью сечений и расчетной величиной изгибающего момента. К числу таких аспектов относится разнотолщинность стенки трубы, приобретаемая при гибке. Среднее значение толщины  $t$  остается неизменным, поскольку смещение нейтральной поверхности относительно центра сечения не учитывается. Однако изменение толщины стенки трубы имеет самостоятельное практическое значение, поскольку ее уменьшение  $\Delta t < 0$  ограничивается техническими требованиями к трубопроводам.

В гидравлических системах, где статическое рабочее давление порядка 16...24 МПа [5] может резко повышаться при гидроударе, утонение стенки трубы способствует разрушению трубопровода и даже становится основной его

причиной. При гибке оно распространяется на двояко выпуклую поверхность трубы и достигает максимума в абсолютном выражении  $|\Delta t|$  на наибольшем расстоянии от оси сектора тора, форму которого имеет изогнутый участок.

В рассмотренных выше публикациях деформируемый материал считался изотропным, тогда как растяжение образцов, вырезанных из реальных труб, обнаруживает существенное различие показателей их относительного уменьшения ширины и толщины [17 – 20]. Данное проявление анизотропии должно существенно сказываться на изменении толщины стенки изгибаемой трубы. Это подтверждает решение вариационной задачи изгиба трубы без изменения формы сечения [21] с учетом показателя  $\mu = (\varepsilon_p/\varepsilon_a)/[(\varepsilon_p/\varepsilon_a) + 1]$  цилиндрической анизотропии [22]. Варьируемый параметр  $\nu$  вводили в формулу перемещения по периметру сечения

$$u_\alpha = \frac{\nu \cos \alpha}{R} (r^2 + \rho^2). \quad (9)$$

Графики на рисунке 4 иллюстрируют влияние показателя анизотропии на утонение стенки при различных относительных радиусах гибки  $R/d$ .

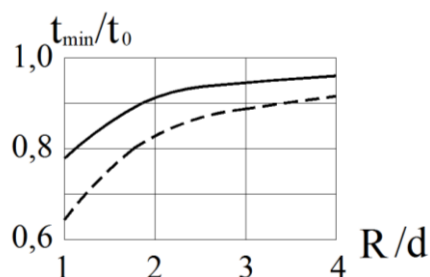


Рисунок 4 – Относительные значения минимальной толщины стенки, сплошная и пунктирная линии соответствуют  $\mu = 0,33$  и  $0,66$

Рассчитанное изменение толщины стенки – утонение и утолщение в зависимости от знака деформаций  $\varepsilon_\varphi$  – распределяются по сечению трубы симметрично. В действительности симметрия эпюр деформаций нарушается из-за смещения нейтральной поверхности и растяжения оси трубы, что особенно проявляется при нагружении поперечными и продольными силами. Поэтому



применение результатов исследования чистого изгиба трубы в практике трубогибочного производства ограничивается оценкой овальности сечения и момента внутренних сил. Утонение стенки трубы прогнозируют на основании обобщения данных экспериментов и производственного опыта.

## 1.2 Технологический изгиб

В машиностроении широко применяется гибка труб по круглому копиру (шаблону), рисунок 5.

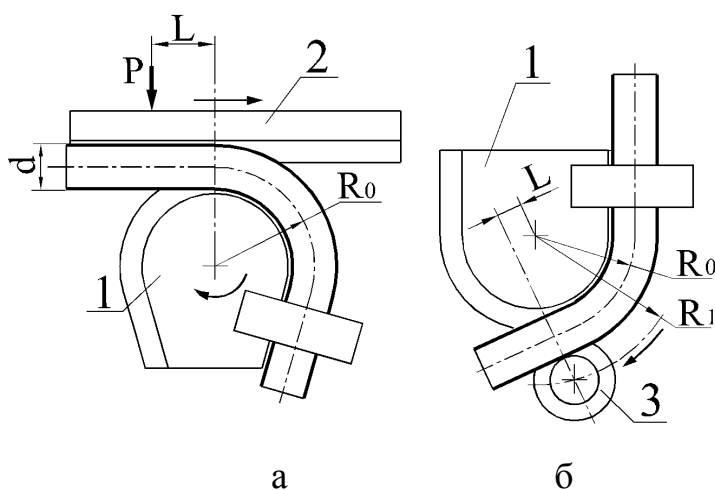


Рисунок 5 – Схемы гибки по копиру: а – наматыванием, б – обкатыванием

Принципиальные отличия реальных условий изгиба от идеализированных (см. рисунок 2) заключаются в следующем. Желобообразная форма рабочей поверхности инструмента: копира 1, ползуна 2, обкатывающего ролика 3 ограничивает изменение ширины сечения трубы. Недеформируемые участки заготовки, между которыми располагается очаг пластических деформаций, затрудняют перемещение материала  $u_\alpha$  по периметру сечения; соответственно уменьшается соотношение поперечных деформаций  $\varepsilon_\alpha$  и  $\varepsilon_\rho$  в пользу последней, т.е. увеличивается разнотолщинность стенки трубы. Этому способствует также

использование дорна, поддерживающего стенку трубы изнутри при гибке наматыванием на копир.

### 1.2.1 Экспериментальное определение деформаций

Деформируемый материал образует тороидальный участок радиуса  $R_0$ , прилегающий к копиру, проходя перед этим зону свободного изгиба (ее длина приблизительно равна плечу силы  $L$  на рисунке 5). Пластическое деформирование продолжается на выходе из названной зоны, постепенно ослабевая. При гибке на  $180^\circ$  относительное удлинение материального волокна  $\varepsilon_\varphi$ , измеренное по дуге радиуса  $R_0 + 0,5d$ , оказывается стабильным в диапазоне  $\sim 120^\circ$  [6], от границ которого постепенно убывает до нуля, выходя за пределы изогнутого участка согласно данным таблицы 1.

Таблица 1 – Распределение отношения деформации  $\varepsilon_\varphi$  к ее номинальному значению  $0,5d/R_0$

Схема гибки	Длина изогнутого участка $\varphi$ в градусах					
	0	15	30	150	165	180
Наматыванием (рис. 5, а)	0,27	0,60	0,91	1,0	0,91	0,48
Наматыванием с дорном	0,16	0,74	0,95	0,95	0,48	0,13
Обкатыванием (рис. 5, б)*	0,26	0,63	0,95	0,92	0,89	0,54

Деформации  $\varepsilon_\alpha$  и  $\varepsilon_\varphi$  определяли по изменению сетки, нанесенной на наружную поверхность исходной заготовки. Радиальную деформацию  $\varepsilon_r$  находили из условия (4), при гибке наматыванием на копир отношения  $\varepsilon_r/\varepsilon_\varphi$  составили примерно -0,4 в области утонения стенки и -0,52 в области утолщения.

---

\* В данном эксперименте между обкатывающим роликом и заготовкой устанавливали промежуточную планку по типу ползуна 2.

Применение дорна дает существенно другие отношения, а именно -0,8 и -0,7. Наименьшая разнотолщинность стенки трубы отмечена при гибке обкатыванием: отношение  $\varepsilon_p/\varepsilon_\varphi$  при утонении/ утолщении стенки равно -0,32/ -0,45; уменьшение высоты сечения трубы при этом в 2,5 раза меньше, чем при гибке наматыванием на копир без дорна.

В монографии отечественных авторов [13] содержатся результаты экспериментальной гибки тонкостенных труб на малые радиусы. Применяли схему наматывания на копир, показанную на рисунке 5, а, с использованием ложкообразного дорна. Равномерное растяжение материальных волокон трубы с размерами  $d = 76$  мм,  $t = 3$  мм, изогнутой на радиус  $R_0 = 1,7d$  и угол  $\varphi = 120^\circ$ , распространялось на  $30^\circ$  в каждую сторону от биссектрисы угла  $\varphi$ . Здесь наблюдалось значительное превышение деформаций по толщине  $\varepsilon_p$  над деформациями по периметру сечения  $\varepsilon_\alpha$  в абсолютных величинах (отношение примерно 3: 1), рисунок 6, а.

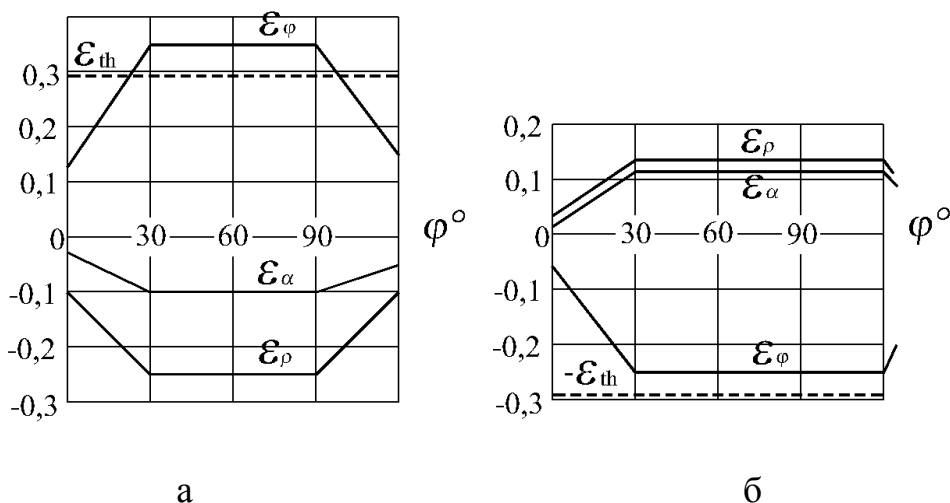


Рисунок 6 – Упрощенные графики деформаций в области растяжения (а) и сжатия (б)

Представленные графики согласуются с данными [6], также относящимися к изгибу с дорном. Особенности картины на рисунке 6, б: равенство  $\varepsilon_\alpha \approx \varepsilon_p$  и более равномерное распределение деформаций по углу  $\varphi$  объясняется

отсутствием контакта внутренней поверхности трубы с законцовкой дорна в области сжатия материального волокна.

Отличие максимального и минимального значений  $\varepsilon_\varphi$  от “теоретических”  $\varepsilon_{th} = \pm r/R_0$  объясняется в первую очередь смещением нейтральной поверхности изгиба в область сжатия, вызванным силами трения со стороны дорна и лотка, и изменением толщины стенки трубы. Соответствующее приращение деформации  $\Delta\varepsilon_\varphi$ , показанное на рисунке 6, усугубляет утонение стенки трубы. Росту  $\Delta\varepsilon_\varphi$  способствует неравномерное распределение деформаций по углу  $\varphi$ , тогда как их выход за пределы изогнутого участка оказывает обратное действие.

Последний из названных факторов вызывает депланацию и поворот материальных сечений, плоских и перпендикулярных к оси трубы в исходном состоянии [6]. На границе изогнутого участка, от которой отсчитывается уголгиба  $\varphi$ , сечение поворачивается в направлении отсчета на угол  $\Delta\varphi_1 > 0$ , на другой границе  $\Delta\varphi_2 < 0$ ; в пределах угла  $\varphi$  значения  $\Delta\varphi$  переходят через ноль, рисунок 7.

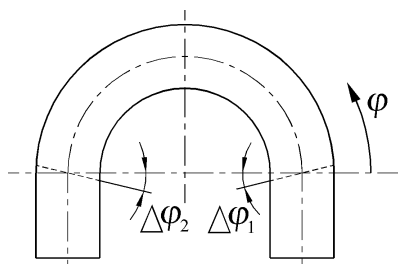


Рисунок 7 – Схема поворота сечений на границах изогнутого участка

Поворот материальных сечений обнаруживают с помощью пружинных колец, самоустанавливающихся в нормальное положение относительно оси, и заранее нанесенной делительной сетки. Также заслуживает внимания распределение по углугиба показателя овализации трубы  $\Theta = (B - H)/d$ , где  $B$  – ширина сечения,  $H$  – высота. На рисунке 8 с примером такого распределения, заимствованном из [13], по-видимому, допущена “опечатка”: вместо значения угла  $15^\circ$ , относящегося к началугиба, следует читать  $0^\circ$ ; размеры изогнутой трубы:  $d = 76$  мм,  $t = 3$  мм,  $R_0 = 1,7d$ .

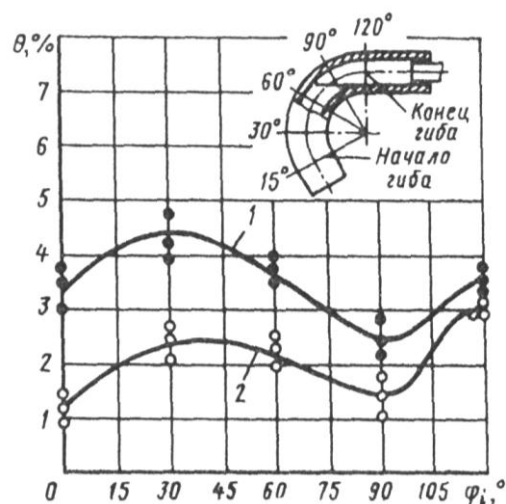


Рисунок 8 – Экспериментальные зависимости овальности сечения от углагиба и вида ложкообразного дорна: укороченного (1) и полного (2)

В диапазоне  $0 \dots 30^\circ$  овальность сечения, образующаяся в данном случае, в основном, за счет уменьшения его высоты, возрастает по мере удаления от прямого участка трубы, затрудняющего овализацию. Дальнейшее уменьшение показателя  $\theta$  при  $\varphi = 60 \dots 90^\circ$  можно объяснить влиянием дорна, установленного с опережением, когда центр радиуса “ложки” смещен относительно центра копира в направлении вращения последнего. Далее значения  $\theta$  снова возрастают очевидно потому, что эффект опережающей установки дорна ослабевает, но возрастает влияние зазора внутренней поверхности трубы относительно цилиндрической части дорна.

На среднем радиусе изогнутого участка трубы, показанного на рисунке 8, деформация  $\varepsilon_\varphi$  составила 8%, а углы поворота материальных сечений  $\Delta\varphi$  равнялись -0,03 радиана в началегиба и 0,06 - в конце [13]. Авторы этой монографии связывают эволюцию сечений с влиянием сил трения, действующих со стороны дорна, что, по-видимому, не является исчерпывающим объяснением, так как сходная картина наблюдается и в бездорновом случае [6].

Наряду с рассмотренными монографиями, в которых обобщены результаты экспериментальных исследований, опубликовано немало разрозненных данных практического измерения овальности изогнутых участков труб. В теоретической

статье [7], посвященной овализации труб при изгибе моментом, приводятся результаты экспериментов, однако не указывается способ гибки. Согласно [23] при гибке обкаткой стальных труб диаметром  $d = 16$  мм, толщиной  $t = 1,5$  мм на радиус  $R_0 = 1,5d$  этот показатель составляет от 15% до 18% при углах гибки соответственно от  $90^\circ$  до  $180^\circ$ . В другой работе [24] предлагается усредненная оценка показателя овализации –  $0,22d/R_0$ .

Все эти данные относятся к гибке без дорнов и наполнителей. Другие технические подробности исследуемых процессов нередко опускаются, хотя они также имеют определенное значение. Установлено, например, что овализация возрастает с увеличением скорости гибки и уменьшается при использовании нагрева [25]. Ее росту способствуют также силы трения, действующие на трубу со стороны гибочного инструмента [4].

### 1.2.2 Теоретические исследования

В научной и учебной литературе, затрагивающей вопросы теории обработки металлов давлением, проблематика трубогибочного производства сводится, в основном, к расчету изгибающего момента и пружинения [26, 27, 28]. Не будет преувеличением констатировать отсутствие не только общепринятой инженерной теории гибки труб, но и сформировавшегося подхода к ее разработке. Разрозненные обращения к проблеме овализации труб (см. п. 1.1) представляют всего лишь попытки решения частной задачи в неадекватной, с точки зрения практики, двумерной постановке. Примеры более строгого подхода к теоретическому изучению технологического изгиба труб немногочисленны.

В одном из них рассматривается изгиб труб большого диаметра порядка 1000 мм при строительстве магистральных трубопроводов [12], имеющий целью получение остаточного (после разгрузки) угла изгиба  $\varphi_{ост}$  в соответствии с рельефом местности. Трубоукладчик, используемый как трубогиб, сообщает

прогиб центру трубы относительно концов, удерживаемых тросами. Расчет необходимого прогиба включает определение изгибающего момента  $M_{изг}$  в функции кривизны оси трубы  $f(1/R)$ , переменной по ее длине. Поскольку заданные значения  $\varphi_{ост}$  весьма малы, область пластических деформаций невелика, пунктирная линия на рисунке 3 дает представление о ее границах. Угол пружинения в данном случае соизмерим с углом гибки, и относительная погрешность определения изгибающего момента переносится на остаточный угол с многократным увеличением. Поэтому линеаризация эпюры пластического напряжения по типу формулы (8) оказывается неприемлемой.

Из равенства плеча внешней силы осевой координате  $z$  следует соотношение, справедливое для свободного изгиба трубы:

$$z = z_1 \frac{f(1/R)}{f(1/R_0)}. \quad (10)$$

Радиус оси  $R_0$  на заданном плече  $z_1$  считается известным либо определяется подбором. Численное определение изгибающего момента позволяет на основе данного соотношения получить дискретную зависимость кривизны изогнутой оси трубы от координаты  $z$ . На участке упруго-пластического изгиба непрерывность эпюры напряжения достигается соответствующей стыковкой прямого и криволинейных участков.

Применение единой кривой (6) для упругого и пластического состояния приводит к сокращению интегралов в выражениях моментов (7), содержащихся в числителе и знаменателе соотношения (10). В монографии [29] получено таким образом уравнение изогнутой оси трубы

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} \left( \frac{z}{z_1} \right)^{1/n}. \quad (11)$$

Оно позволило геометрически связать параметры инструмента гибки и отрезка 0-1 оси трубы в зоне свободного изгиба, рисунок 9.

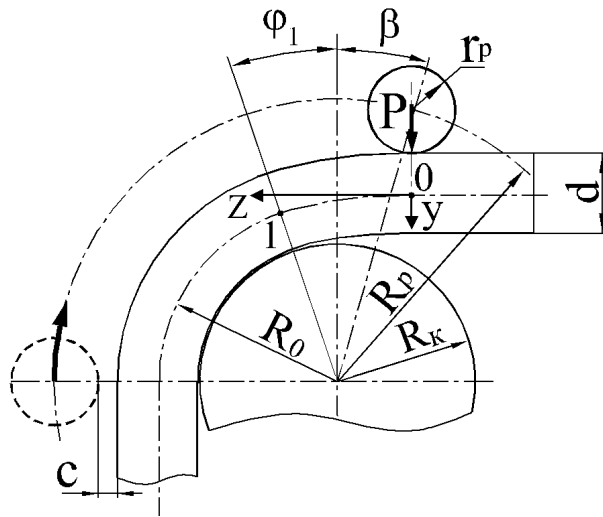


Рисунок 9 – Схема геометрических параметров гибки трубы обкатывающим роликом

Интегрированием уравнения (11) определяются угол поворота и прогиб оси в пределах отрезка 0-1:

$$\varphi_1 = \frac{z_1}{R_0(m+1)}, \quad y_1 = \frac{z_1^2}{R_0(m+1)(m+2)}, \quad (12)$$

$m$  – обратная величина показателя степени  $n$  функции (6).

Неизвестную аппликату  $z_1$  точки 1 на рисунке 9 наряду с ординатой  $y_1$ , углами  $\varphi_1$  и  $\beta$  находят совместным решением системы уравнений, содержащих формулы (12) и геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} R_p \cos \beta &= R_0 \cos \varphi_1 + y_1 + 0,5d + r_p; \\ R_p \sin \beta &= z_1 - R_0 \sin \varphi_1; \\ R_p &= R_0 + c + 0,5d + r_p. \end{aligned} \quad (13)$$

Универсальные вычислительные программы решают подобные и более сложные системы, даже если затравочные значения неизвестных далеки от истинных.

Аналитические исследования овализации сечения трубы, упоминаемые в п. 1.1, выполнены применительно к изгибу моментом, в двумерной постановке. Трехмерный компьютерный анализ пластического изгиба трубы с деформируемым сечением содержится в статье [30]. В качестве основы



математической модели предложена функция, аппроксимирующая радиальное перемещение точек средней линии сечения:

$$u_r = \frac{d}{2} \xi \cos^k \left( \frac{\pi \psi}{2 \psi_0} \right) \cos 2\alpha + \frac{d}{2} \zeta \cos^k \left( \frac{\pi \psi}{2 \psi_0} \right) \sin 3\alpha - t\chi \cos^k \left( \frac{\pi \psi}{2 \psi_0} \right) \sin \alpha.$$

Здесь  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\chi$ ,  $k$  – варьируемые параметры,  $\psi_0$  – половина угла охвата копира изогнутой трубой,  $\psi$  – текущее значение угла охвата в диапазоне от нуля до  $\psi_0$ . Варьируемые параметры определяются из условия минимума полной потенциальной энергии системы. Для алюминиевой трубы диаметром 25,4 мм толщиной 2,92 мм, изогнутой на радиус 50,8 мм, они составили:  $\xi = 0,081$ ,  $\zeta = 0,0031$ ,  $\chi = 0,112$ . Значение  $k$  принимали равным 0,7 на основании опытных данных.

Авторы приняли расчетную схему, идентичную гибке наматыванием на круглый копир без применения дорна, при следующих предпосылках:

- отсутствуют переходные участки, где кривизна оси трубы изменяется от нуля до значения, соответствующего размеру копира;
- нагружение считается простым, а упругая область – пренебрежимо малой;
- материал трубы несжимаемый, закон упрочнения линейный, действительна гипотеза плоских нормальных сечений;
- напряжения сдвига и удлинение оси трубы пренебрежимо малы;
- локальной разгрузкой, вызванной перемещением оси трубы относительно центров сечений, пренебрегали;
- овализация сечения отсутствует на границах угла охвата и максимальна на его биссектрисе.

Следствием последнего положения является переменная величина не только изгибающего момента, но также и момента инерции сечения  $J$ , поэтому угол пружинения определяется интегралом  $\int_l \frac{M}{EJ} dl$  по длине изогнутой оси трубы.

Приводится система уравнений и ссылка на метод решения, относящийся к нелинейному программированию. Вычислительные трудности, связанные с

подобными решениями, стали причиной априорного задания одного из варьируемых параметров  $k$ . Авторы отмечают, что интегрирование проводилось на недеформированной конфигурации, а не на деформированной, как это должно быть. Различие подсчитанных значений момента инерции в пределах угла охвата копира невелико – около 2%. Поэтому оценка угла пружинения интегральным показателем, приведенным выше, не имеет существенного значения. Материалы статьи предназначаются для практического использования: разработанная математическая модель должна функционировать в реальном времени протекания процесса гибки на оборудовании с ЧПУ.

Обращает на себя внимание тот факт, что авторы этой, часто упоминаемой публикации [30], как и другие исследователи, не учитывают переходные участки деформирования, где кривизна оси трубы, наматываемой на копир, изменяется от нуля до своего конечного значения. Протяженность переходных участков оказывает значительное влияние на деформированное состояние изогнутой трубы – существенно большее, чем прочие факторы.

Современные системы числового программного управления оборудованием, использующие мощные вычислительные процессоры, способны оперативно корректировать заданные перемещения гибочного инструмента, основываясь на фактических значениях силовых параметров гибки. В результате уменьшается разброс размеров изделий, вызванный различием свойств заготовок. Данное обстоятельство стимулирует создание сложных математических моделей гибки труб, опубликованных в последнее время. Могут ли служить подобные модели развитию теории гибки труб – это вопрос не риторический, если учесть, что авторы используют сложные методы вычислений, включая технологии нейронных сетей [30, 31]. Обобщение полученных результатов в виде эмпирических или приближенных аналитических формул представляется проблематичным.

Последнее замечание можно отнести также и к работам по конечно-элементному моделированию гибки труб [32, 33, 34] с помощью известных коммерческих программ DYNIFORM, ABACUS и др. Результаты этих работ

нередко предназначаются для разработчиков управляющих программ оборудования с ЧПУ. Помимо повышения точности расчета пружинения проверяется устойчивость стенки трубы, испытывающей сжатие [35].

Не умаляя практической значимости КЭ-моделирования процессов пластического деформирования, следует использовать в инженерных расчетах также другие компьютерные технологии, мало затратные по освоению и применению. Имеются в виду программирование в среде MathCAD – своего рода калькулятора с мощным математическим ядром. Применение современных методов объектно-ориентированного моделирования [36] делает MathCAD и подобные ему вычислительные средства эффективным инструментом сложных расчетов.

### 1.3 Другие виды изгиба труб

#### 1.3.1 Изгиб морских трубопроводов

Труба, укладываемая на дно водоема, подвергается немонотонному изгибу: сначала при сходе со слипа и провисании, а затем под воздействием рельефа дна. Схема нагружения включает продольную силу и внешнее давление воды, которое сменяется внутренним давлением после ввода трубопровода в эксплуатацию. “Если при анализе местности для оптимального маршрута прогнозируют, что максимально допустимый момент трубопровода будет превышен, то будет необходимо либо увеличить толщину стенки или выполнить работу на морском дне для уменьшения изгиба трубы” [37].

Приложение продольной силы приводит к смещению нейтральной линии и уменьшению величины  $M_{изг}$ , которая достигает максимума в процессе изгиба (уменьшения радиуса оси трубы), когда упрочнение материала перестает уравновешивать фактор овализации сечения и происходит потеря устойчивости.

У тонкостенных труб она проявляется в катастрофическом сплющивании сечения – образовании так называемой пряжки, рисунок 10.

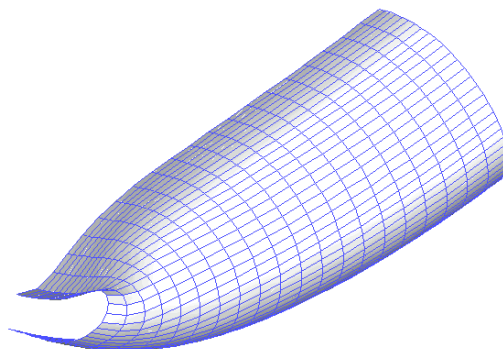


Рисунок 10 – Пример конечно-элементной модели локального сплющивания сечения

Катастрофическому сплющиванию сечения предшествует увеличение  $M_{изг}$  до максимального значения  $M_{max}$ . В ряде публикаций [37 – 41] получены аналитические зависимости изгибающего момента от сопутствующих компонентов нагружения. Вывод формул  $M_{max}$ , удобных для практического применения, связан с рядом упрощений:

- материал трубы жестко-пластический, не упрочняемый;
- радиальное и касательные напряжения не учитываются;
- возможная овальность сечений исходной трубы, характеризуемая показателем  $f_0 = (d_{max} - d_{min})/d$ , неизменна в процессе изгиба.

Наличие исходной овальности снижает сопротивление трубы внешнему давлению, его допустимое значение  $p_c$  при отсутствии других нагрузок определяется распространением пластических деформаций на всю толщину стенки. Согласно [42]

$$p_c^3 - p_e p_c^2 - \left( p_p^2 + p_e p_p f_0 \frac{d}{t} \right) p_c + p_e p_p^2 = 0,$$

где  $p_e = \frac{2 \cdot E}{(1 - \nu^2)} \cdot \left( \frac{t}{d} \right)^3$ ;  $p_p = 2\sigma_0 \frac{t}{d}$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Для жесткопластического материала формула момента чистого изгиба [37]

$M_{изг} = \left(1,05 - 0,0015 \frac{d}{t}\right) d^2 t \sigma_0$  дает результаты, весьма близкие к данным конечно-элементного моделирования.

### 1.3.2 Сжатие прямой трубы по высоте сечения плитами

В монографии [4] упоминается возможность компенсации искажения сечений при гибке трубы предварительным приданием им обратной овальности. С этой целью станок для гибки наматыванием на копир снабжают так называемым калибрующим роликом. В других публикациях, содержащих описание трубогибочного оборудования и процессов гибки труб, сведения о придании заготовкам обратной овальности не фигурируют.

Сжатие прямой трубы по высоте сечения плитами (бойками) может иметь самостоятельное применение, не связанное с последующей гибкой. В таком качестве данная операция исследована в [43, 44, 45], рисунок 11.

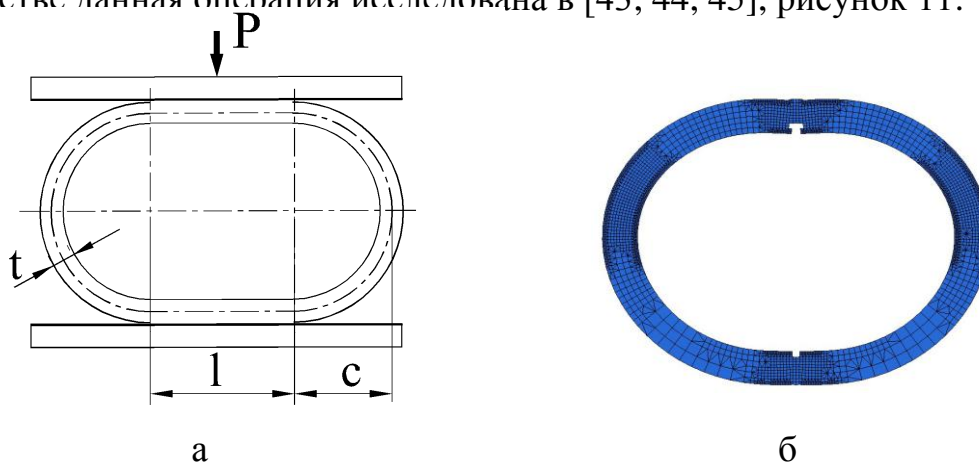


Рисунок 11 – Схема определения силы деформирования (а) и моделирование разрушения (б)

Согласно [43] сила  $P = M/c$ , уравновешивающий ее суммарный момент внутренних сил:  $M = \sigma_s L^2$ , где  $L$  – длина заготовки. Плечо силы

$$c = r \left( 1 + \frac{\delta}{k} - \frac{m}{2} \right); \quad \delta = \frac{\Delta h_1}{r}; \quad k = \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}; \quad m = \frac{l}{r};$$

$r$  – радиус средней линии исходного сечения трубы;

$\Delta h_1$  и  $\Delta h_2$  – абсолютные значения приращений половины высоты и половины ширины сечения трубы.

Коэффициенты  $k$  и  $m$  представлены графическими зависимостями от  $\Delta h_1/r$ , которые обобщают данные эксперимента, выполненного на двух видах образцов. На образцы других труб эти зависимости не могут распространяться, поэтому с практической точки зрения данное исследование не является завершённым.

В работах [44, 45] представлена конечно-элементная модель сжатия сечения прямой трубы до пластического разрушения, рисунок 11, б. Элементы, исчерпавшие ресурс пластичности, автоматически удаляются из принятой сетки. Небезынтересен факт не совсем симметричного хода разрушения. Его можно объяснить накоплением погрешности, связанной с аппроксимацией перемещений и многократным обращением к системе разрешающих уравнений.

### Выводы по разделу и задачи исследования

1. В научной и учебной литературе по теории обработки металлов давлением проблематика трубогибочного производства не упоминается либо сведена к упрощенному расчету изгибающего момента и пружинения. Не будет преувеличением констатировать отсутствие не только общепринятой инженерной теории гибки труб, но и сформировавшегося подхода к ее разработке.

2. Разрозненные обращения к проблеме овализации труб объединяет использование принципа минимума полной потенциальной энергии, в том числе некорректное, и произвольный – со слабыми кинематическими ограничениями – выбор координатных функций, аппроксимирующих форму деформируемого сечения.

3. Традиционная аппроксимация поля перемещений координатными функциями затрудняет учет вариации работы внешних сил, а также не позволяет оценить сходимость решения задачи из-за минимального числа варьируемых параметров, поэтому граничные кинематические условия, ограничивающие выбор названных функций, должны быть дополнены связями, заданными в напряжениях.

4. Математическое моделирование технологического изгиба труб эволюционирует от простейшей схемы чистого изгиба к более адекватным схемам изгиба поперечной силой; те и другие малоприспособны для практики: первые недостоверны, а последние – предназначенные для компьютерной реализации – сложны в программировании.

5. Известная математическая модель изгиба трубы по круглому копиру, устанавливает зависимость утонения стенки от показателя степенной функции упрочнения и длины переходного участка, связь последней с размерами инструмента определяется приближенным уравнением изогнутой оси. Учет сдвигов сечений, вызванных перерезывающей силой, позволит существенно уточнить форму переходного участка трубы и расчет утонения.

6. Компенсация овальности сечений трубы, приобретаемой при гибке, предварительным приданием обратной овальности не находит практического применения несмотря на возможность ее реализации простыми техническими средствами, что объясняется не изученностью процесса формоизменения сечения прямой трубы и отсутствием соответствующих расчетных методик.

В соответствии с целью работы, состоянием теории и практики гибки труб, сформулированы следующие задачи:

- теоретическое исследование процесса деформирования сечения прямой трубы плитами с вогнутой рабочей поверхностью;
- математическое моделирование изгиба трубы по круглому копиру с учетом сдвигов сечений на участке свободного деформирования;

- усовершенствование инженерного метода вариационной оценки деформаций, обеспечивающее сходимость решения задачи и учет вариации работы внешних сил;

- создание упрощенных методик расчета деформирования плитам сечения прямой трубы и утонения стенки при последующей гибке по круглому копиру.



## 2. Математическое моделирование деформирования сечения прямой трубы

Определяется соотношение размеров сечения тонкостенной трубы, сжатого по высоте инструментами в виде плит с вогнутой рабочей поверхностью. Трубе, деформируемой в положении плашмя, придается овальная форма на участке, который затем подвергается изгибу на специальном оборудовании. В результате форма сечений, с учетом их обратного формоизменения при гибке приближается к исходной.

Задача решается на основе равновесия внешних и внутренних сил и относится к разряду статически неопределимых, поэтому для получения разрешающих уравнений требуется связать внутренний момент с изменением кривизны стенки трубы  $\Delta\zeta$  и наложить на эту величину корректное кинематическое ограничение.

### 2.1 Постановка задачи

Деформируемый материал принят жесткопластическим, упрочняющимся по степенному закону (6). Относительное удлинение оси трубы и ее продольного волокна принимается равным нулю, формоизменение всех поперечных сечений, схематично представленное на рисунке 12, одинаково.

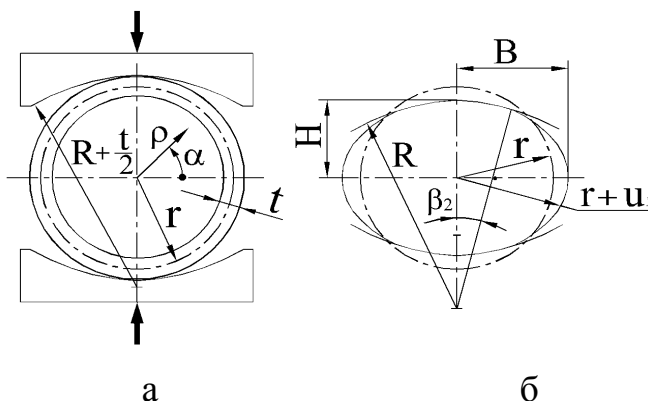


Рисунок 12 – Исходное сечение трубы (а) и его средняя линия после деформирования плитами с вогнутой поверхностью (б)

Участки сечения трубы с постоянной кривизной  $1/R$  средней линии, образованной инструментом, возникают вскоре после начала деформирования, а затем их протяженность возрастает. Отметим, что плоские инструменты, показанные на рисунке 11, не образуют развитую площадь контакта с деформируемым материалом. Сила прессы сосредотачивается на границах выпрямленного участка стенки, который фактически получает слабо выраженную отрицательную кривизну. Имеются основания исходить из аналогичного распределения давления неплоского инструмента.

Двойная симметрия деформированного сечения позволяет ограничиться рассмотрением четверти средней линии: квадранта окружности радиуса  $r$  в исходном и деформированном состоянии, рисунок 13.

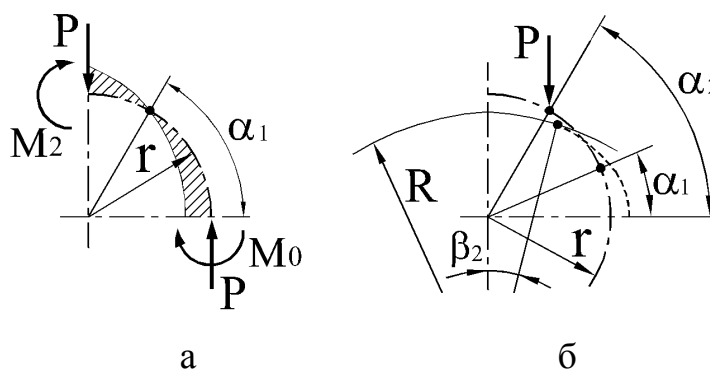


Рисунок 13 – Расчетная схема в момент начала (а) и окончания (б) деформирования

В диапазонах  $0 \leq \alpha < \alpha_1$  и  $\alpha_1 < \alpha \leq \pi/2$  расположены дуги окружности радиуса  $r$ , получившие в рассматриваемый момент положительное и отрицательное приращения кривизны  $\Delta\xi$ . Точка перехода через ноль значений  $\Delta\xi$  с координатой  $\alpha_1$  условно привязана на рисунке 13, б к исходной средней линии. Так же условно показана точка приложения силы  $P$  с координатой  $\alpha_2$ , поскольку равновесие внутренних сил приходится соотносить с известной, т.е. с исходной формой сечения.

В диапазоне  $\alpha_2 \leq \alpha \leq \pi/2$  величина

$$\Delta\xi = 1/R - 1/r; \tag{14}$$

граница конечного положения этого диапазона обозначена размером  $\beta_2$ . Заштрихованная эпюра изгибающего момента  $M$  ориентирована в сторону сжатого поперечного волокна изгибаемой стенки трубы.

### 2.1.1 Исходные уравнения

Используем цилиндрическую систему координат, дополняя полярную систему  $\rho, \alpha$  на рисунке 12 координатой  $z$ , отсчитываемой по оси трубы. Формулы связи компонентов напряженного и деформированного состояний несжимаемого материала:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho - \sigma_{\text{ср}} &= \frac{2\tau_s}{\Gamma} \varepsilon_\rho; & \sigma_\alpha - \sigma_{\text{ср}} &= \frac{2\tau_s}{\Gamma} \varepsilon_\alpha; & \sigma_z - \sigma_{\text{ср}} &= \frac{2\tau_s}{\Gamma} \varepsilon_z; \\ \tau_{\rho\alpha} &= \frac{\tau_s}{\Gamma} \gamma_{\rho\alpha}; & \tau_{\alpha z} &= \frac{\tau_s}{\Gamma} \gamma_{\alpha z}; & \tau_{z\rho} &= \frac{\tau_s}{\Gamma} \gamma_{z\rho}; \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\alpha + \sigma_z}{3}$ ;  $\tau_s$  – напряжение текучести при сдвиге;

интенсивность деформаций сдвига

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ (\varepsilon_\rho - \varepsilon_\alpha)^2 + (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\rho)^2 \right] + \frac{3}{2} (\gamma_{\rho\alpha}^2 + \gamma_{\alpha z}^2 + \gamma_{z\rho}^2)}. \quad (16)$$

Функцию напряжения текучести (6) запишем в виде

$$\tau_s = \frac{A}{\sqrt{3}} \left( \frac{\Gamma}{\sqrt{3}} \right)^n. \quad (17)$$

При  $\varepsilon_z = 0$ , а также  $\gamma_{\alpha z} = 0$  и  $\gamma_{z\rho} = 0$

$$\Gamma = \sqrt{4\varepsilon_\alpha^2 + \gamma_{\rho\alpha}^2}. \quad (18)$$

## 2.2 Вывод расчетных формул

### 2.2.1 Нейтральная линия изгиба

Обозначая  $\rho - r = y$ , принимаем формулу деформации

$$\varepsilon_\alpha = y\Delta\xi + \varepsilon_0, \quad (19)$$

где  $\varepsilon_0$  – относительное укорочение средней линии сечения  $\Delta l/l_0 = -y_c\Delta\xi$ ;

$y_c$  – смещение нуля эпюры напряжения  $\sigma_\alpha$  относительно этой линии.

Деформация  $\varepsilon_0 \leq 0$ , поэтому знаки  $y_c$  и  $\Delta\xi$  – положительные и отрицательные – всегда одинаковы. Смещение  $y_c$  является функцией угла  $\alpha$ , его значение определяется условием

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_\alpha dy = -P \cos \alpha. \quad (20)$$

Для приближенного учета относительного изменения длины средней линии сечения выражаем моменты внутренних сил  $M_0$  и  $M_2$  без учета упрочнения материала – через начальное напряжение текучести как  $\sigma_{02}t^2/4$  (знак соответствует знаку  $\Delta\xi$ ). Сила  $P$  на рисунке 13, б создает момент  $Pr(1 - \cos\alpha)$ , уравновешивающий  $M_0$  и  $M_2$ , таким образом,  $P = \sigma_{02}t^2/[2r(1 - \cos\alpha_2)]$ . При этом  $2\sigma_{02}y_c = \pm P \cos\alpha$ , в результате

$$y_c = \pm t^2 \cos\alpha / [4r(1 - \cos\alpha_2)]. \quad (21)$$

### 2.2.2 Момент внутренних сил

Пренебрегая сдвиговыми деформациями и напряжением  $\sigma_p$  в формулах (15) и (16), получаем:  $\sigma_\alpha = 2\tau_s$  и  $\Gamma = 2\varepsilon_\alpha$ , откуда с учетом степенной функции упрочнения (17) выражаем абсолютную величину напряжения

$$|\sigma_\alpha| = A \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} |\varepsilon_\alpha|^n. \quad (22)$$

Данная формула не содержит начальное напряжение текучести, следовательно, пластическое состояние наступает при как угодно малых напряжениях. Принятие подобной модели материала относится к числу необходимых допущений.

Для определения момента внутренних сил  $M$  исходим из симметрии эпюр положительного и отрицательного напряжения  $\sigma_\alpha$ , полагая незначительным влияние сжатия средней линии сечения на величину  $M$ . Тогда  $\varepsilon_\alpha = y\Delta\xi$ , а момент внутренних сил выражаем удвоенным интегралом положительного напряжения  $\sigma_\alpha$  по половине толщины стенки трубы:

$$M = 2\text{sign}(\Delta\xi) \int_0^{t/2} \sigma_\alpha y dy. \quad (23)$$

С учетом принятых допущений и формул (22), (23)

$$M = \frac{\pm At^{n+2}}{\sqrt{3}(n+2)} \left( \frac{|\Delta\xi|}{\sqrt{3}} \right)^n, \quad (24)$$

знаки плюс и минус относятся к диапазонам  $\alpha_1 > \alpha \geq 0$  и  $\alpha_2 \geq \alpha > \alpha_1$ .

Угловой координате  $\alpha_2$  на рисунке 13, б соответствуют приращение кривизны средней линии и момент:

$$\Delta\xi_2 = \frac{1}{R} - \frac{1}{r}; \quad M_2 = \frac{-At^{n+2}}{\sqrt{3}(n+2)} \left( \frac{-\Delta\xi_2}{\sqrt{3}} \right)^n. \quad (25)$$

Эпюра  $M$  переходит через ноль при  $\alpha = \alpha_1$ , следовательно,

$$P = \frac{M_2}{r(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)}, \quad (26)$$

$$M = M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2).$$

Полученные формулы  $P$  и  $M$ , в отличие от предельно упрощенных аналогов, использованных при выводе формулы (21), позволяют выразить приращение кривизны средней линии деформированного сечения  $\Delta\xi$  в функции угла  $\alpha$ . Из них и предыдущего (24) выражения момента  $M$  следует:

$$\Delta\xi = \text{sign}(\alpha_1 - \alpha) \sqrt{3} \left[ \left| M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \right| \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m, \quad (27)$$

где  $m = 1/n$ .

Допущения, использованные при выводе данной функции, представляются правомерными, если относительная толщина стенки трубы мала – примерно 0,1. В противном случае момент внутренних сил необходимо выражать с учетом касательного напряжения и сжатия сечения по периметру. Это позволит связать  $M$  и  $\Delta\xi$  в рамках классической модели жесткопластического не упрочняемого материала, однако аналитическое решение, по-видимому, окажется невозможным.

### 2.2.3 Точка перехода через ноль момента внутренних сил

Для определения неизвестной координаты  $\alpha_1$ , содержащейся в формулах (26) и (27), связываем длину элементарной дуги деформированной средней линии с исходной длиной равенством, учитывающим деформацию  $\varepsilon_0$  (19):

$$\left(\frac{1}{r} + \Delta\xi\right)^{-1} d\beta = (1 - y_c \Delta\xi) r d\alpha .$$

После его преобразования к виду

$$d\beta = (1 + r\Delta\xi)(1 - y_c \Delta\xi) d\alpha \quad (28)$$

приравниваем определенные интегралы левой и правой частей от 0 до  $0,5\pi$ . После сокращения  $0,5\pi$  в левой и правой частях получаем условие, определяющее значение угла  $\alpha_1$ :

$$\int_0^{\pi/2} [r\Delta\xi - y_c \Delta\xi (1 + r\Delta\xi)] d\alpha = 0. \quad (29)$$

Геометрический смысл интеграла от изменения кривизны дуги, равной  $1/4$  окружности, заключается в суммарном изменении угла касательной, которое должно равняться нулю, поскольку граничные значения этого угла остаются неизменными.

В развернутое выражение условия (29) подставляем формулы  $y_c$  (21) и  $\Delta\xi$ , последняя представлена в трех диапазонах угла  $\alpha$  различными модификациями (25) и (27):

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_2}^{\pi/2} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \left( r + \frac{t^2 \cos \alpha}{4r(1 - \cos \alpha_2)} \right) d\alpha - \\ & - \sqrt{3} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[ \left| M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \right| \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \left( r + \frac{t^2 \cos \alpha}{4r(1 - \cos \alpha_2)} \right) d\alpha + \\ & + \frac{3t^2}{4(1 - \cos \alpha_2)} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[ \left| M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \right| \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^{2m} \cos \alpha d\alpha + \\ & + \sqrt{3} \int_0^{\alpha_1} \left[ \left| M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \right| \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \left( r - \frac{t^2 \cos \alpha}{4r(1 - \cos \alpha_2)} \right) d\alpha - \\ & - \frac{3t^2}{4(1 - \cos \alpha_2)} \int_0^{\alpha_1} \left[ \left| M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \right| \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^{2m} \cos \alpha d\alpha = 0. \end{aligned}$$

Момент  $M_2$  и сила  $P$  должны быть представлены формулами (25) и (26), таким образом, данное уравнение содержит неизвестные значения углов  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  (см. рисунок 13, б). Первый из них назначаем, задавая тем самым некоторую степень деформирования сечения трубы; второй – определяем подбором. При заданном  $\alpha_2 = 1,5$  (близком к  $\pi/2$ ) пробное значение  $\alpha_1 \approx 1$ . Вводим в программу MathCAD некоторую переменную и присваиваем ей выражение левой части уравнения (24) в развернутом виде. Запрашиваем значение переменной и в зависимости от его знака – положительного или отрицательного – подбираем угол  $\alpha_1$  подлежит уменьшению или увеличению. Корректирование  $\alpha_1$  заканчивается после достаточного приближения к нулю названной переменной.

## 2.2.4 Размеры деформированного сечения трубы

Искомые размеры  $H$  и  $B$  (см. рисунок 12, б) образуются суммированием проекций элементарных дуг:

$$H = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{r} + \Delta\xi \right)^{-1} \sin \beta d\beta, \quad B = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{r} + \Delta\xi \right)^{-1} \cos \beta d\beta, \quad (30)$$

где  $\beta$  – угол наклона нормали к овальной средней линии сечения, отсчитываемый от вертикали; выражение в круглых скобках – кривизна деформированной средней линии.

Величина  $\Delta\xi$  выражается различными функциями  $\alpha$ , поэтому интегрирование согласно (30) выполняем с подстановкой различных формул: (25) – для диапазона  $0,5\pi \geq \alpha \geq \alpha_2$  и (26) с разными знаками – для  $\alpha_1 \geq \alpha \geq 0$  и  $\alpha_2 \geq \alpha \geq \alpha_1$ , , рисунок 14.

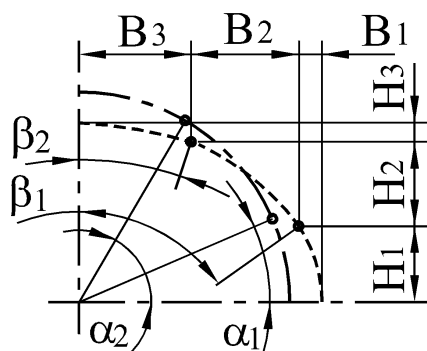


Рисунок 14 – Схема соответствия участков исходной и деформированной средней линии сечения трубы

Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (ранее показанные на рисунке 13, б) привязаны к точкам исходной средней линии радиуса  $r$ , а углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – к конечному положению тех же материальных точек. Заменяем в формулах (30)  $d\beta$  выражением (28), тогда

$$H = r \int_0^{\pi/2} (1 - y_c \Delta\xi) \sin \beta d\alpha; \quad B = r \int_0^{\pi/2} (1 - y_c \Delta\xi) \cos \beta d\alpha. \quad (31)$$

В этих формулах угол  $\beta$  присутствует в качестве функции координаты  $\alpha$ . Его значение  $\beta_2$  (угловой размер дуги радиуса  $R$  на рисунках 13, б и 14) находим



интегрированием правой части (28) от  $\alpha_2$  до  $\pi/2$ . Здесь величина  $\Delta\xi$ , равная  $1/R - 1/r$ , постоянна по  $\alpha$  и результат выражается в квадратурах:

$$\beta_2 = \frac{r}{R} \left[ \frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \frac{t^2(1 - \sin \alpha_2)}{4r(1 - \cos \alpha_2)} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right].$$

Остальная часть средней линии сечения получает переменное по  $\alpha$  приращение кривизны  $\Delta\xi$ , в диапазоне  $\alpha_2 \geq \alpha > \alpha_1$  оно выражается правой частью (27) со знаком минус. Соответствующий интеграл выражения  $d\beta$  согласно формуле (28) прибавляем к значению  $\beta_2$ :

$$\beta_1 = \beta_2 + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ 1 - \sqrt{3}r \left[ \left| M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \right| \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}t^2 \cos \alpha}{4r(1 - \cos \alpha_2)} \left[ \left| M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \right| \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \right\} d\alpha.$$

Размеры дуги постоянного радиуса  $R$ :  $B_3 = R \sin \beta_2$ ,  $H_3 = R(1 - \cos \beta_2)$ .

Прочие размеры, присутствующие на рисунке 14, согласно общим формулам (31) представим в виде:

$$H_2 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}t^2 \cos \alpha}{4r(1 - \cos \alpha_2)} \left[ \left| M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \right| \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \right\} \sin(\beta_2 + f_2(\alpha)) d\alpha;$$

$$H_1 = \int_0^{\alpha_1} r \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}t^2 \cos \alpha}{4r(1 - \cos \alpha_2)} \left[ \left| M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \right| \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \right\} \sin(\beta_1 + f_1(\alpha)) d\alpha;$$

$$B_2 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}t^2 \cos \alpha}{4r(1 - \cos \alpha_2)} \left[ \left| M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \right| \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \right\} \cos(\beta_2 + f_2(\alpha)) d\alpha;$$

$$B_1 = \int_0^{\alpha_1} r \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}t^2 \cos \alpha}{4r(1 - \cos \alpha_2)} \left[ \left| M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \right| \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \right\} \cos(\beta_1 + f_1(\alpha)) d\alpha.$$

Аргумент  $\beta$  синуса и косинуса в формулах (31) здесь заменен интегралом согласно (28) с использованием функций

$$f_2(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha_2} \left\{ 1 - \sqrt{3}r \left[ M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}t^2 \cos \alpha}{4r(1 - \cos \alpha_2)} \left[ M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \right\} d\alpha ;$$

$$f_1(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha_1} \left\{ 1 + \sqrt{3}r \left[ M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}t^2 \cos \alpha}{4r(1 - \cos \alpha_2)} \left[ M_2 + rP(\cos \alpha - \cos \alpha_2) \frac{\sqrt{3}(n+2)}{At^{n+2}} \right]^m \right\} d\alpha .$$

Наличие в этих функциях интегралов с переменным нижним пределом не является препятствием для вычисления программой MathCAD размеров  $H_2$ ,  $H_1$ ,  $B_2$ ,  $B_1$ .

### 2.2.5 Результаты математического моделирования

Рассчитанные приращения размеров, показанных на рисунке 12, б:

$$\Delta H = H_1 + H_2 + H_3 - r \quad \text{и} \quad \Delta B = B_1 + B_2 + B_3 - r \quad (32)$$

позволяют характеризовать высоту и ширину деформированного сечения как  $d + 2\Delta H$  и  $d + 2\Delta B$ . Предполагается, что величина  $2\Delta B$  должна равняться уменьшению высоты сечения при последующей гибке трубы, которое устанавливается в ходе отладки технологического процесса. Зная эту величину, можно рассчитать  $\Delta H < 0$  и высоту сечения прямой трубы после деформирования плитами:  $d + 2\Delta H$ .

К сожалению, мы не можем рассчитывать  $\Delta H$  по заданному значению  $\Delta B$ , поскольку – согласно изложенному выше расчету – необходимо сначала задать исходный параметр расчета – угол  $\alpha_2$ , см. рисунок 13, б. График на рисунке 15 позволяет определить значение  $\alpha_2$ , приблизительно соответствующее требуемой величине  $2\Delta B$ .

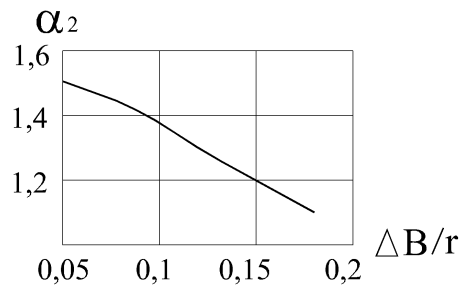


Рисунок 15 – График для выбора примерного значения угла  $\alpha_2$  по заданному относительному увеличению ширины сечения

Данный график дает усредненное представление о взаимосвязи величин  $\alpha_2$  и  $\Delta B$  независимо от материала трубы и относительной толщины стенки  $t/r$  при отношении радиусов инструмента и трубы  $R/r = 2$ . Увеличение отношения  $R/r$  приведет к некоторому уменьшению значения  $\alpha_2$ , соответствующего необходимой величине  $\Delta B$ .

Если в результате расчета получаем значение  $\Delta B$  (32), существенно отличающееся от требуемого, расчет повторяется с откорректированным углом  $\alpha_2$ : его следует увеличить для уменьшения  $\Delta B$  и наоборот.

Константа  $A$  функции упрочнения (6) не влияет на результат, другая константа  $n$  влияет незначительно: уменьшение  $n$  с 0,239 (сталь 12X18H9T) до 0,1 (сплав ВТ1-2) приводит к увеличению рассчитанного значения  $\Delta B$  примерно на 3%. Приблизительно так же влияет уменьшение относительной толщины стенки  $t/r$  с 0,4 до 0,1.

В результате расчета определяется величина  $\Delta H$ , т.е. уменьшение половины высоты сечения прямой трубы, необходимое для требуемого увеличения ширины сечения, см. рисунок 13, б. Рисунок 16 иллюстрирует результаты расчетов по исходным данным: соотношение радиусов инструмента и трубы  $R/r = 2$ ; угол  $\alpha_2 = 1,1$ .

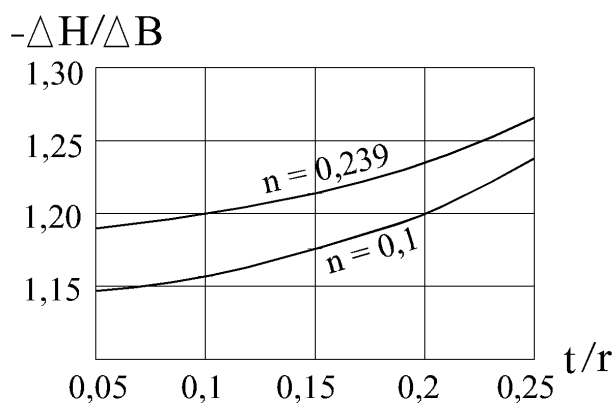


Рисунок 16 – Относительное изменение размеров сечения прямой трубы, деформированного плитами с вогнутой поверхностью

Увеличение отношения  $-\Delta H/\Delta B$  с ростом относительной толщины стенки трубы согласуется с практическим опытом. Характер кривых на данном рисунке отражает нелинейную, близкую к квадратичной зависимость изгибающего момента  $M_2$  (25) и силы  $P$  (26) от толщины  $t$  стенки трубы. С увеличением  $t$  и  $P$  увеличивается сжатие по периметру средней линии сечения, поэтому для получения требуемого увеличения его ширины  $\Delta B$  требуется большее уменьшение высоты  $\Delta H$  по абсолютной величине. Влияние показателя  $n$  функции (6) упрочнения материала трубы на отношение  $-\Delta H/\Delta B$  ослабевает с увеличением толщины стенки. При этом значения  $\Delta B$ , соответствующие данным рисунка 15, одинаковы в первых трех значащих цифрах, т.е. показатель  $n$  фактически влияет только на величину  $\Delta H$ .

### 2.3 Оценка погрешности формулы момента внутренних сил

Пренебрежение сдвиговыми деформациями и напряжениями завышает напряжение  $\sigma_\alpha$  (22) и создаваемый им момент  $M$  (23). Завышение максимально при  $\alpha = \alpha_2$  и уменьшается до нуля при  $\alpha = 0$ , где сдвиги отсутствуют.

Пусть  $\alpha_2 = \pi/2$  и  $\Delta \xi_2 = 1/R - 1/r$ ; тогда при  $\alpha = \alpha_2$

$$2 \int_0^{t/2} \tau_{\rho\alpha} dy = P$$

и согласно формулам (18) и (21)

$$M_2 = -2 \int_0^{t/2} \sigma_{\alpha} y dy = rP \cos \alpha_1 .$$

Исключая силу  $P$  из этих уравнений и используя формулы (18) и (19), получаем уравнение относительно неизвестной  $\gamma_{\rho\alpha}$  :

$$\int_0^{t/2} \gamma_{\rho\alpha} \left[ (y\Delta\xi_2)^2 + \frac{\gamma_{\rho\alpha}^2}{4} \right]^{\frac{n-1}{2}} dy = \frac{-4\Delta\xi_2 \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n-1} t/2}{r \cos \alpha_1} \int_0^{t/2} \left[ (y\Delta\xi_2)^2 + \frac{\gamma_{\rho\alpha}^2}{4} \right]^{\frac{n-1}{2}} y^2 dy .$$

Решаем его с помощью программы MathCAD, т.е. находим деформации сдвига при  $\alpha = \pi/2$  и соответствующее значение момента:

$$M_2 = \frac{8}{3} A \Delta\xi_2 \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n-1} t/2 \int_0^{t/2} \left[ (y\Delta\xi_2)^2 + \frac{\gamma_{\rho\alpha}^2}{4} \right]^{\frac{n-1}{2}} y^2 dy . \quad (33)$$

Предварительно определяем угол  $\alpha_1$  по изложенной выше методике с использованием приближенного значения  $M_2$  (25).

Уточненное согласно (33) значение момента при  $t/r = 0,2$  оказывается меньше приближенного на 3%, что оправдывает применение формулы напряжения  $\sigma_{\alpha}$  (22), записанной без учета деформации  $\gamma_{\rho\alpha}$  в выражении  $\Gamma$  (18).

### Выводы по разделу

1. Соотношение высоты и ширины сечения трубы, сжимаемой плитами в положении плашмя, зависит от изменений кривизны  $\Delta\xi$  и длины  $\Delta l$  его средней линии, для установления этой статически неопределимой зависимости следует связать момент  $M$  внутренних сил с названными аргументами  $\Delta\xi$  и  $\Delta l$ .

Жесткопластическая модель упрочняемого материала позволяет компактно выразить момент  $M$  через функцию напряжения текучести вида  $\sigma_s = A\varepsilon_i^n$ .

2. Разработана математическая модель  $1/4$  сечения деформируемой трубы, частично принявшего форму вогнутой рабочей поверхности инструмента в заданном диапазоне полярной координаты  $0,5\pi \geq \alpha \geq \alpha_2$ ; для остальных значений  $\alpha$  изменение кривизны  $\Delta\xi$  средней линии сечения при свободном изгибе определяется равновесием внешних и внутренних сил. Получена аналитическая функция  $\Delta\xi$ , точка ее перехода через ноль (координата  $\alpha_1$ ) устанавливается из условия равенства нулю суммарного изменения угла наклона касательной к средней линии.

3. Изменения ширины  $\Delta B$  и высоты  $\Delta H$   $1/4$  сечения, соответствующие заданной координате  $\alpha_2$  границы области свободного изгиба, рассчитываются с учетом сжатия периметра, выраженного через смещение нейтральной линии изгиба и функцию  $\Delta\xi$ . Полученная зависимость  $\Delta B$  от координаты  $\alpha_2$ , близкая к линейной, практически не подвержена влиянию механических свойств материала трубы и отношения толщины ее стенки  $t$  к среднему радиусу сечения  $r$ .

Рассчитанные отношения  $-\Delta H/\Delta B$ : от  $\sim 1,1$  при  $t/r = 0,05$  до  $\sim 1,25$  при  $t/r = 0,25$  согласуются с практическим опытом, влияние показателя  $n$  функции напряжения текучести материала трубы на отношение  $-\Delta H/\Delta B$  заметно при малой относительной толщине стенки и незначительно при  $t/r > 0,2$ .

4. Математическая модель деформирования трубы плитами с вогнутой рабочей поверхностью позволяет рассчитывать необходимое уменьшение высоты сечения трубы  $\Delta H$ , обеспечивающее заданное увеличение его ширины  $\Delta B$ ; для выполнения вычислений требуется программа MathCAD или ее аналог. Результаты математического моделирования использованы в разделе 5 при создании упрощенной методики расчета деформирования сечения трубы для компенсации овальности, приобретаемой при последующей гибке.

### 3 Вариационная оценка размеров деформированного сечения прямой трубы

Решение задачи на основе минимума работы внутренних и внешних сил позволяет оценить достоверность результатов математического моделирования, выполненного в предыдущем разделе с использованием ряда допущений. Трудоемкость вычислений, связанных с применением вариационных методов, остается значительной, несмотря на использование программы MathCAD. Поэтому предлагаемая оценка деформаций носит преимущественно исследовательский характер и включает ряд методических усовершенствований, относящихся к методу координатных функций Ритца в его инженерной интерпретации.

#### 3.1 Постановка задачи

Требуется установить изменение размеров сечения трубы, показанных на рисунке 12:  $\Delta B = B - r$  и  $\Delta H = H - r$ . Рассматривается начальная стадия процесса, когда значения угла  $\beta_2$  пренебрежимо малы. Это позволяет задать форму деформированного сечения единой функцией угла  $\alpha$ . Относительное удлинение оси трубы и ее материального волокна равно нулю, деформированное состояние всех поперечных сечений одинаково. Наличие двух осей симметрии позволяет ограничить область решения задачи диапазоном  $0,5\pi \geq \alpha \geq 0$ . Полярные координаты  $\rho, \alpha$  на данной схеме, дополненные осью  $z$ , совпадающей с осью трубы, образуют цилиндрическую систему.

Материал считается жесткопластическим, не упрочняемым, изотропным. Используются аппроксимирующие (координатные по Ритцу) функции, содержащие варьируемые параметры, значения которых определяются из условия минимума полной потенциальной энергии системы. Объектами аппроксимации являются перемещения в направлении периметра сечения  $u_\alpha$  и по радиусу –  $u_r$ . Последнее относится к точкам с начальными координатами  $\rho = r$ , радиальное

перемещение  $u_\rho$  других точек определяется на основании постоянства объема материала.

К линии фронта перемещения  $u_r$  применима формула изменения кривизны  $\Delta\xi$  (3), содержащая вторую производную  $u_r$  по  $\alpha$ , обозначаемую в дальнейшем  $u_r''$ . Экстремумы  $u_r$  и  $\Delta\xi$ , а, следовательно, и  $u_r''$ , приходятся на границы квадрантов сечения.

В общем случае компоненты деформированного состояния связаны с перемещениями формулами [46]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{du_\rho}{d\rho}; \quad \varepsilon_\alpha = \frac{du_\alpha}{\rho d\alpha} + \frac{u_\rho}{\rho}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \gamma_{\rho\alpha} = \frac{du_\rho}{\rho d\alpha} + \rho \frac{d}{d\rho} \left( \frac{u_\alpha}{\rho} \right); \\ \gamma_{\alpha z} &= \rho \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u_\alpha}{\rho} \right) + \frac{\partial u_z}{\rho \partial \alpha}; \quad \gamma_{z\rho} = \frac{\partial u_z}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\rho}{\partial z}. \end{aligned} \quad (34)$$

### 3.2 Координатные функции перемещений

Руководствуясь соображениями компактности, отдаем предпочтение тригонометрической аппроксимации перемещений  $u_r$  и  $u_\alpha$ , с применением минимального числа варьируемых параметров. Кинематические ограничения на  $\frac{1}{4}$  сечения трубы: при  $\alpha = 0, \pi/2$ :  $u_r' = 0$   $u_r''' = 0$ .

На границах квадрантов также должны переходить через ноль перемещения  $u_\alpha$ ; соблюдение этого ограничения, как показано в дальнейшем, зависит не только от аппроксимирующей функции  $u_\alpha$ , с ним связано также факультативное требование к функции перемещения  $u_r$ :

$$\int u_r d\alpha \Big|_{\alpha=\pm\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (35)$$

Координатной функции перемещения  $u_r$  придается свойство регулятора моментов внутренних сил для выполнения условий статического равновесия,



дополняющих кинематические ограничения. Аппроксимируем данное перемещение координатной функцией с двумя параметрами овальности сечения – варьируемыми  $v_1$  и заданным  $v_b$ ; в общем виде

$$u_r = v_1 r f_1(\alpha) + v_b r f_b(\alpha), \quad (36)$$

при этом  $v_b r f_b(0) = \Delta B$ ,  $v_1 r f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \Delta H$ .

Пусть

$$f_b(\alpha) = \cos^2 \alpha; \quad f_1(\alpha) = s_1 \sin^2 \alpha + s_2 \sin^4 \alpha + s_3 \sin^6 \alpha + s_4 \sin^8 \alpha; \quad (37)$$

сумма коэффициентов  $s_1, s_2, s_3, s_4$  равна единице, их соотношение будет “подгоняться” под выполнение условий статического равновесия. Значения коэффициентов вводятся в составе исходных данных задачи, варьирование  $s_1, s_2, s_3, s_4$  не требует корректировки алгебраической и вычислительной частей решения.

Показатели степени в выражениях  $f_1(\alpha)$  и  $f_b(\alpha)$  могут быть в принципе какими угодно, но обязательно четными – для соблюдения кинематических ограничений. Отметим, что выбранные тригонометрические конструкции (37) не удовлетворяют условию (35), поскольку при  $\alpha = \pi/2$  отличны от нуля первые члены выражений интегралов:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \alpha d\alpha &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}, & \int \sin^2 \alpha d\alpha &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4}, \\ \int \sin^4 \alpha d\alpha &= \frac{3\alpha}{8} - \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\sin 4\alpha}{32}, & & \\ \int \sin^6 \alpha d\alpha &= \frac{5\alpha}{16} - \frac{15 \sin 2\alpha}{64} + \frac{3 \sin 4\alpha}{64} - \frac{\sin 6\alpha}{192}, & & \\ \int \sin^8 \alpha d\alpha &= \frac{35\alpha}{128} - \frac{7 \sin 2\alpha}{32} + \frac{7 \sin 4\alpha}{128} - \frac{\sin 6\alpha}{96} + \frac{\sin 8\alpha}{1024}. & & \end{aligned} \quad (38)$$

Функцию перемещения по периметру сечения  $u_\alpha$  конструируем с учетом того, что ее производная является компонентом формулы деформации  $\varepsilon_\alpha$  (34), который должен компенсировать другой компонент –  $u_\rho/\rho$ . В противном случае математическая модель процесса окажется некорректной: не скомпенсированное

радиальное перемещение  $u_p > 0$  фактически означает утонение стенки трубы при  $\alpha = 0$ , а  $u_p < 0$  – утолщение при  $\alpha = \pi/2$ .

Пусть

$$\frac{du_\alpha}{\rho d\alpha} = (\rho - r)(\Delta\xi + \Delta^*) + v_2 \frac{r}{\rho} f_2'(\alpha) \quad (39)$$

и соответственно

$$u_\alpha = \rho(\rho - r) \int (\Delta\xi + \Delta^*) d\alpha + v_2 r f_2(\alpha), \quad (40)$$

где  $f_2(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$ ; (41)

$$f_2'(\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Первое из двух слагаемых выражения (39), учитывающее изгиб стенки трубы, содержит изменение кривизны средней линии сечения  $\Delta\xi$ , вызванное радиальным перемещением ее точек, см. формулу (3). В комплекте с  $\Delta\xi$  необходимо вводить величину  $\Delta^*$ , иначе формула (40) не удовлетворяет условию (35). С учетом формул (3) и (38)

$$\Delta^* = \frac{1}{r} \left[ \frac{v_b}{2} + v_1 \left( \frac{s_1}{2} + \frac{3}{8} s_2 + \frac{5}{16} s_3 + \frac{35}{128} s_4 \right) \right]. \quad (42)$$

Теперь интеграл  $\int (\Delta\xi + \Delta^*) d\alpha = \frac{-u_r'}{r^2} + \int \left( \frac{-u_r}{r^2} + \Delta^* \right) d\alpha$ , содержащийся в функции  $u_\alpha$  (40), обращается в ноль на границах квадрантов сечения трубы.

Выбранная функция  $f_2(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$  с предполагаемым отрицательным значением варьируемого параметра  $v_2$  (см. формулу (40)) задает перемещения по периметру сечения в направлении к большой оси овала на рисунке 12, б. Другие нечетные степени синуса и косинуса в составе данной функции могли бы задавать такое же направление перемещения  $u_\alpha$ . Однако лишь только первые степени обеспечивают ненулевые – и притом экстремальные значения производной  $f_2'(\alpha)$  на границах квадрантов сечения. Это важно для компенсации деформации  $u_r/r$ , минимум и максимум которой также приходятся на границы квадрантов.

### 3.3 Расчетные формулы деформаций

Для решения задачи в деформациях последние должны быть представлены формулами, все компоненты которых, исключая варьируемые параметры, известны, т.е. заданы численно или определены как функции координат. Нельзя удовлетворить этому положению одним лишь заданием координатных функций типа (36) и (40); будучи произвольными, они вступят в противоречие с условием не сжимаемости материала. Поэтому перемещения, содержащиеся в исходных формулах деформаций (34), заданы не полностью – общее выражение радиального напряжения  $u_\rho$  определяется из условия постоянства объема (4).

Данное условие, или равенство нулю суммы линейных деформаций по трем ортогональным координатам, строго выполняется при использовании логарифмических выражений относительных удлинений вида  $\ln(l/l_0)$ . Материал должен быть жесткопластическим, неспособным к упругой деформации. Разумеется, речь идет об абстрактном, а не о реальном деформируемом объекте.

Применение условия постоянства объема к простым относительным удлинениям  $(l-l_0)/l_0$  допустимо при малых деформациях, поскольку

$$\ln \frac{l}{l_0} = \frac{l-l_0}{l} + \frac{(l-l_0)^2}{2l^2} + \frac{(l-l_0)^3}{3l^3} + \dots$$

Отличия значений простых и логарифмических выражений деформаций, имеющие разные знаки при растяжении и сжатии, почти полностью погашаются в сумме. Поэтому запись условия постоянства объема в простых относительных удлинениях применяется не только к малым деформациям. Принимая  $\varepsilon_\rho + \varepsilon_\alpha = 0$  при  $\varepsilon_z = 0$ , с учетом формул (34) получаем дифференциальное уравнение,

$$\frac{du_\rho}{d\rho} + \frac{u_\rho}{\rho} = -\frac{du_\alpha}{\rho d\alpha}, \quad (43)$$

которое интегрируется в квадратурах согласно формуле

$$u_\rho = \frac{1}{\rho} \left[ C - \int \left( \frac{du_\alpha}{d\alpha} \right) d\rho \right]. \quad (44)$$

Произвольная постоянная интегрирования  $C$  определяется приравнением  $u_\rho|_{\rho=r}$  заданной функции  $u_r$  (36, 37). Окончательный результат интегрирования:

$$u_\rho = u_r \frac{r}{\rho} + (\Delta\xi + \Delta^*) \left( \frac{r\rho}{2} - \frac{\rho^2}{3} - \frac{r^3}{6\rho} \right) + v_2 r \left( \frac{r}{\rho} - 1 \right) f_2'(\alpha). \quad (45)$$

Согласно (27) получаем формулы деформаций

$$\varepsilon_\rho = u_r \frac{-r}{\rho^2} + (\Delta\xi + \Delta^*) \left( \frac{r}{2} - \frac{2\rho}{3} + \frac{r^3}{6\rho^2} \right) - v_2 \frac{r^2}{\rho^2} f_2'(\alpha), \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\rho\alpha} = & u_r' \frac{r}{\rho^2} + \Delta\xi' \left( \frac{r}{2} - \frac{\rho}{3} - \frac{r^3}{6\rho^2} \right) + v_2 \frac{r}{\rho} \left( \frac{r}{\rho} - 1 \right) f_2''(\alpha) + \\ & + \rho \int (\Delta\xi + \Delta^*) d\alpha - v_2 \frac{r}{\rho} f_2(\alpha). \end{aligned}$$

В этих компактных формулах содержатся функции  $u_r$  (36, 37) и  $f_2(\alpha)$  (41), а также их производные по  $\alpha$ , изменение кривизны средней линии сечения  $\Delta\xi$  (3) и величина  $\Delta^*$  (42). Коэффициенты  $s_i$  функции  $u_r$  представлены численными значениями, которые корректируют по результатам проверки выполнения условий статического равновесия после каждого пробного решения задачи.

### 3.4 Вариационные уравнения

Решение задачи основывается на принципе минимума полной потенциальной энергии  $\Pi$  системы, включающей энергию деформации  $U$  и работу внешних сил  $W$  [47]. Вариация энергии деформации (работы внутренних сил)  $\delta U$  выражается интегралом по объему деформируемого материала, а в контексте рассматриваемой плоской задачи – по площади  $F$  сечения трубы единичной длины:

$$\delta U = \delta \int_F (\sigma_\rho \varepsilon_\rho + \sigma_\alpha \varepsilon_\alpha + \tau_{\rho\alpha} \gamma_{\rho\alpha}) dF. \quad (47)$$

В инженерных расчетах принято назначать пределы интегрирования по исходным размерам заготовки [8]. При более точном, пошаговом или итерационном решении задачи можно в принципе отказаться от данного допущения, корректируя пределы интегрирования по результатам предыдущего шага или итерации.

Для жесткопластического не упрочняемого материала подынтегральное выражение (47) равно произведению напряжения текучести при сдвиге  $\tau_s$  на интенсивность деформаций сдвига  $\Gamma$  (16), и уравнение (1) принимает вид:

$$\tau_s \delta \int_F \Gamma dF + \delta W = 0. \quad (48)$$

Каноническое выражение интенсивности деформаций сдвига (16) применительно к полярным координатам, показанным на рисунке 12, с учетом  $\varepsilon_z = 0$  и замены:  $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_\rho$  предельно упрощается:

$$\Gamma = 2\sqrt{\varepsilon_\rho^2 + \frac{1}{4}\gamma_{\rho\alpha}^2}. \quad (49)$$

### 3.4.1 Вариация работы внешних сил

В соответствии с расчетной схемой на рисунке 17 работу внешних сил, приложенных к трубе единичной длины, можно выразить как  $W = 4P|\Delta H|$ , путь  $|\Delta H|$  точки приложения силы  $P$  равен согласно (29)  $-v_1 r$ , так как  $v_1 < 0$ .

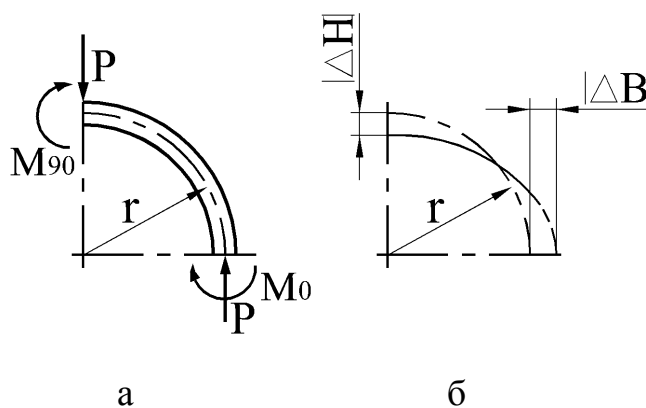


Рисунок 17 – Схема статического равновесия  $\frac{1}{4}$  сечения трубы (а);  
(б) – путь  $|\Delta H|$  и плечо  $r + \Delta B$  силы  $P$

Сила  $P = \frac{M_0 + M_{90}}{r + \Delta B}$ ; в первом приближении  $M_0 = M_{90} = \tau_s t^2 / 2$ ; откуда с

учетом  $\Delta B = v_b r$

$$\frac{\partial W}{\partial v_1} = \tau_s \frac{-4t^2}{1 + v_b}. \quad (50)$$

Заметим, что сила, моменты и работа отнесены к единице длины трубы, поэтому их размерности отличаются от обычных. Принятые упрощенные формулы моментов  $M_0$  и  $M_{90}$  не позволяют учесть влияние перемещения  $u_\alpha$  на вариацию работы силы  $P$ , поэтому производная  $\partial W / \partial v_2$  оказывается равной нулю. Столь грубый учет вариации работы внешних сил оправдан в данном случае ее слабым влиянием на результаты решения задачи, что будет показано ниже.

### 3.4.2 Система разрешающих уравнений

Следуя [8], переходим к разрешающим уравнениям с заменой вариаций (48) производными по варьируемым параметрам  $v_i$  (здесь  $i = 1, 2$ ):

$$\tau_s \int_F \frac{\partial \Gamma}{\partial v_i} dF + \frac{\partial W}{\partial v_i} = 0. \quad (51)$$

Учитывая наличие радикала в формуле  $\Gamma$  (49), можно записать эту систему уравнений иначе:

$$\frac{\tau_s}{2} \int_F \frac{\partial \Gamma^2}{\Gamma \partial v_i} dF + \frac{\partial W}{\partial v_i} = 0.$$

Чтобы избавиться от величины  $\Gamma$  в знаменателе подынтегрального выражения, прибегают к приближенному преобразованию, имеющему некоторое отношение к неравенству Буняковского [8]; полученный результат

$$\frac{\tau_s}{2\Gamma_c} \int_F \frac{\partial \Gamma^2}{\partial v_i} dF + \frac{\partial W}{\partial v_i} = 0 \quad (52)$$

поддается интегрированию в квадратурах.

Среднюю величину интенсивности деформаций сдвига в уравнениях (45)

$$\Gamma_c = \sqrt{\frac{1}{F} \int_F \Gamma^2 dF} \quad (53)$$

обычно представляют приближенным числовым эквивалентом. Применение программы MathCAD позволяет решать уравнения (52), не прибегая к данному упрощению, при этом они становятся нелинейными относительно варьируемых параметров. По-видимому, нелинейность выражена слабо, так как решение всегда оказывается единственным – не зависящим от затравочных значений неизвестных  $v_1$  и  $v_2$ .

### 3.4.3 Объектно-ориентированный подход

Объем вычислительной части решения рассматриваемой задачи довольно внушителен. Поэтому должны быть приняты меры к локализации возможных корректировок. Имеются в виду исправления «опечаток», неизбежных при вводе в MathCAD многочисленных функций, интегралов и уравнений, а также ошибок математических преобразований на предшествующей, алгебраической стадии решения задачи. Кроме того, возможны изменения исходных формул по принципиальным соображениям.

Сходные проблемы разработки сложного промышленного программного обеспечения решаются на основе объектно-ориентированного подхода [36]. Его базовые положения оказываются полезными в самых разных приложениях. Объектно-ориентированное программирование отличается предельная декомпозиция объектов, над которыми выполняются вычислительные операции. Термин «предельная» означает в данном случае достижение такой степени абстракции, при которой различия объектов не отражаются на их внешнем поведении, т.е. на содержании операндов. В результате программа становится

открытой и удобной как для проверки, так и для внесения изменений, резко уменьшается вероятность ошибок [36].

Квадрат интенсивности деформаций сдвига (49)  $\Gamma^2 = 4\varepsilon_\rho^2 + \gamma_{\rho\alpha}^2$  после подстановки в формулы деформаций (46) выражений  $\Delta\zeta$  (3),  $\Delta^*$  (42) функций  $u_r$  (36, 37) и  $f_2(\alpha)$  (41), а также их производных содержит десятки слагаемых. Большую часть их можно представить как функции координат  $\varphi(\alpha, \rho)$ , умноженные на одного из представителей следующего списка:  $v_1, v_2, v_1^2, v_1v_2, v_2^2$ . Каждое слагаемое подлежит интегрированию по площади  $F$  в составе вариационных уравнений (52). Ввод в программу большого количества интегралов занимает много времени. Такова плата за декомпозицию вычислений, но пренебрежение ею чревато более серьезными издержками.

Значения интегралов присваиваем объектам класса  $k$ , группируя по подклассам  $k1, k2, k11, k12, k22$ . Они служат числовыми коэффициентами при неизвестных величинах соответственно приведенному выше списку. Предусмотрен также подкласс  $k0$ , предназначенный для объектов класса  $k$ , не содержащих варьируемые параметры  $v_1$  и  $v_2$ .

В каждом подклассе именам объектов присваиваются порядковые номера. Обозначим суммы:  $K_1 = \sum k1_i, K_2 = \sum k2_i, K_{11} = \sum k11_i, K_{12} = \sum k12_i, K_{22} = \sum k22_i, K_0 = \sum k0_i$ .

С учетом формулы интенсивности деформаций сдвига  $\Gamma$  (48) справедливо выражение

$$\int_F \Gamma^2 dF = 4(K_1v_1 + K_2v_2 + K_{11}v_1^2 + K_{12}v_1v_2 + K_{22}v_2^2 + K_0).$$

Систему уравнений, идентичную (52), можно теперь записать как

$$\frac{\partial}{\partial v_i} (K_1v_1 + K_2v_2 + K_{11}v_1^2 + K_{12}v_1v_2 + K_{22}v_2^2 + K_0) + \frac{\Gamma_c}{2\tau_s} \frac{\partial W}{\partial v_i} = 0,$$

где  $\Gamma_c = \sqrt{\frac{2}{\pi r t}} (K_1v_1 + K_2v_2 + K_{11}v_1^2 + K_{12}v_1v_2 + K_{22}v_2^2 + K_0)^{0.5}$ .



Раздельная запись вариационных уравнений с учетом производной работы  $W$  внешней силы по  $v_1$  (50) и равенства нулю  $\partial W/\partial v_2$ :

$$2K_{11}v_1 + K_{12}v_2 + K_1 = \Gamma_c \frac{2t^2}{1+v_b};$$

$$2K_{22}v_2 + K_{12}v_1 + K_2 = 0. \quad (54)$$

Альтернативный (традиционный) подход к решению уравнений (52) предусматривает трудоемкие алгебраические преобразования, относящиеся к приведению подобных слагаемых квадрата интенсивности деформаций сдвига (49). Любое изменение исходных формул, в том числе подгонка коэффициентов  $s_i$  функции  $u_r$  (36, 37) должна была бы привести к повторению указанных преобразований, что не представляется реально осуществимым.

### 3.5 Тестирование функции овальности сечения

Имеется в виду координатная функция (37), аппроксимирующая перемещение  $u_r$ . Варьирование коэффициентов  $s_i$  данной функции порождает значительный разброс искомых значений параметров  $v_1, v_2$  без нарушения принятых кинематических ограничений:  $u'_r = 0, u''_r = 0$  на границах квадрантов сечения. Какой из вариантов принять в качестве адекватной аппроксимации перемещений, неизвестно – вследствие малого числа варьируемых параметров, при котором (в отличие от классической интерпретации метода Ритца) сходимость решения задачи не прослеживается.

Для ужесточения системы ограничений обратимся к статическому равновесию выборочных частей деформируемой трубы (повсеместное выполнение ограничений статики исключается самим фактом априорного задания функций перемещений).

### 3.5.1 Моменты внутренних сил

В уравнениях статического равновесия используем более точные выражения моментов внутренних сил, нежели при выводе формулы производной  $\partial W / \partial v_1$  (50). Рассмотрим статику элементов трубы с различными значениями углового размера  $\alpha$  (0, 45, 60 градусов), рисунок 18.

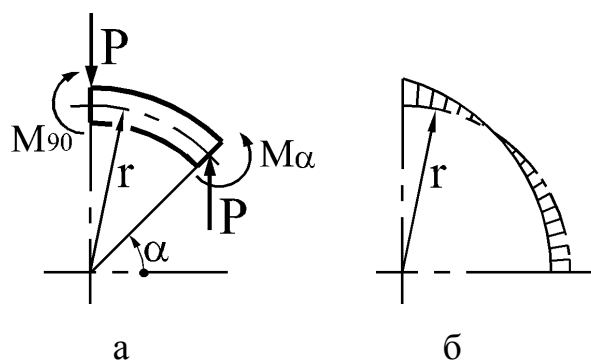


Рисунок 18 – Обобщенное изображение элементов трубы (а) с различным угловым размером  $\alpha$  и примерный вид эпюры момента  $M_{\alpha}$  на  $1/4$  сечения трубы (б)

Элементы условно считаются вырезанными из трубы с не деформированным сечением. Направление момента  $M_{\alpha}$  на рисунке соответствует сравнительно большим углам  $\alpha$ , при малых углах (меньше  $\pi/4$ ) оно совпадает с направлением момента  $M_{90}$  (по часовой стрелке).

Общая формула моментов  $M_{90}$  и  $M_{\alpha}$  ( $M_0$ ,  $M_{45}$ ,  $M_{60}$ ) содержит под знаком интеграла напряжение  $\sigma_{\alpha}$  в виде функции  $\sigma_{\alpha}(\rho, \alpha)$  пользователя программы MathCAD с фиксированным значением аргумента  $\alpha$ :

$$M_{\alpha} = \int_{r-\frac{t}{2}}^{r+\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha}(\rho, \alpha)(\rho - r)d\rho. \quad (55)$$

Из формул напряжений (15), принимая  $\sigma_{\rho} = 0$ , получаем:  $\sigma_{\alpha} = 4 \frac{\tau_s}{\Gamma} \varepsilon_{\alpha}$ .

Отсюда с учетом (49) следует, что

$$\sigma_{\alpha}(\rho, \alpha) = \frac{2\tau_s \varepsilon_{\alpha}(\rho, \alpha)}{\sqrt{\varepsilon_{\alpha}(\rho, \alpha)^2 + \frac{1}{4}\gamma(\rho, \alpha)^2}}. \quad (56)$$

При этом  $\varepsilon_{\alpha}(\rho, \alpha)$  и  $\gamma(\rho, \alpha)$  – также функции пользователя: первая задает деформацию  $\varepsilon_{\alpha}$ , равную деформации  $\varepsilon_{\rho}$  с обратным знаком; вторая идентична формуле (46) деформации  $\gamma_{\rho\alpha}$ .

### 3.5.2 Выборочные условия равновесия

В качестве переменных программы MathCAD с именами  $M_0, M_{45}, M_{60}, M_{90}$  вводим четыре одинаковых интеграла (55); каждому предшествует задание фиксированного значения угловой координаты  $\alpha$  – соответственно:  $0, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ . При этом  $\varepsilon_{\alpha}(\rho, \alpha)$  и  $\gamma(\rho, \alpha)$  становятся функциями одной координаты  $\rho$ .

Изменение кривизны стенки трубы приблизительно равно величине  $\Delta\xi$  (3), положительной при  $\alpha = 0$  и отрицательной при  $\alpha = \pi/2$ , см. рисунок 12. Этим определяются знаки  $M_0 > 0$  и  $M_{90} < 0$ , откуда следует выражение внешней силы:  $P = (M_0 - M_{90})/r$ . Приравнявая величине  $(M_{\alpha} - M_{90})$  момент  $Prcos\alpha$  пары сил на рисунке 18, получаем два отношения (для  $\alpha = \pi/4$  и  $\alpha = \pi/3$ ); их общее выражение:

$$K_{\alpha} = \frac{M_{\alpha} - M_{90}}{(M_0 - M_{90})\cos\alpha}. \quad (57)$$

Напряжение текучести  $\tau_s$  сокращается при вычислении  $K_{\alpha}$ , поэтому оно может быть опущено в формуле (55) и в составе исходных данных.

Равновесию элементов трубы, показанных на рисунке 18, ставим в соответствие выполнение условий

$$K_{45} \approx 1; K_{60} \approx 1. \quad (58)$$

Подбором коэффициентов  $s_i$  координатной функции (37), нетрудно получать приближения значений  $K_{\alpha}$  к единице с отклонением, не превышающим нескольких процентов, в принципе его можно уменьшать неограниченно.

Механизм согласования решения задачи с выполнением условий (58) заложен в конструкции функции перемещения  $u_r$  (36, 37). Изменение ее коэффициентов  $s_i$  влияет на рассчитанные показатели напряженно-деформированного состояния трубы и на значения моментов  $M_{45}$ ,  $M_{60}$ . При этом важны не сами коэффициенты, а их соотношения, поэтому в дальнейшем коэффициент  $s_1$  принимали равным единице. Заданные значения  $s_i$  в программе пересчитываются с изменением обозначения:

$$\bar{s}_i = \frac{s_i}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}.$$

После пересчета сумма коэффициентов  $\bar{s}_i$  равна единице и они заменяют значения  $s_i$ .

Параметр  $v_b$  координатной функции  $u_r$  (36) задаем положительным, например  $v_b = 0,1$ . Его абсолютная величина не играет роли, поскольку задача заключается в определении соотношения приращений ширины и высоты сечения трубы

$$\frac{\Delta B}{-\Delta H} = \frac{v_b}{-v_1}. \quad (59)$$

Оно справедливо при условии вышеуказанной замены заданных коэффициентов  $s_i$  (37) значениями  $\bar{s}_i$  и относится к начальной стадии деформирования, как это следует из постановки задачи.

Варьируемые параметры  $v_1$  и  $v_2$  определяются решением системы уравнений (52), в качестве затравочных значений задаем  $v_1 = -v_b$ ;  $v_2 = v_1$ . Одновременно с определением варьируемых параметров получаем значения  $K_{45}$  и  $K_{60}$  (57), позволяющие оценить степень их соответствия условиям (39). Приемлемое выполнение условий достигается целенаправленным подбором коэффициентов  $s_i$  функции перемещения  $u_r$  (36, 37), что показано ниже на конкретных примерах.

### 3.6 Результаты решения вариационной задачи

Исходными данными служат размеры трубы – средний радиус  $r$  и толщина  $t$  стенки, на искомое соотношение  $\Delta B/\Delta H$  (59) влияет относительная величина  $t/r$ . Напряжение текучести материала трубы  $\tau_s$  не задаем, так как оно сокращается в разрешающих уравнениях (52). Решение относится к начальной стадии деформирования трубы – до образования участков, показанных на рисунке 12 прилегающими к плитам.

Алгоритм решения включает подбор коэффициентов координатной функции перемещения  $u_r$  (36, 37) методом последовательного приближения отношений  $K_{45}$  и  $K_{60}$  (57) к единице. Для приемлемого (погрешность порядка 1%) приближения достаточно принять дискретность корректировки коэффициентов равной  $0,1s_1$ , что иллюстрируют данные таблицы 2; содержащиеся в ней значения  $M_0, \dots, M_{90}$ , отнесенные к напряжению текучести, подсчитывались при одинаковом среднем радиусе сечения:  $r = 10$  мм.

Таблица 2 – Выходные данные решения задачи в зависимости от относительной толщины стенки трубы  $t/r$

$t/r$	$s_1; s_2; s_3; s_4$	$\Delta B/\Delta H$	$M_0; M_{45}; M_{60}; M_{90}$	$K_{45}$	$K_{60}$
0,05	1; 0,3; 0,2; 0	0,898	0,044; 0,005; -0,019; -0,078	0,969	0,962
0,1	1; 0,6; 0; 0,3	0,841	0,271; 0,067; -0,050; -0,401	0,985	1,044
0,1	1; 0,4; 0,5; 0	0,840	0,256; 0,072; -0,066; -0,399	1,016	1,016
0,2	1; 0; 0; 0,5	0,816	1,843; 0,771; -0,0006; -1,851	1,004	1,002

Как показали расчеты, варьируемые параметры  $v_1, v_2$  и соотношение показателей овальности сечения трубы практически не зависят от учета вариации работы внешней силы. Исключение ее из разрешающих уравнений вызывает изменение  $v_1$  и  $v_2$  менее чем на 1%. По-видимому, это объясняется тем, что в пределах интегрирования, предусмотренного вариационными уравнениями (52), не было учтено изменение исходных размеров сечения трубы.

Внешние силы наряду с изгибом стенки трубы вызывают ее сжатие по периметру, что находит отражение в неравенстве  $(\Delta B / -\Delta H) < 1$ . Очевидно, большему сжатию должны быть подвержены толстостенные трубы; результаты расчетов, представленные в таблице 2, согласуются с данным предположением. С уменьшением относительной толщины стенки трубы значения  $\Delta B / -\Delta H$  приближаются к единице.

Во второй и третьей строках таблицы приведены варианты решения задачи с одинаковыми исходными данными, отличающиеся подборками коэффициентов  $s_1 \dots s_4$ . Возможны и другие подборки, обеспечивающие примерно одинаковое приближение к выполнению условий (58). При этом отношение  $\Delta B / -\Delta H$  остается довольно стабильным, следовательно, предложенные выборочные условия равновесия можно считать представительными в плане оценки сходимости решения.

Полученные результаты решения вариационной задачи в деформациях относятся к начальному этапу деформирования трубы, когда все сечение подвергается свободному изгибу. На рисунке 19 они сопоставляются с результатами математического моделирования согласно разделу 2, т.е. с решением в напряжениях.

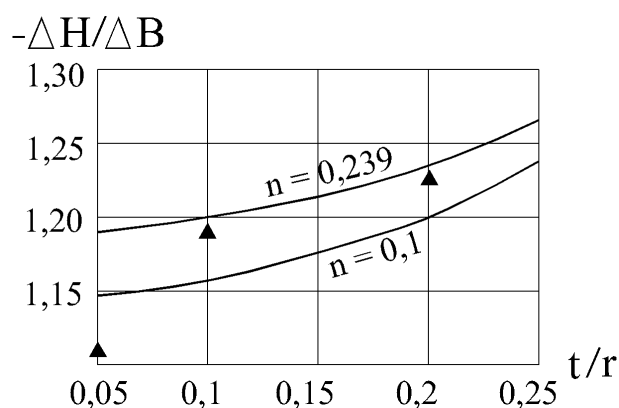


Рисунок 19 – Относительное изменение размеров сечения трубы по данным решения задачи в деформациях без учета упрочнения (▲) и в напряжениях (графики)

Кривые на рисунке построены по исходным данным математического моделирования (решения задачи в напряжениях): угол  $\alpha_2 = 1,1$ ; отношение радиуса инструмента к среднему радиусу трубы  $R/r = 2$ . Координаты точек ( $\blacktriangle$ ) соответствуют отношениям  $\Delta B/\Delta H$ , приведенным в таблице 2. Наибольшее отличие результатов сравниваемых решений задачи имеет место при относительной толщине стенки  $t/r = 0,05$ . Здесь согласно графикам отношения  $\Delta B/\Delta H$ , равные 0,875 и 0,84, существенно отличаются от результата вариационной оценки 0,898 (см. таблицу 2).

### Выводы по разделу

1. Аппроксимация функций перемещений по методу Ритца позволяет получить вариационную оценку деформированного состояния, в принципе – как угодно близкую к точному решению задачи. Для жесткопластического материала задача приводится к системе уравнений, линейных относительно варьируемых параметров. По найденным деформациям определяются напряжения, однако их сопоставление с условиями статики обнаруживает противоречия, особенно при небольшом числе варьируемых параметров, характерном для практического расчета, который, тем не менее, оказывается весьма громоздким.

2. Использование компьютерных программ типа MathCAD и объектно-ориентированного подхода позволило преодолеть вышеуказанные трудности и недостатки расчета. В координатную функцию  $u_r$  радиального перемещения точек средней линии сечения трубы ввели многочлен с переменными коэффициентами, ответственными за соблюдение выборочных уравнений равновесия. В отличие от варьируемых параметров координатных функций, определяемых решением системы вариационных уравнений, названные коэффициенты подбирают по критерию выполнения статических ограничений.

3. Названное усовершенствование инженерного метода вариационной оценки пластических деформаций обеспечило сходимость выходных данных решения задачи при различных комбинациях переменных коэффициентов, удовлетворяющих условиям статики. Рассматривалась начальная стадия сжатия плитами сечения прямой трубы, когда внешняя сила расположена в плоскости симметрии и ко всему сечению применима одна координатная функция  $u_r$ ; аналогичные расчеты последующей стадии, а также других процессов также могут быть выполнены предложенным методом.

4. Взаимное соответствие результатов решения задачи в деформациях и напряжениях подтверждает достоверность математического моделирования (раздел 2) и оправдывает допущения, использованные в названных решениях: пренебрежение сдвиговыми деформациями и напряжениями в математической модели, а также наделение материала жесткопластическими свойствами и линеаризацию разрешающих уравнений в рамках вариационной оценки деформаций.

5. Полученные результаты свидетельствуют о целесообразности тестирования координатных функций перемещений на соответствие выборочным условиям статического равновесия, при этом необходимо использовать объектно-ориентированный подход к решению задачи в среде компьютерных программ типа MathCAD.



## 4 Математическое моделирование изгиба трубы по круглому копиру

Рассматривается бездорновая гибка, важное преимущество которой – сравнительно небольшое утонение стенки трубы объясняется отсутствием пассивных сил трения на внутренней поверхности изгибаемой заготовки. Взамен дорна, поддерживающего стенку трубы изнутри и ограничивающего искажение проходного сечения, предусматривается предварительное придание сечению обратной овальности. Большой размер овала, ориентированный соответствующим образом, уменьшается при последующей гибке в результате вышеупомянутого искажения. В итоге форма проходного сечения приближается к исходной.

### 4.1 Постановка вариационной задачи

В результате решения задачи должна быть получена вариационная оценка изменения толщины стенки изогнутой трубы. Считается, что форма проходного сечения, эволюционировавшая в процессе гибки и на предшествующем этапе деформирования, стала круглой, материал трубы жесткопластический, не упрочняемый. На рисунке 20 приведена принципиальная схема изгиба трубы обкатывающим роликом 1 по копиру 2.

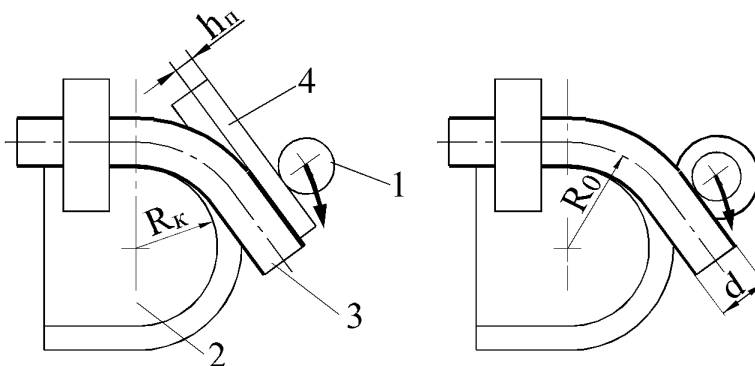


Рисунок 20 – Примеры наладки инструментов гибки

Планка 4 снижает давление обкатывающего инструмента на заготовку 3, предотвращая образование на ней вмятины. Рабочие поверхности копира и других инструментов имеют вид желоба глубиной около  $0,5d$ . Радиус гибки  $R_0$  обычно составляет не более  $4d$ . Центр окружности, по которой движется ролик, иногда немного смещают относительно центра радиуса копира  $R_k$  [6].

Установившаяся стадия процесса характеризуется непрерывным увеличением протяженности участка заготовки, изогнутого на окончательный радиус  $R_0$ , и наличием зоны свободного (без контакта с инструментом) изгиба, которая перемещается по заготовке вслед за обкатывающим роликом и имеет стабильную длину. В названной зоне располагается переходный участок заготовки с изменяющимся от  $\infty$  до  $R_0$  радиусом оси, рисунок 21.

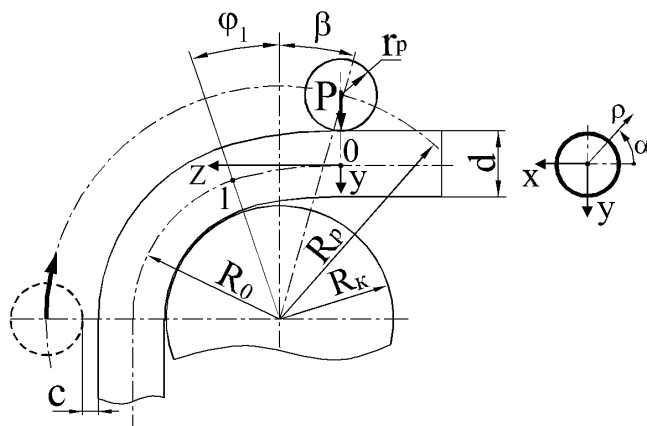


Рисунок 21 – Форма изогнутой трубы без учета сдвигов поперечных сечений перерезывающей силой

Высота всех сечений трубы принята равной диаметру исходной заготовки  $d$ , траектория обкатывающего ролика – окружность радиуса  $R_p$  концентрична по отношению к круглому копиру. Отсутствие в составе изображенного инструмента планки, показанной на рисунке 20, не имеет значения, ее размер  $h_n$  может учитываться в последующих расчетах. Точками 0, 1 обозначены границы зоны свободного изгиба; длина интервала 0–1, приблизительно равная аппликате  $z_1$  точки 1, находится в прямой зависимости от зазора  $c$  между заготовкой и роликом в его исходном положении. При  $c \geq 0,2d$  отношение  $z_1/d > 2$ , что оправдывает пренебрежение сдвигами сечений. В объеме  $V$  названной зоны будет

варьироваться работа внутренних сил  $U$ , которую содержат вариационные уравнения (1).

#### 4.1.1 Вариация работы внешней силы

Работа  $W$  силы  $P$ , затрачиваемая на деформирование заготовки в зоне свободного изгиба, равна произведению момента в точке 1 на угол  $\varphi_1$ , см. рисунок 21. Вариация работы  $\delta W = \delta M \varphi_1$ , где

$$M = \int_F \sigma_z \rho \sin \alpha dF. \quad (60)$$

Включение варьируемых параметров в подынтегральное выражение носит опосредованный характер, например через координатную функцию перемещения по периметру сечения  $u_\alpha$  по типу (40). Это перемещение влияет на относительное изменение толщины стенки трубы  $\varepsilon_\rho$  и на напряжение  $\sigma_z$ .

В частном случае, при отсутствии перемещений  $u_\alpha$  деформация  $\varepsilon_\alpha \approx 0$ , разнотолщинность стенки трубы максимальна, напряжение  $\sigma_\alpha \approx 0,5\sigma_z$ . Взаимозависимость  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_z$  вытекает из условия пластичности

$$\tau_s = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_\rho - \sigma_\alpha)^2 + (\sigma_\alpha - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6(\tau_{\rho\alpha}^2 + \tau_{\alpha z}^2 + \tau_{z\rho}^2)}. \quad (61)$$

“Транспортировка” варьируемых параметров из функции перемещения в подынтегральное выражение (60) с использованием уравнений связи деформаций и напряжений (15), а также условия пластичности оказывается весьма громоздкой. Поэтому исследуем альтернативный вариант – “прямое” присоединение варьируемого параметра  $\nu_1$  к соотношению напряжений:

$$\sigma_\alpha = \nu_1 \sigma_z.$$

Из условия (61) при  $\sigma_\rho = 0$  и пренебрежимо малых касательных напряжениях получаем

$$\sigma_z = \frac{\pm \sqrt{3}\tau_s}{\sqrt{1 - \nu_1 + \nu_1^2}}. \quad (62)$$

Для не упрочняемого материала  $\tau_s = \text{Const}$  и вариация работы внешней силы  $\delta W$  может быть записана как

$$\frac{\partial W}{\partial v_1} = \varphi_1 \frac{\partial \sigma_z}{\partial v_1} \int_F \rho \sin \alpha dF. \quad (63)$$

Если следовать традиционному методу вариационной оценки деформаций и вводить варьируемые параметры в функции перемещений, то производная  $\partial \sigma_z / \partial v_1$  не может быть вынесена за знак интеграла и вариация работы внешней силы  $\delta W$  не выражается в квадратурах. Приходится пренебрегать величиной  $\delta W$  [7, 10], что увеличивает погрешность вариационной оценки деформаций.

Угол  $\varphi_1$  в уравнении (63) означает поворот касательной к изогнутой оси трубы в пределах зоны свободного изгиба. Его формула (12) содержит длину названной зоны (аппликату  $z_1$  точки 1 на рисунке 21), которая определяется решением системы уравнений (13).

Интегрирование согласно (63) по исходной площади  $F$  сечения трубы и подстановка производной выражения  $\sigma_z$  (62) дает приближенную формулу

$$\frac{\partial W}{\partial v_1} = \varphi_1 \frac{2\sqrt{3}\tau_s r^2 t (1 - 2v_1)}{(1 - v_1 + v_1^2)^{3/2}}. \quad (64)$$

#### 4.1.2 Формулы деформаций

Деформации переходного участка заготовки записываем в цилиндрических координатах (34), выражение интенсивности деформаций сдвига (16) преобразуем с учетом (4) к виду:

$$\Gamma = 2\sqrt{\varepsilon_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 + \frac{1}{4}(\gamma_{\rho\alpha}^2 + \gamma_{\alpha z}^2 + \gamma_{z\rho}^2)}. \quad (65)$$

Основанием для использования прямолинейной осевой координаты  $z$  являются относительно небольшие (порядка 0,1) значения  $\varphi_1$  – угла наклона оси трубы на границе переходного участка заготовки, см. рисунок 21.

Формулу деформации  $\varepsilon_z$

$$\varepsilon_z = \frac{\rho \sin \alpha}{R} + \frac{u_\rho \sin \alpha}{R} + \frac{u_\alpha \cos \alpha}{R},$$

упрощаем к виду

$$\varepsilon_z = \frac{\rho \sin \alpha}{R}, \quad (66)$$

игнорируя менее значимые компоненты. Это позволит сократить развернутое выражение  $\Gamma$ , возросшее, по сравнению с предыдущим разделом, за счет включения в него полного комплекта деформаций сдвига.

Используя принятое соотношение  $\sigma_\alpha = \nu_1 \sigma_z$ , а также уравнения связи (15) и условие постоянства объема, в пренебрежении напряжением  $\sigma_\rho$  выводим формулы

$$\varepsilon_\rho = -\varepsilon_z \frac{1+\nu_1}{2-\nu_1}, \quad \varepsilon_\alpha = -\varepsilon_z \frac{1-2\nu_1}{2-\nu_1}. \quad (67)$$

Интегрированием формулы  $\varepsilon_\rho$  с учетом (66) выражаем радиальное перемещение

$$u_\rho = \frac{-\rho^2 \sin \alpha}{2R} \cdot \frac{1+\nu_1}{2-\nu_1} + C + f(\alpha, z).$$

Согласно [29] функция  $f(\alpha, z) = -y \sin \alpha$ , где ордината  $y$  точек оси трубы равна двойному интегралу кривизны  $1/R$ , см. (11, 12). Произвольная постоянная интегрирования  $C$  определяется согласно условию:  $u_\rho = 0$  при  $\rho = r$ ,  $y = 0$ . В качестве значения  $r$ , принимаем, как и в предыдущих разделах, средний радиус стенки, хотя в принципе им может быть радиус проходного сечения трубы.

Итоговый результат:

$$u_\rho = \frac{(r^2 - \rho^2) \sin \alpha}{2R} \cdot \frac{1+\nu_1}{2-\nu_1} - y \sin \alpha. \quad (68)$$

Из формул деформации  $\varepsilon_\alpha$  (34) и (67) следует

$$\frac{du_\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{-\rho \sin \alpha}{R} \cdot \frac{1-2\nu_1}{2-\nu_1} - \frac{\sin \alpha}{2R} \left( \frac{r^2}{\rho} - \rho \right) \cdot \frac{1+\nu_1}{2-\nu_1} + \frac{y}{\rho} \sin \alpha, \text{ отсюда}$$

$$u_\alpha = \frac{\rho^2 \cos \alpha}{R} \cdot \frac{1-2\nu_1}{2-\nu_1} + \frac{\cos \alpha}{2R} (r^2 - \rho^2) \cdot \frac{1+\nu_1}{2-\nu_1} - y \cos \alpha.$$

Интеграл по  $z$  деформации  $\varepsilon_z$  (66) с учетом формулы кривизны оси трубы (11) определяет перемещение

$$u_z = \frac{\rho \sin \alpha}{(m+1)R_0 z_1^m} z^{m+1}.$$

Дифференцируя полученные выражения перемещений по формулам (34), выражаем деформации сдвига

$$\begin{aligned} \gamma_{\rho\alpha} &= \frac{-\rho \cos \alpha}{R} \cdot \frac{3v_1}{2-v_1}, \\ \gamma_{az} &= \frac{mz^{m-1}}{R_0 z_1^m} \left( \rho^2 \cdot \frac{1-2v_1}{2-v_1} + \frac{r^2 - \rho^2}{2} \cdot \frac{1+v_1}{2-v_1} \right) \cos \alpha, \\ \gamma_{z\rho} &= \frac{mz^{m-1}}{R_0 z_1^m} \left( \frac{r^2 - \rho^2}{2} \cdot \frac{1+v_1}{2-v_1} \right) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (69)$$

## 4.2 Решение вариационной задачи

Уравнение варьируемого параметра  $v_1$  отличается от прототипа (52) из предыдущего раздела тем, что вместо двойного интеграла используется тройной – по объему переходного участка изогнутой трубы. В цилиндрических координатах оно имеет вид:

$$\int_0^{z_1} \int_0^{2\pi} \int_{r-\frac{t}{2}}^{r+\frac{t}{2}} \frac{\partial \Gamma^2}{\partial v_1} \rho d\rho d\alpha dz + \frac{2\Gamma_c}{\tau_s} \frac{\partial W}{\partial v_1} = 0. \quad (70)$$

Интегрирование от 0 до  $2\pi$  слагаемых  $\Gamma^2$ , содержащих квадрат синуса либо косинуса, сообщает им множитель, равный  $\pi$ , который можно заранее вынести за знак интеграла. Группируем эти слагаемые по признаку одинакового результата интегрирования по  $z$ , который также выносим за знак интеграла. Тогда

$$\int_v \frac{\partial \Gamma^2}{\partial v_1} dV = \frac{\pi z_1}{(2m+1)R_0^2} \int_{r-\frac{t}{2}}^{r+\frac{t}{2}} \frac{\partial}{\partial v_1} \left[ \frac{17v_1^2 + 4v_1}{(2-v_1)^2} \right] \rho^3 d\rho +$$

$$+ \frac{\pi m^2}{(2m-1)R_0^2 z_1} \int_{r-\frac{t}{2}}^{r+\frac{t}{2}} \frac{\partial}{\partial v_1} \left[ \frac{(1-2v_1)^2 \rho^4 + 0,5(1+v_1)^2 (r^2 - \rho^2)^2 + (1-v_1 - 2v_1^2) \rho^2 (r^2 - \rho^2)}{(2-v_1)^2} \right] \rho d\rho.$$

Введем обозначения:

$$k_1 = \frac{\pi z_1}{(2m+1)R_0^2} \int_{r-\frac{t}{2}}^{r+\frac{t}{2}} \rho^3 d\rho; \quad k_2 = \frac{\pi m^2}{(2m-1)R_0^2 z_1} \int_{r-\frac{t}{2}}^{r+\frac{t}{2}} \rho^5 d\rho;$$

$$k_3 = \frac{\pi m^2}{(2m-1)R_0^2 z_1} \int_{r-\frac{t}{2}}^{r+\frac{t}{2}} (r^2 - \rho^2)^2 \rho d\rho; \quad k_4 = \frac{\pi m^2}{(2m-1)R_0^2 z_1} \int_{r-\frac{t}{2}}^{r+\frac{t}{2}} (r^2 - \rho^2) \rho^3 d\rho.$$

После дифференцирования

$$\int_V \frac{\partial \Gamma^2}{\partial v_1} dV = \frac{(72v_1 + 8)k_1 + 6(2v_1 - 1)k_2 + 3(v_1 + 1)k_3 - 9v_1 k_4}{(2 - v_1)^3}. \quad (71)$$

Выражаем величину  $\Gamma_c$ , содержащуюся в уравнении (70), по аналогии с (53):

$$\Gamma_c = \sqrt{\frac{1}{V} \int_V \Gamma^2 dV}.$$

С учетом принятых обозначений

$$\Gamma_c = \frac{1}{2-v_1} \sqrt{\frac{(17v_1^2 + 4v_1)k_1 + (1-2v_1)^2 k_2 + 0,5(1+v_1)^2 k_3 + (1-v_1 - 2v_1^2)k_4}{2\pi r t z_1}}.$$

При подстановке данного выражения, а также (64) и (71) в разрешающее уравнение (70) происходят некоторые сокращения, в том числе исчезает напряжение текучести  $\tau_s$ . Вводу в программу MathCAD полученного уравнения предшествует ввод выражений  $k_1, k_2, k_3, k_4$ . Неоднозначность его решения относительно варьируемого параметра не проявляется при затравочных значениях  $v_1$  от -1 до 1, т.е. в диапазоне, намного превышающем реальный, рисунок 22.

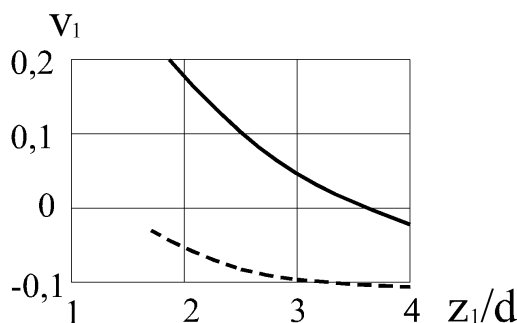


Рисунок 22 – Влияние относительной длины переходного участка: материалы труб – сплавы ВТ1-2 и АМгбМ (пунктир)

Точки графиков определяли с использованием данных: относительная толщина стенки трубы  $t/d = 0,05$ ; показатель степени функции напряжения текучести (6)  $n = 0,1$  (сплав титана) и  $0,23$  (сплав алюминия). Изменение значения  $t/d$  весьма мало отражается на результатах расчетов, относительный радиус изгиба  $R_0/d$  не влияет на рассчитываемые значения  $\nu_1$ , поскольку содержится в членах уравнения (70) в одинаковой степени и сокращается.

Параметр  $\nu_1$  связывает напряжения  $\sigma_\alpha = \nu_1 \sigma_z$  и – косвенным образом – деформации. Нулевое значение  $\nu_1$  означает одноосное напряженное состояние ( $\sigma_\alpha = 0$  и  $\sigma_\rho = 0$ ) и соотношение деформаций:  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\rho = -0,5\varepsilon_z$ . При  $\nu_1 < 0$  отношение поперечных деформаций  $\varepsilon_\alpha/\varepsilon_\rho > 1$ , т.е. утонение стенки трубы сравнительно невелико. Оно достигает максимума при весьма малой протяженности зоны свободного изгиба, например при локальном нагреве изгибаемой заготовки кольцевым индуктором. В этом случае перемещение материала по периметру затруднено влиянием соседних, не деформируемых участков, поэтому  $\varepsilon_\alpha \approx 0$ ,  $\varepsilon_\rho \approx -\varepsilon_z$ .

#### 4.2.1 Расчет изменения толщины стенки трубы

В соответствии с формулами (66) и (67) нейтральная поверхность деформаций  $\varepsilon_z$  и  $\varepsilon_\rho$  проходит через ось трубы. При  $\alpha = \pm\pi/2$  изменение толщины стенки  $\Delta t = \varepsilon_\rho t_0$  достигает экстремальных значений

$$\Delta t_{\min, \max} = \mp \frac{t_0 r}{R_0} \cdot \frac{1 + \nu_1}{2 - \nu_1}, \quad (72)$$

их равенство по абсолютной величине противоречит практике. В действительности утонение стенки проявляется сильнее, нежели утолщение и это связано с растяжением оси трубы [4, 6].

Приближенную оценку относительного удлинения  $\varepsilon_0$  оси изогнутого участка заготовки получаем из условия равенства нулю продольной силы:



$$\int_F \sigma_z dF = 0, \quad (73)$$

в котором площадь сечения  $F$  ограничена не концентричными окружностями радиуса  $r_1 = r + 0,5t_0$  и  $r_2 = r - 0,5t_0$ , рисунок 23.

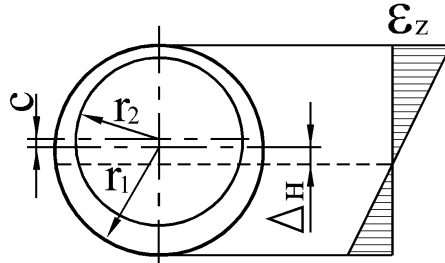


Рисунок 23 – Положение нейтральной линии деформаций  $\varepsilon_z$  (пунктир) в сечении трубы с разнотолщинной стенкой

Эксцентриситет принятых границ сечения трубы  $c = \Delta_{t_{\max}} = -\Delta_{t_{\min}}$ , откуда с учетом формулы (73)

$$c = 2 \frac{t_0 r}{R_0} \cdot \frac{1 + \nu_1}{2 - \nu_1}.$$

При одноосном напряженном состоянии жесткопластического материала ( $\sigma_z = \pm \sqrt{3}\tau_s$ ) условие (73) идентично равенству площадей частей сечения трубы, расположенных по разные стороны нейтральной линии. Ее расстояние  $\Delta_n$  от центра радиуса наружной границы сечения находим, решая в программе MathCAD уравнение

$$\int_0^{\Delta_n} \sqrt{r_1^2 - y^2} dy = \int_0^{\Delta_n + c} \sqrt{r_2^2 - y^2} dy.$$

Найденное значение  $\Delta_n$  мало отличается от затравочного  $-r^2/R_0$  (для тонкостенных труб – пренебрежимо мало).

Относительное удлинение оси трубы  $\varepsilon_0 = \Delta_n / R_0$ , принимаем его линейно зависящим от кривизны гибки  $1/R$  и считаем величину  $(r/R_0)^2/2$  дополнительным слагаемым формулы деформации  $\varepsilon_z$  (66). Вычитаем эту величину из правой части

выражения  $\varepsilon_p$  (67), поскольку растяжение трубы вызывает уменьшение толщины стенки без существенного деформирования периметра. Формула (72) принимает вид:

$$\frac{\Delta t_{\min, \max}}{t_0} = \mp \frac{r}{R_0} \cdot \frac{1 + \nu_1}{2 - \nu_1} - \frac{r^2}{2R_0^2}. \quad (74)$$

Графики на рисунке 24 иллюстрируют изменение толщины стенки трубы, рассчитанное согласно формуле (74), значения  $\nu_1$  находили для стали 20 ( $n = 0,161$ ) при относительной толщине стенки  $t_0/r = 0,05$ .

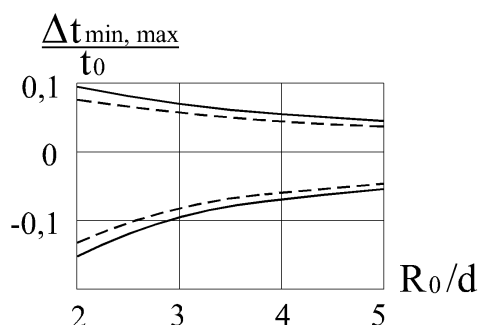


Рисунок 24 – Экстремальные изменения толщины стенки трубы в зависимости от относительных значений радиуса гибки  $R_0/d$  при  $z_1/d = 2$  и  $z_1/d = 4$  (пунктир)

Приобретаемая разнотолщинность стенки трубы уменьшается с увеличением радиуса гибки  $R_0$  согласно формулам (66, 67); значения  $\nu_1$  составили: 0,026 при  $z_1/d = 2$  и -0,088 при  $z_1/d = 4$ . Преобладание утонения стенки над утолщением, как это видно из графиков, особенно заметно при малых радиусах гибки, что согласуется с производственным опытом.

Максимальное относительное удлинение материального волокна трубы  $\varepsilon_{z_{\max}} \approx 0,5d/R_0$ . Как следует из графиков на рисунке 24, деформация  $\varepsilon_{\rho_{\min}}$ , равная  $\Delta t_{\min}/t_0$ , в абсолютном выражении превышает  $0,5\varepsilon_{z_{\max}}$ , что противоречит данным экспериментальных исследований. Согласно [6] при наматывании без дорна в зоне растяжения материального волокна трубы  $\varepsilon_\alpha/\varepsilon_z = -0,65$ ; следовательно,  $\varepsilon_\rho/\varepsilon_z = -0,35$ . Причиной данного несоответствия может быть анизотропия материала труб, сведения о которой в цитируемом источнике отсутствуют.

### 4.3 Геометрическая модель переходного участка

Прогиб оси переходного участка, подверженного свободному изгибу, складывается из двух компонентов:  $y_{\text{п}} > 0$  и  $y_{\text{с}} < 0$ ; им соответствуют поворот и сдвиг поперечных сечений, условно показанных на рисунке 25.

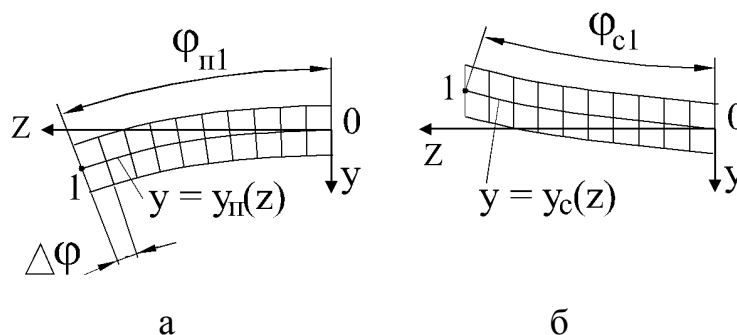


Рисунок 25 – Схемы компонентов прогиба оси трубы и перемещений материальных сечений

Угол  $\varphi$  наклона касательной к оси трубы также является суммой величин  $y'_{\text{п}} > 0$  и  $y'_{\text{с}} < 0$ , как и кривизна оси трубы, составляющие которой  $y''_{\text{п}}$  и  $y''_{\text{с}}$  порождаются изгибающим моментом и перерезывающей силой и имеют те же разные знаки.

Сдвиги сечений не оказывают прямого влияния на изменение длины материального волокна и толщины стенки трубы, поэтому в предыдущем подразделе они не учитывались.

Уточнение формы изогнутой оси переходного участка связано с учетом зависимости момента внутренних сил от касательного напряжения –  $\tau_{yz}$  в декартовых координатах, см. рисунок 21. Наряду с  $\sigma_z$  это наиболее значимый компонент напряженного состояния при определении момента внутренних сил, влиянием остальных ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{zx}$ ) пренебрегаем. Из формул (15) и (16), принимая  $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy} = 0$ ,  $\gamma_{zx} = 0$ , получаем

$$\sigma_z = \frac{3\tau_s}{\Gamma} \varepsilon_z, \quad \tau_{yz} = \frac{\tau_s}{\Gamma} \gamma_{yz}, \quad \Gamma = \sqrt{3\varepsilon_z^2 + \gamma_{yz}^2}.$$

Введем функцию касательного напряжения текучести, идентичную (17)

$$\tau_s = K\Gamma^n,$$

где  $K = 3^{-0,5(1+n)}A$ .

$$\text{Тогда } \sigma_z = 3K\varepsilon_z(3\varepsilon_z^2 + \gamma_{yz}^2)^{n-0,5}; \quad \tau_{yz} = K\gamma_{yz}(3\varepsilon_z^2 + \gamma_{yz}^2)^{n-0,5}. \quad (75)$$

Произвольно принятое равенство деформаций  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  сообщило выражениям в скобках некоторую погрешность. Так, например, при  $\varepsilon_x = 3\varepsilon_y$  соотношение квадратов  $\varepsilon_z$  и  $\gamma_{yz}$  было бы равно не 3, а 3,25.

При  $z = 0$  деформация  $\varepsilon_z = 0$ , касательное напряжение  $\tau_{yz} = \tau_s$ , откуда с учетом  $\Gamma = \gamma_{yz}$  следует:

$$\gamma_{yz}|_{z=0} = \left( \frac{P}{KF} \right)^{1/n}. \quad (76)$$

Внешней силе  $P$  и создаваемому ей моменту соответствуют выражения

$$P = \int_F \tau_{yz} dF \quad \text{и} \quad Pz = - \int_F \sigma_z y dF, \quad (77)$$

интегрируемые (с подстановкой формул (75) и заменой:  $y = -\rho \sin \alpha$ ) по площади  $F$  сечения заготовки в полярных координатах. Обращение к вычислительной программе типа MathCAD позволяет находить значения деформации  $\gamma_{yz}$  из первого выражения (77) с заданными величинами  $P$  и  $R$ . Ограничимся заданием трех значений радиуса  $R$  в точках 1, 2, 3 оси трубы, рисунок 26.

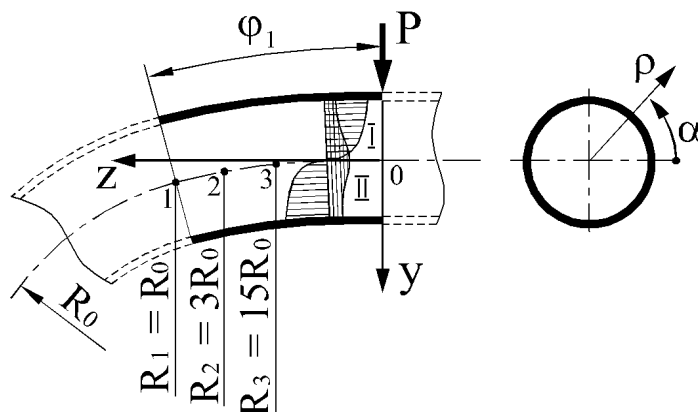


Рисунок 26 – Пример задания радиуса  $R$  в точках 1, 2, 3  
и характер эпюр напряжений  $\sigma_z$  (I),  $\tau_{yz}$  (II)

Наряду с фиксированными значениями  $R$  задаем внешнюю силу относительной величиной

$$\bar{P} = \frac{P}{\tau_{02} F}, \quad (78)$$

где  $\tau_{02}$  – начальное касательное напряжение текучести, связанное со стандартной характеристикой материала  $\sigma_{02}$  соотношением  $\tau_{02} = \sigma_{02} / \sqrt{3}$ . Находим деформации  $\gamma_{yz}$  из интегрального выражения силы  $P$  (77), принимая в формуле деформации  $\varepsilon_z$  (66) радиус  $R$  равным поочередно  $R_1, R_2, R_3$ . По найденным значениям  $\gamma_{yz}$  и формуле  $M = Pz$  (77) с подстановкой функции напряжения  $\sigma_z$  (75) подсчитываем моменты  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в рассматриваемых сечениях и аппликаты точек  $z_i = M_i/P, i = 1, 2, 3$ .

Точность дискретного представления связи кривизны оси с координатой  $z$  зависит от количества выбранных точек и их распределения по длине переходного участка, желательно – равномерного. Полагаем, что длины отрезков оси: 1-2, 2-3 и 3-0 будут одного порядка, если поставить в соответствие точкам 2 и 3 значения  $R$ , приведенные на рисунке 26.

#### 4.3.1 Полином изгибного компонента прогиба оси

На основе полученной дискретной функциональной связи кривизны оси с координатой  $z$  перейдем к непрерывной полиномиальной функции  $y = y_n(z)$ , аппроксимирующей прогиб оси, порождаемый поворотом сечений, см. рисунок 25, а. С учетом граничных значений:

$$\text{при } z = 0 \quad y_n = 0, \quad y'_n = 0, \quad y''_n = 0; \quad \text{при } z = z_1 \quad y''_n = 1/R_0 \quad (79)$$

полином должен иметь показатель степени младшего члена, равный трем, например:

$$\bar{y}_n = a_1 \bar{z}^3 + a_2 \bar{z}^4 + a_3 \bar{z}^5. \quad (80)$$

Здесь  $\bar{y}_n = \frac{y_n}{z_1}$ ;  $\bar{z} = \frac{z}{z_1}$ ;  $z_1$  – длина переходного участка заготовки и аппликата точки 1 на рисунке 26.

Производные полинома:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{y}_n}{d\bar{z}} &= \frac{dy_n}{dz} = 3a_1\bar{z}^2 + 4a_2\bar{z}^3 + 5a_3\bar{z}^4; \\ \frac{d^2\bar{y}_n}{d\bar{z}^2} &= z_1 \frac{d^2y_n}{dz^2} = 6a_1\bar{z} + 12a_2\bar{z}^2 + 20a_3\bar{z}^3; \\ \frac{d^3\bar{y}_n}{d\bar{z}^3} &= z_1^2 \frac{d^3y_n}{dz^3} = 6a_1 + 24a_2\bar{z} + 60a_3\bar{z}^2.\end{aligned}\quad (81)$$

Принимая  $1/R = y_n''$ , получаем из формулы второй производной (81) систему уравнений для определения коэффициентов  $a_1, a_2, a_3$  полинома (80):

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{R_1} &= 6a_1 + 12a_2 + 20a_3; \\ \frac{z_1}{R_2} &= 6a_1 \frac{z_2}{z_1} + 12a_2 \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + 20a_3 \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3; \\ \frac{z_1}{R_3} &= 6a_1 \frac{z_3}{z_1} + 12a_2 \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^2 + 20a_3 \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^3.\end{aligned}\quad (82)$$

Здесь  $R_1, R_2$  и  $R_3$  заданы (см. рисунок 26), а соответствующие им координаты  $z_1, z_2, z_3$  точек изогнутой оси определены из уравнений (77).

#### 4.3.2 Полином сдвигового компонента прогиба оси

Соотношение изгибных и сдвиговых компонентов прогиба  $y$  и угла  $\varphi$  наклона оси, имеющих разные знаки, (см. рисунок 25) может быть различным. При установке обкатывающего ролика с достаточно малым зазором  $s$  сдвиговые перемещения поперечных сечений заготовки в направлении оси  $y$  становятся

преобладающими, параметры  $\varphi_1$  и  $y_1$  принимают отрицательные значения, рисунок 27.

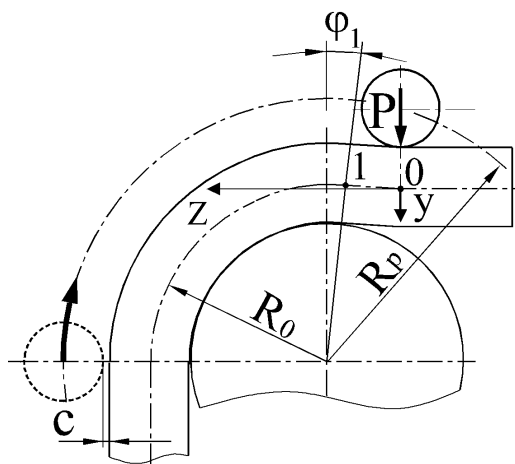


Рисунок 27 – Форма изогнутой трубы при заниженном параметре  $c$

Занижение величины  $c$  может быть вызвано необходимостью уменьшить длину переходного участка, который присутствует и на изделии, не будучи легализован техническими условиями. Соответственно с величиной  $c$  уменьшается плечо силы гибки  $P$  и возрастает сама сила, а также сдвиговые напряжения  $\tau_{xy}$  и деформации  $\gamma_{xy}$ .

Зададим полиномиальную аппроксимацию кривой  $y_c = f_c(z)$  сдвигового компонента прогиба оси, показанного на рисунке 25, б:

$$\bar{y}_c = b_1 \bar{z} + b_2 \bar{z}^3 + b_3 \bar{z}^4 + b_4 \bar{z}^5. \quad (83)$$

Здесь по аналогии с (79)  $\bar{y}_c = \frac{y_c}{z_1}$ ;  $\bar{z} = \frac{z}{z_1}$ ;  $z_1$  – длина переходного участка.

Поскольку сдвиговая нагрузка в направлении оси  $z$  отсутствует, принимаем производную  $\frac{d\bar{y}_c}{d\bar{z}}$  равной деформации сдвига  $\gamma_{yz}$  со знаком минус. Используем найденные ранее значения  $\gamma_{yz}$  в точках 1, 2, 3 на рисунке 26, которым соответствовали заданные радиусы изгибного компонента кривизны оси переходного участка.

Производные полинома (83):

$$\frac{d\bar{y}_c}{d\bar{z}} = b_1 + 3b_2\bar{z} + 4b_3\bar{z}^2 + 5b_4\bar{z}^3;$$

$$\frac{d^2\bar{y}_c}{d\bar{z}^2} = 6b_2\bar{z} + 12b_3\bar{z}^2 + 20b_4\bar{z}^3. \quad (84)$$

Система уравнений для определения коэффициентов  $b_2, b_3, b_4$ :

$$-\gamma_{yz1} = b_1 + 3b_2 + 4b_3 + 5b_4;$$

$$-\gamma_{yz2} = b_1 \frac{z_2}{z_1} + 3b_2 \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 + 4b_3 \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 + 5b_4 \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4;$$

$$-\gamma_{yz3} = b_1 \frac{z_3}{z_1} + 3b_2 \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^2 + 4b_3 \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^3 + 5b_4 \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^4$$

содержит известные координаты  $z$  точек 1, 2, 3. Коэффициент  $b_1$  равен  $-\gamma_{yz}$  при  $z$

$$= 0, \text{ т.е. } b_1 = -\left(\frac{P}{AF}\right)^{1/n} \text{ согласно (76).}$$

### 4.3.3 Геометрические параметры операции

Суммируя полиномы  $y_n$  и  $y_c$ , а также их первые производные, получаем форму изогнутой оси трубы, более близкую к действительной, по сравнению с изображенной на рисунке 21. Граничные значения параметров оси в точке 1:  $z_1, y_1 = y_{n1} + y_{c1}, \varphi_1 = y'_{n1} + y'_{c1}$ , уточнены по сравнению с известными формулами (12). С размерами инструментов их связывают очевидные геометрические уравнения:

$$R_p \cos \beta = R_0 \cos \varphi_1 + y_1 + 0,5d + r_p + (h_n);$$

$$R_p \sin \beta = z_1 - R_0 \sin \varphi_1;$$

$$R_p = R_0 + c + 0,5d + r_p + (h_n). \quad (86)$$

В скобках указан размер планки  $h_n$  на случай ее применения в составе инструментов гибки, см. рисунок 20. Неизвестные геометрические параметры  $R_p$ ,



$\beta$  и  $c$ , относящиеся к обкатывающему ролику (см. рисунки 21 и 27), определяются решением данной системы уравнений в среде MathCAD или традиционным методом: исключаем радиус  $R_p$  траектории ролика делением первого уравнения на второе и т.д.

Геометрические зависимости (86) в равной степени относятся к расчетной схеме на рисунке 27, учитывающей сдвиги сечений, и к предшествующей (см. рисунок 21) без такого учета. В первом случае прогиб  $y_1 = y_{nl} + y_{cl}$  и угол  $\varphi_1 = y'_{nl} + y'_{cl}$  отрицателен, а во втором положителен. Заметим, что угол  $\varphi_1$  в формуле вариации работы внешней силы (63) учитывает только поворот сечений.

На рисунке 28 приведены рассчитанные зависимости длины переходного участка заготовки от параметра  $c$  установки обкатывающего ролика.

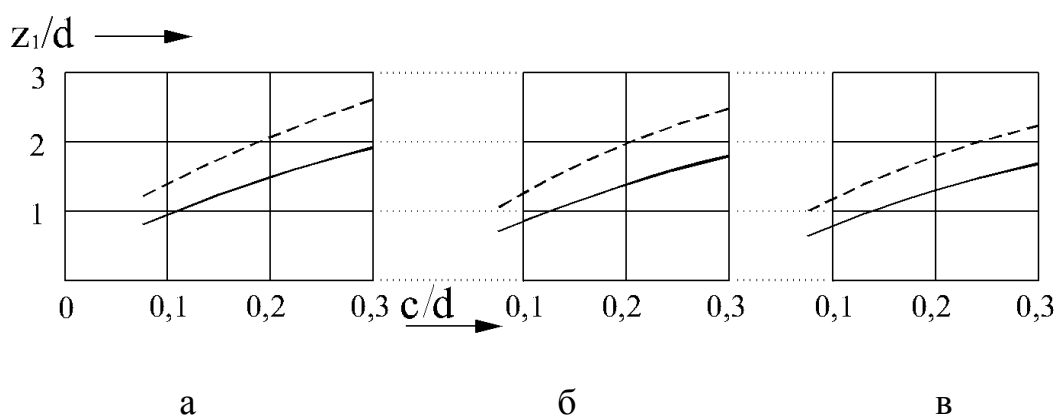


Рисунок 28 – Относительная длина переходного участка при гибке труб из сплава АМг6М (а), стали 20 (б) и сплава ВТ1-2 (в) на относительный радиус  $R_0/r$ , равный 6 и 12 (пунктир)

В расчетах принимали относительную толщину стенки трубы  $t/r = 0,2$ ; ее варьирование почти не отражается на изображенных графиках. Влияние радиуса гибки весьма значительно, по сравнению с параметрами функции упрочнения (6), которые существенно разнятся для перечисленных материалов [48].

#### 4.3.4 Параметры изогнутой оси трубы

Суммирование вторых производных полиномов  $y_n$  (80) и  $y_c$  (83) показывает наличие участка оси с отрицательной кривизной, примыкающий к началу координат на рисунке 27; он существует согласно данным расчета не только при заниженных значениях  $c$ , но также и при нормальных – будучи выражен не так заметно. Наличие точки перегиба оси трубы не означает изменение знака деформации  $\varepsilon_z$  (66), которая зависит не от суммарной кривизны оси  $1/R$ , а от одного из ее компонентов, равного  $y_n''$  и монотонно возрастающего в интервале 0-1 изогнутой оси. Другой компонент –  $y_c''$ , вызываемый сдвигом сечений, не влияет на длину материального волокна трубы.

Конечно-элементное моделирование обнаруживает существенную особенность поведения материальных сечений в процессе их удаления от начала координат на рисунках 21 и 27. Непродолжительный (можно сказать мгновенный) контакт с копиром некоторого материального сечения затем утрачивается в результате перемещения названного начала координат вслед за обкатывающим роликом. Следовательно, в момент контакта кривизна оси заготовки в этом материальном сечении  $y_n'' + y_c''$  меньше предельной величины  $1/R_0$ , а затем продолжает монотонно увеличиваться до постоянного значения. Согласно этой гипотезе радиус оси на участке постоянной кривизны несколько превышает величину  $R_0$ , равную  $R_k + 0,5d$ , ( $R_k$  радиус копира на рисунке 21) и контакт заготовки с копиром отсутствует, что также подтверждается конечно-элементным моделированием. Подобный эффект имеет место при изгибе листов U-образным пуансоном, когда вершина пуансона в какой-то момент теряет контакт с заготовкой [49].

Реакция копира в месте кратковременного контакта с заготовкой изменяет знак перерезывающей силы и направление сдвигов  $\gamma_{yz}$ , в результате частично восстанавливается нормальное относительно оси положение материальных сечений. Если считать точку 1 границей участков оси с постоянной и переменной кривизной, то интегрирование вариационного уравнения (70) в диапазоне  $0 \leq z \leq$

$z_1$  с применением формулы деформации  $\varepsilon_z$  (66) представляется правомерным, хотя и означает упрощение немонотонного характера деформирования.

В таблице 3 представлены результаты геометрических расчетов при различных значениях безразмерной силы  $\bar{P}$  (78); материал трубы – сталь 20; константы функции (6)  $A = 395$  МПа,  $n = 0,161$ ; начальное напряжение текучести  $\sigma_{02} = 300$  МПа; отношение радиусов изгиба и средней линии сечения  $R_0/r = 6$ ; относительная толщина стенки  $t/r = 0,2$ .

Таблица 3 – Параметры переходного участка заготовки

$\bar{P}$	$\frac{y_1}{d}$	$\varphi_1$	$\frac{z_1}{d}$	$\frac{z_2}{d}$	$\frac{z_3}{d}$
0,4	0,0380	0,115	1,721	1,178	0,633
0,5	0,0160	0,070	1,358	0,915	0,458
0,6	0,0028	0,033	1,113	0,733	0,334
0,7	-0,0065	~0	0,933	0,599	0,243

В таблице значения прогиба оси  $y_1$  (см. рисунки 21, 27) и аппликаты точек 1, 2, 3 (см. рисунок 26) с фиксированными значениями  $R_1 = R_0$ ;  $R_2 = 3R_0$ ;  $R_3 = 15R_0$  отнесены к диаметру трубы  $d$ . Рассчитанные зазоры  $c$  – параметра наладки инструмента, показанного на рисунках 21 и 27, составили от  $0,278d$  до  $0,11d$  в порядке возрастания силы  $P$ . Рекомендуемому значению  $c = 0,2d$  [4] примерно соответствует вторая строка таблицы и значение  $\bar{P} = 0,5$ .

Подтвердились ожидания равномерных расстояний между точками 1-2, 2-3 и 3-0 оси переходного участка. Касательная к оси в точке 1 имеет сравнительно малые углы наклона  $\varphi_1$ , что оправдывает принятое равенство кривизны и второй производной прогиба.

Варьирование исходной толщины стенки трубы практически не влияет на геометрические параметры переходного участка заготовки. Удвоение радиуса изгиба  $R_0$  приводит к сокращению длины переходного участка примерно на

четверть. Большое влияние на параметры  $y_1$  и  $\varphi_1$ , помимо зазора  $c$ , оказывает константа  $n$  степенной функции (6) упрочнения. В таблице 4 представлены результаты математического моделирования переходного участка заготовок из различных материалов при одинаковом зазоре  $c \approx 0,2d$ , руководствуясь которым подбирали значение безразмерной силы  $\bar{P}$ .

Таблица 4 – Параметры переходного участка при гибке труб с относительной толщиной стенки  $t/r = 0,2$  на радиус  $R_0 = 6r$

Материал	$\bar{P}$	$\frac{y_1}{d}$	$\varphi_1$	$\frac{z_1}{d}$
Сталь 12X18H9T	0,53	0,044	0,129	1,51
Сплав АМг6М	0,5	0,041	0,123	1,50
Сталь 20	0,49	0,017	0,073	1,39
Сплав ВТ1-2	0,42	0,012	0,036	1,31

Двум верхним строкам таблицы соответствуют почти одинаковые показатели степени  $n$  функции упрочнения (6) – 0,239 и 0,23; близкими оказались и результаты расчета. Более интенсивное упрочнение стали 20 ( $n = 0,161$ ) и сплава на основе титана ВТ1-2 ( $n = 0,1$ ) заметно сказалось на геометрических параметрах переходного участка заготовки.

#### 4.4 Конечно-элементное моделирование

Важной особенностью рассматриваемой схемы гибки является применение планки, передающей силу гибки  $P$  на большую площадь контакта с заготовкой, см. рисунок 20. Предполагается, что возможно проскальзывание между планкой и заготовкой, поэтому с целью упрощения моделирования задаем для этой пары нулевой коэффициент трения.

С целью упрощения моделирования изменяем кинематику инструмента: придаем вращение копиру с прикрепленным к нему торцом заготовки. Между заготовкой и планкой происходит скольжение с нулевым трением. Реакция заготовки смещает планку в направлении от центра копира; установившаяся величина смещения эквивалентна зазору  $s$  на рисунке 21.

На рисунке 29, выведенного программой Deform, показано продольное сечение КЭ-модели трубы 20x1 мм из жесткопластического материала, изогнутой по копиру обкатывающим перемещением ролика и планки, диаметр ролика равен диаметру трубы  $d$ .

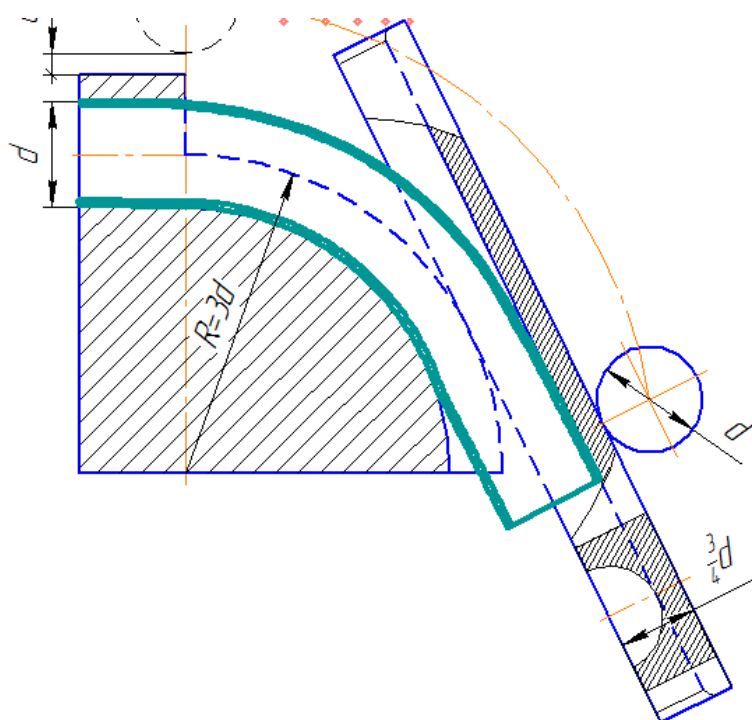


Рисунок 29 – Продольное сечение изгибаемой трубы и деформирующего инструмента

При большом увеличении масштаба вывода рисунка видно, что контакт с копиром отсутствует у значительной части изогнутого участка заготовки. Относительное уменьшение высоты сечения трубы  $|\Delta d/d|$  и утонение стенки

$\left| \frac{t_{\min} - t_0}{t_0} \right|$  при различных значениях зазора  $s$  между роликом и планкой приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Изменения размеров сечения трубы для разных значений  $c$

	$c/d$					
	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
$\left  \frac{t_0 - t_{\min}}{t_0} \right $	0,076	0,074	0,085	0,088	0,086	0,084
$ \Delta d/d $	0,062	0,063	0,065	0,063	0,056	0,052

Здесь имеет место немонотонная зависимость утонения стенки от исходного зазора  $c$  между роликом и планкой в отличие от характера кривых на рисунке 28. Что касается абсолютной величины относительного утонения стенки, то ее вариационная оценка оказалась завышенной, по сравнению с КЭ-моделированием, примерно на четверть. Перечисленные отличия отчасти объясняются уменьшением высоты сечения трубы, по сравнению с диаметром  $d$  (см. нижнюю строку таблицы 5), тогда как при решении вариационной задачи высота сечения трубы принималась равной  $d$ .

Значения  $|\Delta d/d|$  резко возрастают при существенно заниженном зазоре  $c$  установки обкатывающего ролика, по сравнению с рекомендуемым [3] соотношением  $c/d \approx 0,2$ . В примере КЭ-моделирования, приведенном на рисунке 30, уменьшение высоты сечения трубы  $|\Delta d/d|$  достигает 0,18.

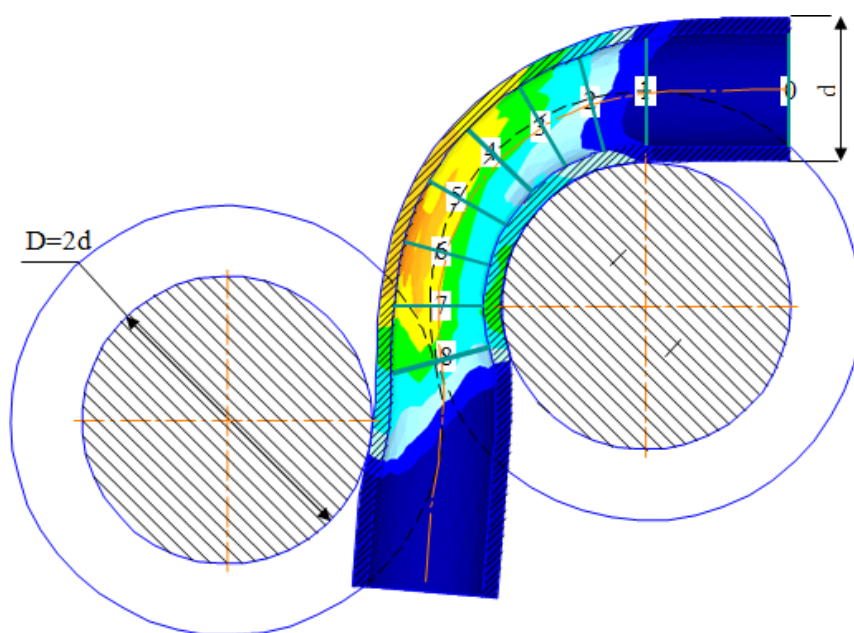


Рисунок 30 – Пример результатов конечно-элементного моделирования с цветовой визуализацией интенсивности деформаций

Данный пример относится к расчетной схеме, учитывающей прогиб оси трубы под действием сдвигов сечений, см. рисунок 27. Он подтверждает уменьшение длины зоны свободного изгиба (ее граница отмечена сечением 8) и распространение пластических деформаций на изогнутый участок, прилегающий к копиру.

#### Выводы по разделу

1. Постановка задачи вариационной оценки деформаций изогнутой трубы с не изменяющейся высотой сечения, равной исходному диаметру  $d$ , подчинена практической потребности в прогнозировании  $\Delta t$  – изменения толщины стенки трубопровода и приблизительно соответствует исследуемому процессу изгиба трубы, высота сечения которой, предварительно увеличенная, становится в итоге равной  $d$ .

2. Деформация  $\varepsilon_p$ , ответственная за изменение толщины стенки, находится в обратной зависимости от деформации  $\varepsilon_\alpha$  по периметру сечения, их сумма, равная  $-\varepsilon_z$ , считается известной функцией координат. Связь напряжения  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_z$  варьируемым параметром в качестве неизвестного коэффициента пропорциональности, позволила выразить вариацию работы внешней силы (пренебрежение которой в расчетах процессов ОМД, хотя и практикуется, однако может вносить заметную погрешность) и получить решение вариационной задачи с помощью уравнений связи деформаций и напряжений.

3. Результаты решения подтвердили ожидаемую зависимость утонения стенки трубы от длины  $z_1$  участка свободного изгиба, регулируемой размерами гибочного инструмента и его установкой (наладкой). Установка малой длины  $z_1$  затрудняет перемещение материала  $u_\alpha$  по периметру сечения, при этом относительное утонение  $\Delta t_{\min}/t_0$  приближается к значению максимальной деформации  $\varepsilon_z$  с обратным знаком.

4. Получены уравнения, связывающие длину  $z_1$  участка свободного изгиба трубы с размерами гибочного инструмента и его наладки. Рассчитанное утонение стенки изогнутой трубы оказывается завышенным по абсолютной величине примерно в 1,25 раза, по сравнению с результатами конечно-элементного моделирования, что отчасти объясняется уменьшением высоты сечения изгибаемой трубы, отсутствующим в расчетной схеме.

5. Изложенное решение задачи включает моделирование формы изогнутой оси участка свободного изгиба полиномиальными функциями, учитывающими поворот и сдвиг сечений трубы и удовлетворяющими условиям статического равновесия в трех сечениях с выбранными значениями радиуса оси – промежуточными и окончательным, при заданной реакции обкатывающего ролика. Учет сдвигового компонента прогиба оси трубы необходим для расчета компоновки гибочного инструмента при малых длинах  $z_1$  участка свободного изгиба.

6. Учет сдвигов сечений изгибаемой трубы позволил установить следующие особенности, подтверждаемые конечно-элементным моделированием:



- кривизна оси трубы изменяет знак на некотором расстоянии от обкатывающего ролика, возрастающем с уменьшением плеча внешней силы, вызывающей изгиб;

- переходный участок с переменным радиусом оси  $R$  имеет локальный контакт с копиром, после которого значения  $R$  продолжают уменьшаться, а сдвиги сечений изменяют направление.

## 5 Расчеты гибки труб и предварительного деформирования сечения

Предлагаемый технологический процесс двухэтапного деформирования трубной заготовки предусматривает придание ее сечениям овальности, компенсирующей последующее искажение при изгибе по круглому копиру. Названные этапы в принципе могут быть объединены в одну операцию, выполняемую на модернизированном трубогибочном оборудовании.

Отладка технологического процесса начинается с операции гибки без предварительного деформирования сечения изгибаемого участка. Выбирают состав и размеры гибочной оснастки, удовлетворяя существующим ограничениям утонения стенки. По окончании отладки операции становятся известными фактические размеры сечения изогнутого участка. Сопоставляя их с допустимыми значениями, рассчитывают параметры обратной овальности сечений. Ее придают участкам заготовки, подлежащим изгибу; приведенная ниже схема расчета соответствует операции, выполняемой на прессе инструментом в виде плит с вогнутой рабочей поверхностью.

### 5.1 Деформирование сечения прямой трубы

Некоторая область трубы, деформируемой плитами, принимает кривизну вогнутой поверхности инструмента, границы этой области располагаются симметрично относительно осей сечения. За ее пределами форма стенки неизвестна, как неизвестно и соотношение размеров ее средней линии  $H$  и  $B$ , показанных на рисунке 12.

Приведенные выше решения настоящей задачи – в напряжениях (разд. 2) и в деформациях (разд. 3) сложны для применения в практических целях. Рассмотрим возможность упрощенного определения взаимосвязи ширины и высоты деформируемого сечения трубы. Ранее установлено слабое влияние показателя  $n$

функции упрочнения (3) (см. рисунок 16), поэтому считаем материал жесткопластическим и не упрочняемым, т.е.  $n = 0$ .

Принятой модели материала соответствует формоизменение  $\frac{1}{4}$  сечения, показанное на рисунке 31.

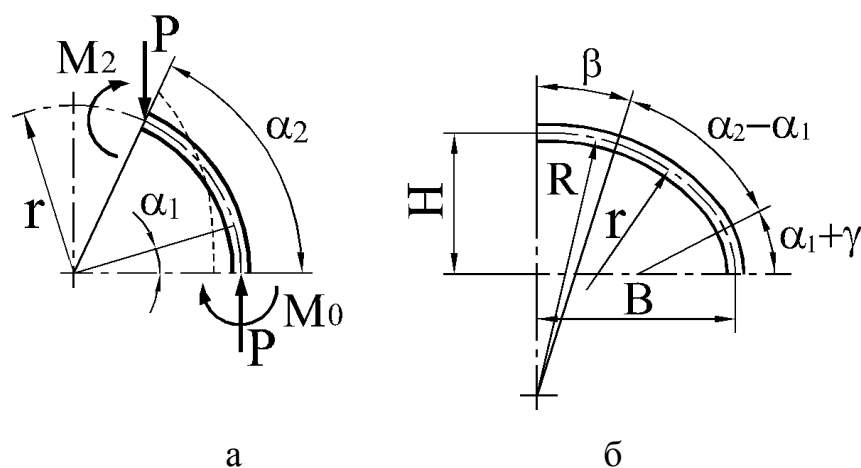


Рисунок 31 – Расчетная схема и эпюра изгибающего момента (пунктир)

Участок деформированной стенки с размерами  $R$  и  $\beta$  приобрел форму инструмента. С ним соседствует жесткий участок, сохранивший исходный радиус и длину  $r(\alpha_2 - \alpha_1)$ . К месту их стыковки приложена внешняя сила, ее сосредоточенный характер согласуется с данными конечно-элементного моделирования. Здесь наблюдается эффект пластического шарнира, свойственный поведению жесткопластического материала, при котором происходит скачкообразное изменение деформированного состояния. Исходный радиус  $r$  средней линии стенки при  $\alpha = \alpha_2$  принимает значение  $R$ , отсутствие переходных значений радиуса в окрестностях точки приложения сосредоточенной внешней силы необходимо для соблюдения условий статики.

### 5.1.1 Область свободного изгиба

Вышеназванный жесткий участок стенки граничит с пластической областью свободного изгиба, ограниченной на рисунке 31, а угловым размером  $\alpha_1$ . Изгиб с

одновременным сжатием силой  $P$  вызывает смещение  $c$  нейтральной поверхности деформаций. Соответствующее увеличение толщины стенки  $\Delta t$  обеспечивает статическое равновесие в пределах названной области, чему способствует сравнительно небольшое изменение эпюры момента  $M$ . Равенство нулю его производной  $dM/d\alpha$  при  $\alpha = 0$  (см. рисунок 31, а) исключает эффект пластического шарнира. Обозначим  $t = t_0 + \Delta t$  и выразим в цилиндрических координатах

$$\Delta t = - \int_{-0,5t_0-c}^{0,5t_0-c} \varepsilon_\alpha dy,$$

поскольку при  $\varepsilon_z = 0$  деформация по толщине стенки  $\varepsilon_\rho = -\varepsilon_\alpha$ . При этом  $\varepsilon_\alpha \approx y\Delta\xi$ , где  $\Delta\xi$  – изменение кривизны средней линии стенки,  $y$  – координата, отсчитываемая от нейтральной поверхности в сторону положительных деформаций  $\varepsilon_\alpha$ . Таким образом, интегральному выражению  $\Delta t$  идентична формула

$$\Delta t = ct_0\Delta\xi. \quad (87)$$

Величина вышеуказанного смещения  $c$  связана с силой  $P$  соотношением:  $P = 2c\sigma_\alpha$ . Пренебрегая радиальным и касательным напряжениями, выражаем  $\sigma_\alpha = 2\sigma_s/\sqrt{3}$ . В первом приближении  $M_0 = M_2 \approx \sigma_s t_0^2 / (2\sqrt{3})$ , при этом

$$P = (M_0 + M_2) / [r(1 - \cos \alpha_2)] \approx \sigma_s t_0^2 / (\sqrt{3}r), \quad (88)$$

откуда  $c = t_0^2 / (4r)$ . Дальнейшие расчеты показали правомерность пренебрежения величиной  $\cos \alpha_2$ . Альтернатива заключается в приближенном задании значения  $\alpha_2$  в числе исходных данных с последующей корректировкой и повторением расчета. Сходимость выходных данных в трех значащих цифрах обеспечивается за 2-3 итерации, при этом рассчитанное соотношение размеров средней линии  $H$  и  $B$  существенно не изменяется.

Применим известную формулу момента изгиба листа с одновременным действием продольной силы  $P$  [50], из которой получаем приближенную функцию момента, соответствующую эпюре на рисунке 31, а.

$$M = \frac{\sigma_s t^2}{2\sqrt{3}} \left[ 1 - \left( \frac{\sqrt{3}P}{2\sigma_s t_0} \right)^2 \right].$$

Она действительна лишь в пределах рассматриваемой области и является приближенной. Функция не учитывает небольшое уменьшение продольной составляющей силы и появление сдвигающей составляющей (также весьма малой) при углах  $\alpha$ , отличных от нуля. Ее несоответствие принятому выше выражению  $M_2$  не превышает нескольких процентов. Также невелика погрешность подстановки исходной толщины  $t_0$  стенки в отношении, заключенное в скобки, что упрощает выражение производной момента.

С учетом (88) 
$$\frac{dM}{d\Delta\xi} = \frac{\sigma_s t c t_0}{\sqrt{3}} \left[ 1 - \left( \frac{\sqrt{3}P}{2\sigma_s t_0} \right)^2 \right].$$

Поскольку  $M = M_0 - rP(1 - \cos \alpha)$  и  $\frac{dM}{d\alpha} = -rP \sin \alpha$ , получаем уравнение

$$\frac{d\Delta\xi}{d\alpha} \cdot \frac{\sigma_s (t_0 + c t_0 \Delta\xi) c t_0}{\sqrt{3}} = -rP \sin \alpha$$

и результат его интегрирования:

$$\sigma_s \left( \Delta\xi + \frac{c}{2} \Delta\xi^2 \right) c t_0^2 = \sqrt{3} r P \cos \alpha + C.$$

Принимаем величину  $\Delta\xi^2$  равной нулю и определяем произвольную постоянную  $C$ , исходя из заданного изменения кривизны  $\Delta\xi_0$  средней линии сечения при  $\alpha = 0$ . После подстановки выражений  $C$ , а также силы  $P$  и смещения  $c$  (88)

$$\Delta\xi = \Delta\xi_0 + \frac{4r}{t_0^2} (\cos \alpha - 1). \quad (89)$$

На границе пластического и жесткого участков  $\Delta\xi = 0$ , следовательно,

$$\alpha_1 = \arccos \left( 1 - \frac{\Delta\xi_0 t_0^2}{4r} \right). \quad (90)$$

### 5.1.2 Расчет размеров деформированного сечения

На рисунке 32 показана средняя линия  $\frac{1}{4}$  сечения трубы до и после деформирования, исходная длина ее  $0,5\pi r$  считается неизменной, кривая на участке свободного изгиба, адекватная уравнению (89) приближенно заменена дугой радиуса  $r_1$ .

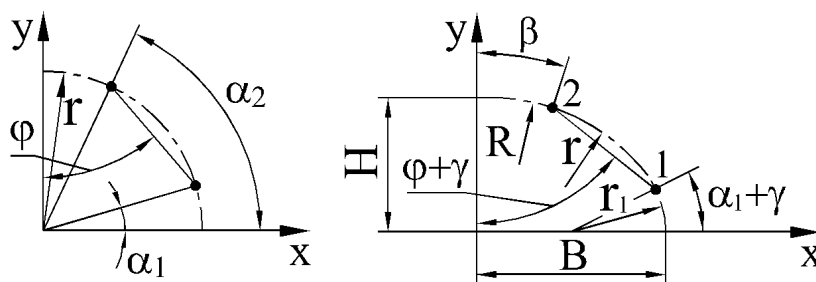


Рисунок 32 – Упрощенное представление эволюции средней линии

Абсцисса точки 2 определяется из условия  $r(0,5\pi - \alpha_2) = R\beta$ , при этом  $0,5\pi - \alpha_2 - \beta = \gamma$ . Для определения  $\gamma$  (угла поворота жесткого участка стенки трубы с крайними точками 1 и 2) интегрируем уравнение (90), приняв  $\Delta\xi \approx -\frac{d^2 u_r}{r^2 d\alpha}$ , где  $u_r$  – радиальное перемещение точек средней линии стенки в области свободного изгиба. Результат интегрирования

$$\left. \frac{du_r}{r d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} = -r\Delta\xi_0\alpha_1 + \frac{4r^2}{t_0^2} (\alpha_1 - \sin \alpha_1) = -\gamma.$$

По заданному  $\Delta\xi_0$  – приращению кривизны средней линии при  $\alpha = 0$  и найденному  $\gamma$  подсчитываем  $\beta = \gamma \left( \frac{R}{r} - 1 \right)$  и  $x_2 = R \sin \beta$ . Зная исходное положение границ жесткого участка стенки, т.е. углы  $\alpha_1$  (91) и  $\alpha_2 = 0,5\pi - \beta - \gamma$ , находим длину  $l$  и угол  $\varphi$  отрезка прямой, соединяющего крайние точки дуги  $r(\alpha_2 - \alpha_1)$ . Абсцисса точки 1:  $x_1 = x_2 + l \sin(\varphi + \gamma)$ ; размер  $B$  на рисунке 32 принимаем равным  $x_1 + r_1[1 - \cos(\alpha_1 + \gamma)]$ . Условно принятый радиус средней линии на участке свободного изгиба  $r_1 = r\alpha_1/(\alpha_1 + \gamma)$ .

Так же элементарно подсчитывается другой размер на рисунке 32

$$H = r_1 \sin(\alpha_1 + \gamma) + l \cos(\varphi + \gamma) + R(1 - \cos \beta),$$

а также ширина  $2B + t_0$  и высота  $2H + t_0$  овального сечения трубы. Результаты расчета размеров  $B$  и  $H$  иллюстрируют графики на рисунке 33.

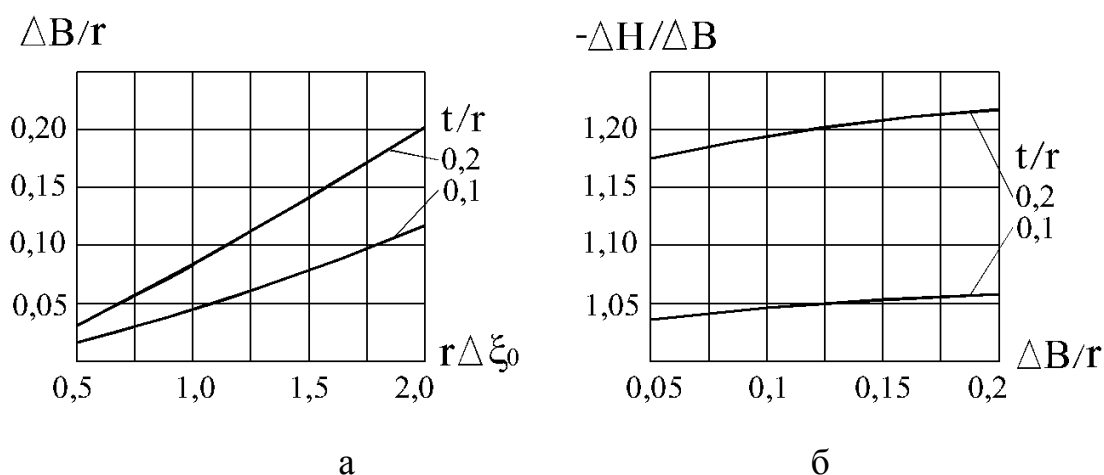


Рисунок 33 – Связь параметров деформируемого сечения трубы

Рисунок 33, а дает представление о соотношении исходной кривизны  $1/r$  средней линии сечения и ее приращения  $\Delta\xi_0$ . Специфика предлагаемого расчета состоит в том, что в составе исходных данных нельзя задать какой-либо из размеров  $B$  и  $H$  абсолютным значением или приращением. Если требуется рассчитать  $\Delta H$ , при котором достигается требуемое увеличение ширины, то необходимо задавать значение  $\Delta\xi_0$ , руководствуясь известной величиной  $\Delta B/r$  и графиками на рисунке 33, а. В результате расчета находим приращения  $\Delta H < 0$  и  $\Delta B > 0$ ; сравнив последнее с его требуемым значением, можно корректировать  $\Delta\xi_0$  и повторять расчет.

Графическое представление соотношений  $-\Delta H/\Delta B$  на рисунке 33, б отличается от их вариационной оценки (см. таблицу 2). Для начального момента деформирования отличие составляет 10 ...15%, а затем уменьшается. Основную погрешность в настоящий расчет вносят не принятые допущения, без которых в принципе можно обойтись, а жесткопластическая модель материала трубы. Жесткое состояние участка сечения и соответственно неизменная кривизна его

средней линии в диапазоне  $\alpha_2 \geq \alpha \geq \alpha_1$  (см. рисунок 32) приводит к завышению приращения ширины сечения.

В действительности названный участок подвергается свободному изгибу и получает знакопеременное изменение кривизны, преимущественно положительное. В начале деформирования сечения углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  близки к  $0^\circ$  и  $90^\circ$ , а эпюра момента, показанная на рисунке 31, переходит через ноль при  $60^\circ$ . Таким образом, диапазон положительного приращения кривизны больше в два раза, чем отрицательного. Следовательно, в диапазоне  $\alpha_2 \geq \alpha \geq \alpha_1$  среднее значение кривизны средней линии возрастает, а радиуса – уменьшается. При ее неизменной длине это вызовет уменьшение размера  $B$  и увеличение  $H$ , по сравнению с рассчитанными для жесткопластического материала.

Характер кривых на рисунке 33 мало изменяется при увеличении радиуса инструмента  $R$  до  $2d$ , однако слишком большое увеличение нежелательно. Методика расчета не учитывает возможность значительного отхода стенки трубы от инструмента в окрестностях  $\alpha = \pm 0,5\pi$ , который всегда наблюдается при использовании плит с плоской рабочей поверхностью. При этом небольшие участки стенки становятся вогнутыми и восстановление формы сечений на этапе гибки по копиру ухудшается.

### 5.1.3 Сравнение результатов расчета с данными эксперимента

На рисунке 34 показаны фотографии среза труб с исходными размерами:  $d = 32$  мм и  $t = 2,5$  мм, деформированных по высоте сечения различным инструментом.





а



б

Рисунок 34 – Сечения трубы, деформированной плоскими плитами (а) и инструментом с вогнутой рабочей поверхностью радиуса  $R = 60$  мм (б)

Плоские плиты образуют на стенке трубы вогнутые участки, поэтому в дальнейшем использовали, в основном, инструмент с вогнутой рабочей поверхностью, установленный на разрывную машину МР200, рисунок 35.

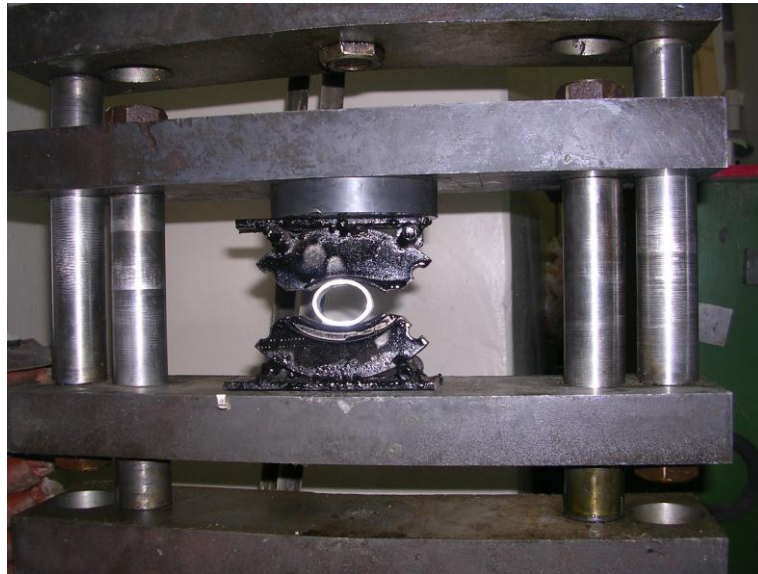


Рисунок 35 – Приспособление для испытаний на сжатие

Соотношение приращений  $-\Delta H/\Delta B$  ширины и высоты деформированного сечения трубы сравнивали с результатами расчета по методике, изложенной выше. На начальной стадии деформирования трубы из стали 20 диаметром 32 мм с толщиной стенки 2,5 мм  $-\Delta H/\Delta B = 1,136$ . Это же соотношение для трубы из сплава Д16 диаметром 30 мм с толщиной стенки 1,8 мм равно 1,066. Таким образом, экспериментальные данные практически совпадают с расчетными

согласно графикам на рисунке 33, б. По мере увеличения степени деформирования сечения появляется различие: для стальной трубы фактическое соотношение  $-\Delta H/\Delta V$  достигает 1,28, для алюминиевой 1,2; то и другое превышают расчетные значения. Очевидно, сказывается сжатие периметра сечения, которым пренебрегает методика расчета размеров  $V$  и  $H$ .

#### 5.1.4 Компенсация искажения сечения при гибке

Гибка труб выполнялась на лабораторной установке с ручным приводом поворота вала копира, рисунок 36.



Рисунок 36 – Лабораторная установка с изогнутой трубой

Радиус профиля копира и остальных инструментов установки 16 мм рассчитан на гибку труб диаметром 30...32 мм. Радиус обвода копира 105 мм ограничивает радиус изогнутой оси трубы относительной величиной  $R_0/d \approx 4$ . На

рисунке 37 показана изогнутая труба из стали 20 с исходными размерами:  $d = 32$  мм,  $t = 3$  мм.



Рисунок 37 – Образец трубы 32x3 мм из стали 20, изогнутый на лабораторной установке

Предварительное деформирование сечения не выполнялось. Уменьшение высоты поперечного сечения по биссектрисе угла, образованного прямыми концами трубы, из-за большой толщины стенки  $\sim 0,1$  среднего радиуса оказалось сравнительно малым – 1,55 мм. Поэтому изучение двухэтапного процесса деформирования проводилось на тонкостенных трубах из отожженного сплава Д16, диаметром 30 мм с толщиной стенки 1,8 мм. Изогнутый участок заготовки предварительно сжимали по высоте сечения вогнутым инструментом; степень сжатия варьировали в диапазоне 10... 20%. Некоторые результаты представлены в таблице 6.

Таблица 6 – Размеры сечения  $B \times H$  на этапах деформирования

Предварительное деформирование	Гибка по копиру	$\Theta = (B - H)/d$
–	32x26,2	0,193
32,3x27	31,8x26,95	0,16
34,1x25	30,85x27,65	0,107

На рисунке 38 представлены изогнутые трубы, соответствующие первой и третьей строкам таблицы, нижняя согнута без предварительного деформирования.



Рисунок 38 – Образцы трубы 30x1,8 мм из сплава Д16М, изогнутые на лабораторной установке

Данные таблицы свидетельствуют о том, что показатель итоговой некруглости сечения  $\Theta = (B - H)/d$  остается значительным, несмотря на предварительное придание изогнутым участкам обратной овальности. Это в большой степени объясняется применением копира и прочих деталей оснастки, предназначенных для труб большего диаметра. Тем не менее, итоговое значение  $\Theta$  удалось уменьшить примерно в два раза.

## 5.2 Утонение стенки трубы при гибке по копиру

Расчет изменения толщины стенки изогнутой трубы, изложенный в предыдущем разделе, отличается от традиционного метода вариационной оценки пластических деформаций. Вместо координатных функций перемещений, содержащих варьируемые параметры, принята линейная связь напряжений  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_z$  с неизвестным коэффициентом пропорциональности  $\nu_1$ . Благодаря такой постановке задачи учитывается вариация работа внешней силы, пренебрежение которой в расчетах процессов ОМД может вносить заметную погрешность.

Практическая значимость вариационной оценки деформаций намного возрастет в случае ее распространения на анизотропный материал. При растяжении образцов, вырезанных из труб, относительное изменение размеров ширины и высоты сечения может быть далеко не одинаковым, что безусловно влияет на утонение стенки изогнутой трубы.

### 5.2.1 Учет анизотропии материала

Простейшая модель анизотропии, применяемая к анализу напряженно-деформированного состояния трубы, называется цилиндрической [22]. Образцы для испытаний вырезают вдоль оси трубы, при этом отношение деформаций по толщине и ширине образца может быть больше или меньше единицы. В последнем случае изогнутая труба из анизотропного материала будет иметь меньшую разнотолщинность, чем в первом, при прочих равных условиях. Более сложная модель анизотропии учитывает данные испытаний образцов, ориентированных не только вдоль оси трубы, но и под различными углами к ней ( $45^\circ$  и  $90^\circ$ ). Такого рода данные, содержащиеся в работе [17], не всегда соответствуют цилиндрической модели анизотропии.

Следуя [32], применим в качестве показателя цилиндрической анизотропии коэффициент

$$\mu = \frac{\frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\rho}}{\frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\rho} + 1}. \quad (91)$$

В данном выражении  $\varepsilon_\rho$  и  $\varepsilon_\alpha$  означают деформации по толщине и ширине образца, вырезанного из трубы вдоль ее оси и подвергнутого испытанию на растяжение. Листовой материал с аналогичным показателем анизотропии называют трансверсально изотропным. В диапазоне значений  $\varepsilon_\alpha/\varepsilon_\rho$ , равном  $0,5 \dots 2$ , коэффициент  $\mu$  изменяется от  $0,33$  до  $0,66$ , при  $\varepsilon_\alpha/\varepsilon_\rho = 1$  имеем  $\mu = 0,5$  (изотропный

материал). Действительные пределы изменения  $\mu$  могут быть несколько больше – в зависимости от марки материала и относительной толщины листа или стенки трубы.

Из уравнений связи напряжений и деформаций в случае трансверсальной анизотропии [48]:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha - \sigma_\rho &= \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \left( \varepsilon_\alpha - \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_\rho \right); \\ \sigma_\rho - \sigma_z &= \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \left( \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_\rho - \varepsilon_z \right)\end{aligned}\quad (92)$$

при  $\sigma_\rho = 0$  следует

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_z} = \frac{\varepsilon_\rho \mu - \varepsilon_\alpha (1-\mu)}{\varepsilon_\rho \mu - \varepsilon_z (1-\mu)}.$$

Отсюда с учетом  $\sigma_\alpha = \nu_1 \sigma_z$ , а также условия не сжимаемости материала (3) и формулы деформации  $\varepsilon_z$  (6б) получаем

$$\varepsilon_\rho = \frac{-\rho \sin \alpha}{R} \cdot \frac{(1+\nu_1)(1-\mu)}{1-\nu_1 \mu}; \quad \varepsilon_\alpha = \frac{-\rho \sin \alpha}{R} \cdot \frac{\mu - \nu_1}{1-\nu_1 \mu}.\quad (93)$$

Интегрируя формулы деформаций по аналогии с п. 4.1.2, определяем перемещения

$$\begin{aligned}u_\rho &= \frac{(r^2 - \rho^2) \sin \alpha}{2R} \cdot \frac{(1+\nu_1)(1-\mu)}{1-\nu_1 \mu} - y \sin \alpha; \\ u_\alpha &= \frac{(r^2 - \rho^2) \cos \alpha}{2R} \cdot \frac{(1+\nu_1)(1-\mu)}{1-\nu_1 \mu} + \frac{\rho^2 \cos \alpha}{R} \cdot \frac{\mu - \nu_1}{1-\nu_1 \mu} - y \cos \alpha; \\ u_z &= \frac{\rho \sin \alpha}{R_0 z_1^m} \cdot \frac{z^{m+1}}{m+1}.\end{aligned}$$

Здесь  $m$  – обратная величина показателя  $n$  функции напряжения текучести (6);  $R$  – радиус оси переходного участка, изменяющийся в диапазоне  $0 \leq z \leq z_1$  от  $\infty$  до  $R_0$ .

Деформации сдвига определяем дифференцированием перемещений по формулам (34):

$$\begin{aligned}\gamma_{\rho\alpha} &= \frac{\rho}{R} \cdot \frac{v_1(\mu-2)+2\mu-1}{1-v_1\mu} \cos \alpha; \\ \gamma_{az} &= \frac{mz^{m-1}}{R_0 z_1^m} \left[ \frac{r^2 - \rho^2}{2} \cdot \frac{(1+v_1)(1-\mu)}{1-v_1\mu} + \rho^2 \frac{\mu-v_1}{1-v_1\mu} \right] \cos \alpha; \\ \gamma_{z\rho} &= \frac{mz^{m-1}}{R_0 z_1^m} \left[ \frac{r^2 - \rho^2}{2} \cdot \frac{(1+v_1)(1-\mu)}{1-v_1\mu} \right] \sin \alpha.\end{aligned}$$

## 5.2.2 Рассчитанное и фактическое утонение стенки

Поскольку относительная толщина стенки трубы  $t/d$  мало влияет на результаты решения, упрощаем формулы деформаций, принимая координату  $\rho$  равной ее среднему значению  $r$ . Соответственно изменяется и вариационное уравнение (70)

$$\int_0^{z_1} \int_0^{2\pi} r t \frac{\partial \Gamma^2}{\partial v_1} d\alpha dz + \frac{2\Gamma_c}{\tau_s} \frac{\partial W}{\partial v_1} = 0 \quad (94)$$

при трансверсальной анизотропии  $\Gamma^2 = 4 \left[ \varepsilon_\alpha^2 + 2\mu \varepsilon_\alpha \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 + \frac{1-\mu}{2} (\gamma_{\rho\alpha}^2 + \gamma_{az}^2 + \gamma_{z\rho}^2) \right]$ .

По аналогии с ходом решения задачи в подразделе 4.2 записываем

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial \Gamma^2}{\partial v_1} dV &= \frac{4\pi z_1 r^3 t}{(2m+1)R_0^2} \cdot \frac{\partial}{\partial v_1} \left[ \left( \frac{v_1 - \mu}{1 - v_1 \mu} \right)^2 + 2\mu \frac{v_1 - \mu}{1 - v_1 \mu} + 1 + \frac{1 - \mu}{2} \frac{(1 + 2v_1 - 2\mu - v_1 \mu)^2}{(1 - v_1 \mu)^2} \right] + \\ &+ \frac{2(1 - \mu)\pi m^2 r^5 t}{(2m - 1)R_0^2 z_1} \cdot \frac{\partial}{\partial v_1} \left( \frac{\mu - v_1}{1 - v_1 \mu} \right)^2.\end{aligned}$$

После дифференцирования

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial \Gamma^2}{\partial v_1} dV &= \frac{k_1}{(1 - v_1 \mu)^3} [v_1 (6 - 4\mu - 8\mu^2 + 6\mu^3) + 2 - 6\mu + 2\mu^2 + 6\mu^3 - 4\mu^4] + \\ &+ \frac{k_2}{(1 - v_1 \mu)^3} (v_1 - \mu)(1 - \mu - \mu^2 + \mu^3).\end{aligned}$$

Здесь  $k_1 = \frac{4\pi z_1 r^3 t}{(2m+1)R_0^2}$ ;  $k_2 = \frac{4\pi m^2 r^5 t}{(2m-1)R_0^2 z_1}$ .

Величина  $\Gamma_c$ , содержащаяся в уравнении (94):

$$\Gamma_c = \frac{1}{\sqrt{2\pi r t z_1}} \left\{ k_1 \left[ \left( \frac{v_1 - \mu}{1 - v_1 \mu} \right)^2 + 2\mu \frac{v_1 - \mu}{1 - v_1 \mu} + 1 + \frac{1 - \mu}{2} \cdot \frac{(1 + 2v_1 - 2\mu - v_1 \mu)^2}{(1 - v_1 \mu)^2} \right] + k_2 \frac{1 - \mu}{2} \left( \frac{\mu - v_1}{1 - v_1 \mu} \right)^2 \right\}.$$

Вычислительный этап представленного решения выполняется программой MathCAD на основе объектно-ориентированного подхода, изложенного в разделе 2. По найденному значению варьируемого параметра  $v_1$  рассчитывается отношение деформаций по толщине стенки и по длине материального волокна трубы

$$\frac{\varepsilon_\rho}{\varepsilon_z} = \frac{-(1 + v_1)(1 - \mu)}{1 - v_1 \mu}.$$

Его зависимость от показателя анизотропии  $\mu$  иллюстрирует рисунок 39.

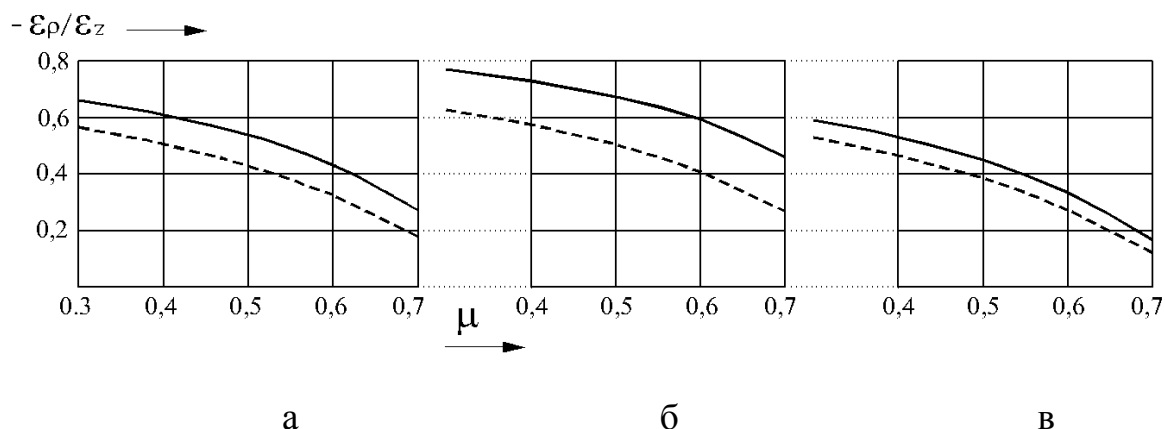


Рисунок 39 – Соотношение деформаций изгиба труб из стали 20 (а), сплава ВТ1-2 (б), стали 12Х18Н9Т (в) при  $z_1/r = 4$  и 8 (пунктир)

Графики на рисунке 39, в относятся также к сплавам на основе алюминия, характеризующимся таким же показателем  $n$  функции упрочнения (6), как и нержавеющей сталь 12Х18Н9Т. При  $\mu = 0,5$  (изотропный материал) рассчитанные отношения  $\varepsilon_\rho/\varepsilon_z$  близки к -0,5, как при одноосном растяжении образцов. Увеличение  $\mu$  приводит к уменьшению абсолютных значений деформаций по толщине стенки и соответственно ее утонения  $\Delta t$ . По графикам на рисунке 39 видно, что деформации  $\varepsilon_\rho$  слабо упрочняющихся материалов могут приближаться к нулю. Это означает увеличение другой поперечной деформации изгиба  $\varepsilon_\alpha$  – по



периметру сечения трубы. В меньшей степени это относится к трубам из интенсивно упрочняющихся материалов, например, сплавов титана, см. рисунок 39, б.

Результаты расчетов, представленные графиками на рисунке 39, содержат соотношения напряжений  $\sigma_\alpha/\sigma_z$ , отрицательные для слабо упрочняющейся стали 12Х18Н9Т (показатель степенной функции напряжения текучести  $n = 0,239$ ). Физический смысл этого факта состоит в том, что интенсивность перемещения  $u_\alpha$  по периметру сечения возрастает, по сравнению с чистым изгибом трубы при одноосном напряженном состоянии, и порождает напряжения  $\sigma_\alpha$  обратного знака по отношению к напряжениям  $\sigma_z$ . Только этим можно объяснить экспериментально установленное [6] соотношение деформаций  $\varepsilon_\alpha/\varepsilon_z$ , равное  $-0,7$  в зоне растяжения материального волокна трубы и  $-0,55$  в зоне сжатия.

Для интенсивно упрочняющегося сплава на основе титана ( $n = 0,1$ ) соотношения напряжений  $\sigma_\alpha/\sigma_z$  имеют различные знаки, но, в основном, положительны. Во всех случаях напряжения  $\sigma_z$  близки к напряжению текучести и составляют при  $n = 0,239$  от  $1,013 \sigma_s$  до  $0,813 \sigma_s$ . Заметим, что эти данные не учитывают влияние напряжений сдвига и радиального напряжения, что не вносит существенную погрешность при малой толщине стенки трубы и относительно большой длине участка свободного изгиба.

По найденному  $\nu_1$  рассчитываем минимальную радиальную деформацию

$$\varepsilon_{\rho \min} = \frac{-r}{R} \cdot \frac{(1 + \nu_1)(1 - \mu)}{1 - \nu_1 \mu}$$

и утонение стенки трубы  $\Delta t_{\min} = t_0 \varepsilon_{\rho \min}$ , которое должно укладываться в рамки, установленные техническими требованиями к трубопроводу. На величину  $\Delta t_{\min}$  влияет длина зоны свободного изгиба  $z_1$ , как это следует из рисунка 24. В свою очередь,  $z_1$  зависит от компоновки инструментов гибки, а именно – от параметра  $s$  установки обкатывающего ролика, показанного на рисунках 21 и 27. Увеличивая данный параметр и соответственно –  $z_1$  (см. рисунок 28), можно существенно уменьшить утонение в абсолютном выражении  $|\Delta t_{\min}|$ .

Увеличение длины участка свободного изгиба  $z_1$  ограничивается двумя факторами. Один из них – форма изогнутой трубы, при конструировании трубопровода ее задают без переходных участков с переменной кривизной оси. Фактическое наличие таких участков допускается “по умолчанию”, однако их чрезмерная длина существенно сокращает длину прямых участков, что может оказаться недопустимым.

Другое ограничение длины участка свободного изгиба  $z_1$  связано с искажением сечения трубы при гибке. Оно возрастает с увеличением  $z_1$ , что также нежелательно, несмотря на предлагаемую компенсацию названного искажения. Если по тем или иным соображениям планируется уменьшение длины переходных участков, необходимо учитывать возрастающую роль сдвигового компонента изогнутой оси и использовать ее полиномиальное представление из предыдущего раздела.

Фактическое утонение стенки трубы определяли косвенным путем – по изменению размеров ячеек сетки, нанесенной лазерным мини-маркером на наружную поверхность трубы, рисунок 40.

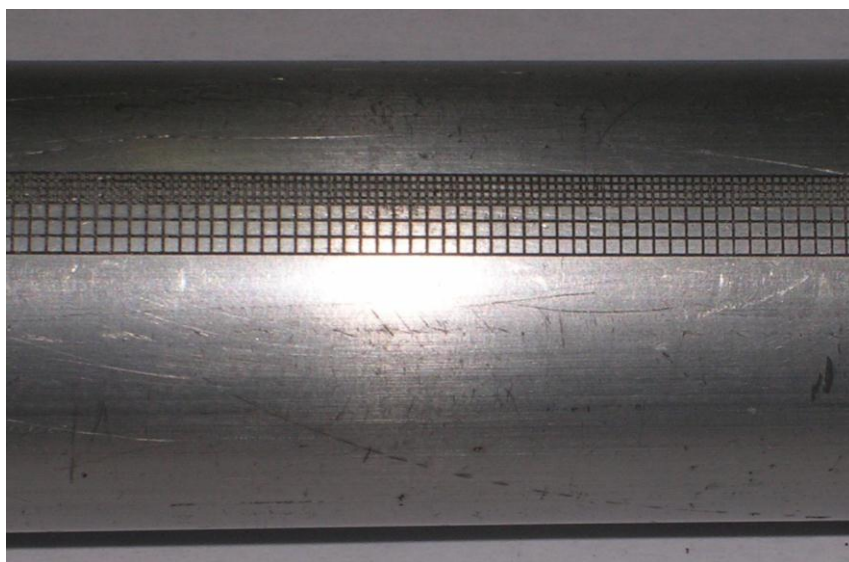


Рисунок 40 – Исходные размеры делительной сетки 1x1 мм и 0,5x0,5 мм

Размеры деформированной сетки измеряли на инструментальном микроскопе МЕТАМ ЛВ 31. Согласно результатам измерений отношения  $\varepsilon_r/\varepsilon_z$  близки к вариационной оценке при  $\mu = 0,3$  и  $z_1/r = 8$  (см. рисунок 39, в), отличие в

пределах 8%. Именно такое значение  $\mu$  показали испытания на растяжение образца, вырезанного из трубы и снабженного делительной сеткой. Перед испытаниями образцы выпрямляли и отжигали, размеры деформированной сетки измеряли на инструментальном микроскопе. Соотношение приращений ширины и длины ячеек, получивших максимальное удлинение, составило в среднем -0,33. Следовательно, соотношение деформаций по ширине и толщине образца  $\varepsilon_\alpha/\varepsilon_p = 0,5$ .

### 5.3 Совмещение предварительного деформирования сечения трубы с гибкой по копиру

Современные станки для гибки труб по круглому копиру оснащены числовым программным управлением. Команды управляющей программы задают осевые перемещения заготовки и вращательные перемещения копира либо устройства обкатывания – в зависимости от схемы гибки, см. рисунок 2. Заготовка перемещается в направляющих роликах, среди которых можно установить пару роликов с управляемым расстоянием между ними, которые будут придавать овальность сечению заготовки на участках, подлежащих изгибу. Это не намного усложнит конструкцию станка и программирование его работы, зато форма сечения трубы после гибки будет близка к круглой.

Другой вариант совмещения предварительного деформирования трубы с гибкой по копиру предусматривает сжатие ее сечения по ширине устройством обкатывания, рисунок 41 [51].

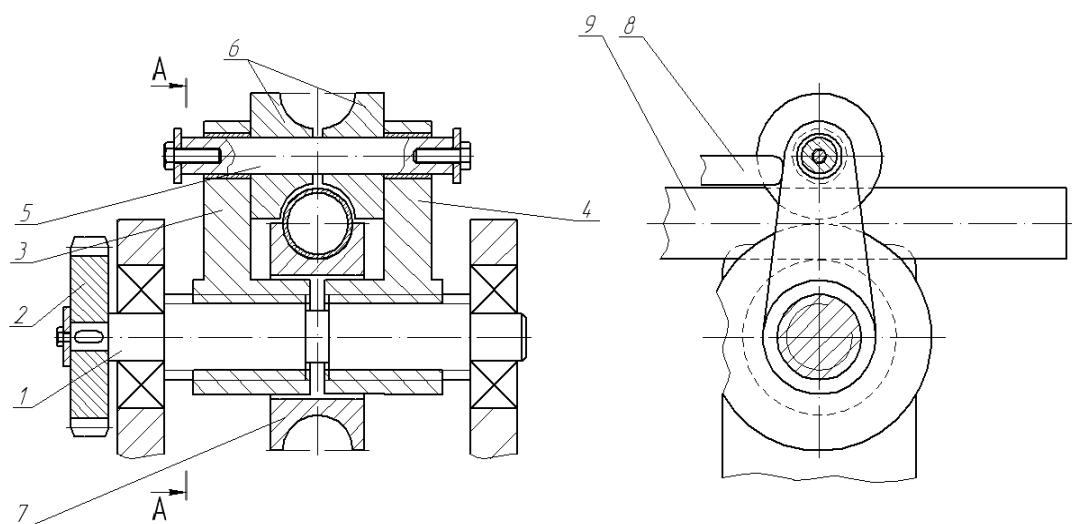


Рисунок 41 – Устройство для гибки труб

- |                        |                                  |
|------------------------|----------------------------------|
| 1. – приводной вал;    | 6. – части обкатывающего ролика; |
| 2. – шестерня привода; | 7. – вал;                        |
| 3,4. – кривошипы;      | 8. – упор;                       |
| 5. – палец;            | 9. – изгибаемая труба.           |

Данный способ особенно эффективен при большой длине изгибаемой заготовки при небольшом диаметре, когда затруднено применение вращающегося дорна или раскатника [52].

#### Выводы по разделу

1. Разработана упрощенная методика расчета деформирования прямой трубы плитами с вогнутой рабочей поверхностью для придания овальности, компенсирующей последующую эволюцию при изгибе по круглому копиру. Используется модель жесткопластического не упрочняемого материала, основанием для которой послужило выявленное ранее слабое влияние показателя упрочнения на соотношение размеров деформированного сечения. Приращения

высоты  $\Delta H$  и ширины  $\Delta B$   $\frac{1}{4}$  сечения образуются изгибом стенки трубы в окрестностях границ квадранта и жестким перемещением остального материала, длина средней линии стенки принята неизменной.

2. В месте приложения внешней сосредоточенной силы кривизна  $\xi$  средней линии сечения уменьшается и наличествует эффект пластического шарнира, его отсутствие в области  $\Delta \xi_{\max}$  объясняется утолщением стенки трубы при изгибе с продольным сжатием. Найденные соотношения  $-\Delta H/\Delta B$  начальной стадии деформирования завышены на 10 ... 15%, по сравнению с данными выполненных экспериментов, главным образом, из-за наделения части сечения трубы абсолютной жесткостью; по мере возрастания овальности сечения погрешность расчета снижается благодаря уменьшению размера жесткой области.

3. Расчет изменения толщины стенки при изгибе трубы по копиру основывается на решении вариационной задачи, полученном в предыдущем разделе. Рассчитанная радиальная деформация  $\varepsilon_r$  и утонение стенки в большой степени зависит от коэффициента  $\mu$  цилиндрической анизотропии материала: с увеличением  $\mu$  от 0,3 до 0,7 отношения  $-\varepsilon_r/\varepsilon_z$  уменьшаются примерно в три раза и для слабо упрочняющихся материалов приближаются к 0,2. В ходе этих расчетов получены отрицательные соотношения напряжений  $\sigma_\alpha/\sigma_z$ , при этом интенсивность перемещения  $u_\alpha$  по периметру сечения увеличивалась, по сравнению с чистым изгибом трубы в условиях одноосного напряженного состояния, а напряжение  $\sigma_z$  уменьшалось до 0,83 напряжения текучести.

4. Изменение толщины стенки изгибаемой трубы зависит от длины участка свободного изгиба  $z_1$  и уравнения его оси, содержащего показатель степенной функции упрочнения материала  $n$ : увеличение  $z_1$  от двух диаметров трубы до четырех сопровождается уменьшением разнотолщинности стенки до полутора раз для слабо упрочняющихся материалов ( $n > 0,2$ ) и до двух раз для труб из сплава титана ( $n = 0,1$ ); последние в наибольшей степени подвержены утонению стенки, тогда как трубы из нержавеющей стали 12X18H9T и сплавов алюминия – в наименьшей.

5. Разработанная методика расчета размеров сечения трубы прошла опытную проверку на трубах из стали 20 и дюралюминия Д16М, подвергаемых предварительному деформированию сечения инструментом с вогнутой рабочей поверхностью и последующему изгибу на лабораторной установке. Соотношение размеров сечения прямой трубы близко к расчетному на начальной стадии деформирования и в дальнейшем отличается от расчетного из-за уменьшения периметра средней линии, не учитываемого разработанной методикой. Придание прямой трубе обратной овальности позволило почти вдвое уменьшить итоговую некруглость сечения после изгиба.

6. Деформацию изогнутой трубы в направлении толщины стенки определяли измерением относительных удлинений ячеек сетки, нанесенной на наружную поверхность, аналогично определяли показатель анизотропии материала растяжением плоских образцов. Соотношение найденных деформаций по толщине стенки и длине материального волокна трубы в области его максимального растяжения  $\varepsilon_r/\varepsilon_z \approx -0,6$  согласуется с его вариационной оценкой.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с целью работы: получение изогнутых труб, отвечающих жестким ограничениям искажения проходного сечения и утонения стенки, предложено компенсировать искажение сечений трубы при гибке путем предварительного придания им обратной овальности, разработаны математические модели деформирования прямой трубы плитами и последующей гибки обкатыванием по копиру, а также методики инженерных расчетов деформаций, что в совокупности представляет решение научной задачи, имеющей важное значение для производства трубопроводов в машиностроении.

### Основные результаты и выводы

1. Сформулирована задача свободного деформирования сечения прямой трубы из упрочняемого материала, частично принимающего форму инструмента – плит с вогнутой рабочей поверхностью, дано ее решение в напряжениях, устанавливающее зависимость увеличения ширины сечения  $\Delta B$  от уменьшения высоты  $\Delta H$ . Параметры напряженного состояния стенки трубы связывали с изменением ее кривизны, статическая неопределенность преодолевалась условием нулевого суммарного изменения производной прогиба средней линии сечения.

2. Вариационная оценка соотношения размеров  $B$  и  $H$  сечения прямой трубы в начальной стадии деформирования плитами подтверждает достоверность результатов решения данной задачи в напряжениях и отличается от традиционного инженерного подхода к аппроксимации функций перемещений, дополнением кинематических ограничений выборочными статическими, что обеспечило сходимость решения, несмотря на малое число варьируемых параметров, равное двум.

3. Получена вариационная оценка изменения толщины стенки трубы из жесткопластического материала, изгибаемой по копиру при неизменной круглой форме сечения, с приравненным нулю радиальным напряжением  $\sigma_r$ ; в качестве варьируемого параметра принят коэффициент пропорциональности напряжений  $\sigma_\alpha$  и  $\sigma_z$ , что отличает данный подход от других приложений вариационного метода к расчетам пластических деформаций и позволяет адекватно учесть вариацию работы внешних сил.

4. Рассчитанное изменение толщины стенки изгибаемой трубы зависит от установки обкатывающего ролика, определяющей длину участка свободного изгиба  $z_1$ , и показателя степенной функции упрочнения материала  $n$ : увеличение  $z_1$  от двух диаметров трубы до четырех сопровождается уменьшением разнотолщинности стенки до полутора раз для слабо упрочняющихся материалов ( $n > 0,2$ ) и до двух раз для труб из сплава титана ( $n = 0,1$ ); последние в наибольшей степени подвержены утонению стенки, тогда как трубы из нержавеющей стали 12X18H9T и сплавов алюминия – в наименьшей.

5. Выполнено моделирование участка свободного изгиба заготовки при обкатывании по круглому копиру: прогибы оси, вызванные поворотом и сдвигом сечений, описываются различными полиномами, коэффициенты которых определяются из условий статического равновесия, справедливых для точек оси с окончательным значением радиуса и произвольно заданными – промежуточными. Названные прогибы и их производные связаны с размерами гибочного инструмента системой геометрических уравнений, из которой определяется параметр установки обкатывающего ролика.

6. Учет сдвига сечений на участке свободного изгиба позволил установить следующие факты:

- кривизна оси трубы изменяет знак на некотором расстоянии от обкатывающего ролика, возрастающем с уменьшением плеча внешней силы, вызывающей изгиб;



- переходный участок с переменным радиусом оси  $R$  имеет локальный контакт с копиром, после которого значения  $R$  продолжают уменьшаться, а сдвиги сечений изменяют направление.

7. На основе выполненного математического моделирования и полученных решений вариационных задач разработаны методики инженерных расчетов предварительного деформирования прямой трубы и последующей гибки по копиру. Рассчитанное изменение толщины стенки в большой степени зависит от коэффициента  $\mu$  цилиндрической анизотропии материала труб: с увеличением  $\mu$  от 0,3 до 0,7 отношения  $-\varepsilon_r/\varepsilon_z$  уменьшаются примерно в три раза и для слабо упрочняющихся материалов приближаются к 0,2 при длине участка свободного изгиба порядка двух диаметров трубы.

8. Разработанные методики расчета размеров сечения трубы и толщины стенки прошли опытную проверку на трубах из дюралюминия, изгибаемых на лабораторной установке с предварительным приданием овальной формы инструментом с вогнутой рабочей поверхностью. Размеры сечения трубы, предварительно обжатого по высоте, отличаются от рассчитанных ввиду уменьшения периметра средней линии, не учитываемого методикой расчета; отличие показателя овальности при большой степени деформирования достигает 20%. Придание прямой трубе обратной овальности позволило почти вдвое уменьшить итоговую некруглость сечения после изгиба.

Отклонение действительной минимальной толщины изогнутой трубы от рассчитанного значения, не превышающее 8%, объясняется проведением расчета без учета овализации сечения.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Марьин, Б.Н.** Изготовление трубопроводов гидрогазовых систем летательных аппаратов / Б.Н.Марьин, В.М.Сапожников, Ю.Л.Иванов и др. – М.: Машиностроение. - 1998. – 400 с.
2. **Лукьянов, В.П.** Штамповка, гибка деталей для сварных сосудов, аппаратов и котлов / В.П. Лукьянов, И.И. Маткава, В.А. Бойко. – М.: Машиностроение. – 2003. – 512 с.
3. **Никитин, В.А.** Проектирование станков холодной и горячей гибки труб / В.А. Никитин. – СПб.: ОАО «ЦТСС». – 2011. – 236 с.
4. **Гальперин, А.И.** Машины и оборудование для изготовления криволинейных участков трубопроводов / А.И. Гальперин. – М.: НЕДРА. – 1983. – 203 с.
5. **Марьин, Б.Н.** Гидрогазовые системы летательных аппаратов /Б.Н. Марьин, С.Б. Марьин, А. Г. Прохоров и др. Владивосток: Дальнаука. - 2006. - 459 с.
6. **Franz, W.-D.** Maschinelles Rohrbiegen. Verfahren und Maschinen / W.-D. Franz. – Düsseldorf: VDI-Verlag. – 1988. – 237 s.
7. **Алексеев, Ю.Н.** Вопросы пластического течения металлов / Ю.Н. Алексеев. – Изд-во Харьковского ун-та. 1958.
8. **Тарновский, И.Я.** Теория обработки металлов давлением (Вариационные методы расчета усилий и деформаций) / И.Я. Тарновский, А.А. Поздеев, О.А. Ганаго, В.Л. Колмогоров, В.Н. Трубин, Р.А. Вайсбурд, В.И. Тарновский; под ред. И.Я. Тарновского. – М.: Металлургиздат. – 1963. – 672 с.
9. **Колмогоров, В.Л.** Вариационные (энергетические) методы / в кн.: Теория пластических деформаций металлов / Е.П. Унксов, У. Джонсон, В.Л. Колмогоров и др.: Под ред. Е.П. Унксова, А.Г. Овчинникова. – М.: Машиностроение. 1983. – С. 212 – 279.

10. **Билобран, Б.С.** Сплющивание тонкостенных труб при холодном пластическом изгибе / Б.С. Билобран // Кузнечно-штамповочное производство. – 1968. – № 7. – С. 20 – 23.
11. **Феодосьев, В.И.** Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука. - 1986. – 512 с.
12. **Туркин, В.С.** Деформации металла труб в упругопластической стадии / В.С. Туркин. – М.: ВНИИСТ ГЛАВГАЗА СССР. – 1961. – 87 с.
13. **Лукьянов, В.П.** Параметры холодной гибки листовых заготовок, прутков и труб / В.П. Лукьянов, И.И. Маткава, В.А. Бойко, Д.В. Доценко. – М.: Машиностроение-1. – 2005. – 151 с.
14. **Билобран, Б.С.** Об изгибающем моменте и остаточной кривизне при пластическом изгибе труб / Б.С. Билобран // Кузнечно-штамповочное производство. – 1965. – № 8. – С. 18 – 21.
15. **Вдовин, С.И.** Расчет параметров оси трубы при изгибе поперечной силой / С.И. Вдовин // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. – 2010. – № 11. – С. 14 – 19.
16. **Билобран, Б.С.** Влияние сплющивания на основные параметры свободного пластического изгиба тонкостенных труб / Б.С. Билобран // Кузнечно-штамповочное производство. – 1969. – № 6. – С. 18 – 20.
17. **Мордасов, В.И.** Исследование анизотропии свойств в тонкостенных трубах из цветных сплавов / В.И. Мордасов // Теория и технология обработки металлов давлением. Межвузовский сборник. Вып. 71. – Куйбышев: КуАИ. – 1975. – С. 111 – 117.
18. **Kyriakides, S.** Plastic Anisotropy in Drawn Metal Tubes / S. Kyriakides and M.K. Yeh // Journal of Engineering for Industry. August 1988. Volume 110/303.
19. **Corona, E.** Yield anisotropy effects on buckling of circular tubes under bending / E. Corona, L.-H. Lee, S. Kyriakides / Int. J. Solids and Struct. – 2006. 43. №22 – 23, pp. 7099 – 7118.

20. **Kyriakides, S.** Wrinkling of Circular Tubes Under Axial Compression: Effect of Anisotropy / S. Kyriakides, F.C. Bardi and J.A. Paquette // Journal of Applied Mechanics. - March. - 2005. - Volume 72. Issue 2. pp. 301 – 305.

21. **Вдовин, С.И.** Деформации трубы при гибке моментом / С.И. Вдовин, В.Н. Михайлов, Н.В. Татарченков / Изв. ОрелГТУ. Серия “Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии”. – 2009. – №2/274 (560). Март – апрель. – С. 62 – 65.

22. **Яковлев, С.П.** Изотермическое деформирование высокопрочных анизотропных материалов / С.П. Яковлев, В.Н. Чудин, С.С. Яковлев, Я.А. Соболев. – М.: Машиностроение-1. Изд-во ТулГУ. – 2003. – 439 с.

23. **Мошнин, Е.Н.** Определение параметров процесса гибки труб с равнопрочными согнутыми участками / Е.Н.Мошнин, С.И. Янов // Кузнечно-штамповочное производство. – 1972. – №11. – С. 23 – 26.

24. **Мошнин, Е.Н.** Методика определения силовых параметров машин для гибки труб с осевым сжатием / Е.Н. Мошнин, С.И. Янов // Кузнечно-штамповочное производство. – 1975. – №12. – С. 15 – 17.

25. **Низкий, В.В.** Применение нагрева ТВЧ для крутой гибки труб / В.В. Низкий, В.И. Таран, Н.А. Быков, В.И. Миронов // ТРУДЫ НИКИМТ, том 6. – М.: Изд. АТ, 2003. – С. 53 – 58.

26. **Лысов, М.И.** Пластическое формообразование тонкостенных деталей авиатехники (теория и расчет) / М.И. Лысов, И.М. Закиров. – М.: Машиностроение. – 1983. – 174 с.

27. **Горбунов, М.Н.** Штамповка деталей из трубчатых заготовок / М.Н. Горбунов. – М.: Машгиз. – 1960. – 170 с.

28. **Мосин, Ф.В.** Технология изготовления деталей из труб / Ф.В. Мосин. – М. – Л.: Машгиз. – 1962. – 172 с.

29. **Вдовин, С.И.** Теория и расчеты гибки труб / С.И. Вдовин. – М.: «Машиностроение». Орел: ОрелГТУ. - 2009. – 96 с.

30. **Pan, K.** On the Plastic Deformation of a Tube During Bending / K. Pan, K.A. Stelson // Journal of Engineering for Industry. – November, 1995. – Vol. 117. Issue 4. P. 494 – 500.

31. **Lazarescu, L.** Spring-back Prediction of Bent Tubes using Artificial Neural Network / L. Lazarescu, Gh. Achimas, S. Grosav / MicroCAD 2004, International Scientific Conference, Section J: Production Engineering and Manufacturing Systems. Miskolc, Hungary, ISBN 963 661 618 3 (2004).

32. **Zhan, M.** A study of a 3D FE simulation method of the NC bending process of thin-walled tube / M. Zhan, H. Yang, Z.O. Jiang, Z.S. Zhao, Y. Lin / Journal of Materials Processing Technology. 129. – pp. 273-276 (2002).

33. **Gu, R.** Thin-walled aluminium alloy tube NC precision bending based of finite element simulation / R. Gu, H. Yang, M. Zhan, L. Heng // Trans. Nonferrous Metals Soc. China. – 2006.16. Spec. Issue 3. – pp. 1251 – 1256.

34. **Hokook, L.** Finite element bending analysis of oval tubes using rotary draw bender for hydroforming applications / Lee Hokook, C.J. Van Tyne, D. Field // J. Mater. Process. Technol. – 2005. 168, №2. – pp. 327 – 335.

35. **Yang, H.** Explicit FE wrinkling simulation and method to catch critical bifurcation point in tube bending process / H. Yang, L. Heng, M. Zhan, R. Gu // Trans. Nonferrous Metals Soc. China. 2006.16, Spec. Issue 3, pp. 1242 – 1246.

36. **Буч, Г.** Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений. Третье издание / Г.Буч, Р.А.Максимчук, М.У.Энгл, Б.Дж.Янг, Дж.Коналлен, К.А.Хьюстон. Издательский дом "Вильямс". М. – СПб – Киев. - 2008. – 715 с.

37. **Hauch, S.** Bending Moment Capacity of Pipes / S. Hauch and Y. Bai // Offshore Mechanical and Arctic Engineering. - July 11-16. - 1999.

38. **Dyau, J. Y.** On the Response of Elastic-Plastic Tubes Under Combined Bending and Tension / J.Y. Dyau and S. Kyriakides // Offshore Mechanical and Arctic Engineering. February 1992. Volume 114, Issue 1, pp. 50 – 62.

39. **Corona, E.** and Kyriakides, S. (1988), On the Collapse of Inelastic Tubes under Combined Bending and Pressure / E. Corona and S. Kyriakides // International Journal Solids Structures. - 1988. Vol. 24 No. 5. pp. 505 – 535.

40. **Bai, Y.,** / Y. Bai, R. Igland and T. Moan // Tube Collapse under Combined Pressure, Tension and Bending. – International Journal of Offshore and Polar Engineering. - 1993. Vol. 3(2), pp. 121 – 129.

41. **Bai, Y.,** / Y. Bai, R. Igland and T. Moan // Tube Collapse under Combined Pressure, Tension and Bending. – Journal of Marine Structures. – 1997. - Vol. 10. - № 5. pp. 389 – 410.

42. **Haagsma, S. C.** Collapse Resistance of Submarine Lines Studied / S. C. Haagsma, D. Schaap // Oil & Gas Journal. – February. - 1981.

43. **Зайков, М.А.** Силовые параметры сплющивания труб / М.А. Зайков, В.П. Лукьянов, А.И. Зубков // Кузнечно-штамповочное производство. – 1969. – №5.

44. **Cherouat, A.** Virtual metal forming with damage occurrence using adaptive remeshing / A. Cherouat, K. Saanouni, H. Borouchaki and P. Laug, // International journal of forming processes. – 2005. - vol. 8. - № 2-3. pp. 289 – 311.

45. **Giraud-Moreau, L.** Adaptive remeshing method based on refinement and coarsening techniques / L. Giraud-Moreau, H. Borouchaki and A. Cherouat // Proc. 10th ESAFORM Conference on Material Forming, Espagne. - 2007.

46. **Гун, Г.Я.** Теоретические основы обработки металлов давлением / Г.Я. Гун. – М.: Металлургия. – 1980. – 456 с.

47. **Васидзу, К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир. – 1987. – 542 с.

48. **Арышенский, Ю.М.** Теория и расчеты пластического формоизменения анизотропных материалов: учебное пособие / Ю.М. Арышенский, Ф.В. Гречников. – М.: Металлургия. – 1990. – 304 с.

49. **Непершин, Р.И.** Изгиб тонкой полосы круговым инструментом / Р.И.Непершин // Механика твердого тела. – 2007. – № 4. – С. 83 – 99.

50. **Попов, Е.А.** /Основы теории листовой штамповки / Е.А. Попов. – М.: Машиностроение. – 1968. – 283с.

51. **Вдовин, С.И., Мальцев, Д.Н.** Устройство для гибки труб / С. И. Вдовин, Д. Н. Мальцев // Патент 2009103523. – 2012. № 2406584.

52. **Козлов, А.В.** / Напряженное состояние в трубе при ее гибке с раскатыванием  $n$  парами близко расположенных деформирующих элементов / А.В. Козлов, В.Г. Шеркунов, Я.М. Хилькевич // Вестник машиностроения. – 2009. – С. 67 – 69.