На правах рукописи

Лобанова Наталья Ивановна

ИЗУЧЕНИЕ СТАРШЕКЛАССНИКАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ЦЕЛОСТНОЙ КАРТИНЫ МИРА

Научная специальность 5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания
(математика)
(педагогические науки)

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата педагогических наук

Научный руководитель:
доктор педагогических наук, доцент
Яремко Наталия Николаевна

Пенза – 2023

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Реализация государственной политики РФ в сфере общего и дополнительного образования (ДО) регламентируется рядом основополагающих документов. В Федеральном Законе об образовании говорится о том, что «образовательные организации могут использовать методические материалы, разработанные для углублённого изучения учебных предметов, обеспечивающие достижение требований к образовательным результатам в соответствии с обновлённым ФГОС СОО»[137]. В обновлённых ФГОС СОО среди требований к предметным результатам освоения углублённого курса математики указаны умения старшеклассников «использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных задачах, для определения скорости и ускорения»; умения «находить площади и объёмы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений» [136]. Концепция развития дополнительного образования детей до 2030 года утверждает необходимость включения в основные программы ДО компонентов, обеспечивающих «формирование навыков, связанных с интеллектуальным развитием человека», «формированием механизмов преемственности и непрерывности образовательных траекторий в общем, дополнительном образовании, среднем и высшем образовании» [72]. В этом же документе ставится задача «обновления содержания, технологий и форматов дополнительного образования детей для удовлетворения индивидуальных запросов, для интеллектуального совершенствования детей» [72]. В целевой модели развития региональных систем дополнительного образования детей, утверждённой приказом Министерства просвещения РФ 3.09.2019г., обязательной для всех учреждений ДО, говорится, что целью ДО является «создание условий для воспитания гармонично развитой личности, развития талантов и способностей детей и молодёжи» [119]. В этом же документе ставится задача «охвата системой дополнительного образования до 80% от общего числа детей от 5 до 18 лет» [119]. Изучение дифференциальных уравнений (ДУ) в общем образовании и в системе

ДО находится в русле целевых установок основных образовательных документов, т.к. служит для удовлетворения интеллектуальных потребностей индивида, даёт возможность расширения кругозора в соответствии с индивидуальными запросами и интересами каждого человека, а также позволяет реализовать возможность дальнейшего непрерывного образования.

Таким образом, можно констатировать, что изучение элементарных дифференциальных уравнений как в общем образовании, так и в системе дополнительного образования, соответствует требованиям регламентирующих образовательных документов. Поэтому целесообразность изучения элементарных дифференциальных уравнений, отдельных приёмов и методов математического моделирования на основе ДУ, как в стенах школы, так и вне её, в рамках дополнительного образования, обусловлена перечисленными выше фактами. Выбор вида образования в пользу ДО обусловлен возможностью реализации междисциплинарной направленности изучения ДУ вследствие широкого предметного разнообразия программ дополнительного образования.

Известно, что дифференциальные уравнения, выполняя роль наиболее общего языка в описания законов природы, играют важную роль в создании целостной картины мира (ЦКМ), формирование которой определено во ФГОС СОО. Отсюда, одним из значимых аргументов в пользу изучения старшеклассниками ДУ являются требования к освоению предметных результатов, сформулированные во ФГОС СОО: образовательные результаты по учебным предметам «физика», «химия», «биология», «астрономия», «математика» должны обеспечивать сформированность представлений о роли и месте этих предметов в современной научной картине мира старшеклассника; межпредметные понятия из этих областей «позволяют связывать знания из различных учебных предметов, учебных курсов (в том числе внеурочной деятельности), учебных модулей в целостную научную картину мира» [136]. Формирование современной естественнонаучной картины мира складывается из предметных составляющих, но именно математика, как единый язык науки, вносит наибольший вклад. Интегрированные уроки: химия/математика, биология/математика, физика/математика с использованием дифференциальных уравнений, - становятся широко распространенной практикой обучения. Можно говорить о «физической» «химической», «биологической» и т.д. составляющих, т.е. о предметных составляющих естественнонаучной картины мира. Представления о целостности окружающего мира в значительной степени усиливаются при изучении дифференциальных уравнений, описывающих наиболее общие его законы.

Исключительная роль ДУ в описании целостной картины мира убедительно подтверждается высказыванием их первооткрывателя И. Ньютона: «Законы природы выражаются дифференциальными уравнениями» [11]. Эта же мысль высказана Б.В. Гнеденко: «дифференциальные уравнения играют роль одного из основных методов математического исследования явлений природы» [30].

Наиболее адекватным инструментом в формализации процессов реального мира являются методы и средства математического моделирования, в том числе дифференциальные уравнения, поскольку позволяют демонстрировать взаимосвязи не только самих величин, но и скорость их изменения, описывать качественный характер таких изменений - рост, развитие, деградацию, исчезновение; выявить тренды, критические точки развития. Использование дифференциальных уравнений способствует обогащению и уточнению представлений старшеклассников о процессах и явлениях окружающего мира, позволяет сформировать научные целостные представления и знания старшеклассников о живой и неживой природе.

Целостность картины мира, которая описывается дифференциальными уравнениями, следует из того, что одно дифференциальное уравнение может служить математической моделью целого ряда систем реального мира, имеющих тождественную структуру, но относящихся к различным предметным областям. Такое свойство «систем реального мира носит название системного изоморфизма» [7], [8], [151].

Осознание факта о единстве и взаимосвязанности всех компонентов окружающей действительности, о системном изоморфизме на основе изучения

ДУ может служить опорой для развития представлений старшеклассников о целостности окружающего мира.

ЦКМ формируется на основе знаний о наиболее общих законах окружающего мира. Многие из них не являются содержанием основных образовательных программ общего среднего образования, поэтому для наиболее полноценного использования ДУ в формировании целостной картины мира старшеклассника необходимо привлекать возможности ДО с целью создания отдельного курса ДУ, ориентированного на формирование ЦКМ старшеклассника.

В связи с этим актуальной становится разработка и внедрение в образовательную практику дополнительного образования курса дифференциальных уравнений с целью формирования у старшеклассников целостной картины мира.

Состояние разработанности проблемы. ЦКМ – целостная картина мира – многоаспектное понятие, оно имеет различное толкование в естественнонаучной, философской, психологической, культурологической, исторической и многих других областях знаний. Для педагогической науки формирование естественнонаучной картины мира представляет научную проблему, различные аспекты которой рассмотрены в ряде исследований. Формированию у младших школьников «первоначальной системы знаний о природе» [22] посвящена докторская диссертация Л.И. Буровой, развитие представлений старшеклассников «о геометрической составляющей современной естественнонаучной картины мира» рассматривается в работах Е.А. Ермак [51]. Методика формирования «основ биологической картины мира посредством обобщения при обучении учащихся 9-х классов» разрабатывалась в исследованиях Н.Г. Семеновой [125]. В качестве предмета исследований выступали «средства формирования целостной картины мира у старших дошкольников в театрализованной деятельности»[95] (С.М. Максимова) и «более обобщённо - у ребёнка на начальной ступени обучения в педагогической системе К.Д. Ушинского» [97] (Н.Г. Медведева).

Однако, можно констатировать, что в полной мере проблема изучения ДУ в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ старшеклассника ранее не рассматривалась в научно - методических исследованиях.

Проблеме организации дополнительного образования старшеклассников посвящены работы ряда исследователей (В.В. Абрауховой, А.Г. Асмолова, М.Н. Филатовой, В.А. Березиной, А.А. Колчина и др.), эти исследования затрагивают лишь педагогическую сторону названной проблемы, методические аспекты изучения старшеклассниками ДУ в дополнительном образовании названными авторами не рассматривались.

Изучение теории ДУ в высшем образовании и популяризация элементов этой теории для старшеклассников отражены в работах многих учёных-математиков и учёных-методистов, в их числе работы А. Н. Колмогорова, А. И. Маркушевича, Н. Я. Виленкина, В.И. Арнольда, Р.М. Асланова, И.И. Баврина, А.В.Боровских, А.Б.Муравника, Г.Ю.Ризниченко, Л.И.Родиной и других. Диссертационные исследования А.С. Безручко, А.Г. Савиной, и др. направлены на решение отдельных проблем методики обучения ДУ в вузе. В кандидатских диссертациях К. М. Сураганова (1975) рассматриваются вопросы обучения ДУ в школе и Г.Е. Полехиной (1996) «ДУ как завершающий этап развития методической линии уравнений в школе» [117], З.С.Гребневой, - обучение математике, в том числе и решению ДУ, одарённых старшеклассников. Все названные исследования сыграли несомненную положительную роль в обучении дифференциальным уравнениям, но среди перечисленных авторов нет тех, кто занимался бы методикой изучения ДУ с целью формирования ЦКМ старшеклассника.

После проведённого анализа нормативных документов, регламентирующих работу организаций в сфере общего и дополнительного образования РФ, результатов психолого-педагогических исследований в области формирования целостной картины мира старшеклассника, научно-методических разработок и практического опыта обучения старшеклассников дифференциальным уравнениям на основе метода математического моделирования в школе и вне её мы выявляем ряд ***противоречий.***

На социально-педагогическом уровне: между регламентированным нормативным содержанием общего математического образования и широкими возможностями выбора отдельным индивидом дополнительных образовательных программ разнообразного содержательного спектра, которые представляет система дополнительного образования в соответствии с личными запросами, интересами, склонностями, а также с возможностью реализации непрерывного образования на следующем уровне.

На обще-методическом уровне: между широким многообразием практико-ориентированных задач в отдельных предметных областях (физика, экономика, биология, химия, экология, астрономия), решаемых средствами дифференциальных уравнений, и крайней недостаточностью методических разработок единого подхода, основанного на математическом моделировании изоморфных систем реального мира с целью формирования целостной картины мира.

На частно-методическом уровне: между разнообразием, разрозненностью, неупорядоченностью математического содержания, неограниченными дидактическими возможностями пакетов программ компьютерной алгебры, IT - решателей для дифференциальных уравнений и необходимостью целенаправленного отбора такого содержания и средств, а также недостаточной разработанностью методик их использования с целью формирования целостной картины мира старшеклассника на основе дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования.

Необходимостью разрешения сформулированных выше противоречий обусловлена ***актуальность*** темы исследования «Изучение старшеклассниками дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования как средство формирования целостной картины мира».

***Проблема исследования*:** какова должна быть методика изучения дифференциальных уравнений старшеклассниками в системе дополнительного образования, дающая устойчивые результаты в плане формирования целостной картины мира?

Объект исследования – процесс изучения старшеклассниками углублённых математических курсов в системе дополнительного образования.

Предмет исследования – процесс изучения старшеклассниками дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования целостной картины мира.

Цель исследования состоит в теоретическом обосновании, конструировании и реализации курса дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования, направленного на формирование целостной картины мира старшеклассника.

Гипотеза исследования. Методика изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования на основе практико-ориентированного подхода будет способствовать полноценному формированию целостной картины мира старшеклассника, если

- целостная картина мира (ЦКМ) старшеклассника, построенная на основе дифференциальных уравнений (ДУ), будет рассматриваться как результат отражения в его сознании знаний, умений, ценностных установок реальных процессов, явлений, состояний окружающего мира, подчинённых наиболее общим закономерностям, исследуемых методом математического моделирования изоморфных систем на основе ДУ;

- в качестве методологической основы освоения старшеклассниками знаний и умений при изучении дифференциальных уравнений в свете формирования целостной картины мира будет выступать практико-ориентированный подход, а основным инструментом - метод математического моделирования наиболее общих законов реального мира: естественного роста, логистическом, законе взаимодействия противоборствующих видов, законе колебаний, взрывного роста;

- отбор и структурирование содержания изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования старшеклассников будет осуществляться на основе системного изоморфизма, а выбор средств изучения определяться стремлением вовлечь обучающихся в активную творческую деятельность с применением компьютерных средств обучения, IT-решателей ДУ, понятийных карт, исследовательских проектов, которая приведёт к изменениям в личностной сфере старшеклассника;

- диагностика сформированности ЦКМ будет осуществляться в соответствии с критериями, позволяющими определить её уровни адекватно полученным знаниям, освоенным навыкам активной творческой деятельности, изменениям в эмоционально-ценностной и личностной сфере в виде приобретённых ориентаций, установок, убеждений, отношения, оценки и осознания своего места в мире.

Для достижения поставленной цели, а также в соответствии с объектом, предметом, гипотезой выдвинуты следующие ***задачи исследования***.

1. Провести анализ нормативных документов общего и дополнительного образования в РФ, результатов психолого-педагогических исследований, практического опыта обучения школьников дифференциальным уравнениям и на основе этого анализа, в соответствии с познавательными интересами старшеклассников, обосновать целесообразность разработки курса дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования у них целостной картины мира.
2. Выявить методологическую основу формирования у обучающихся знаний, умений, ценностных установок и убеждений при изучении дифференциальных уравнений в свете формирования целостной картины мира.
3. Раскрыть сущность метода математического моделирования средствами аппарата дифференциальных уравнений, выражающих наиболее общие законы окружающего мира, и показать его роль в формировании целостной картины мира старшеклассника.
4. Осуществить целенаправленный отбор математического содержания и обосновать выбор средств изучения курса ДУ в системе дополнительного

образования с целью формирования целостной картины мира старшеклассников.

5. Разработать систематизированный набор понятийных карт, перечень и набор практико-ориентированных задач и рекомендации к изучению курса ДУ в системе дополнительного образования на основе практико-ориентированного подхода с целью формирования целостной картины мира старшеклассника.
6. Экспериментальным путём проверить результативность разработанной методики изучения ДУ в системе дополнительного образования с целью формирования целостной картины мира старшеклассников.

Теоретико-методологическую основу исследования составляют:

- регламентирующие установки нормативных правовых документов об образовании в Российской Федерации: закон «Об образовании в РФ», Концепция развития дополнительного образования детей до 2030 года, ФГОС СОО, Приказ Мин.прос.РФ от 03.09.2019 № 467 «Об утверждении Целевой модели развития региональных систем ДО детей»;

- теория деятельности и её применение к процессу обучения (П.Я. Гальперин, В.В. Давыдов, О.Б. Епишева, А.В. Леонтьев и др.);

- исследования в области применения практико-ориентированного подхода и реализации прикладной направленности математики в обучении (В.Блюм, М.В. Егупова, Ю.М. Колягин, А.Г. Мордкович, Н.А. Терешин, В.В. Фирсов, Л.М. Фридман и др.);

- фундаментальные исследования по проблемам информатизации образования и применения IT - средств в образовании (Л.Л.Босова, С. Г. Григорьев, В. В. Гриншкун, О.А. Козлов, А. Ю. Кравцова, А. А. Кузнецов, И. В. Роберт, Н. И. Рыжова, Е. С. Полат, Е. К. Хеннер, Т.Ш.Шихнабиева и др.);

- работы по методике обучения теории дифференциальных уравнений (А. Н. Колмогоров, А. И. Маркушевич, Н. Я. Виленкин, В.И. Арнольд, Р.М. Асланов, И.И. Баврин, А.В. Боровских, Л.И. Родина и др.);

- работы, посвящённые методическим аспектам применения метода математического моделирования (В.И. Арнольд, М.В. Егупова, В.С. Абатурова, В.А. Далингер, И.Г. Обойщикова, В.А. Штофф и др.);

- исследования по организации обучения школьников в системе дополнительного образования (Н.В. Аммосова, Е.Б. Евладова, В.Н. Иванченко, Л.Г. Логинова, Е.М. Штерингарц, и др.);

- методические аспекты использования задач при обучении математике (В.Г. Болтянский, Ю.М.Колягин, Г.В. Дорофеев, Г.И. Саранцев, И.Ф. Шарыгин и др.).

Цель, гипотеза и задачи обусловили выбор совокупности ***теоретических, эмпирических, статистических методов*** исследования.

Теоретические методы: сравнительный анализ научной, педагогической, учебно-методической литературы, направленный на определение содержания и логики исследования, нормативной документации по обучению математике в общем среднем образовании, в системе дополнительного образования; конкретизация положений практико-ориентированного обучения и метода математического моделирования к обучению старшеклассников дифференциальным уравнениям, моделирование процесса обучения старшеклассников в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ.

Эмпирические методы: педагогическое наблюдение, беседы, анкетирование, интервьюирование, изучение и обобщение практики и опыта работы учителей математики средней школы и педагогов дополнительного образования, анализ собственного опыта преподавания, экспериментальная проверка разработанной методики изучения ДУ, диагностика состояния знаний учащихся и сформированности ЦКМ с помощью контрольных работ и тестов.

Статистические методы: статистическая обработка результатов исследования, критерий Стьюдента для малых групп, хи-квадрат Пирсона для оценки однородности/неоднородности экспериментальной и контрольной групп.

Этапы исследования. Диссертационное исследование осуществлялось в три этапа. В течение *первого этапа* (2016 –2020 гг.) были проведены анализ нормативных образовательных документов, оценка и обобщение существовавшего на тот момент опыта изучения дифференциальных уравнений школьниками в рамках факультативных и углубленных курсов математики, выбор организационных форм, методов и средств проведения занятий, конструирование отдельных элементов теоретической модели формирования целостной картины мира старшеклассников; проведен констатирующий этап опытной проверки результативности конструируемой методики. На *втором этапе* (2020–2022 гг.) обоснована продуктивность использования в обучении идеи об изоморфизме систем окружающего мира с целью формирования целостной картины мира старшеклассников, проведен отбор математического содержания курса дифференциальных уравнений, осуществлена проверка результативности методики на малой группе обучающихся, сформирована модель процесса обучения, проведены формирующий и контролирующий этапы экспериментальной проверки. *На третьем этапе* исследования (2022–2023 гг.) обобщены полученные экспериментальные данные, оформлены материалы диссертации и автореферата, выводы по главам и параграфам диссертационной работы, список литературы и приложения к диссертационному исследованию.

Наиболее существенные результаты, полученные лично соискателем, и их научная новизна.

1. С опорой на анализ нормативных документов и социального заказа к ДО, в соответствии с познавательными интересами старшеклассников обоснована целесообразность разработки курса дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования, ориентированного на формирование у них целостной картины мира.

2. Согласно положениям практико-ориентированного подхода, как методологической основы формирования ЦКМ при изучении дифференциальных уравнений, и в соответствии с сущностью метода математического моделирования сформулированы методические требования к построению курса

ДУ с целью формирования целостной картины мира старшеклассников, отличающие этот курс от традиционного:

а) отбор и структурирование математического содержания и его приложений в строгом соответствии с целью обучения - формированием ЦКМ старшеклассника- и изоморфизмом систем реального мира; к изучению берутся дифференциальные уравнения, которые являются формой выражения наиболее общих законов, свидетельствующих о целостности и единстве окружающего мира;

б) преимущественное использование IT-средств, систем компьютерной алгебры, визуализации при нахождении аналитических и численных решений ДУ;

в) реализация активных форм обучения, обеспечивающих изменения в личностной сфере старшеклассника, обуславливающих осознание старшеклассником своего места и роли в окружающем мире;

г) осуществление возможности непрерывного образования: конструируемый курс ДУ может служить пропедевтической основой для продолжения образования на следующем уровне.

3. Для реализации практико-ориентированного подхода предложена модель изучения ДУ в системе дополнительного образования с целью формирования целостной картины мира старшеклассников в составе целевого, методологического, содержательно-организационного и диагностического блоков.

4. Сформулированы методические требования к конструированию понятийных карт, отражающие необходимость строгого целенаправленного отбора математического содержания и их систематизации в соответствии со спецификой описанного в каждой карте закона.

5. Составлен систематизированный набор понятийных карт, каждая из которых описывает один из наиболее общих законов окружающего мира; для каждой из понятийных карт указан перечень процессов реального мира, подчиняющихся рассматриваемому в карте закону, и предложены наборы задач,

обеспечивающие включение старшеклассников в активную познавательную деятельность по освоению разработанного курса ДУ.

Существенность отличий в новизне научных положений от результатов, полученных другими авторами, заключается в выдвижении и реализации идеи формирования целостной картины мира старшеклассника посредством изучения ДУ, являющихся формой выражения наиболее общих законов, свидетельствующих о целостности и единстве окружающего мира.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что она дополняет теорию и методику обучения математике обоснованием возможности формирования целостной картины мира старшеклассника посредством изучения ДУ в системе дополнительного образования:

- обогащено содержание дополнительного образования через обоснование и разработку методики изучения ДУ с целью формирования ЦКМ старшеклассника на основе практико-ориентированного подхода и метода математического моделирования;

- уточнено понятие «целостная картина мира старшеклассника на основе ДУ»;

- раскрыт потенциал изучения дифференциальных уравнений как приоритетного ресурса формирования ЦКМ старшеклассника в системе ДО;

- разработана модель изучения ДУ в системе дополнительного образования с целью формирования целостной картины мира старшеклассников на основе практико-ориентированного подхода и математического моделирования наиболее общих законов природы: естественного роста, логистического, взаимодействия противоборствующих видов, колебаний, взрывного роста;

- обоснованы методические требования к составлению систематизированного набора понятийных карт: фундаментальность, наглядность, доступность, систематичность, комплексность, обогащение деятельности, единства аффекта и интеллекта;

- обоснованы и разработаны критерии сформированности ЦКМ старшеклассника на основе ДУ (знаниевый, операционно-деятельностный, ценностно-смысловой) а также показатели к каждому из критериев;

- доказано, что изучение ДУ в системе дополнительного образования по разработанной методике способствует формированию целостного восприятия картины окружающего мира, представлений о схожести закономерностей различных областей знания, общности явлений неживой и живой природы.

Практическая значимость работы состоит в том, что

- разработанная автором методика изучения ДУ применима к практике работы учреждений дополнительного образования по формированию у школьников современной научной картины мира;

- предложенные понятийные карты по каждому из общих законов (естественного роста, логистического, закона взаимодействия противоборствующих видов, колебаний, взрывного развития) дают возможность учителям активизировать познавательную деятельность старшеклассников по математическому моделированию наиболее общих процессов реального мира;

- наборы практико-ориентированных задач для каждой из понятийных карт и рекомендации по их использованию помогут повысить не только качество освоения старшеклассниками содержания курса ДУ, но и в итоге обеспечивать приращение у них представлений о целостности окружающего мира.

Достоверность результатов исследования и обоснованность сформулированных на их основе выводов обеспечивается:

- анализом практики общеобразовательной школы и учреждений дополнительного образования,

- положительной оценкой педагогами дополнительного образования и учителями математики общеобразовательных школ разработанных методических рекомендаций по изучению учащимися дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования, решению задач на основе практико-ориентированного подхода с применением метода математического моделирования,

- данными экспериментальной проверки предлагаемой методики изучения ДУ в системе дополнительного образования, ориентированной на формирование целостной картины мира.

Апробация и внедрение результатов исследования. Теоретические положения и результаты исследования докладывались на международных и всероссийских конференциях по теории и методике обучения математике, по теории дифференциальных уравнений в городах: Москва (2015,2017, 2020, 2023); Астрахань (2017, 2018, 2020); Казань (Mathedu-2017, 2019, 2023); Грозный (2018, 2020, 2021); Воронеж (2019, 2020, 2021, 2023); Волгоград (2017); Махачкала (2017); Армения, Горис (2015); Осетия (2017); Гомель (2017); Нальчик (2018); Стерлитамак (2018); Симферополь (2019); Баку (2019); Елец (2019); Пенза (2020); Абрау-Дюрсо (2021).

Материалы и результаты исследования одобрены и внедрены в практику работы МУДО «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района», МОУ «СОШ № 12 г. Зеленокумска», Воскресную компьютерную школу ЮФУ, г. Ростов-на-Дону.

Результаты исследования изложены в 30 публикациях, в том числе, 9 – в научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ, 2 – в зарубежных изданиях и 1 – методических рекомендациях.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту.

1. *Целостная картина мира (ЦКМ) старшеклассника на основе изучения дифференциальных уравнений (ДУ)* – это научная картина мира, которая является отражением в сознании старшеклассника в виде знаний, умений, ценностных установок тех реальных процессов, явлений, состояний окружающего мира, которые подчинены наиболее общим закономерностям, описываемым на языке ДУ; такое отражение формируется при изучении старшеклассниками ДУ на основе метода математического моделирования изоморфных систем реального мира и способствует изменениям в когнитивной и личностной сферах

обучающихся: старшеклассники усваивают наиболее общие законы окружающего мира, выраженные на языке ДУ, осознают своё активное место в мире, приобретают ценностные ориентации и установки.

2. *Методологической основой* изучения дифференциальных уравнений с целью формирования целостной картины мира старшеклассников является практико-ориентированный подход, который отражает дуальность процесса обучения и позволяет, с одной стороны, описывать и изучать реальные объекты с точки зрения ДУ, а с другой - развивает математические умения старшеклассников через исследование объектов реальной действительности, через решение практико-ориентированных задач. Основным методом решения практико-ориентированных задач является метод математического моделирования, основанный на применении ДУ, включающий четыре этапа: математизацию, формализацию, внутримодельное решение**,** интерпретацию, - и выявляющий системный изоморфизм реальных процессов и явлений окружающего мира.

3. Реализацию практико-ориентированного подхода целесообразно осуществлять на основе *модели* изучения старшеклассниками ДУ в системе ДО с целью формирования ЦКМ в составе целевого, методологического, содержательно-организационного и диагностического блоков. Целевой блок включает трехуровневую постановку целей; методологический - представлен практико-ориентированным подходом**;** содержательно-организационный сконструирован на основе отбора практико-ориентированных задач, решаемых методом математического моделирования с использованием IT- средств, систематизированного набора понятийных карт; диагностический блок: критерии, уровни, показатели, - реализован как адаптация методики С.В. Тарасова для категориальных структур мировосприятия.

4. *Отбор и структурирование содержания* изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования старшеклассников осуществляется на основе системного изоморфизма, когда одной и той же математической моделью – одним и тем же ДУ – описывается целый ряд

разнообразных процессов или явлений окружающего мира. Среди наиболее общих взаимосвязей окружающего мира, выраженных на языке дифференциальных уравнений, выделены для изучения законы естественного роста, логистический, колебаний, взаимодействия конкурирующих видов, взрывного развития.

5. *Методика* изучения ДУ с целью формирования ЦКМ старшеклассников основана на модели изучения старшеклассниками дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ, реализуется с помощью понятийных карт, соответствующих каждому из рассматриваемых законов, наборов практико-ориентированных задач, пакета компьютерной математики Mathcad, IT-решателей ДУ, лабораторно-практических занятий, исследовательских проектов.

6. Результативность разработанной методики изучения ДУ в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ старшеклассников оценивается посредством *диагностик*и, основанной на том, что отражение в сознании старшеклассника реальных процессов, явлений, закономерностей, состояний окружающего мира – это результат и психический процесс, поэтому его результативность характеризуется полученными знаниями, освоенными навыками активной творческой деятельности, изменениями в эмоционально-ценностной и личностной сфере в виде приобретённых ориентаций, установок, убеждений, отношения, оценки и осознания своего места в мире. Диагностика сформированности ЦКМ осуществляется в соответствии со знаниевым, операционно-деятельностным ценностно-смысловым критериями.

Диссертационная работа соответствует паспорту научной специальности 5.8.2. **«Теория и методика обучения и воспитания»:** п. 11. Проблемы формирования мировоззрения, научной картины мира средствами предметного образования. А также Перечню актуальных тематик диссертационных исследований в области наук об образовании, рекомендованных РАО и ВАК (Москва - 2023), для научной специальности 5.8.2: «2.9 - проблемы формирования научной картины мира; 2.10 - обновление содержания учебных предметов».

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, приложений.

Глава 1. Теоретическое обоснование сущности формирования целостной картины мира в процессе изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования

1.1. Целостная картина мира старшеклассников и целесообразность её формирования в системе дополнительного образования

Как известно, человеку свойственно познание окружающей действительности. Этому способствует проявляемое им любопытство, естественная любознательность. Н.Н. Смагина называла «эти склонности человека первыми ступенями в развитии познавательной активности, интереса, стремления к познанию» [127]. В результате познавательной деятельности человек приобретает знания о мире, которые могут быть эмпирическими, если они добыты в ходе эмпирического познания с помощью имеющихся у человека анализаторов (зрительного, звукового, обонятельного, вкусового, кожного, вестибулярного), а могут быть абстрактными, рациональными и иррациональными, если они получены в ходе абстрактного познания, благодаря, в первую очередь, абстрактному мышлению, а также воображению и интуиции. В результате «взаимодействия всех имеющихся разрозненных знаний о мире в сознании человека формируется целостное знание мира, видение мира в форме картины мира. Причём она получается не путём простого объединения всей суммы накопленных разрозненных знаний, а в результате их сложной интеграции» [146].

Картина мира как обобщённое знание мира является самым существенным в системе знаний о мире. Развитие картины мира может рассматриваться как в историческом аспекте - изменение представлений о мире в связи с развитием науки и технологий и в аспекте становления и развития представлений о мире у подрастающего поколения (у школьника) под влиянием интеллектуального развития, накопления субъектного опыта и обучения.

Картина мира – это не нечто застывшее, она изменяется в представлениях школьников в соответствии с развитием общества. Важнейшими структурными элементами картины мира являются концепции как системы взглядов, выражающие определённый способ видения, понимания, трактовки тех или иных компонентов мира. Эти концепции, лежащие в основе картины мира, являются ответами на сущностные, основополагающие вопросы о мире. Составной частью картины мира является научная картина мира, базирующаяся на научных концепциях.

Научная картина мира – «целостная система представлений об общих свойствах и закономерностях природы, возникающая в результате обобщения и синтеза основных естественно-научных понятий и принципов» [97].

Научная картина мира – «целостный образ предмета научного исследования в его главных системно-структурных характеристиках, формируемый посредством фундаментальных понятий, представлений и принципов науки на каждом этапе её исторического развития» [76]. Научная картина мира – «особая форма теоретического знания, репрезентирующая предмет исследования науки соответственно определённому этапу её исторического развития, посредством которой интегрируются и систематизируются конкретные знания, полученные в различных областях научного поиска» [78].

В науке понятие «картина мира» определяется как «система представлений о свойствах и закономерностях реальной действительности, построенная в результате обобщения (синтеза) научных понятий и принципов» [75]. Современная картина мира включает в себя представления о развитии бытия, о взаимосвязи и взаимодействии субъективной реальности. Она показывает, что «в результате усложнения структуры и уровней организации материи из неживой природы возникает живая, а из этой последней – человек с его социальными проблемами и извечными философскими вопросами, встающими перед каждой личностью и нередко остающихся без ответа» [90]. Понятие «картина мира» относится к основополагающим научным категориям и представляет интерес для многих областей научного познания: математики, физики, философии, естествознании, истории, культурологии, филологии, психологии, этнологии и других областей научного познания.

Первые трактовки понятия «картина мира» даны в работах Л. Витгенштейна [26], Й.Л. Вайсгербера [24], В. Гумбольдта [34]. В данных исследованиях понятие «картина мира» было соотнесено с понятием «целостное мировоззрение», в связи с чем, категория «**целостности»** стала центральной характеристикой при исследовании картины мира. Кроме того, исследователями был выделен ряд понятий, которые стали употребляться синонимично к понятию «картина мира» – это «образ мира», «модель мира», «видение мира» и т.д. В рамках психологической школы А.Н. Леонтьева изучение картины мира нашло отражение в концепции «образа мира»[79].

Трактовки понятия «картина мира» весьма разнообразны. Картина мира «представляет собой совокупность когнитивных и ценностных ориентаций, в связи с чем нет и не может быть, единой общенациональной картины мира» [91]; является отражением «картины того, как существуют вещи, концепция природы, личности и общества», [63] присущей «носителю данной культуры» [63]; «существует в сознании личности и «рисуется» самим человеком» [77]; является своеобразным «смысловым полем, то есть системой значений, открытой самим человеком или определённым образом ему представленную, всегда выражающую объективность, раскрытую общественной практикой» [75], [77].

Многие исследователи, и в частности, Кузнецова, Т. Ф, Куликовская считают, что существующее «дробление целостной картины мира на отдельные частнонаучные картины мира не способствует преодолению растворенности субъекта, неопределённости его места и статуса в самой сфере человеческого присутствия» [76], [77].

В работах В.С. Степина [130], Г.Д. Гачева [28], А.Я. Гуревича [35], М.М. Бахтина [18], Е.С. Яковлевой [152], Т.Ф. Кузнецовой [76] и др. трактуется ЦКМ с позиций холизма [60]. С этой точки зрения, «картина мира» представляет собой не только цель осмысления человеком окружающей действительности, но и «инструмент активного управления человеком и его жизнедеятельностью во всех сферах» [35],[152]. Таким образом, становление, развитие и формирование картины мира являются актуальными в психолого-педагогическом и социальном плане. А.А. Исаев акцентирует в картине мира критерий «человеческой состоятельности» [59].

На протяжении развития педагогической науки в поле исследовательского интереса учёных попадали различные аспекты изучаемой проблемы: формирование целостной картины мира у ребёнка на начальной ступени обучения «в педагогической системе К.Д. Ушинского» [97]; «обоснование основ категориального видения картины мира и эволюции мировоззрения детей дошкольного возраста» [77]; «особенности мировосприятия старшеклассников на интегрированных занятиях» [22]; «характеристики и специфика формирования естественнонаучной картины мира» [22]; «формирование личностной информационной картины мира школьников с использованием компьютерных технологий» [75] и др.

Исследователи придерживаются мнения, что «среда и воспитание выступают в качестве ключевых, универсальных факторов формирования целостной картины мира, поэтому данный процесс может быть охарактеризован как происходящее во времени изменение способа взаимодействия личности со средой, обусловленное возрастанием её субъектности» [60]. Формирование целостной картины мира возможно, если образование растущего человека осуществляется в системе ценностных ориентиров. В учении К.Д. Ушинского целостная картина мира – это «модель мира, которая хранится в духовной памяти народа, его сознании и культуре как системное представление о пространственно-временном существовании мира, бесконечности Вселенной и месте, и назначении человека в нем, это живая, динамичная, открытая, развивающаяся система» [97],

[135]. Человек сам строит образ мира, фиксируя и конструируя существующие в мире связи и отношения, что определяет выбор стратегии поведения. Картина мира является духовным образованием, «духовной призмой», через которую преломляется воспринимаемый человеком окружающий мир и вырабатывается отношение к нему. «Формирование целостной картины мира ребёнка является необходимой предпосылкой становления личности и означает, что человек способен полно и глубоко понимать окружающий мир, отводя себе в нем вполне определённое место» [135].

Развитие детей и формирование их личности основаны на непосредственной связи с окружающей действительностью, постоянном сборе и анализе представлений о ней, которые в своей совокупности складываются в личную точку зрения, нередко называемую картиной мира.

Опираясь на созданную в своём сознании картину мира, человек выстраивает линию поведения в этом мире, которая, на его взгляд, даст ему возможность комфортно жить в нем. Естественно, что чем полнее, целостнее и адекватнее имеющиеся у человека представления об окружающем мире, тем успешнее происходит его приспособление к условиям, в которых он оказывается: правильно оценивает сложившуюся ситуацию, находит наиболее оптимальные пути её разрешения, точнее представляет цель, к которой стремится. Иначе говоря, картина мира предопределяет предпринятые им шаги. Сформированная с помощью педагогов, семьи и социума, целостная картина мира поможет ребёнку легче адаптироваться в том мире, в котором ему предстоит жить. Поэтому так важно с самого раннего возраста помогать человеку обрести целостную картину мира. Отсюда вытекает необходимость формирования целостной картины мира у старшеклассников и актуальность этой проблемы.

Исследователи социальных процессов отмечают, что сегодняшняя жизнь становится «технологичной», «цифровой». В этих условиях любой член «цифрового» общества, чтобы быть успешным, приобретает черты прагматика. Такая «тенденция сопряжена с риском нарушения целостности личности, целостности души развивающегося человека; раскол между мышлением и чувством, разумом и переживанием приводит к тяжёлым психологическим и духовно-нравственным потерям» [97]. «Целостность картины мира значима для учебной и профессиональной деятельности взрослого» [97]. Сформированность и целостность картины мира – важное условие её эффективности.

Личностное развитие и становление мировоззрения человека неразрывно связано с формированием его ЦКМ. «Формирование целостных представлений о мире влечёт за собой не только качественные изменения сознания и личности в целом, но и означает, что человек способен более полно и глубоко понимать окружающий мир, отводя себе в нем «должное» место» [135]. Как утверждает ряд исследователей, усложняются понятия о реалиях объективного мира: одно явление можно увидеть и описать в разных «кодовых системах» [97], что позволяет увидеть то, что скрыто, не дано в непосредственном ощущении и восприятии. Целостная картина мира «выступает той системой координат, которая определяет направленность активности человека, его приоритеты в жизни, деятельности, творчестве»[75], [97], [135].

В современном мире успешность человека нередко зависит от того, «насколько свободно ориентируется в окружающем его мире и насколько он в состоянии организовать свою жизнь: может ли он определить перспективы, найти и привлечь необходимые ресурсы, наметить план действий, осуществить его и оценить, что удалось, а что – нет, достигнуты ли поставленные цели» [78].

Современные учёные справедливо отмечают, что в конце XX - нач. XXI века престиж науки начал падать, так как сформирован новый тип мышления, которое учёные называли «клиповым» [129]. Под действием средств массовой информации (радио, телевидения, газет, глобальной сети Интернет) «у человека искажается восприятие реального мира, человек становится восприимчивым ко всякого рода чудесам, мистическим тайнам, лишённым рационального основания. Современное общество является жертвой псевдонаучного знания, которое начинает выступать в обличии научной терминологии, при этом формируется особая картина мира, альтернативная современной» [129].

Значимой частью потребителей массовой культуры (бульварной литературы, музыкальных клипов, кинофильмов и т. п.) являются дети, подростки и молодые люди, среди которых и старшеклассники, с неустоявшимися ценностными ориентирами и взглядами. Усвоение готовых штампов, развитая индустрия развлечений, внедрение в сознание современных подростков субкультуры конкурируют с системой образования, прививающей старшеклассникам нравственные устои, патриотические чувства, и в конечном счете, признание человека главной жизненной ценностью. Внутренние и внешние причины, порождающие отчуждение человека от образования, являются отражением проблем самой системы образования.

Проблемы отсутствия в процессе обучения взаимосвязей содержания отдельных учебных предметов, целостности всего образовательного процесса ведут к фрагментарности, «клиповости» картины мира. Большой объем потребляемой разрозненной информации, на обработку и критический анализ которой нет времени, продуцирует неумение школьников устанавливать причинно-следственные зависимости, делать выводы, рассуждать логически, «перепрыгивание» с одного вида деятельности на другой, что «неоспоримо ведёт к формированию фрагментарной, деформированной картины мира» [144].

Необходимо вернуть «единство содержанию образования, только в этом случае оно будет способно дать целостное видение природы, человека и общества, в контексте междисциплинарного диалога» [144]. Мировосприятие в единстве содержания образования, а более точно, «педагогическое взаимодействие, самосовершенствование личности и влияние на неё инфраструктуры общества в целях обеспечения её полноценного развития, означает для человека жизнь в гармонии с природой; преодоление проблем отчуждения человека от самого себя, от общества и государства; преодоление одномерности человека» [144].

Человек неотделим от тех переживаний (эмоций, чувств, оценок), которые он испытывает по отношению ко всему, что происходит вокруг него. Ученику, в том числе старшекласснику, необходима помощь в формировании личностного восприятия, эмоционального, оценочного отношения к этому миру. В рамках этой линии развития решаются задачи гуманистического, экологического, гражданского и патриотического воспитания. Самостоятельное определение старшеклассником своей позиции даёт ему шанс на выживание во взаимоотношениях с природой. Бесполезно рассказывать ему незнакомые для него вещи. Он не сможет соединить свои новые знания со своим опытом, знания останутся изолированными островками. Единственный способ – помогать школьникам осмысливать свой опыт. Человек должен научиться понимать окружающий мир и понимать цену и смысл своим поступкам и поступкам окружающих людей. Регулярно объясняя свой опыт, человек приучается понимать окружающий его мир. У него при этом начинают возникать вопросы, порождаемые незнанием многого, требующие уточнения. Всё это способствует возникновению привычки объяснения и осмысления своего опыта [155].

Традиционно в основе обучения лежит усвоение знаний. Необходимо познакомить обучающихся с картиной мира и научить их ею пользоваться для постижения мира и упорядочивания своего опыта. Поэтому процесс обучения должен направлять их к выработке навыка истолкования своего опыта. Это достигается тем, что школьники в процессе обучения учатся использовать полученные знания во время выполнения конкретных заданий, имитирующих жизненные ситуации. Таким образом, «в целом у учеников должно развиваться умение понимать и познавать окружающий мир, т.е. осмысленно применять полученные знания для решения учебно-познавательных и жизненных задач» [155].

В условиях современной школы без выхода в систему дополнительного образования невозможно сформировать у старшеклассников целостную картину мира. Ведь отдельные стороны окружающего мира изучаются в рамках изолированных предметов, между которыми в стенах общеобразовательной школы почти невозможно проиллюстрировать их единство. Учителями делаются отдельные шаги в этом направлении посредством интегрированных уроков и элементов интеграции, что предполагают и ФГОС. Поэтому встаёт проблема отбора содержания для формирования у старшеклассников целостной картины мира.

Формирование научной картины мира – задача, которая решается на протяжении нескольких лет обучения в школе во время изучения различных учебных дисциплин. Поскольку обучение в общеобразовательной школе ограничено жёсткими временными рамками, то целесообразно такие учебные курсы реализовывать в учреждениях дополнительного образования.

Главная цель образования – подготовка личности к саморазвитию, самосовершенствованию, к творчеству в различных сферах жизни, самореализации в учебной деятельности, запуск механизмов самопознания, самовыражения, обучения ребёнка жизни в согласии с собой, природой и обществом. А без представления научной картины мира это невозможно.

Естественно – математические науки играют в формировании научной картины мира особую роль, развивая у ребёнка видение себя и окружающего мира с помощью основных закономерностей, теорий, которые изучаются на уроках физики, химии, биологии, математики.

Формирование у учащихся целостной картины мира – длительный процесс, на который работают все учебные дисциплины. Поэтому целесообразным будет объединение отдельных, связанных с учебным предметом, естественных картин мира в единое целое на основании общего научного языка и общих научных методов, которые обеспечивает математика.

Рассмотрим роль математического аппарата в формировании целостной картины мира.

Н. В. Михайлова в своём исследовании предлагает рассмотреть переход от понятия «математическая картина мира» к «целостная картина мира». Такой переход обусловлен «тенденцией сближения математического, естественно-научного и гуманитарного знания» результатом чего является то, что «жёсткие разграничения науки и образования стали постепенно ослабевать». В результате автор делает вывод, что «Понятия «научная картина мира» и «математическая картина мира» различаются уровнем систематизации знания, поскольку первая характеризуется синтезом достижений, полученных не только в математике, но и в естественно-научных и социально-гуманитарных науках» [102]. Н.М. Охолопков также подчёркивает важность математической картины мира, как формы «представления знаний посредством математики», которая способствует «расширению и распространению знаний во все сферы человеческой деятельности» [111].

Воронина Л. В., Симонова А. А. берут за основу следующее определение: «Естественнонаучная картина мира – это совокупность важнейших принципов и законов, теорий и гипотез, моделей и эмпирических обобщений, проверенных и доказанных представлений об устройстве мира, имеющих общенаучное значение»[27]. Поскольку в определении речь идёт о целостной концепции, то для её формирования важна роль фундаментальных наук, понятий, законов. Такую основу и могут дать, по мнению авторов, такие науки как физика, биология и, конечно же, математика. Также отмечается увеличение роли математики в построении целостной картины мира, так как математика даёт инструментарий для более глубоко изучения и понимания целого ряда явлений, то есть является универсальным методом познания. Здесь стоит также вспомнить высказывание Н. Бора, подтверждающие данное заключение, что «Математика – это больше, чем наука, это – язык» [27]. Сходное мнение было высказано и И. Кантом, что «но чистое учение о природе, касающееся определённых природных вещей, возможно лишь посредством математики» [41].

В диссертационном исследовании Лапушкиной Л.И. «Роль математического довузовского образования в формировании мировоззрения и стиля мышления молодого человека в условиях информационного общества» автор указывает на высокую роль математики в формировании мышления и творческих способностей, культуры личности в целом, что является основой для формирования в дальнейшем целостной картины мира.

Таким образом, можно отметить высокую роль математики в формировании целостной картины мира, так как математическая наука выступает языковым, модельным средством изучения различных аспектов картины мира, но являясь при этом нейтральной по отношению любой стороны объективной реальности.

Можно отметить следующие функции, которая выполняет математика при формировании целостной картины мира:

- математика выступает универсальным языком при описании явлений из различных областей знаний;
- математика предоставляет средства для реализации математического моделирования, позволяющего не только описать, но и исследовать явлений из различных областей знаний;
- математика помогает формировать различные виды мышления, необходимые для рассмотрения явлений из различных областей знаний.

Старшеклассники усваивают учебный материал не только путём логического понимания и запоминания, но и через переживание, являющееся необходимым компонентом учения. Оно возникает лишь тогда, когда изучаемый материал представляет собой субъективную ценность для личности ученика, что происходит в случае, когда материал имеет инструментальную природу. Чтобы знание становилось инструментом, а не «залежами старья на задворках интеллекта» [32], ученик должен с ним работать, т. е. применять, искать условия и границы применимости, преобразовывать, расширять и дополнять, рассматривать в разных моделях и контекстах [52].

«Научное образование, научное знание должны стать содержательной базой образования и развития человека» [97]. Особую роль в формировании целостной картины мира у детей К.Д. Ушинский отводил естественнонаучному образованию в школе. Наука играет огромную роль в жизни человека и общества, и её достижения и методы должны осваиваться школьниками, поскольку они являются частью культуры. «Невозможно быть современным, культурным человеком без научного образования, современного научного знания» [97]. Именно интеграция образования и культуры, по мысли К.Д. Ушинского, «соответствует основному «психическому закону» детской души, согласно которому ребёнок легко, ясно и прочно усваивает то, что предстаёт в его чувственном восприятии и переживании как «живое знание», «живая» картина мира» [135].

При этом система научных знаний - не самоцель образования, «научное системное знание является средством развития ребёнка, формирования целостности его души» [97]. Взгляды К.Д. Ушинского основаны на том, что «система науки должна быть открыта школьнику и знания должны строиться в систему» [135]. Работа с гипотезами, деятельность в условиях недостатка информации или ее противоречивости, моделирование, прогнозирование – все эти элементы научного познания окружающего мира - служат интеллектуальной основой, на которой формируется подросток, его мировоззрение и мировосприятие.

Дополнительное образование детей, отвечая образовательным интересам, направлено на удовлетворение различных потребностей старшеклассников, не реализованных в рамках предметного обучения. Открытое образовательное пространство дополнительного образования позволяет школьникам познавать мир в соответствии с их интересами и способностями [52].

Важно формирование у старшеклассников целостной картины мира в их учебной, а не только в проектной и исследовательской деятельности. ФГОС СОО требуют внедрения новых педагогических технологий, основанных на восприятии большого объёма учебной информации, представленной в символической (графической) форме. В начале XXI века значительная доля информации об окружающем мире передаётся не только с помощью традиционных бумажных носителей, а по существу – в динамичной, интерактивной информационной системе. Большие объёмы информации в школьных учебниках, составление по ним линейной записи затрудняют усвоение материала старшеклассниками, вызывают сложности в выделении главной мысли, обобщении, запоминании. Различные технологии, в частности, понятийные карты помогают обучающимся в успешной учёбе [133].

В соответствии с требованиями ФГОС СОО к личностным и предметным результатам обучающихся, освоивших основную образовательную программу «целостная картина мира школьника представляет собой полное и глубокое восприятие, понимание окружающего мира, с отведением себе в нем определённого осознанного места и осознанием полезности собственной деятельности для его сохранения и улучшения» [92].

В современных условиях давняя педагогическая проблема формирования целостной картины мира приобретает новое звучание. Её актуальность продиктована новыми требованиями, предъявляемыми к основному и дополнительному образованию, социальным заказом общества.

Противоречия между регламентированностью общего образования и неограниченностью возможностей дополнительного образования указывают на существование проблемы несоответствия между современными потребностями современных старшеклассников и существующими способами педагогической деятельности по созданию условий для удовлетворения этих потребностей. У обучающихся формируются знания, не связанные между собой, которые учащиеся затрудняются применить на других предметах.

Опираясь на изложенные соображения, можно заключить, что выход в систему дополнительного образования при формировании ЦКМ целесообразно обусловлен, может рассматриваться как один из важнейших факторов развития способностей и задатков старшеклассников.

Основными задачами дополнительного образования являются:

- интеграция общего и дополнительного образования детей (В.А. Горский, В.Н. Иванченко и др.);
- изучение проблемных областей, связанных с познавательной деятельностью учащихся (С.П. Баранов, А.Е. Дмитриев, Т.А. Ильина, В.П. Кузовлев, А.Ж. Овчинникова, Н.Г. Подаева, И.П. Подласый, А.М. Смолкин, Г.И. Щукина и др.);
- обращение к дополнительному образованию, призванному обеспечить оптимальные условия для реализации способностей каждого обучающегося (С.В. Еловская, Н.А. Соколова);

- ориентация в образовательном процессе на личность как цель, результат, главный критерий эффективной деятельности педагога (Е.В. Бондаревская, Ю.Н. Кулюткин, К. Роджерс, В.В. Сериков, В.А. Сухомлинский, Е.Н. Шиянов, И.С. Якиманская и др.).

Углубленное изучение предметов в системе дополнительного образования обеспечивает интеллектуальные потребности детей с высокими творческими и научными запросами, гарантирует развитие их творческой активности, см. исследования Г.Ю. Алексеевой, С.В. Белоус, Л.А. Даринской, С.В. Еловской, Н.А. Соколовой, Н.В. Уварина и др. Проблема обучения и развития детей в дополнительном образовании изучалась рядом авторов (И.Я. Лернер, П.И. Пидкасистый, Т.И. Шамова, Г.И. Щукина и др.) достаточно подробно, но получение школьниками межпредметных знаний, служащих основой для ЦКМ старшеклассника, не достаточно освещена в научно-педагогической литературе. Проблеме организации дополнительного образования школьников посвящены работы ряда исследователей. Так, М.Н. Филатова [138] занималась вопросами социокультурного развития детей в учреждениях системы дополнительного образования, В.А. Березина [19]– творческим развитием обучающихся, А.А. Колчин [70] – деятельностью по воспитанию и развитию творческих способностей учащихся в рамках дополнительного образования, В.В. Абраухова [1] – развитием творческой направленности личности в системе дополнительного образования. А.Г. Асмолов] рассматривал дополнительное образование как зону ближайшего развития, как переход от традиционной педагогики к педагогике развития.

Как видим, эти исследователи затрагивают лишь педагогическую сторону рассматриваемой проблемы.

В современных условиях особенно актуально организовать процесс обучения так, чтобы «его образовательный результат проявлялся в развитии собственной внутренней мотивации обучения, мышления, воображения, творческих способностей, устойчивого познавательного интереса обучающихся, в формировании системы жизненно важных, практически востребованных знаний и умений, что позволяет учащимся адаптироваться к жизни и относиться к ней активно, творчески» [3]. Это относится и к системе дополнительного образования.

Дополнительное образование школьников направлено на всестороннее удовлетворение не реализованных в рамках общеобразовательной школы их «образовательных и индивидуальных потребностей в интеллектуальном совершенствовании, на формирование и развитие творческих способностей, обеспечивает адаптацию школьников к жизни в обществе, профессиональную ориентацию, продолжение образования на следующем уровне» [137].

Подводя итог проведённого анализа нормативных документов, результатов научных психолого-педагогических исследований, приходим к выводу, что «общим для всех исследователей в понимании целостной картины мира является её трактовка как результата симбиоза логического осмысления и чувственно-эмоциональной оценки человеком окружающей действительности, всех её предметных составляющих, причём такого осмысления, которое позволяет ему обрести гармонию с миром, понимать своё место в нём» [88]. Из всех учебных предметов именно математика играет исключительно важную роль в формировании ЦКМ старшеклассника.

Дополнительное образование, обладающее большой свободой в разработке образовательных программ, имеет возможность реализовать потребности индивида в получении широкого спектра образовательных услуг для углублённого изучения учебных предметов и их интеграции, для удовлетворения интеллектуальных потребностей индивида, для расширения кругозора в соответствии с интересами каждого человека. Поэтому формирование целостной картины мира в рамках дополнительного образования представляется целесообразным.

Формирование целостной картины мира старшеклассников в условиях современного общего образования без выхода в систему дополнительного образования выглядит проблематичным, т.к. отдельные стороны окружающего мира изучаются в рамках изолированных учебных предметов с регламентированным содержанием, проиллюстрировать единство, которого в стенах школы достаточно затруднительно.

Основное определение работы примем в следующем виде.

«*Целостная картина мира (ЦКМ) старшеклассника на основе изучения дифференциальных уравнений (ДУ)*» - это научная картина мира, которая является отражением в сознании старшеклассника в виде знаний, умений, ценностных установок тех реальных процессов, явлений, состояний окружающего мира, которые подчинены наиболее общим закономерностям, описываемым на языке ДУ; такое отражение формируется при изучении старшеклассниками ДУ на основе метода математического моделирования изоморфных систем реального мира и способствует изменениям в когнитивной и личностной сферах обучающихся: старшеклассники усваивают наиболее общие законы окружающего мира, выраженные на языке ДУ, осознают своё активное место в мире, приобретают ценностные ориентации и установки.

1.2. Практико-ориентированный подход и метод математического моделирования в формировании целостной картины мира старшеклассника

В современном понимании образование – единый целенаправленный процесс воспитания и обучения, который, с одной стороны, является общественно значимым благом и осуществляемый в интересах человека, семьи, общества и государства. С другой стороны, представляет собой совокупность приобретаемых знаний, умений, навыков, ценностных установок, опыта деятельности и компетенции определённых объёма и сложности в целях интеллектуального, творческого развития человека, удовлетворения его образовательных потребностей и интересов [113].

Требования ФГОС СОО, которые предъявляются к образовательным результатам, должны обеспечить формирование готовности обучающихся к саморазвитию и непрерывному образованию, проектирование и конструирование развивающей образовательной среды образовательного учреждения; активную учебно-познавательную деятельность обучающихся; построение образовательного процесса с учётом индивидуальных, возрастных, психологических, физиологических особенностей и здоровья обучающихся [136]. Стандарт ориентирован на становление личностных характеристик обучающегося: креативный и критически мыслящий, активно и целенаправленно познающий мир, осознающий ценность образования и науки, труда и творчества для человека и общества; владеющий основами научных методов познания окружающего мира; мотивированный на творчество и инновационную деятельность; готовый к сотрудничеству, способный осуществлять учебно-исследовательскую, проектную и информационно-познавательную деятельность; подготовленный к осознанному выбору профессии, понимающий значение профессиональной деятельности для человека и общества; мотивированный на образование и самообразование в течение всей своей жизни [136].

Изучение предметной области «Математика» должно обеспечить сформированность у обучаемых: представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления, основ логического, алгоритмического и математического мышления, умений применять полученные знания при решении различных задач в том числе: владения методами доказательств и алгоритмами решения, стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем, использования готовых компьютерных программ для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств. Кроме того, изучение математики предусматривает сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа [136].

Обучение – «целенаправленный процесс организации деятельности обучающихся по овладению знаниями, умениями, навыками и компетенцией, приобретению опыта деятельности, развитию способностей, приобретению опыта применения знаний в повседневной жизни и формированию у обучающихся мотивации получения образования в течение всей жизни» [112].

Цели современного российского образования предусматривают не только усвоение знаний, но и общее развитие учащихся. Для этого уже давно разрабатываются все новые и новые технологии: программированного обучения (Н.Ф. Талызина, п.я. Гальперин, А.М. Матюшкин, Дж. Дьюи, Шихнабиева Т.Ш.), теории поэтапного формирования умственных действий (П.Я. Гальперин), развивающего обучения (В.В. Давыдов, Л.В. Занков, Д.Б. Эльконин), личностно ориентированного обучения (В.И. Загвязинский, Э.Ф. Зеер, В.П. Зинченко, И.С. Якиманская, Г.К. Селевко, Ш.А. Амонашвили), а также ряд инновационных направлений, таких как витагенное обучение (А.С. Белкин), гуманный прагматизм, основанный на антропном принципе (В.Д. Семенов), этическая педагогика (М.Н. Дудина) и др. Однако несмотря на то, что в учреждениях дополнительного образования имеются творчески работающие педагоги, новые направления в технологии образовательного процесса порой медленно реализуются в массовой практике. Проблема заключается в том, что тот учебный материал, который предлагается учащимся, как правило, далёк от живой практики и жизненного опыта учащихся; на учебных занятиях редко обсуждаются практические проблемы и анализируются ситуации из повседневной жизни [61].

Чаще всего это происходит из-за смешения задач и функций науки и учебного предмета, их неоправданного сближения. Вследствие этого учебный процесс становится излишне усложнённым и отрывается от реальной жизни, что ведёт к потере интереса учащихся к обучению [61].

Один из возможных вариантов решения этой задачи заключается в применении практико-ориентированного подхода к обучению. Такой подход в обучении решает «дуальную задачу: с одной стороны - формирование у обучающихся представлений о математике как о едином методе познания действительности, а с другой - развитие умений применять изученную математику для исследования объектов действительности, для решения практико-ориентированных задач» [47]. В вузовском обучении «реализация практико-ориентированного подхода имеет профессиональную окраску, целенаправленное формирование конкурентоспособности будущих работников» [110]; при обучении старшеклассников этот подход «реализует современную направленность образования на формирование функциональной грамотности обучающихся, на решение задач, приближенных к практической жизни, на формирование умений старшеклассников применять математику для исследования окружающего мира» [89].

Реализация практико-ориентированного подхода позволяет снять противоречие между необходимостью овладения учащимися системой жизненно важных, практически востребованных знаний и умений, развития их творческих способностей и недостаточной исследованностью практико-ориентированного обучения и его образовательных возможностей.

В условиях общего образования не предусмотрено получение профессии, возможна лишь подготовка к такому выбору. Одновременно с этим ввиду требований ФГОС СОО необходимо формировать у обучающихся способность и готовность к пониманию научной картины мира, адекватной современному уровню знаний.

Основы практико-ориентированного обучения зародились в первые годы советской власти в виде трудовой школы и далее политехнического обучения в 1950-1960 годы: обучение математике имело профессиональную ориентацию. Затем, в более поздний период, была принята концепция прикладной направленности обучения, в основе которой лежали принципы связи обучения с жизнью, межпредметности, целостности, политехнического характера обучения.

Одна из ведущих идей практико-ориентированного обучения состоит в том, что школьники в процессе обучения математике готовятся решать задачи, возникшие из жизненных потребностей. При таком обучении учащиеся овладевают способностями формулировать задачу, возникшую из жизненных потребностей, на языке математики, выбирать необходимые методы ее решения, осваивать новые понятия, оценивать и полученный результат, а также саму деятельность, приведшую к полученным результатам. Такое обучение неразрывно связано с изменениями в личностной сфере. Именно «способность математизировать информацию об окружающем мире, получать на основании этого новую информацию является одной из характеристик самостоятельно мыслящего, интеллектуально развитого человека» [43]. В решении задач, взятых из реальной жизни, а также в изучении математики с целью решения новых задач и состоит основная двойственная идея практико-ориентированного обучения.

Действительно, «раскрытие математических законов в живой природе, показ взаимосвязей математики с искусством, практическими сферами деятельности – одна из основных задач практико-ориентированного обучения математике в школе»[46]. К сожалению, эта задача ещё далека от своего завершения, хотя определённые шаги в этом направлении сделаны и делаются. По ФГОС СОО «изучение математики направлено на осознание значения математики в повседневной жизни человека, формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления»[110], [136].

Требования к предметным результатам, сформулированные во ФГОС СОО по учебным предметам «физика», «химия», «биология», «астрономия», «математика» должны обеспечивать сформированность представлений о роли и месте этих предметов в современной научной картине мира школьника; межпредметные понятия из этих областей «позволяют связывать знания из различных учебных предметов, учебных курсов (в том числе внеурочной деятельности), учебных модулей в целостную научную картину мира» [136]. При реализации практико-ориентированного подхода в школе каждый из учебных предметов вносит свой вклад в формирование современной естественнонаучной картины мира. «Можно говорить о «физической» «химической», «биологической» и т.д. составляющих, т.е. о предметных составляющих естественнонаучной картины мира при реализации практико-ориентированного обучения» [125].

При реализации практико-ориентированного обучения в рамках отдельных учебных предметов математика играет все возрастающую роль. В самом деле, в настоящее время нет такой области знаний, где так или иначе не использовались бы математические понятия и методы. «Нередко проблемы успешно решаются благодаря применению математики, тем самым расширяются возможности научного познания» [43]. Современная математика объединяет различные области знаний в единую науку. Поэтому школьники должны уметь выделять математические закономерности в окружающей действительности и понимать возможность и необходимость применения математических сведений к разрешению ситуаций, возникающих в реальном мире. «Применение в обучении принципа математизации знаний закладывает понимание старшеклассниками роли математических знаний для решения широкого круга проблем»[48]. У каждого выпускника школы должна быть сформирована «способность к выделению математических свойств реальных объектов» [48].

Учащиеся должны понимать, что «в решении стоящей перед ними проблемы - бытовой или профессиональной - может принять участие математика, могут использоваться присущие ей приёмы мыслительной деятельности: анализ, синтез, обобщение, сравнение, абстрагирование и др.»[46], способы рассуждений: по аналогии, аналитико-синтетический, индуктивно-дедуктивный и т.д., творческие умения: видеть объект с разных сторон, переносить приёмы познавательной деятельности из одной ситуации в другую и мн. др..

Отбор содержания практико-ориентированных заданий производится «из научных областей знаний, практических сфер деятельности, среди бытовых и занимательных ситуаций с реальным сюжетом с учётом возрастных интересов и познавательных возможностей, обучающихся» [150].

«Практико-ориентированная задача – это задача, основанная на содержательной модели реального объекта, математическая модель которого может быть построена средствами школьного курса математики» [48].

Традиционное предметно-ориентированное обучение основано на выполнении следующих задач: «учитель делает то, что намечено учебным планом, а учащиеся, в свою очередь, делают то, что от них требует учитель и учебный план» [110]. Учитель формулирует учебные задачи, создаёт предпосылки для их решения, воздействует на учащихся к выполнению планируемых учителем действий. Ученики, рассматриваемые в качестве объекта обучения, реагируют на воздействия учителя, редко проявляя самостоятельность и инициативность. Передача знаний учителем и их усвоение учеником носит пассивный характер. Тем не менее, такое обучение обладает положительными результатами, поскольку оно обеспечивает массовость образования. Нежелательные результаты состоят в том, что обучение чрезмерно регламентировано, не оставляет возможность проявления индивидуальности.

Отличия практико-ориентированного обучения от традиционного предметно-ориентированного можно дифференцировать:

- по целевым установкам;
- по формам организации учебного процесса;
- по характеру обучения.

Наиболее «существенное отличие заключается в том, что для системы предметно-ориентированного обучения приоритетной является «передача знаний» при недостаточном обращении внимания на необходимость формирования у учащихся умений выполнять практическую работу по своей инициативе» [44].

«Практико-ориентированное обучение, метод математического моделирования ориентированы на усвоение знаний, приобретение, кроме знаний, умений, навыков, ещё и опыта практической деятельности» [46]. В системе общего образования под «опытом деятельности подразумевается в большей степени опыт учебно-познавательной деятельности» [116]. Само приобретение опыта осуществляется в рамках традиционной дидактической триады «знания – умения – навыки» путём формирования у обучающихся практических умений и навыков. При деятельностном «подходе традиционная триада дополняется новой дидактической единицей: знания – умения – навыки – опыт деятельности» [114]. Поэтому, в частности, «задания лабораторно-практических работ должны быть нацелены на индивидуальную поисковую деятельность, где обучающийся не просто закрепляет основные теоретические положения учебного материала, а учится прогнозировать, планировать, в диалоге раскрывать свои мнения и позиции по выбранному способу решения учебной задачи, самостоятельно организовывать свою деятельность; выполнение лабораторно-практических работ целесообразно организовывать с использованием ИКТ» [45].

Поясним смысл понятий «сущность», «подход» и «практико-ориентированное обучение». «Сущность – совокупность существенных свойств и качеств вещи, субстанциональное ядро самостоятельного сущего» [139]. «Подход – совокупность приёмов, способов в воздействии на кого-нибудь, что-нибудь, в изучении чего-нибудь, в ведении дела» [107]. И наконец, «практико-ориентированное обучение – это вид обучения, преимущественной целью которого является формирование у учащихся умений и навыков практической работы, востребованных сегодня в разнообразных сферах социальной и профессиональной практики, а также формирование понимания того, где, как и для чего полученные умения употребляются на практике» [128].

Сущность практико-ориентированного обучения заключается «в построении учебного процесса на основе единства эмоционально образного и логического компонентов содержания; приобретения новых знаний и формирования практического опыта их использования при решении конкретных жизненно важных задач и проблем; эмоционального и познавательного насыщения творческого поиска» [61]. «Практико-ориентированное обучение учащихся обеспечивает включение предметного знания в систему ценностного знания, свободно функционирующего в жизнедеятельности человека; реализация практико-ориентированного обучения учащихся закладывает основы социальной и профессиональной мобильности на основе сбалансированных отношений личности и среды» [61].

Практико-ориентированное обучение в соответствии с идеей гуманизации образования позволяет «преодолеть отчуждение науки от человека, раскрывает связи между знаниями и повседневной жизнью людей, проблемами, возникающими перед ними в процессе жизнедеятельности» [57]. Наряду с последовательным и логичным изложением основ наук на всех этапах обучения в каждой изучаемой теме «содержится материал, отражающий её значение, место той или иной природной закономерности в повседневной жизни» 57].

Важность применения практико-ориентированного обучения учащихся обусловлена тем, что в рамках практико-ориентированного подхода «значительно повышается эффективность обучения благодаря повышению личностного статуса учащегося и практико-ориентированному содержанию изучаемого материала; в процессе взаимодействия в системе «учитель-ученик» постоянно действуют каналы обратной связи; система развивает интерес учащихся к творчеству, позволяет им познать радость творческой деятельности» [61].

В рамках практико-ориентированного обучения «безусловным приоритетом пользуется (и основным «учебным материалом») является деятельность, организованная и осуществляемая с намерением получить намеченный результат» [114]. Для этого и само обучение должно быть устроено не традиционным образом. Оно должно быть преобразовано в «специфический вид деятельности, составленной из множества единичных актов деятельности, организованных в единое целое и направленных к достижению общей цели» [114].

Приведем трактовки понятия «практико-ориентированный подход» в обучении различными учеными-методистами. И.В. Петрова высказывает своё мнение по отношению к студентам строительных специальностей колледжа: «Практико-ориентированное обучение – это процесс взаимодействия трёх субъектов обучения: преподавателя, студента и профильного предприятия. ПОО реализуется с целью развития личности, направленный, с одной стороны, на совершенствование ряда психологических характеристик студентов (внимание, мышление, мотивация), с другой стороны, – на самостоятельное приобретение ими новых знаний, формирование практического опыта их применения в окружающей действительности при решении жизненно важных задач и проблем, развитие мировоззрения и творческого потенциала.» [114].

Мнение исследователя И.Ю. Калугиной по отношению к обучению учащихся химии в средней школе: «Сущность практико-ориентированного обучения заключается в построении учебного процесса на основе единства эмоционально-образного и логического компонентов содержания; приобретения новых знаний и формирования практического опыта их использования при решении жизненно важных задач и проблем; эмоционального и познавательного насыщения творческого поиска учащихся» [67]

Приведём мнение В.Г. Северова [123] по подготовке студентов в колледже для малого бизнеса: «Система практико-ориентированной профессиональной подготовки кадров в колледже для сферы малого бизнеса представляет собой многоуровневую педагогическую систему, характеризующуюся структурно-функциональной целостностью субъектов профессионального образования и образовательной среды, каждый уровень которой является совокупностью взаимосвязанных им по горизонтали, так и по вертикали средств, методов и процессов, необходимых для создания организованного, целенаправленного и преднамеренного обучения, воспитания и развития обучающегося с целью подготовки его к профессиональной жизнедеятельности в сфере малого бизнеса, культурному участию в процессах, происходящих в этой сфере и формированию его как личности для участия в этой среде и в обществе в целом.»

Приведем уточненную формулировку понятия «практико-ориентированный подход» в системе дополнительного образования, используя работы И.В. Петровой, И.Ю. Калугиной, В.Г. Северова, М.В.Егуповой. Практико-ориентированный подход к обучению математике «основан на бинарной роли практических приложений математики, обеспечивающий с одной стороны понимание математики, а с другой – понимание окружающего мира с помощью математики» [44].

В реализации практико-ориентированного подхода большую роль играет содержание образования. Практико-ориентированный подход позволяет значительно повысить эффективность обучения. Этому способствует система отбора содержания учебного материала, помогающая учащимся оценивать значимость, практическую востребованность приобретаемых знаний и умений [61]. В процессе обучения «широко используются творческие домашние задания, учащиеся получают возможность обращаться к своей фантазии, к творчеству; в практико-ориентированном учебном процессе не только применяется имеющийся у учащихся жизненный опыт, но и формируется новый опыт на основе вновь приобретаемых знаний. Как любой учебный процесс, практико-ориентированный, опирается на *содержание, формы, методы и технологии* обучения» [110].

В практико-ориентированном учебном процессе «не только применяется имеющийся у учащихся жизненный опыт, но и формируется новый опыт на основе вновь приобретаемых знаний. Обучающиеся должны осваивать какую-то определённую деятельность не по учебникам и чертежам, а непосредственно включаясь в её простейшие формы» [110].

Поводя итог вышесказанному, можно заключить, что практико-ориентированный подход к обучению математике представляет собой методологическую основу формирования целостной картины мира, т.к. его применение предполагает формирование умений школьников описывать окружающую действительность с позиций математики, умений решать практические прикладные задачи математическими средствами; в то же время, вовлечение учеников в активную познавательную деятельность в практико-ориентированном обучении формирует личность обучающегося, ценностные установки, осознание старшеклассником своего места в мире.

Практико-ориентированное обучение математике «призвано дать ответ на основной вопрос: каковы должны быть содержание и формы обучения, обеспечивающие переориентацию процесса обучения с передачи учащимся по преимуществу знаний и представлений на формирование у них умений объяснять явления окружающего мира с точки зрения математики, на умения решать практико-ориентированные задачи математическими методами» [114].

Математическое моделирование является одним из наиболее значимых инструментов практико-ориентированного образования. Математическое моделирование обширно применяется для изучения мира, окружающего нас, образуя у старшеклассников понятие о его сути. «Подведение учащихся к освоению трёх этапов (составление математической модели; решение задачи математическими средствами; перевод результата на язык, на котором была записана рассмотренная задача) должно быть системным для педагога дополнительного образования, как и для школьного учителя» [3].

Состав математической модели включает следующие компоненты:

- переменные;
- взаимосвязи, выраженные на языке уравнений, неравенств, ограничений;
- условий, описывающих рамки адекватности модели.

Процесс математического моделирования можно изобразить схематично (рисунок 1):

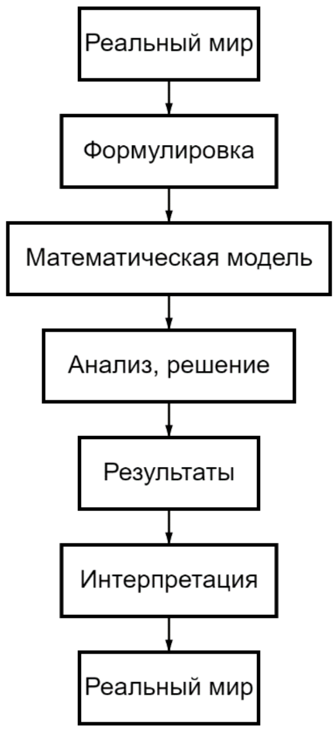


Рисунок 1 - *Процесс математического моделирования*

Исследование проблемы ознакомления старшеклассников с решением практико-ориентированных задач с привлечением дифференциальных уравнений в качестве математических моделей, и методами решения математических задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, является актуальным в условиях реализации ФГОС СОО. Решение многих жизненных (хозяйственных, технических, научных и других) проблем приводит к необходимости использования математического моделирования посредством дифференциальных уравнений. Поскольку в рамках учебного времени общеобразовательной школы академических часов на это не хватает, «целесообразно изучение методов решений дифференциальных уравнений на основе практико-ориентированного подхода реализовывать в рамках дополнительного образования» [3].

«Решение практико-ориентированных задач методом математического моделирования с использованием дифференциальных уравнений вносит весомый вклад в формирование у старшеклассников целостного мировоззрения, целостной картины мира, ибо объединяет разрозненные в школьном предметном обучении области знаний – химическую, биологическую, физическую, геометрическую, механическую и др. и показывает их единство» [82].

Основываясь на сказанном в этом параграфе, можно заключить, что практико-ориентированный подход в обучении математике выполняет роль методологической основы формирования целостной картины мира, а метод математического моделирования является одним из наиболее значимых инструментов практико-ориентированного обучения в формировании целостной картины мира.

1.3 Изучение дифференциальных уравнений как приоритетный ресурс формирования ЦКМ старшеклассника в системе дополнительного образования

Дифференциальные уравнения в описании целостной картины мира играют исключительную роль. В книге «Обыкновенные дифференциальные уравнения», 2012 В.И. Арнольд приводит фразу, принадлежащую И. Ньютону, - первооткрывателю дифференциальных уравнений: «Законы природы выражаются дифференциальными уравнениями» [10].

По словам Б.В. Гнеденко дифференциальные уравнения «играют роль одного из основных методов математического исследования явлений природы» [30], к ним постоянно обращаются те дисциплины, которые «имеют непосредственное отношение к познанию окружающего мира» [30]. В наше время эта роль значительно повышается в связи с развитием искусственного интеллекта.

Методы и средства теории дифференциальных уравнений являются наиболее адекватным инструментом в описании процессов окружающего мира, поскольку позволяют выражать на языке математического анализа, на языке функций и их производных количественные взаимосвязи не только самих величин, но и их скоростей изменения, описать качественный характер таких изменений: рост и его темп, развитие, стабилизацию, исчезновение, деградацию; выявить тренды, критические точки развития.

Целесообразность применения дифференциальных уравнений при математическом моделировании большинства проблем связана с универсальностью уравнений такого сорта, поскольку на языке дифференциальных уравнений описываются не только сами зависимости, но и скорости изменения переменных. Поэтому в настоящее время в условиях реализации обновлённых ФГОС СОО и задач, поставленных в Концепции развития дополнительного образования, исследование проблемы ознакомления старшеклассников в системе дополнительного образования с элементами теории дифференциальных уравнений и решения учащимися практико-ориентированных задач, является значимым в методической науке.

Совершенствуя пути активизации учебного процесса, необходимо уделить серьёзное внимание межпредметным связям, которые целесообразно использовать при решении задач по предметам естественно-математического цикла. Имеется в виду использование понятия дифференциального уравнения, простейших видов дифференциальных уравнений и способов их решений. Как известно, в учебнике «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов под ред. А.Н. Колмогорова рассматривались (1990-2020) дифференциальные уравнения первого порядка (показательного роста и показательного убывания), в которых первая производная пропорциональна самой функции, и дифференциальные уравнения второго порядка, в которых вторая производная функции отличается от самой функции только знаком. Уравнением первого типа описывается процесс радиоактивного распада, а второго типа – гармонические колебания. С понятием дифференциального уравнения старшеклассники знакомятся при изучении предмета «Алгебра и начала анализа». Логично добиться того, чтобы «на уроках физики и других предметах естественного цикла: химии, биологии, географии и др., - знания школьников в области дифференциальных уравнений были бы востребованы» [78]. Безусловно, более успешного достижения этого можно добиться при обучении школьников в системе ДО.

В п. 1.1 отмечено, что объективные законы, которым подчиняются определённые процессы (явления) окружающего мира, могут быть записаны в форме дифференциальных уравнений. Поэтому ДУ являются средством количественного выражения этих законов, и задача ознакомления учащихся старших классов с элементами теории и приложений дифференциальных уравнений является востребованной. Этот вывод следует также из признания важной роли и доступности ясного понимания этой задачи, которую играют дифференциальные уравнения в математике и естествознании (физике, астрономии, химии, биологии, медицине, экономике и других). Отсюда необходимость и целесообразность «обучения старшеклассников решению дифференциальных уравнений и возникших из практики задач, решаемых с помощью дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования» [3], поскольку в рамках обязательного среднего образования этот материал представлен крайне недостаточно. Изучение этого материала старшеклассниками способствует формированию целостности знаний и целостной картины мира. При этом отмечается недостаточность методического обеспечения обучения ДУ, как в общем образовании, так и в системе ДО.

В курс общего среднего образования не входит изучение даже простейших дифференциальных уравнений, но курс алгебры и начал анализа знакомит старшеклассников с понятиями производной, первообразной и интеграла. Поэтому курс дифференциальных уравнений является продолжением изучения дисциплины «Алгебра и начала математического анализа», при этом важным является акцент на прикладной смысл производной, в том числе, геометрический и физический. Интеграл, первообразная и производная изучаются, в основном, в 11 классе. Только в УМК А.Г. Мордковича и А.Н. Колмогорова изучение производной отнесено к 10 классу.

Во всех учебниках рассмотрены понятие производной, геометрический и механический смыслы производной, понятия производной, первообразной и интеграла. Отметим, что интеграл рассматриваются лишь определённый, который вводится понятием через первообразную. Берутся к рассмотрению лишь самые простейшие интегралы и в ограниченном количестве. Однако имеются все предпосылки для успешного более детального ознакомления старшеклассников с обыкновенными дифференциальными уравнениями и их применению к решению практических задач.

Методические аспекты обучения *дифференциальным уравнениям* отражены в книгах и исследованиях Р.М. Асланова, Г.И. Баврина, Х.А. Гербекова, В.А. Далингера, В.Д. Львовой, Р.М. Мельникова, Б.А. Найманова, С.В. Плотниковой, Г.Е. Полехиной, А.Г. Савиной, Г. Трелиньски и др. Популяризацией теории дифференциальных уравнений занимались В.И. Арнольд, А.В. Боровских, Г.Ю. Ризниченко, Л.И. Родина и другие.

Х.А. Гербеков одним из первых на основе системного подхода и профессионально-педагогической направленности обучения «построил концепцию изучения дифференциальных уравнений в *педвузе* и указал пути её реализации в процессе обучения студентов: конкретные рекомендации по пропедевтической работе, по отбору задачного материала, по организации учебного процесса и т.д» [29].

Особое место занимает докторская диссертация Р.М. Асланова, в которой разработана «методическая система обучения дифференциальным уравнениям в *педагогическом вузе*, в максимальной степени реализующая *гуманитарный потенциал* этого курса. В проведённом исследовании курс дифференциальных уравнений рассматривается не как раздел курса математического анализа, а как самостоятельная дисциплина» [12].

В работах Г.И. Баврина и Б.А. Найманова «исследована прикладная направленность курса дифференциальных уравнений в педвузе» [15], [104]. Проблеме «моделирования посредством дифференциальных уравнений»[36] посвящена книга В.А. Далингера, С.Д. Симонженкова Р.М. Мельниковым разработана «методическая система, интегрирующая фундаментальный и прикладной компоненты в обучении дифференциальным уравнениям будущих учителей физики» [98]. Эти исследования относились к обучению студентов – будущих учителей. В работах В.Д. Львовой, Н.В. Сычевой «рассматривается обучение дифференциальным уравнениям студентов технических вузов» [94], [131] .А

Во всех этих публикациях значимое место отводится разделу дифференциальных уравнений и тем прикладным задачам профессиональной направленности, которые могут быть решены средствами ДУ.

В кандидатских диссертациях (К.С. Сураганова, 1975; Г.Е. Полехина, 1996; З.С. Гребнева, 1998) рассматриваются вопросы обучения ДУ в школе: «ДУ как завершающий этап развития методической линии уравнений в школе» [117], – «обучение математике, в том числе и решению ДУ, одарённых школьников» [36].

Среди исследований, посвящённых изучению дифференциальных уравнений со старшеклассниками, отметим диссертацию Г.Е. Полехиной [117]. Г.Е. Полехина разработала методику обучения решению уравнений, основанную на единстве и различии методов решения алгебраических, трансцендентных и дифференциальных уравнений, и рекомендовала её для внедрения в школьное образование. Ею представлен авторский факультативный курс по теме «Дифференциальные уравнения», который может быть использован в классах с углублённым изучением математики. В проведённом исследовании курс дифференциальных уравнений рассматривается как завершающий этап развития линии уравнений в школе. Заметим, что в рассматриваемой диссертации Г.Е. Полехина исследует проблему изучения дифференциальных уравнений со старшеклассниками

- лишь в классах с углублённым изучением математики
- не рассматривает эту проблему в рамках общего и дополнительного образования,
- не рассматривает метод математического моделирования,

- не основывается на практико-ориентированном подходе.

Таким образом, как указано в нашей публикации, «имеющиеся научно-методические исследования проблемы не охватывают всего широкого спектра вопросов. Например, в них не исследуются вопросы изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ старшеклассников, недостаточно разработаны методические вопросы обучения старшеклассников методу математического моделирования – одному из основных приёмов реализации практико-ориентированного подхода» [89].

Поэтому к решению этой проблемы необходимо привлекать возможности дополнительного образования на основе практико-ориентированного подхода с использованием метода математического моделирования, способствующего формированию целостной картины мира.

Изучение дифференциальных уравнений с целью формирования ЦКМ старшеклассника направлено на познание законов природы, которые выражены на математическом языке дифференциальных уравнений, при этом абстрактность математических понятий и методов должна быть воспринята старшеклассниками как основа для системного изучения реального мира и его закономерностей. Изучение ДУ обуславливается потребностями мировосприятия старшеклассника, демонстрацией универсальности и применимости математических принципов ко всем классам явлений.

Можно отметить важную роль дифференциальных уравнений в математической теории, связанную с использованием данных уравнений в различных областях знаний.

ДУ в описании целостной картины мира (ЦКМ) играют исключительную роль, т.к. одно дифференциальное уравнение может служить математической моделью целого ряда изоморфных систем. Адекватное решение проблемы формирования именно целостной картины мира возможно осуществить с философских позиций теории холизма [60], т.е. с позиций целостности, с позиций системного подхода, при котором одно и то же дифференциальное уравнение может служить математической моделью целой совокупности изоморфных реально функционирующих систем. Этот факт служит опорой для развития представлений старшеклассников о единстве и взаимосвязанности всех компонентов окружающей действительности (рисунок 2).

Область знаний	Примеры задач
Медицина	Для определения скорости кровотока, скорости движения клапанов и стенок сердца, определения вязкости крови и других параметров гемодинамики. Для описания медикобиологических приложений ультразвука: эхоэнцефалограмма, УЗИ, ультразвуковая физиотерапия, ультразвуковая локация и кардиография. Для описания процессов физиологической акустики, которая изучает устройство и работу звуковоспринимающих и звуковоспроизводящих органов человека и животных. Для определения функции изменения численности популяции микроорганизмов в зависимости от времени.
Биология	Описание модели модель Лотки-Вольтерра. Исследование скорости изменения популяции жертв в модели Холлинга-Тэннера. Исследование модели Хатчинсона.
Физика	Исследование задач механики. Решении многих задач о распространении волн, статических потенциалах, формы колебания тонкой круглой мембраны, распределение интенсивности света, дифрагированного на круглом отверстии. Исследование задач о радиоактивном распаде. Исследования задач моделирование электрических цепей.
Экономика	Для определения эффективности процесса (например, рекламы). Определение спроса и предложения. Исследование модели рынка с прогнозируемыми ценами. Исследование задач макроэкономической динамики.

Химия	Исследование задач химически кинетики. Исследование параметров температурной зависимости константы скорости химической реакции. Исследование химических реакций под действием света.

Рисунок 2 - *Применение ДУ в различных областях знаний*

Поэтому особое значение имеет практика проведения интегрированных занятий биология/математика, физика/математика, химия/математика, экономика/математика с применением дифференциальных уравнений.

Таким образом, отмечается значимая роль дифференциальных уравнений в различных областях знаний, следовательно, для формирования целостной картины мира средствами математики чётко просматривается необходимость изучения как самих дифференциальных уравнений, так и метода математического моделирования на основе дифференциальных уравнений.

Теория дифференциальных уравнений предоставляет широкие возможности для решения проблемы формирования у старшеклассников целостной картины мира. Многие задачи из разных областей знания и практической деятельности человека решаются посредством создания модели, в частности, в виде дифференциального уравнения. Отсюда следует значимость решения старшеклассниками практико-ориентированных задач и необходимость овладения методом математического моделирования. Кроме того, таким образом удовлетворяются и потребности старшеклассников в познании, которые не могут быть удовлетворены в рамках обязательной основной образовательной программы в стенах школы.

Содержательная линия уравнений в школьном курсе математики является одной из основных. Изучаются линейные, квадратные, рациональные и дробно-рациональные, иррациональные, логарифмические, показательные, тригонометрические уравнения и системы уравнений, в том числе, с параметрами.

Задания из этого раздела школьной математики включаются в материал ЕГЭ. Дифференциальные уравнения можно рассматривать как следующий этап развития линии «Уравнения», тем более что для этого есть соответствующие предпосылки.

В самом деле, в школьных программах по алгебре и началам анализа предусмотрено изучение всех необходимых разделов дифференциального и интегрального исчислений, что позволяет непосредственно перейти к изучению дифференциальных уравнений и через них – к математическому моделированию реальных явлений и процессов, происходящих в повседневной жизни. Поскольку в рамках учебного времени общеобразовательной школы часов на это не хватает, то целесообразно изучение методов решений дифференциальных уравнений на основе практико-ориентированного подхода реализовывать в рамках дополнительного образования.

С решением дифференциальных уравнений неявно сталкиваются учащиеся старших классов. Например, в курсе физики с результатами интегрирования дифференциального уравнения старшеклассники встречаются уже в 9-м классе при рассмотрении равноускоренного движения. Анализируя задачи, связанные с решением уравнений в школьном курсе математики, академик Д.В. Аносов [6] отметил, что «Вероятно, наиболее важные и наиболее распространённые задачи такого рода – это дифференциальные уравнения. В школьном курсе математики о них речи нет, но простейшие примеры дифференциальных уравнений нелегально фигурируют в школьном курсе физики».

Элементы теории дифференциальных уравнений вполне доступны для понимания старшеклассниками. Д.В. Аносов [6] отмечает: «Самое сложное, что здесь требуется – это понимание смысла понятия производной и начальное умение дифференцировать». Действительно, анализ школьных учебников, ФГОС и пособий для учителей показывает, что в курс школьной программы не входит изучение даже простейших дифференциальных уравнений, но курс алгебры и начал анализа знакомит учащихся с понятиями производной и интеграла. Поэтому изучение дифференциальных уравнений, основанное на геометрическом и физическом смыслах понятий производной и интеграла, является естественным продолжением изучения школьной дисциплины «Алгебра и начала математического анализа» в учреждениях дополнительного образования.

Реализация взаимодействия между общим образованием и дополнительным в плане учебной деятельности, расширения математического кругозора, ознакомления с непосредственно примыкающими к школьному курсу областями математики, среди которых – дифференциальные уравнения и их приложения, является весьма продуктивной [3]. При этом выигрывают все стороны этого процесса: общеобразовательная школа, учреждения дополнительного образования, учащиеся, учителя, родители. Учителя общеобразовательной школы получают дополнительное время на подготовку к ЕГЭ, не отвлекаясь на расширение знаний учащихся при ограниченности времени, которое проходит без их участия и фактически наличествует у старшеклассников. Учреждения дополнительного образования имеют контингент старшеклассников, заинтересованных в углублении и расширении получаемых в общеобразовательной школе знаний. Обучающиеся удовлетворяют свои потребности в получении дополнительных знаний, приобретают стимул для дальнейшего роста и совершенствования, знакомятся с целым рядом профессий в качестве предпрофильной подготовки.

Дифференциальные уравнения имеют «большое прикладное значение, они широко используются в механике, физике, астрономии, во многих задачах биологии и химии» [2]. Например, «с помощью дифференциальных уравнений можно вычислить движение планет солнечной системы вокруг Солнца, предсказать моменты лунного и солнечного затмений» [36]. Имея на это все основания, выдающиеся учёные отмечали, что «Великая книга природы написана на языке математики» (Галилео Галилей), «Математика – это то, посредством чего люди управляют природой и собой» [10] (А.Н. Колмогоров). Это объясняется тем, что нередко объективные законы, которым подчиняются определённые процессы (явления), можно записать с помощью дифференциальных уравнений, и тем самым эти уравнения являются средством для количественного выражения этих законов. Благодаря изящным методам решения, конкретным и ясным приложениям дифференциальных уравнений есть все основания рассчитывать, что их изучение вызовет живой интерес у учащихся старших классов.

Таким образом, учитывая важную роль, которую играют дифференциальные уравнения в математике и естествознании (физике, астрономии, химии, биологии, медицине, экономике и других предметов), доступность ясного понимания этой роли, представляется весьма актуальной задача ознакомления учащихся старших классов с элементами теории и приложений дифференциальных уравнений [88], [81]. Возникает необходимость и целесообразность обучения старшеклассников решению дифференциальных уравнений и возникших из практики задач, решаемых с помощью дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования, поскольку в рамках обязательного среднего образования эта тема отсутствует [88].

Как показывают психологические исследования «наибольшую трудность для учащихся представляет целостное усвоение основ научной теории как системного объекта, так как он включает в себя разнородные элементы знаний» [56]. В общем образовании один из компонентов содержания – это теоретические основы, которые включают понятия, утверждения, методы. «Факты, как эмпирический базис теории, входят в теорию опосредованно» [56]. Элементы теории связаны структурными отношениями. Основу любой теории составляют основные понятия и основные положения - законы. Собственно теория – это получаемые следствия.

Как отмечает Л.Я. Зорина, если некоторая «совокупность знаний в сознании обучаемого образует систему, знания в которой расположены по схеме «основные понятия – основные положения – следствия» и связи между элементами в данной системе, то можно говорить о системном характере усвоения знаний» [55].

В дополнение к этой схеме системного характера усвоения знаний с целью обучения старшеклассников в системе дополнительного образования решению задач с помощью дифференциальных уравнений, необходимо опираться на практико-ориентированный подход, который позволяет значительно повысить эффективность обучения, как это обосновано в п. 1.1. Этому способствует система отбора содержания учебного материала, помогающая учащимся оценивать значимость, практическую востребованность приобретаемых знаний и умений.

На передний план выходит не только умение составлять дифференциальное уравнение, описывающее реальный процесс, но и знание способов решения простейших классов дифференциальных уравнений таких как: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные дифференциальные уравнения, уравнения Бернулли и т. д.

Решение любой задачи, сводящейся к дифференциальному уравнению, состоит из двух этапов: творческого (составление дифференциального уравнения) и технического (решение дифференциального уравнения). Кроме того, для учащихся важно отметить, что одно и то же дифференциальное уравнение может быть математической моделью совершенно различных природных процессов [85]. Например, решение задачи об определении зависимости атмосферного давления p от высоты h приводит к дифференциальному уравнению $\frac{dp}{dh} = -g \cdot p$, где искомая функция $p = p(h)$ есть давление на высоте h, g – ускорение свободного падения, а задача о радиоактивном распаде, согласно которому скорость уменьшения массы радиоактивного вещества пропорциональна количеству этого вещества, приводит к дифференциальному уравнению $\frac{dy}{dt} = -k \cdot y$, где масса радиоактивного вещества y есть функция времени t (k – коэффициент пропорциональности).

Метод математического моделирования с использованием дифференциальных уравнений в полной мере реализуется при решении практико-ориентированных задач. Этому методу уделяется незначительное время на уроках математики в общем образовании и именно система дополнительного образования позволит рассмотреть метод математического моделирования в полном объеме. Практико-ориентированные задачи, решаемые методом математического моделирования с использованием дифференциальных уравнений, демонстрируют старшеклассникам общенаучный характер математики. Отбор практико-ориентированных задач должен соответствовать возрастным особенностям старшеклассников, ибо, как утверждают психологи, старший подросток начинает познавать мир с точки зрения того, как его можно изменить.

При решении практико-ориентированных задач методом математического моделирования у учащихся формируются определённые формы мышления, необходимые для освоения окружающей нас действительности, для понимания явлений и процессов, происходящих в окружающем нас мире, так как изучает понятия, введённые путём абстрагирования от явлений реального мира, с помощью построения их математических моделей.

Практико-ориентированные задачи показывают старшеклассникам связь между процессами и явлениями реального мира и его математическими моделями. Метод математического моделирования – один из часто применяемых методов исследования реальных ситуаций, который используется при решении практико-ориентированных задач.

Дифференциальное уравнение представляет собой одно из центральных понятий в математике. «Дифференциальное уравнение – это уравнение для отыскания функций, производные которых (или дифференциалы) удовлетворяют некоторым наперёд заданным условиям» [2]. Дифференциальное уравнение, «полученное в результате исследования какого-либо реального явления или процесса, называют дифференциальной моделью этого явления или процесса» [2]. Дифференциальные модели – это частный случай того множества математических моделей, которые могут быть построены для изучения окружающего нас мира. При этом необходимо отметить, что существуют и различные типы самих дифференциальных моделей [2]. В данной работе будут рассматриваться лишь модели, описываемые так называемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), что означает, что неизвестная функция в уравнении зависит от одной независимой переменной.

При построении математических моделей исследователь опирается на те законы, которые действуют в рассматриваемой предметной области: для механики это могут быть законы Ньютона, в оптике – закон преломления света, в электротехнике – закон Ома и законы Кирхгофа в дифференциальной форме, в теоретической химии – законы протекания химических реакций первого и второго рода и т. д.

При решении практико-ориентированных задач происходит, как видим, установление межпредметных связей, поскольку постановка задач охватывает все области знания и все отрасли человеческой деятельности.

«Составление дифференциального уравнения по условиям практико-ориентированной задачи всегда сопряжено с рядом допущений, упрощений, принятия гипотез» [8],[36]. Это всегда процесс абстрагирования. Продуктивная гипотеза приводит к адекватным выводам и результатам, область адекватности построенной математической дифференциальной модели может быть уже или шире в зависимости от выбранных параметров при моделировании реальных процессов.

Один из эффективных инструментов вывода дифференциального уравнения, описывающего процесс или явление окружающего мира – это предельный переход, который является одной из трех операций, введенных в математическом анализе, наряду с дифференцированием и интегрированием.

В теории дифференциальных уравнений разрабатываются методы, так называемой, качественной теории, которые служат для выявления свойств решений, когда само решение не находят [11]. Монотонность решения, экстремумы, поведение решения на бесконечности в окрестности особых точек – вот неполный перечень задач, которые решает качественная теория.

Решить ОДУ это значит проинтегрировать ОДУ. Если решение можно получить в результате конечного числа интегрирований, то говорят, что такое ДУ разрешимо в квадратурах [120].

Следует отметить, что ОДУ имеют обычно бесконечное число решений. Например, нетрудно проверить подстановкой, что при любом значении постоянного числа a функция $x(t) = ae^t - 1$ является решением ОДУ первого порядка $dx/dt = x + 1$.

Таким образом, «ознакомление старшеклассников с решением дифференциальных уравнений, являющихся моделями практико-ориентированных задач, и методами решения задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, является актуальным в условиях реализации ФГОС» [81].

При этом осуществляется установление взаимосвязей школьного математического образования и занятий по математике в системе дополнительного образования старшеклассников на базе дифференциальных уравнений. Существенную роль играют преимущества практико-ориентированного подхода с использованием метода математического моделирования, выступающие как средство подготовки обучающихся к выбору профессии. Кроме того, реализация дидактических принципов непрерывности, преемственности, системности ведёт к формированию целостной системы знаний обучающихся, целостного мировоззрения, целостной картины мира.

Специфика изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования на основе практико-ориентированного подхода основана на документах, регламентирующих образовательный процесс в системе дополнительного образования.

Как было отмечено в предыдущих параграфах, взаимосвязь обязательного обучения математике в основной школе и математических занятий в рамках дополнительного образования выступает как средство реализации принципов непрерывности, преемственности, системности и способствует целостности знаний выпускников, формированию целостной картины мира в их сознании и их подготовке к выбору профессии. Ранее было обосновано, что «с целью обучения старшеклассников в системе дополнительного образования решению задач с помощью дифференциальных уравнений необходимо использовать практико-ориентированный подход, который позволяет значительно повысить эффективность обучения» [89].

«Цель занятий школьников по математике в дополнительном образовании состоит в расширении и углублении знаний, добытых ими в ходе изучения школьного курса, в развитии способностей и навыков учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой, в зарождении интереса к математике, поддерживании его до познавательного уровня» [89].

Обучение школьников элементам дифференциальных уравнений и решению практико-ориентированных задач на их основе должно опираться на субъектный опыт школьников, имеющиеся у них знания. Для этого следует актуализировать необходимые сведения и способы деятельности из жизни и обучения старшеклассников. Организация пропедевтической деятельности также может дать положительные результаты.

Как известно, изучение новых понятий в курсе математики происходит, чаще всего, на основе уже известных понятий. Поэтому необходимо *актуализировать* изученные в школе в рамках урока *понятия* приращения аргумента и функции, предела отношения приращения функции к приращению аргумента, производной, первообразной функции, неопределённого и определённого интеграла, причём сделать это целесообразно, например, посредством вызывающих размышления вопросов, примеров и контрпримеров, альтернатив, разрешений ситуаций со скрытой ошибкой и т. д. «Актуализировать также деятельностно следует и мыслительные операции (анализ, синтез, абстрагирование и т. д.), способы действий (сравнение, сопоставление и противопоставление, обобщение и др.), рассуждений (по аналогии, от противного, индуктивно-дедуктивного и пр.), творческих умений (видеть объект во взаимосвязях, переносить приёмы деятельности в другие ситуации, выделять существенное в рассматриваемом и т. д.)» [124].

В связи с предлагаемым для изучения содержанием «возникает необходимость формирования системы новых понятий обыкновенных дифференциальных уравнений, неизвестных учащимся: решение дифференциального уравнения (общее/частное), начальные условия, порядок дифференциального уравнения, метод разделения переменных» [36].

В теории и методике обучения математике «проводилось множество исследований по формированию понятий и требований к данному процессу, когда понятия математического анализа учителю приходится формировать при отсутствии более ранних чувственных форм познания, имеющих образную природу» [37], [99]. Между тем, необходимость использования «образов» при изучении абстрактных понятий доказывается в трудах В.А. Далингера, А.Н. Землякова, А.Г. Мордковича, А.Я. Цукаря и др. . Так, В.А. Далингер «процесс обучения математике на основе зрительно-познавательного подхода связывает с формированием устойчивых зрительных образов и овладением различными мыслительными операциями над ними, аналогичными таким общим процессам, как абстрагирование, отделение главного от второстепенного, структурирование, логические рассуждения» [37], [99]и др. В.А. Далингер делает «акцент на «первичность» образа, на немедленную и возможно более точную зрительную ассоциацию с абстрактным понятием, предшествующую словесному описанию»[36]. Критически анализируя концепцию В.А. Горского и приводя её в соответствие с рассматриваемой нами проблемой ознакомления старшеклассников в системе дополнительного образования с элементами теории дифференциальных уравнений и обучения их решению посредством дифференциальных уравнений практико-ориентированных задач с использованием метода математического моделирования, выделяем следующие уровни процесса образования: репродуктивный, эвристический, креативный. В соответствии с этим определяются «уровни образовательных занятий в ДО: познавательно-репродуктивный, эвристический, интеллектуально-поисковый, интеллектуально-творческий»[31]. В качестве составляющих процесса обучения старшеклассников в системе дополнительного образования принимаем:

- опыт усвоения знаний, в результате которого приобретаются новые знания,
- опыт практической деятельности, в результате повышается мастерство в применении знаний,
- опыт творческой и исследовательской деятельности, что ведёт к

самостоятельности мышления и развитию творческих качеств личности.

Основными блоками образовательного процесса являются: обучающий, формирующийся на основе опыта углублённого усвоения заинтересовавших учащихся знаний; деятельностно-практический, включающий опыт освоения предметного содержания. Они входят в содержательно-операционный компонент. Использование дифференциальных уравнений способствует обогащению и уточнению представлений старшеклассников о процессах и явлениях окружающего мира, позволяет сформировать научные целостные представления и знания о живой и неживой природе, т.е. ведёт к формированию ЦКМ.

Таким образом, в п.1.3 показано, что основным ресурсом при формировании ЦКМ старшеклассника являются дифференциальные уравнения; аппарат ДУ есть содержательная база, математическая основа формирования ЦКМ в системе дополнительного образования. Изучение учащимися старших классов дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования на основе практико-ориентированного подхода с использованием метода математического моделирования создаёт предпосылки к формированию целостной картины мира, объяснять с математических позиций явления окружающей действительности.

Целостную картину мира (ЦКМ) старшеклассника, построенную на основе дифференциальных уравнений (ДУ), определим как научную картину мира, которая является отражением в сознании старшеклассника в виде знаний, умений, ценностных установок реальных процессов, явлений, закономерностей, состояний окружающего мира, подчинённых наиболее общим закономерностям; такое отражение получено на основе математического моделирования изоморфных систем, в котором ДУ выступают в роли ведущего средства; формирование ЦКМ старшеклассника связано с осознанием подростком своего места в мире, с приобретением ценностных ориентаций и установок, т.е. с изменениями в личностной сфере.

1.4. Модель изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования

Создание любой модели реального процесса, в том числе и модели образовательного процесса в системе ДО, по мнению ряда авторов [1], [7] требует выделения его составляющих компонентов, а также установления взаимосвязей между ними и с внешней средой. В исследовании Ю.В. Вайнштейн отмечено, что «при создании дидактической модели требуется определить целевой, содержательно-концептуальный, адаптивно-технологический и результативно-оценочный компоненты»[23].

Для моделирования процесса обучения в системе дополнительного образования необходимо опираться на идеи И.Я. Лернера, М.И. Скаткина и теоретические положения, высказанные в исследованиях А.В. Горского [31]: модель процесса обучения в системе дополнительного образования должна включать:

- опыт усвоения знаний, результат освоения – новые знания;

- опыт практической деятельности, результат освоения – универсальные действия,

- опыт развивающей творческой деятельности, результат освоения – способности, ценности, установки;

В исследованиях А.В. Горского [31] указано, что образовательные результаты в дополнительном образовании формируются на основе

- опыта углублённого усвоения заинтересовавших учащихся знаний;

- опыта практической деятельности,

- опыта деятельности, развивающей способности учащихся, ценностные ориентации, установки.

Разделяя позиции названных выше авторов, для описания процесса изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования целостной картины мира старшеклассников представим модель в составе целевого, методологического, содержательно-организационного и диагностического блоков (рисунок 3).

Цель обучения: формирование ЦКМ старшеклассника на основе изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования, - рассматривается в контексте социального заказа.

Необходимость конструирования модели изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования обусловлена социальным ***заказом*** общества на:

- углублённое изучение учебных предметов, обеспечивающих достижение требований к образовательным результатам в соответствии с обновлённым ФГОС СОО,
- формирование механизмов преемственности и непрерывности образовательных траекторий в общем, дополнительном образовании, среднем и высшем образовании;
- обновление содержания, технологий и форматов дополнительного образования детей для удовлетворения индивидуальных запросов.

<table>
<tr><td>Целевой блок</td><td colspan="2">Социальный заказ к ДО:
• углублённое изучение математики, обеспечивающее достижение требований к образовательным результатам,
• формирование мировоззрения и стиля мышления молодого человека в условиях информационного общества,
• обеспечение механизмов преемственности «ДО - ВУЗ»,
• обновление содержания, технологий и форматов ДО.</td><td>Цель:
формирование ЦКМ старшеклассников на основе изучения ДУ в системе дополнительного образования</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Методологический блок</td><td rowspan="4">Практико-ориентированный подход</td><td colspan="2">Принципы изучения ДУ в системе ДО с целью формирования ЦКМ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Общедидактические: фундаментальности, наглядности, доступности,
систематичности</td></tr>
<tr><td colspan="2">Частные принципы практико-ориентированного подхода и математического моделирования: междисциплинарности, адекватности, соответствия модели решаемой задаче, упрощения</td></tr>
<tr><td colspan="2">Специальные принципы формирования целостной картины мира:
учёта возрастных особенностей, интеграции знаний, комплексности, обогащения деятельности, единства аффекта и интеллекта</td></tr>
</table>

Содержательно-организационный блок

Методические требования к курсу ДУ, ориентированного на формирование ЦКМ старшеклассника, отличающие курс от традиционного:

а) тщательный отбор и структурирование математического содержания в строгом соответствии с целью обучения - формированием ЦКМ старшеклассника и изоморфизмом систем реального мира: к изучению берутся дифференциальные уравнения, выражающие наиболее общие законы реального мира;

б) преимущественное использование IT-средств, систем компьютерной алгебры, визуализации при нахождении аналитических и численных решений ДУ

в) реализация активных форм обучения, обеспечивающих изменения в личностной сфере старшеклассника, обуславливающих осознание старшеклассником своего места и роли в окружающем мире;

г) осуществление идеи непрерывного образования: конструируемый курс ДУ должен служить пропедевтической основой для продолжения образования на следующем уровне.

Курс ДУ, ориентированный на формирование ЦКМ старшеклассника на основе изучения наиболее общих законов окружающего мира: естественного роста, логистического, колебаний, взрывного развития, взаимодействия конкурирующих видов.

Методы: информационно-рецептивный; проблемного изложения; частично-поисковый; исследовательский	**Формы:** теоретические и практические занятия, лабораторные работы, исследовательские проекты	**Средства:** систематизированный набор понятийных карт, практико-ориентированные задачи, система компьютерной алгебры Mathcad, IT-решатели ДУ

Диагностический блок

Критерии и показатели сформированности ЦКМ старшеклассника

Знаниевый критерий: владение наиболее общими законами окружающего мира, выраженными на языке ДУ (естественного роста, логистический, колебаний, взаимодействия конкурирующих видов, взрывного развития) и алгоритмы их распознавания в практико-ориентированных задачах	**Операционно-деятельностный:** умения решать простейшие ДУ, применять знания о ДУ для описания картины мира, его взаимосвязей, взаимозависимостей; умения интегрировать знания, обобщать; навыки активной творческой деятельности; владение этапами математического моделирования	**Ценностно-смысловой:** личная оценка явлений действительности, суждения о значимости и целостности мира, его гармонии, схожести закономерностей различных областей знания, общности явлений неживой и живой природы, осознание своего места и активной роли в окружающем мире

Уровни сформированности ЦКМ: I- низкий, II -средний, III- высокий

Рисунок 3 - *Модель изучения ДУ в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ старшеклассников.*

Методологический блок конструируемой модели составляют практико-ориентированный подход к обучению математике, общедидактические принципы (фундаментальности, наглядности, доступности, систематичности), частные принципы практико-ориентированного подхода и математического моделирования (междисциплинарности, адекватности, соответствия модели решаемой задаче, упрощения) и специальные принципы формирования целостной картины мира (учёт возрастных особенностей, интеграции знаний, комплексности, обогащения деятельности, единства аффекта и интеллекта).

Разработкой основных теоретических положений практико-ориентированного подхода при обучении математике занимались В. Блюм [154], М.В. Егупова [42-49], С.Н. Дворяткина [38], Ю.М. Колягин [71], Л.М. Фридман [141, 142], Хуторской А.В. [145], С.В. Щербатых и др. Проблемам практико-ориентированного обучения в «контексте будущей специальности»[25] посвящены труды А. А. Вербицкого.

Термин «практико-ориентированное обучение» имеет в методической отечественной литературе неоднозначное содержание. Для школьного образования - это «обучение, ориентированное на применение математики в повседневной жизни и формирование у обучающихся понимания базовой роли математики» [46], в котором математическое моделирование выступает как основное средство «описания и разрешения реальных жизненных ситуаций» [46]. Определение понятия «практико-ориентированное обучение математике в школе»[46], [49] дано в работах М.В. Егуповой как «специально организованный познавательный процесс, направленный на формирование у учащихся представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные объекты, а также на развитие умений применять изученные математические понятия, результаты, методы для исследования простейших объектов действительности, решения практико-ориентированных задач» [49].

Если говорить о вузе, то понятие «практико-ориентированное обучение имеет более широкое содержание, оно означает не только «реальную математику для жизни», но и «обучение в контексте будущей специальности» [38;39; 65; 103; 159], «прикладную направленность обучения, профилизацию» [45; 46; 65; 103; 159]. Практико-ориентированное обучение в вузе «рассматривается в контексте будущей специальности, в плане развития профессионального потенциала студентов» [38].

В англоязычной научно-педагогической литературе термин «практико-ориентированное обучение имеет два различных по смыслу эквивалента. Один из них - Practice-Oriented Training, Practice-Based Learning»[158, 159] - по семантике ближе к понятию контекстного обучения с ярко выраженной прикладной направленностью, второй - «Mathematics in Everyday Life, Real-Life Mathematics, Real Life Based Problems»[153;158; 159] - это обучение математике, с выходом в ее обширные применения в повседневной жизни; такое понимание математики формирует у обучающихся понимание роли математики в качестве главного инструмента при анализе, моделировании и разрешении различных ситуаций в рутинной обыденной жизни.

Одним из основных средств реализации практико-ориентированного подхода при обучении математике признанно является практико-ориентированная математическая задача. В методической литературе такие задачи также называют по-разному: практико-ориентированные, профессионально-направленные, прикладные задачи и др. По мнению ученых-методистов «практико-ориентированная задача -это некоторая абстрактная модель реальной проблемной ситуации прикладного характера в знаковой или образнографической форме и решаемая математическими средствами» [42]. М.В. Егупова определяет «практико-ориентированную задачу как задачу, связанную с практическими приложениями математики и представляющая собой содержательную модель реального явления» [45]. Для общего образования «практико-ориентированные задачи – это задачи из окружающей действительности, которые тесно связанны с формированием практических навыков, необходимых в повседневной жизни»

[114]. Вузовский курс математики «представляет большое разнообразие средств для построения необходимой модели» [110]. «Задача, направленная на обучение практическим приложениям математики, так называемая задача на приложения – это задача, основанная на содержательной модели реального объекта, математическая модель которого может быть построена средствами школьного или вузовского курса математики» [114].

По мнению С.Н. Дворяткиной эффективным средством профессионализации в вузе «является практико-ориентированная задача, которая реализует проблемную ситуацию и определяет её модель профессиональной сферы деятельности, её исследование осуществляется средствами математического аппарата» [38].

Значимую роль практико-ориентированных задач в обучении математике признавал В.И. Арнольд. По его мнению именно «умение математически исследовать явления реального мира должно быть основным результатом математического образования» [8-11].

Г.И. Саранцев подчёркивает значение практико-ориентированного обучения для формирования научной картины мира: «осознание связи идеального и реального, происхождения математических абстракций из практики, характера отражения математической наукой окружающего мира, роли математического моделирования в научном познании и практике» [122].

Таким образом, математические практико-ориентированные задачи традиционно присутствуют в содержании школьного и вузовского обучения. Вспоминая одно из основополагающих утверждений Л.Д. Кудрявцева о том, что «математика едина, и не стоит категорично противопоставлять практико-ориентированные задачи и задачи чистой математики» [71]. «Чистая» и «прикладная» математика представляют собой «две стороны одной медали», «две тесно связанные части, не отделимые друг от друга» [71]. Прикладная математика имеет дело с математическими моделями, при построении которых основным средством решения прикладных задач выступает математическое моделирование.

Значение практико-ориентированных задач в обучении математике достаточно велико. В монографии М.В. Егуповой подчёркивается «бинарная роль практических приложений математики» [47]. Это означает, что «с одной стороны, работа с практико-ориентированными задачами способствует созданию в сознании обучающихся представлений о математике и математическом моделировании как о едином инструменте описания реального окружающего мира, а, с другой стороны, - приводит к повышению предметных результатов» [47].

Практико-ориентированные задачи выполняют «бинарную функцию в обучении:

а) способствуют интеллектуальному, творческому развитию обучающихся, повышению их мотивации к обучению математике, ведут к пониманию главенствующей роли математики в общей культуре человека;

б) достижению более высоких образовательных результатов» [47].

Понятие «практико-ориентированной задачи для школьного курса математики» [47] дано в работе М.В.Егуповой. Разделяя мнение этого автора, под «практико-ориентированной задачей для курса ДУ, ориентированного на формирование ЦКМ старшеклассника, будем понимать задачу, которая основана на содержательной модели реального объекта, математическая модель которого может быть построена средствами математического моделирования на основе дифференциальных уравнений» [89].

Практико-ориентированный подход к обучению старшеклассников геометрии определён М.В. Егуповой следующим образом: «практико-ориентированный подход к обучению геометрии в школе основан на бинарной роли практических приложений математики, обеспечивающий с одной стороны понимание геометрии, а с другой – понимание окружающего мира с помощью геометрии» [42].

Практико-ориентированный подход к обучению математике отражает бинарность образовательного процесса: с одной стороны – необходимость понимания математики при решении практико-ориентированных задач, с другой –

понимание окружающего мира с помощью математики. Практико-ориентированное обучение математике в школе направлено не только на усвоение ряда фактов и способов действий, но и должно помочь школьнику обрести способность объяснять с помощью этих фактов различные явления действительности, устанавливать взаимосвязи между объектами реального мира. «Именно способность математизировать информацию об окружающем мире и получать на основе этого новую информацию является одной из характеристик самостоятельно мыслящего, интеллектуально развитого человека. В этом и состоит практико-ориентированность обучения математике в школе» [150].

Опираясь на мнение ряда авторов под «практико-ориентированным подходом к обучению старшеклассников решению дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования будем понимать требования к учебному процессу, обеспечивающие интегрированное обучение, включающее не только решение задач практико-ориентированного содержания, но и такое участие обучающихся в активной образовательной деятельности, при котором достигается понимание старшеклассниками реальной действительности с точки зрения ДУ, осознание своего места в окружающем мире» [87], «участие школьников в различных формах активной учебно-познавательной деятельности, освоении метода математического моделирования, готовящее старшеклассников к непосредственному активному участию в жизни и осознанию своей роли в этом процессе» [89].

Общедидактические принципы фундаментальности, наглядности, доступности, систематичности (В.А. Сластенин) [126] реализуются при отборе содержания курса ДУ, основанном на наиболее общих законах реального мира. Частные принципы математического моделирования: адекватность, соответствия модели решаемой задаче, упрощения [143], - отражают требования к обучению решению практико-ориентированных задач. Организация обучения в конструируемой модели реализована в соответствии с общедидактическими принципами и специальными принципами формирования целостной картины мира: учёт возрастных особенностей, интеграции знаний, комплексности, обогащения деятельности, единства аффекта и интеллекта [97].

Целевой и методологический блоки тесно связаны со следующим, ***содержательно-организационным блоком***.

С учётом целевых установок, методологических положений конструируемой модели был создан *курс изучения ДУ*, направленный на формирование ЦКМ старшеклассника в системе дополнительного образования (рисунок 4).

	Тема. Дифференциальные уравнения (ДУ)	33		33	Виды занятий
1.	Основные понятия теории ДУ	3	*1*	*2*	Лекционно-практич.занятие
2.	Аналитическое решение ДУ, разделение переменных	3	*1*	*2*	Лекционно-практич.занятие
3.	Решение ДУ с помощью IT-технологий	3	*1*	*2*	Лекционно-практич.занятие
4	ДУ 1-го порядка. Закон естественного роста. Решение задач с применением среды Mathcad	3	*1*	2	Лекционно-практич.занятие
5.	ДУ 1-го порядка. Логистический закон. Решение задач с применением среды Mathcad	3	*1*	2	Лабораторная работа
6.	ДУ 1-го порядка. Логистический закон. Решение задач с применением среды Mathcad	3	*1*	2	Лабораторная работа
7.	ДУ 2-го порядка. Закон колебаний. Решение задач с применением среды Mathcad	3	*1*	2	Лабораторная работа
8.	ДУ 2-го порядка. Закон колебаний. Решение задач с применением среды Mathcad	3	*1*	2	Практикум
9.	Системы ДУ. Закон взаимодействия двух противоборствующих видов. Решение задач с применением среды Mathcad	6	*2*	4	Конференция, обзорная лекция, беседа
10.	Защита проектов по пройдённым темам	3	1	2	Презентация + доклад
Тема 6 Итоговое занятие. Круглый стол «НОУ – шаг в будущее».		3		3	Конференция
	Итого:	216	82	134	

Рисунок 4 – *Курс ДУ, ориентированный на формирование ЦКМ старшеклассников*

Пункт 1 имеет целью мотивацию старшеклассников на изучение предлагаемого фрагмента теории дифференциальных уравнений: исторические аспекты развивают познавательный интерес обучающихся, а иллюстрации приложений теории к различным областям человеческой деятельности способствуют пониманию старшеклассниками целесообразности изучения предлагаемого материала, особенно в связи с предстоящим выбором будущей профессии.

Пункт 2 имеет пропедевтический характер, актуализируются имеющиеся у старшеклассников умения интегрирования, добавляются необходимые математические сведения, материал обобщается и систематизируется.

Пункт 3 посвящён актуализации имеющихся у старшеклассников знаний системы Mathcad, ознакомлению с новым материалом,

Пункты 4 – 10 – это изучение наиболее общих законов природы, выраженных на языке дифференциальных уравнений, решение практико-ориентированных задач соответствующего содержания. Среди наиболее общих законов окружающего мира можно выделить закон естественного роста, логистический закон, закон взаимодействия противоборствующих видов, закон колебаний. Учащиеся знакомятся с приложениями дифференциальных уравнений в различных областях знаний, а также получают задания для выполнения групповых исследовательских проектов. Курс завершается выполнением и защитой исследовательских проектов.

Основными методическими требованиями к построению курса ДУ, ориентированного на формирование ЦКМ старшеклассника, соответствующими дидактическим принципам фундаментальности, наглядности, доступности, систематичности и отличающими этот курс от стандартного вузовского, является:

а) тщательный отбор и структурирование математического содержания в строгом соответствии с целью обучения - формированием ЦКМ старшеклассника, и системным изоморфизмом; к изучению берутся наиболее общие законы, формой выражения которых являются дифференциальные уравнения, свидетельствующие о целостности и единстве окружающего мира;

б) преимущественное использование IT-средств, систем компьютерной алгебры, визуализации при нахождении аналитических и численных решений ДУ;

в) реализация активных форм обучения, обеспечивающих изменения в личностной сфере старшеклассника, обуславливающих осознание старшеклассником своего места и роли в окружающем мире;

г) осуществление идеи непрерывного образования: конструируемый курс ДУ может служить пропедевтической основой для продолжения образования на следующем уровне.

Для старшеклассников вначале ставятся практико-ориентированные задачи на языке взаимосвязей в окружающем мире, затем взаимосвязи описываются с помощью дифференциальных уравнений, которые далее решаются в компьютерных средах, с применением различных IT-инструментов и средств компьютерной алгебры. Целесообразность выбора пакета символьной математики Mathcad в качестве одного из ведущих средств обучения в конструируемой модели продиктована требованиями фундаментальности, доступности, и выполнением ряда факторов:

- на уроках информатики старшеклассники знакомятся с Mathcad,

- применение пакета Mathcad позволяет избежать вычислительных трудностей, связанных с аналитическими методами решения ДУ.

В результате такой организации изучения дифференциальных уравнений происходят изменения личной точки зрения обучающегося на объект изучения, формируется целостная картина мира старшеклассника, т.к. содержание курса позволяет акцентировать внимание на ведущей идее обучения: одно дифференциальное уравнение может описывать целый класс явлений окружающего мира.

Выбор *понятийных карт (concept map)* по С.Н. Лысенковой [93] в качестве средства обучения в конструируемой модели продиктован реализацией принципов фундаментальности, наглядности, доступности, систематичности. Каждая из карт соответствует изучаемому закону: естественного роста, логистическому, закону взаимодействия противоборствующих видов, колебаний, взрывного роста.

Понятийные карты позволяют «визуально представить структуру изучаемого курса, показать взаимосвязь понятий в пределах курса» [4]. Составление понятийных карт, с помощью которых «устанавливаются связи между новыми понятиями и уже известными, помогает систематизации их математических знаний» [4]. Тем самым «достигается взаимосвязанность понятий, устанавливается их иерархическая структура, прослеживаются межпредметные связи, и знания учащихся становятся целостными, у них формируется представление о единстве мира. Понятийные карты помогают образному представлению основных идей рассматриваемой темы» [80].

Понятийные карты представляют собой визуальные представления информации. Понятийные карты особенно полезны для обучающихся, у которых наиболее развита визуальная компонента мышления, хотя они могут принести пользу любому учащемуся. Они являются мощной стратегией исследования, потому что помогают увидеть объект или процесс в целом, понятие со всеми его связями. Понятийные карты очень хорошо работают при освоении материала, который имеет визуальные элементы или в тех случаях, когда важно видеть и понимать отношения между разными вещами. Они также могут использоваться для анализа информации, сравнения: сопоставления и противопоставления.

Каждая из понятийных карт связана с набором практико-ориентированных задач. Решение практико-ориентированных задач, соответствующих каждой из систематизированного набора понятийных карт, выступает как стимулирующий мотив их изучения и вызывающих интерес к этим наиболее общим абстрактным законам. Педагогу необходимо тренировать учащихся в умении анализировать задачную ситуацию, рассматривать её с разных сторон, не теряя при этом из виду целое, выделять различные аспекты и связывать их между собой, выбирать из имеющегося систематизированного набора понятийных карт необходимую, осуществлять поиск. В этой связи проявляется единство аффекта и интеллекта при работе с понятийными картами. При решении практико-ориентированных задач, соответствующих каждой из понятийных карт, у обучающихся формируются определённые формы мышления, необходимые для понимания явлений и процессов, происходящих в окружающем нас мире, происходит обогащение деятельности. Понятийные карты далее применяются для решения практико-ориентированных задач по алгоритму: определить цель задачи, определить направленность, вид информации для составления задачи, выбрать структуру задачи и решение.

Каждая из понятийных карт состоит из словесного описания закона, дифференциального уравнения, примера моделирования одной из практико-ориентированных задач – модельной задачи, списка-перечня практико-ориентированных задач, относящихся к данному закону. К каждой из понятийных карт составлен набор практико-ориентированных задач. К систематизированному набору понятийных карт в формируемой модели предъявляются методические требования фундаментальности, наглядности, доступности, систематичности, обогащения деятельности, единства аффекта и интеллекта.

Приведём примеры двух понятийных карт для закона естественного роста и логистического закона. Оставшиеся три понятийные карты будут рассмотрены во второй главе. Также во второй главе будет представлен набор практико-ориентированных задач для каждой из понятийных карт, список примерных тем для исследовательских проектов.

Понятийная карта и перечень практико-ориентированных задач, относящихся к закону естественного роста: задачи физики, экономики, биологии, химии.

1. Популяционная динамика в условиях неограниченности ресурсов. Модель Мальтуса (1778 г.), описывает размножение популяции со скоростью, пропорциональной её численности. Модель экспоненциального роста популяции, описывает рост клеточных популяций в отсутствие лимитирования.

2. Радиоактивный распад вещества происходит со скоростью, пропорциональной массе нераспавшегося вещества.

3. Воздействие рекламы в условиях отсутствия вешнего регулирования: скорость изменения числа знающих о товаре покупателей пропорциональна числу знающих о товаре покупателей.

4. Скорость роста числа фирм, занимающихся определённым бизнесом, в условиях отсутствия конкуренции происходит пропорционально числу существующих фирм.

5. Текучесть кадров (скорость изменения численности работников) на предприятии пропорциональна численности работников в условиях отсутствия внешнего регулирования.

6. Остывание тела происходит со скоростью, пропорциональной разности температур тела и окружающей среды.

Модельная задача неограниченного естественного роста, модель Мальтуса.

Известно, что рождаемость и смертность особей в изолированной популяции в условиях неограниченных ресурсов пропорциональны численности популяции. Найти закон изменения численности такой популяции во времени. Моделирование практико-ориентированной задачи, см. [9; 39].

1. Математизация. Обозначим через $x(t)$ функцию численности популяции к моменту времени t, $R(x)$ — число родившихся и $S(x)$ — число умерших особей

2. Формализация, математическая модель. Пусть за промежуток времени Δt прирост численности Δx некоторой популяции равен $\Delta x = R - S$, где R — число родившихся и S — число умерших за время Δt особей. Считаем, что величины R и S пропорциональны промежутку времени Δt: $R = R(x)\Delta t, S = S(x)\Delta t,$ тогда $\Delta x = ((x) - S(x))\,\Delta t.$

Разделив это равенство на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение, которое является моделью описанного в задаче процесса: $\dot{x} = R(x) - S(x)$

В условии известно, что рождаемость и смертность пропорциональны численности популяции, т.е. $R(x) = \alpha x, S(x) = \beta x$. Обозначим: $r = \alpha - \beta$, тогда получим модель неограниченного роста (модель Мальтуса): $\dot{x} = rx$.

*3. Внутримодельное решение***.** Полученное дифференциальное уравнение имеет первый порядок и переменные в нём разделяются, его можно решить аналитически, можно использовать какой-либо интернет – «решатель».

Получим: $x(t) = x_0 e^{rt}$, где $x_0 = x(0)$.

4.Интерпретация. Эта модель описывает изолированную популяцию, которая развивается в условиях неограниченных ресурсов. Такие условия в природе встречаются крайне редко. Примером может служить размножение видов, завезённых в места, где имеется много пищи, отсутствуют конкурирующие виды и хищники, например, кролики в Австралии. Это модель неограниченного роста.

Закон естественного роста выражает следующий характер зависимости: пусть дана некоторая величина величины $y(x)$. Скорость её изменения (возрастания или убывания) $y'(x)$ пропорциональна самой величине $y(x)$ Математически закон естественного роста выражается с помощью дифференциального уравнения первого порядка: $y' = ky$.

Общим решением этого дифференциального уравнения является функция, выражающая экспоненциальную зависимость:

$y = Ce^{kx}$, где C – const.

Если $C > 0, y(x) \geq 0$, то при $k > 0$ будем иметь неограниченное возрастание величины $y(x)$ на $[0, \infty)$, а при $k < 0$ убывание величины $y(x)$ на $[0, \infty)$.

Если для этого дифференциального уравнения задать начальные условия: $y(x_0) = y_0$, то дифференциальное уравнение будет иметь единственное решение: $y = y_0 e^{kx}$. Этот факт выражает принцип научного детерминизма, ввиду которого последующее поведение величины $y(x)$ однозначно определяется характером её поведения и начальным состоянием. Принцип научного детерминизма дополняет конструируемую целостную картину мира старшеклассника ещё одним важным законом для объяснения различных явлений природы

Понятийная карта и перечень практико-ориентированных задач, относящихся к логистическому закону: задачи физики, экономики, биологии, химии.

1. Популяционная динамика в условиях ограниченности ресурсов. Модель ограниченного роста популяции.

2. Модель организации рекламной кампании.

3. Изменение концентрации химического вещества - кинетическое уравнение реакции в дифференциальной форме.

4. Модель развития эпидемии.

5. Динамика роста объёма производства в условиях конкурентного рынка.

6. Динамическая закономерность развития инноваций.

Модельная задача – пример моделирования организации рекламной кампании по рекламе некоторого нового товара или услуги на основе логистического закона. Известно, что после рекламных объявлений скорость распространения рекламы пропорциональна как числу знающих о рекламе покупателей, так и числу о ней не знающих. Необходимо найти закон распространения рекламы.

При математическом моделировании этого процесса прибегаем к следующим этапам: математизация; формализация, математическая модель; внутримодельное решение; интерпретация [20; 33].

1. Математизация. Обозначим через t время, прошедшее с начала рекламной кампании; через $x(t)$ – число информированных клиентов; N – общее число потенциальных покупателей. Дополнительно предполагаем, что узнавшие о товаре потребители распространяют информацию среди неосведомлённых.

2.Формализация, математическая модель. По условиям задачи имеем:

$$x' = kx(N - x)$$

3.Внутримодельное решение. Выполняя разделение переменных и интегрирование, получим:

$$\frac{dx}{x(N-x)} = k\,dt$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x}\right)dx = k\,dt$$

$$\int \frac{1}{N}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x}\right)dx = \int k\,dt$$

$$\frac{1}{N} ln\, x - \frac{1}{N}\ln(N-x) = kt + C$$

$$\frac{x}{N-x} = Ce^{Nkt},\ C\text{ -const}$$

Выражая функцию $x(t)$, получаем общее решение логистического дифференциального уравнения:

$$x(t) = \frac{NCe^{Nkt}}{Ce^{Nkt}+1}, \text{ C – const.}$$

4. Интерпретация. Число информированных клиентов $x(t)$ удовлетворяет логистическому дифференциальному уравнению, при небольших значениях переменной t функция $x(t)$ растёт примерно, как экспонента, а при $t \to \infty$ функция возрастает и стремится к величине N.

Диагностический блок модели изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования предназначен для оценки уровня сформированности целостной картины мира старшеклассника.

Формирование целостной картины мира старшеклассника, описываемой языком ДУ, связано с опытом получения доказательных представлений человека о мире в его единстве, с определением своего места в этом мире. Сформированность целостной картины мира характеризуют понимание старшеклассником связей и зависимостей в окружающем мире, выработка общих представлений о законах его развития и функционирования, выраженных на языке ДУ. Проявляется ЦКМ через отношение человека к действительности – это его знания, мысли, чувства, поступки. Обучение и образование ориентирует человека в мире, способствуют созданию собственной картины мира и зарождению собственного мировоззрения, объективного миру, поэтому изучение ДУ при обучении старшеклассников является целесообразным при формировании целостной картины мира.

Конструирование диагностики сформированности ЦКМ старшеклассника на основе изучения ДУ основывается на том, что ЦКМ – это отражение в сознании старшеклассника окружающего мира в виде знаний, умений, установок, личностных ориентаций, отношения к предмету изучения. Поэтому её сформированность характеризуют три критерия:

- знаниевый: владение наиболее общими законами окружающего мира, выраженными на языке ДУ (естественного роста, логистический, закон колебаний, закон взаимодействия конкурирующих видов) и алгоритмы их распознавания в практико-ориентированных задачах;

- операционно-деятельностный: умения применять знания о дифференциальных уравнениях для описания картины мира, его взаимосвязей, взаимозависимостей; умения интегрировать знания, обобщать; навыки активной творческой деятельности (работа с гипотезами); владение этапами математического моделирования (математизация, формализация, внутримодельное решение, интерпретация);

- ценностно-смысловой: личная оценка явлений действительности, суждения о значимости мира, его гармонии, осознание своего места и активной роли в окружающем мире.

Диагностика знаниевой и операционно-деятельностной составляющих ЦКМ старшеклассника проводилась в соответствии с показателями:

1. Сформированность междисциплинарности знаний;

2. Сформированность мыслительных операций – анализ, синтез, индукция, дедукция, абстрагирование, обобщение, умение обосновывать, доказывать, и т. д.;

3. Развитость адекватного видения (не только смотреть, но и видеть) – умения наблюдать, прогнозировать, работать с гипотезами, генерировать идеи;

4. Сформированность понимания общности процессов, происходящих в природе, целостности окружающего мира.

Показатели:

- знаниевый критерий: владение наиболее общими законами окружающего мира, выраженными на языке ДУ и алгоритмы их распознавания в практико-ориентированных задачах;
- операционно-деятельностный: умения применять знания о дифференциальных уравнениях для описания картины мира, его взаимосвязей, взаимозависимостей; умения интегрировать знания, обобщать; навыки активной творческой деятельности (работа с гипотезами); владение этапами математического моделирования (математизация, формализация, внутримодельное решение, интерпретация);

- ценностно-смысловой: личная оценка явлений действительности, суждения о значимости мира, его гармонии, осознание своего места и активной роли в окружающем мире.

На основе критериев, показателей определены уровни сформированности ЦКМ старшеклассника:

I — низкий, II — средний, III — высокий.

Разработка уровней сформированности ЦКМ старшеклассника при изучении ДУ в настоящей работе была осуществлена с опорой на

- определение понятия *ЦКМ старшеклассника на основе изучения ДУ,* данное в работе,

- и авторскую методику исследования категориальных структур мировосприятия С.В. Тарасова [132], т.е. была проведена адаптация/модификация методики С.В. Тарасова к оценке результативности изучения старшеклассниками ДУ с целью формирования ЦКМ.

ЦКМ школьника относится к категориальным структурам мировосприятия, поэтому считаем целесообразным адаптировать требования к уровням сформированности ЦКМ Тарасова С.В.

Формирование целостной картины мира старшеклассника, описываемой языком ДУ, связано с опытом получения доказательных представлений человека о мире в его единстве, с определением своего места в этом мире. Понимание связей и зависимостей в окружающем мире, выработка общих представлений о законах его развития и функционирования, выраженных на языке ДУ. Проявляется через отношения человека к действительности – его знания, мысли, чувства, поступки. Образование ориентирует человека в мире, способствует созданию собственной картины мира и зарождению собственного мировоззрения, объективного миру.

Уровни сформированности ЦКМ старшеклассника при изучении ДУ (адаптация диагностики С.В. Тарасова [132])

Высокий уровень сформированности целостной картины мира – III уровень: у учащихся определяются элементы сформированности категориального мышления; старшеклассники знают о таких научных категориях, как ЦКМ, ДУ; признают ДУ в качестве одного из основных инструментов описания (моделирования явлений) окружающего мира; представления старшеклассников об окружающем мире носят целостный характер; старшеклассники самостоятельно выделяют существенные признаки природных явлений и их причинно-следственные связи, распознают в описании явлений природы основные закономерности и формулируют их на языке ДУ; логично и последовательно описывают этапы математического моделирования с помощью ДУ, осознают свою активную роль и значимое место в окружающем мире.

Средний уровень сформированности целостной картины мира - II уровень: у учащихся определяются отдельные элементы сформированности категориального мышления; старшеклассники имеет представление о такой научной категории, как ЦКМ, отмечают значимую роль ДУ в описании окружающего мира, но не рассматривают ДУ в качестве одного из основных инструментов описания окружающего мира; представления старшеклассников об окружающем мире – мозаичные, с элементами целостности; с поддержкой учителя старшеклассники выделяют существенные признаки природных явлений и их причинно-следственные связи; с наводящими вопросами учителя старшеклассники могут распознать в описании явлений природы основные закономерности и сформулировать их на языке ДУ; логично и последовательно описывают этапы математического моделирования с помощью ДУ, осознают свою активную роль и значимое место в окружающем мире.

Низкий уровень сформированности целостной картины мира - I уровень: у учащихся не сформированы элементы категориального мышления; знания учащихся об окружающем мире ограничиваются отдельными разрозненными фактами, не связанными с такими научными категориями, как ЦКМ и ДУ; в описании явлений природы не могут распознать основные закономерности и сформулировать их на языке ДУ, учащиеся имеют наивные ненаучные представления об окружающем мире, не мыслят в категориях дифференциальных уравнений, затрудняются логично и последовательно описать процесс математического моделирования с помощью ДУ, даже с помощью учителя не всегда могут выделить существенные признаки природных явлений и их причинно-следственные связи, обращают внимание на второстепенные незначимые детали; затрудняются распознать в описании явлений природы основные закономерности и выразить их на языке ДУ, хотя в отдельных случаях хаотично и непоследовательно называют этапы математического моделирования; не осознают свою активную роль и значимое место в окружающем мире.

Анкета, разработанная для определения уровня сформированности ЦКМ старшеклассника, находится в приложении - 2.

Определены основные методы диагностики:

- наблюдение,
- беседа,
- оценивание,
- исследовательский проект,
- анкетирование.

Наблюдение проводится в ходе всего процесса обучения, выявляются и регистрируются основные показатели сформированности ЦКМ старшеклассника, построенной на основе ДУ.

Беседа позволяет выяснить ценностные установки старшеклассника, его отношение к окружающему миру и оценке своего места в мире.

Оценивание должно осуществляться в форме текущего и рубежного контроля, при проведении самостоятельных и контрольных работ.

Исследовательский проект, его выполнение и защита проявляют в полной мере уровень сформированности ЦКМ старшеклассника, построенной на основе ДУ.

Анкетирование должно выявить, насколько старшеклассниками усвоены основные взаимосвязи реального мира, его целостность, какие ценностные установки и ориентиры у старшеклассников сформированы. Как себя школьник осознает в окружающем мире? Мыслит ли старшеклассник категориями? Категориями тех законов, которые предлагаются к изучению? Насколько школьник видит эти общие законы, распознает их в явлениях окружающего мира, владеет идеей системного изоморфизма? Какова роль математического моделирования в этом процессе?

Контроль сформированности ЦКМ старшеклассника должен осуществляться в виде текущего и итогового оценивания, анкетирования, опросов, методом экспертной оценки в процессе работы над исследовательскими проектами и их защиты. Сконструированная диагностика призвана выявлять продвижение старшеклассников в сформированности ЦКМ на основе изучения ДУ, давать представление об индивидуальных достижениях школьников, обеспечивать текущий и итоговый контроль за решением поставленной образовательной цели. Диагностика позволяет получить адекватные представления об уровне сформированности ЦКМ старшеклассника и выполнить своевременную коррекцию, определить перспективу развития образовательного процесса. Анализ результатов педагогической диагностики позволяет подобрать эффективные способы организации учебного процесса, выбора средств, форм и методов по формированию у старшеклассников целостной картины мира при изучении ДУ.

Реализация предложенной модели изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования в составе четырёх компонентов (*целевого, методологического, содержательно-организационного и диагностического)* позволит удовлетворить интеллектуальные запросы старшеклассников, потребности в расширении и углублении предметных знаний, выходящих за рамки школьной программы в изучении дифференциальных уравнений, в формировании целостной картины мира.

Выводы по главе 1.

В первой главе проведено теоретическое обоснование сущности формирования целостной картины мира старшеклассников в процессе изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования.

1. В первом параграфе дана характеристика понятия «Целостная картина мира» и обоснована целесообразность её формирования в системе дополнительного образования.

В учении К.Д. Ушинского целостная картина мира – это модель мира, предопределяющая поведение человека в этом мире. Отсюда вытекает значимость формирования целостной картины мира старшеклассников. Требования к образовательным результатам во ФГОС СОО подтверждают этот факт: «учебные предметы «физика», «химия», «биология», «астрономия», «математика» должны обеспечивать сформированность представлений о роли и месте этих предметов в современной научной картине мира старшеклассника». Таким образом в рамках общего образования регламентируются предметные составляющие естественнонаучной картины мира старшеклассника. Целостная же картина мира (ЦКМ) старшеклассника наиболее адекватно может быть сформирована в рамках отдельного учебного курса, который обладает целостностью и устраняет предметную разобщённость. Создание такого курса, ориентированного на формирование ЦКМ старшеклассника, обеспечивается возможностями широкого выбора образовательных программ в системе дополнительного образования.

2. Во втором параграфе обосновано, что методологической основой формирования ЦКМ старшеклассника является практико-ориентированный подход, а метод математического моделирования является одним из наиболее значимых инструментов в этом процессе.

«Практико-ориентированный подход к обучению математике основан на бинарной роли практических приложений математики, обеспечивающий с одной стороны понимание математики, а с другой – понимание окружающего мира с помощью математики» [89].

Под «практико-ориентированным подходом к обучению старшеклассников решению дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования будем понимать совокупность приёмов, способов, обеспечивающих интегрированное обучение, включающее не только решение практико-ориентированных задач, но и участие в различных формах активной учебно-познавательной деятельности, освоении метода математического моделирования, готовящее старшеклассников к участию в жизни и осознанию своей роли в этом процессе» [90].

Основным средством реализации практико-ориентированного подхода является «практико-ориентированная задача, т.е. задача, связанная с практическими приложениями математики и представляющая собой содержательную модель реального явления» [89]. Решается практико-ориентированная задача методом математического моделирования.

3. В третьем параграфе доказано, что основным ресурсом формирования целостной картины мира старшеклассников является изучение дифференциальных уравнений. Аппарат ДУ служит математической основой формирования ЦКМ в системе дополнительного образования. Изучение учащимися старших классов дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования на основе практико-ориентированного подхода с использованием метода математического моделирования создаёт предпосылки к формированию целостной картины мира.

4. Целостную картину мира (ЦКМ) старшеклассника, построенную на основе дифференциальных уравнений (ДУ), определим как научную картину мира, которая является отражением в сознании старшеклассника в виде знаний, умений, ценностных установок реальных процессов, явлений, закономерностей, состояний окружающего мира, подчинённых наиболее общим закономерностям; такое отражение получено на основе математического моделирования изоморфных систем, в котором ДУ выступают в роли ведущего средства; формирование ЦКМ старшеклассника связано с осознанием подростком своего места в мире, с приобретением ценностных ориентаций и установок, т.е. с изменениями в личностной сфере.

5. Результатом четвёртого параграфа является построение модели изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования в составе целевого, методологического, содержательно-организационного и диагностического блоками.

Глава 2. Методика изучения старшеклассниками дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования целостной картины мира

Теоретическая модель изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования целостной картины мира построена в п.1.4. Во второй главе на основе построенной модели разработаем методику изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ, раскроем сущность компонентов модели, их взаимодействие, проведём экспериментальную проверку.

В результате психолого-педагогических исследований выявлено, что в учреждениях дополнительного образования, вопросы, затрагивающие процесс обучения детей с высоким уровнем интеллектуальных способностей, изучаются в целом с позиции развития творческой активности учащихся, а также углублённого изучения конкретных предметов. (Г.Ю. Алексеева, С.В. Белоус, Л.А. Даринская, С.В. Еловская, Н.А. Соколова, Н.В. Уварина и др.). Вместе с тем, хотя авторы широко освещали и изучали указанную проблему (И.Я. Лернер, П.И. Пидкасистый, Т.И. Шамова, Г.И. Щукина и др.), многие её стороны не получили должного освещения, в числе прочего, углублённое изучение старшеклассниками учебного предмета «Математика» в системе дополнительного образования. Однако, встречаются работы, где упор делается на «использование методов, нацеленных на развитие познавательной активности, получение углублённых гуманитарных, естественно-научных, а также межпредметных и метапредметных знаний» [110; 134].

Постоянно увеличиваются масштабы использования математики во всех сферах человеческой жизни, она находит применение в различных научных изысканиях, в области техники и при решении задач практического характера. Благодаря этому различные сферы науки дополняют и обогащают друг друга, что однозначно способствует совершенствованию и развитию самой математики, в том числе её идей и методов. Поэтому курсы математики, изучаемые в системах дополнительного образования, постоянно развиваются. И, ввиду этого, стоит обеспечить преемственность и постоянство при изучении основных разделов математики, в системе школьного и дополнительного образования. Взаимосвязь обязательного обучения математике в общеобразовательной школе и занятий по математике в рамках дополнительного образования выступает как средство осуществления принципов непрерывности и преемственности [89].

Преемственность и последовательность в обучении позволяют разрешить противоречие между необходимостью формирования у будущих выпускников школ целостной картины мира, целостной системы математических знаний, умений, навыков и дискретным характером изучения учебного материала. Преемственность в содержании математической подготовки выступает как непрерывный процесс развёртывания структурных компонентов содержания, плавный переход от одного этапа обучения к другому, постепенное усложнение содержания учебной информации, последовательная смена уровня требований к объёму и глубине усвоения знаний, умений и навыков. В этом случае каждая следующая ступень образовательной системы является естественным продолжением, развитием предыдущей, что характерно при спиралевидном расположении материала, а учащиеся имеют возможность постепенно и непрерывно расширять знания по конкретной учебной проблеме, не допуская разрывов.

Изучение курса ДУ при опоре на школьные знания решает задачи:

- позволяет сформировать у старшеклассников понимание роли ДУ при решении практико-ориентированных задач методом математического моделирования,

- обеспечивает усвоение первоначальных понятий теории ДУ,

- обладает определённой новизной для развития интереса обучающихся,

- способствует формированию целостного мировоззрения, целостной картины мира,

- даёт возможность обучить старшеклассников аналитическому и численному решению ДУ.

2.1. Цели и отбор содержания курса ДУ в системе дополнительного образования.

Цель обучения школьников математике в дополнительном образовании состоит в расширении и углублении знаний, приобретённых ими во время изучения школьного курса математики, в развитии способностей и навыков учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой, в зарождении, развитии и поддерживании его до познавательного уровня. Эта целевая установка отражает постановку целей на высшем уровне целеполагания, она соответствует социальному заказу общества и требованиям нормативных образовательных документов [72, 119, 136, 137].

На среднем уровне целеполагания – уровне учебного курса – цель обучения ставится следующим образом: формирование ЦКМ старшеклассника на основе изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования. Этот уровень целей отражён в п. 1.4, в схеме «Модель изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования».

На нижнем уровне целеполагания – уровне целей для каждого учебного занятия – формулируются задачи по достижению формирования отдельных компонентов ЦКМ старшеклассника: знаний основных законов, выраженных на основе ДУ, освоения этапов математического моделирования (математизация, формализация, внутримодельное решение, интерпретация) [45], освоения IT-инструментов решения ДУ, приобретение личностных качеств и ценностей при изучении ДУ (личная оценка явлений действительности, суждения о значимости мира, его гармонии, осознание своего места и активной роли в окружающем мире) и т.п.

Сложность и многогранность мировоззрения обуславливается тем фактом, что оно напрямую связано с возрастными и индивидуальными особенностями, с различными аспектами личности человека (знаниями, умениями, отношениями, мотивами, оценкой и идеалами).

Установление связи мировоззрения с предметной или профессиональной деятельностью подводит к такому феномену, как «частичное мировоззрение» – явление индивидуального сознания, источник происхождения которого связан с отдельной наукой. Феномен «частичного мировоззрения» характеризует отношение человека к миру через призму определённой науки, с присущей ему экстенсивной неполнотой и интенсивной ограниченностью. В современных исследованиях А.Л. Жохова, И.Е. Карелиной, А.А. Касьяна одной из форм частичного мировоззрения выступает «математическое мировоззрение» [61].

Основным содержанием курса ДУ в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ старшеклассника являются понятия теории ДУ, теоретические утверждения этой теории, практико-ориентированные задачи, решаемые методом математического моделирования с использованием ДУ, умения по использованию IT- инструментов при решении практико-ориентированных задач. Изучение новых понятий в курсе математики, как правило, происходит на основе уже известных понятий. Так, введение понятий общего, частного, особого решений ДУ в разрабатываемом курсе должно опираться на понятие решения алгебраического уравнения. Такой же метод введения понятия для решения системы уравнений - с опорой на определение решения алгебраической системы уравнений. Знакомство с методами графического представления решений и изучение свойств решений ДУ нужно начинать с актуализации известных школьникам сведений о монотонности функции и экстремумов. Моделируемый курс ДУ содержит большое количество информации из смежных дисциплин школьного курса: физики, химии, экономики, биологии и др. Эти сведения необходимо сообщать школьникам предварительно перед решением практико-ориентированных задач или на этапе освоения школьниками условия и требования задачи.

Решение новых задач часто сводится к уже решённым известным задачам. Практико-ориентированная математическая задача, решаемая методом математического моделирования, способствует формированию определённых форм мышления, необходимых для освоения окружающей действительности, так как изучает понятия, введённые путём абстрагирования от явлений реального мира. IT-инструменты при решении практико-ориентированных задач позволяют без длительных вычислений получить аналитическое или численное решение задачи, визуализировать его на экране компьютера.

Важно правильно выделить объём и содержание курса ДУ для изучения его старшеклассниками в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ старшеклассника. При этом следует учитывать ряд методических требований:

1. Не следует включать в программу весь тот материал, который старшеклассники будут изучать, поступив в вуз.

2. Отобранный материал должен обладать элементами новизны, чтобы мог заинтересовать обучающихся.

3. Предлагаемый материал должен иметь практико-ориентированный характер, показывать его использование в описании окружающего мира.

4. Необходимо включение историко-математических сведений (историю открытий, символов, фрагменты из жизни математиков и др.).

5. Уделить внимание развитию гуманитарной составляющей математического образования (развитию личностных качеств и мировоззрению обучающихся) [1].

6. Использовать в полной мере активную деятельность самих обучающихся.

При этом задачами для учителя являются:

- формирование у старшеклассников понимание роли дифференциальных уравнений в описании окружающего мира,
- обеспечение усвоения простейших понятий теории ДУ,
- обучение учащихся решению выделенных видов дифференциальных уравнений,
- показ применения дифференциальных уравнений к решению практико-ориентированных задач.

На основании построенной в п.1.4 модели предлагаем следующие методика изучения курса ДУ в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ старшеклассника на основе практико-ориентированного подхода:

- введение основных понятий теории ДУ на интуитивно – образном уровне с использованием приёмов пропедевтики и с опорой на имеющиеся знания по учебным предметам «Алгебра и начала анализа» , «Геометрия»,
- широкое применение IT-средств: пакетов символьной математики, IT-решателей,
- применение понятийных карт с целью достижения целостности теоретических знаний учащихся, их осознанности и систематичности
- использование практико-ориентированных задач, углубляющих и расширяющих знания старшеклассников, знакомящих с разными видами законов, выраженных на языке ДУ,
- ознакомление с методом математического моделирования – одним из основных в математике, используемым при решении профессиональных задач,
- выполнение и защита исследовательских проектов, проведение лабораторно-практических работ.

Основываясь на принципах преемственности и последовательности в обучении, а также принципах изучения ДУ в системе ДО с целью формирования ЦКМ, необходимо формировать базовые понятия и методы ДУ в системе дополнительного образования, т.е. весь разрабатываемый курс ДУ рассматривать как основу для дальнейшего изучения ДУ на следующем уровне образования. В обучении физико-математическим специальностям дифференциальные уравнения принадлежат к одному из базовых курсов. Тем самым выпускники школ готовятся к успешному продолжению обучения на следующем уровне образования [113].

При отборе содержания изучаемого курса необходимо руководствоваться принципами научности, фундаментальности, последовательности и доступности в обучении. Для этого введение основных понятия дифференциальных уравнений необходимо осуществлять с опорой на имеющиеся у школьников знания о решении алгебраических уравнений, а из аналитических методов решения ДУ рассматривать лишь метод разделения переменных, который основан на свойствах пропорций из школьного курса алгебры. Решение дифференциальных уравнений с помощью IT-технологий и системы MathCad позволит избежать вычислительных трудностей и будет способствовать поддержанию интереса школьников к изучению математики. Переход к решению практико-ориентированных задач, выражающих наиболее общие законы окружающего мира: естественного роста, логистический, колебаний, взрывного роста, взаимодействия противоборствующих сил. - позволит выработать целостное представление у школьников об окружающем мире. Выполнение и защита исследовательских проектов логично завершит обучение на курсе. Диагностирование и тестирование старшеклассников в течении всего обучения направлено на непрерывное оценивание уровня сформированности целостной картины мира. Инструментарием мониторинга выступает совокупность тестов, анкет, диагностических методик, эссе, мини-рефератов, резюме.

Анализ школьных учебников, ФГОС и пособий для учителей показывает, что в курс школьной программы входит изучение простейших дифференциальных уравнений. Элементы дифференциального и интегрального исчислений, начала которых изучаются в старших классах общеобразовательной школы, тесно связаны с дифференциальными уравнениями. Использование понятия дифференциального уравнения, его общего и частного решений, простейших видов дифференциальных уравнений и способов их решений. В учебнике «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов под ред. А.Н. Колмогорова рассматривались (1990-2020) дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, в которых первая производная пропорциональна самой функции, и дифференциальные уравнения второго порядка, в которых вторая производная функции отличается от самой функции только знаком. Уравнением первого типа описывается процесс радиоактивного распада, а второго – гармонические колебания. С понятием дифференциального уравнения старшеклассники знакомятся при изучении предмета «Алгебра и начала анализа». Целесообразно добиваться того, чтобы на уроках физики и других предметах естественного цикла (химии, биологии, географии и др.) знания старшеклассников в области дифференциальных уравнений были бы востребованы [71]. С этой целью практикуется проведение интегрированных уроков химия/математика, биология/математика, физика/математика и др. Практическое применение методов теории дифференциальных уравнений в старших классах школы реализуется в курсе физики, поскольку с результатами интегрирования дифференциального уравнения старшеклассники встречаются уже в 9-м классе при рассмотрении равноускоренного движения.

Среди пособий для общего образования имеются такие, где приведён обширный материал по изучению ДУ и их применений, по решению практико-ориентированных задач [2], [40]. Рассматриваются ДУ первого и второго порядка, задачи о радиоактивном распаде, остывании тела, колебательный процесс. Для нахождения решений ДУ применяется разделение переменных или непосредственная подстановка в уравнение. ДУ включаются в состав проверочных и контрольных работ.

А.Г. Мордкович в своих трудах выделяет уровни строгости изложения введения понятий при изучении математического анализа, А.Я. Цукарь акцентирует внимание на содержательной стороне понятий, И.В. Ситникова формулирует этапы понимания старшеклассниками понятий и выделяет упражнения как основное средство формирования понятий, Г.И. Саранцев формулирует требования к формированию понятий. При этом, как показано в работах Л.М. Фридмана, В.А. Далингера, В.П. Зинченко, И.С. Якиманской и др., при изучении понятий в приоритете всегда должна выступать наглядность [37,93, 107].

В частности, понятия математического анализа учителю приходится формировать при отсутствии более ранних чувственных форм познания, имеющих образную природу. Необходимость формировать наглядные образы при изучении абстрактных математических понятий, и в частности, понятий теории дифференциальных уравнений, доказана в трудах В.А. Далингера, А.Н. Землякова, А.Г. Мордковича, А.Я. Цукаря и др.

Рассмотрим отдельные компоненты курса, работу с понятиями, освоение основных методов, решение задач.

При введении новых для школьника, основных понятий элементов теории ДУ, используем сформулированные выше предложения. Понятия: ДУ, «что значит - решить или проинтегрировать ДУ», порядок ДУ, начальные условия, задача Коши, решение ДУ, - вводятся с опорой на имеющиеся у старшеклассников знания, опыт, с использованием всевозможных приложений и иллюстраций, не преследуя цель определить эти понятия с наибольшей математической строгостью, т.е. формировать интуитивно – наглядные образы этих понятий.

Изучение фрагмента теории всегда предполагает некоторую пропедевтическую работу, так как в процессе изучения нового необходимо опираться на имеющиеся у старшеклассников знания и на их субъектный опыт, поэтому следует активизировать известные учащимся математические сведения и способы деятельности. С этой целью необходимо организовать пропедевтическую деятельность со старшеклассниками [88].

В данном случае для успешного изучения старшеклассниками элементов теории дифференциальных уравнений, с учащимися следует вспомнить известные им понятия, а также расширить и уточнить некоторые понятия, на которые в рамках урочной системы в средней общеобразовательной школе не обращалось достаточного внимания. Это понятия функции, производной, геометрический и механический смыслы производной, производной сложной функции, техника дифференцирования, таблица производных основных элементарных функций, понятия первообразной, неопределённого и определённого интеграла, геометрический и механический смыслы определённого интеграла. Проводить работу по актуализации знаний обучающихся целесообразно не только с помощью вопросно-ответной формы, но и с помощью активных методов: решения устных задач, задач с практико-ориентированным содержанием, выполнения чертежей и пр. При рассмотрении каждого пункта пропедевтического материала следует помнить о необходимых знаниях и умениях, которыми должны владеть старшеклассники в результате работы по актуализации содержания каждого пункта.

При введении понятия ДУ и его решения необходимо организовать пропедевтическую деятельность. Необходимо провести аналогию и противопоставление с понятиями теории алгебраических уравнений, изучаемой ими в рамках школьного курса. Необходимо задать старшеклассникам вопросы: «Как определяется понятие алгебраического уравнения?», «Что такое решение алгебраического уравнения?». Опираясь на знание об алгебраическом уравнении и его решении, учащиеся совместно с учителем выводят понятие дифференциального уравнения, как соотношения, связывающего функцию и её производные, и решения дифференциального уравнения как функции, которая это уравнение обращает в верное равенство. Старшеклассники под контролем учителя формулируют понятие ДУ и дают определение решения дифференциального уравнения. Те сведения, которые учащиеся не могут получить по аналогии, им сообщает учитель.

На этом этапе целесообразно решить задачи.

1. Среди данных уравнений укажите дифференциальные уравнения, определите их порядок:

а) $y(x+1)+y(x)=2x$, б) $y''=\cos x$, в) $xy'''-y''=1$, г) $x^2+3x+2=0$

2. Определите, какие из функций

а) $y=x^3$, б) $y=\ 4x^3$, в) $y=\ -2x^3$, г) $y=x^3\ +12$, д) $y=\ 7x^2$

являются решением дифференциального уравнения $xy'=3y$?

Какой общей формулой можно задать все решения данного ДУ?

Далее иллюстрируя на примерах и не давая строгих математических определений, необходимо пояснить, как определяется порядок ДУ, что значит – решить или проинтегрировать ДУ, что является решением, частным решением, общим решением дифференциального уравнения, показать, как подстановкой в уравнение, можно проверить, является ли данная функция решением ДУ. Обратить внимание старшеклассников на главное отличие решения ДУ от решения алгебраического уравнения: решение алгебраического уравнения – это число в то время, как решение ДУ – это совершенно другой математический объект, это функция. Затем перейти к формулировке определений основных понятий теории ДУ, предоставив самостоятельность старшеклассникам.

Важно отметить, что теория дифференциальных уравнений является непосредственным развитием и углублением дифференциального и интегрального исчислений. Далее для формирования предметных образов целесообразно рассмотреть несколько задач, приводящих к дифференциальным уравнениям с использованием прикладного смысла производной.

Рассмотрим две задачи на составление ДУ, в которых зависимость между неизвестной функцией и ее производной носит прямой пропорциональный характер.

Задача 1. Установить зависимость между переменной массой летящей ракеты и скоростью полёта, если известно, что скорость изменение массы ракеты в зависимости от скорости ракеты пропорциональна массе ракеты с коэффициентом пропорциональности $-\frac{1}{c}$, где $c = const$ - скорость истечения газов из сопла ракеты. Известно, что m_0 – масса ракеты до полёта, т. е. при $v = 0$.

Следуя рекомендациям учителя, школьники вводят необходимые переменные величины: пусть масса ракеты в некоторый момент t равна m, а v - скорость ракеты в тот же момент времени t. Затем выделяют из текста задачи ключевые слова: «изменение массы ракеты m пропорционально массе, т.е. m(t)». На основании этого условия школьники самостоятельно делают вывод о виде зависимости между переменными величинами и составляют соответствующее ДУ:

$$\frac{dm}{dv} = -\frac{m}{c}$$

с начальным условием $m(0)= m_0$.

Замечание: решение этого ДУ будет получено на следующем занятии.

Задача 2**.** Кредит в сто тысяч рублей взят на три года под p= 15% годовых. Какую сумму нужно будет погасить кредитору, если накопительные проценты начисляются непрерывно?

Если обозначить: $a(t)$ – сумма кредита в момент времени t (время измеряется в годах), то на основании формулы сложных процентов, получим:

$$a(\,n) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

где a – начальная сумма, n – число периодов начисления процентов.

Если проценты начисляются непрерывно, что то мгновенная скорость изменения денежной суммы a' может быть выражена как процент от имеющейся в данный момент суммы. Т.е., если $a(t)$ – это та денежная сумма, которая непрерывно изменяется на $p\%$ за единицу времени, то соотношение $a' = a \cdot \frac{p}{100}$ будет выражать динамику роста денежной суммы.

Получаем дифференциальное уравнение:

$$a' = 0{,}15a.$$

Замечание: решение этого ДУ будет получено на следующем занятии.

Вспоминая различный прикладной смысл производной: физический, геометрический, экономический и т.д., можно предложить старшеклассникам составить свои примеры ДУ.

На следующем занятии можно познакомить старшеклассников с решением ДУ методом разделения переменных, предварительно вспомнив с ними таблицу первообразных, правила их нахождения, свойства пропорции о том, что крайние и средние члены пропорции можно менять местами.

Далее решить задачи 1 и 2 методом разделения переменных.

Решение задачи 1.

$$\frac{dm}{dv} = -\frac{m}{c}$$

Тогда $\frac{dm}{m} = -\frac{dv}{c}$, откуда $m = Ae^{-\frac{v}{c}}$.

Используем начальное условие: $m(0) = m_0$.

Тогда $A = m_0$ и $m = m_0 e^{-\frac{v}{c}}$.

Отсюда $v = c\ln\frac{m_0}{m}$ – известная формула Циолковского К.Э., основная при расчёте движения ракет. Однако эта формула пригодна для безвоздушного пространства и при отсутствии действия силы тяжести. Учёт сопротивления воздуха и земного притяжения намного усложняет дифференциальное уравнение. ДУ, являющееся моделью полёта ракеты при космических запусках, значительно более сложное.

Ответ. $v = c\ln\frac{m_0}{m}$.

<u>Решение задачи 2</u>. Разделим переменные: $\frac{da}{a} = 0{,}15dt$, проинтегрировав, получим $\ln a = 0{,}15t + c$, или $a = ce^{0{,}15t}$. Вследствие того, что $a(0) = 10^5$, то частное решение будет иметь следующий вид: $a = 10^5 \cdot e^{0{,}15t}$. Чтобы определить окончательную сумму кредита необходимо подставить $t = 3$. Тогда $a(3) = 10^5 \cdot e^{0{,}45} \approx 156831{,}22$ руб.

Ответ: 156831 руб. 22 коп.

Для закрепления понятий и полученных умений целесообразно решить следующие задачи – 3, 4, 5.

<u>Задача 3.</u> Некоторый работник решил обеспечить финансовые средства своим наследникам. Поэтому он положил 100 тысяч рублей на сберегательный счёт под 5% годовых с непрерывным начислением процентов. Сколько средств будет находиться на счёте через 100 лет?

Ученики проводят аналогию с условием и требованием задачи-2 и самостоятельно выполняют решение. Пусть $a\ (t)$ — это сумма вклада в момент времени t. Тогда, решая задачу Коши

$a' = 0{,}05a$

$a(0) = 100000,$

получим: $a\ (\ t) = 100000\ e^{0{,}05t}$. Подставляя $t = 100$, находим ответ:

$a(100) = 100000\ e^5 \approx 14841315{,}91$ руб., т.е. почти 15 миллионов рублей.

Ответ: 14841315,91 руб.

<u>Задача 4</u>. Пусть скорость роста населения прямо пропорциональна его численности. Найти зависимость между численностью населения A и временем t, если известно, что в некоторый момент, принимаемый за начальный, численность населения составляла A_0 и через год это число увеличилось на $a\%$.

Анализируя условия задачи и характер зависимостей между переменными величинами, школьники приходят к выводу, что дифференциальным уравнением, описывающим динамику роста будет:

$$\frac{dA}{dt} = kA,$$

Школьники уже встречали такое ДУ, поэтому решают его самостоятельно разделением переменных:

$$\frac{dA}{A} = kdt.$$

$$\ln A = \ln\, e^{kt} + \ln C.$$

$$A = Ce^{kt}. \tag{1}$$

Используют условие, что количество населения через год увеличится на $a\%$ от A_0, т.е. на величину $\frac{aA_0}{100}$, т.е. через год население станет равным:

$$A_0 + \frac{aA_0}{100} = \frac{(100 + a) \cdot A_0}{100}.$$

Представляя в общем решение (1) соответствующее значения количества населения и времени, а именно $A = A_0$ и $t = 0$, определяют постоянную интегрирования C:

$$A_0 = Ce^{k\cdot 0} = Ce^0,$$

$$C = A_0.$$

Таким образом общее решение уравнения (1) принимает вид

$$A = A_0 \cdot e^{kt}. \tag{2}$$

Чтобы получить множитель e^k необходимо значение количества населения через год, т. е. $t = 1$,

$$A = \frac{(100 + a) \cdot A_0}{100}$$

подставить в уравнение (2), и тогда получаем:

$$\frac{(100+a)\cdot \mathrm{A}_0}{100} = A_0 \cdot e^{k\cdot 1} \qquad (3)$$

Подставляя найденное из (3) значение$\cdot\ e^{k\cdot}$ в уравнение (2), получают частное решение:

$$A = A_0 \cdot \left(\frac{100+a}{100}\right)^t, \qquad (4)$$

где a% – годовой прирост населения.

Зависимость (4) выражает численность населения A от времени t.

В связи с задачей -4 с учащимися интересно проследить рост населения Земли, например, с 1650 года. В 1650 году, условному началу промышленной революции, на Земле, по оценкам, было примерно 500 млн. человек. Более достоверные статистические данные о населении Земли можно найти примерно с 1800 года, они показывают, что за последние почти два столетия население возрастало с ускорением. По этим данным, увеличение от одного миллиарда человек до двух миллиардов произошло за 104 года, прирост следующего миллиарда жителей Земли произошёл за 36 лет, последующего − за 16 лет, от 4 до 5 млрд. человек народонаселение всех стран увеличилось за 9 лет. Можно предложить учащимся построить график динамики населения Земли.

Современный период – это продолжающийся экспоненциальный рост населения земного шара, в основном за счёт развивающихся стран Африки, Юго-Восточной Азии и Латинской Америки. В 2000 году по численность населения Земли достигла 6,1 − 6,2 млрд. человек, в 2017 − 7,6 млрд. человек, в 2025 г. прогнозу демографов население Земли возрастёт до 8,3 млрд. человек, ещё через 50 лет можно ожидать 11 млрд. человек, почти в два раза больше, чем сейчас. Учащиеся могут подсчитать дальнейший рост населения Земли, а также население своего города, района, посёлка.

Для закрепления усвоения алгоритма решения ДУ методом разделения переменных необходимо предложить старшеклассникам разработать блок-схему решения ДУ такого типа. Блок-схема решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными (рисунок 5) наглядно иллюстрирует все основные этапы его решения.

Рисунок 5 - Блок-схема решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

Контроль усвоенных знаний необходимо осуществить с помощью теста.

1. Сколько решений имеет дифференциальное уравнение: $y' = 2x$?

А) одно; Б) не имеет решений; В) не более двух; Г) бесконечно много решений.

2. Сколько решений имеет задача Коши: $y' = 2x,\ y(0) = 0$?

А) бесконечно много решений; Б) не имеет решений; В) не более двух; Г) одно.

3. Что собой представляет геометрически решение уравнения: $y' = 2x$?

А) прямую; Б) окружность: В) гиперболу; Г) параболу.

4. Указать общее решение дифференциального уравнения $y' = 2x$.

А) $y = 2x + C$; Б) $y = 2x$; В) $y = x^2 - 1$; Г) $y = x^2 + C$.

5. Указать решение задачи Коши: $y' = 2x, y(0) = 0$.

А) $y = 2x + C$; Б) $y = 2x$; В) $y = x^2 - 1$; Г) $y = x^2$.

6. Указать дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

А) $F(x, y, y') = 0$; Б) $y' = f(x, y)$; В) $P(x)dx + Q(y)dy = 0$;

Г) $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$.

10. Указать общий вид дифференциального уравнения первого порядка

А) $y' = f(x, y)$; Б) $P(x)dx + Q(y)dy = 0$;

В) $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$; Г) $F(x, y, y') = 0$.

[*Всюду правильный ответ Г)*]

Только после прочного усвоения старшеклассниками основных понятий теории ДУ, метода разделения переменных целесообразно переходить к IT – средствам решения дифференциальных уравнений и к практико-ориентированным задачам, решаемым методом математического моделирования с применением Mathcad. Использование IT – средств позволит избежать технических вычислительных сложностей, т.к. изучать все многообразие типов ДУ и способов их решения не потребуется, поскольку решение ДУ в компьютерных средах осуществляется по общим алгоритмам работы с выбранным пакетом символьной математики или IT – решателя. Освоение старшеклассниками решения задач с использованием IT – средств даст им возможность в дальнейшем выполнить и защитить исследовательский проект, предусмотренный программой.

Изучение системы Mathcad начинается со знакомства старшеклассников с её основными возможностями, панелью инструментов, функций и операторов. Затем рассмотреть алгоритмы нахождения производной и интеграла. Далее можно перейти к решению практико-ориентированных задач в системе Mathcad, модели которых ранее встречались и аналитические решения уже известны.

С этой точки зрения следующая задача о численности народонаселения Земли, динамика роста которой уже известна, понятна старшеклассникам. Требуется решить задачу -5 аналитически и с использованием системы MathCad.

Задача 5**.** В 1970 г. население Земли составляло 3600 млн.чел. При современном уровне развития сельского хозяйства чтобы прокормить одного землянина необходима площадь 0,1 *га*. На Земле 4 000 млн.га земель сельскохозяйственного назначения. Из этого делаем вывод что население планеты максимально может достигать 40 000 млн. чел., если не будут найдены иные более производительные технологии. Когда будет достигнуто это предельное значение численности населения Земли, если население непрерывно растёт со скоростью 1,7% в год?

На этапе актуализации знаний школьники вспоминают ДУ, соответствующее описанному процессу:

$$\frac{d}{dt}a(t) = k\,a(t)$$

Здесь a(t) – численность населения Земли к моменту времени t.

Используя начальные условия a(0)= $3{,}6 \cdot 10^6$

и увеличение населения на 1,7 % за год, получим:

$$k := \frac{17}{1000}$$

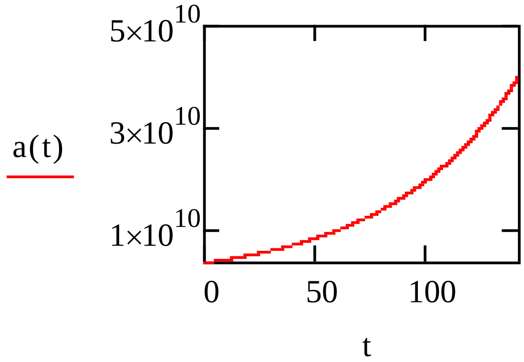
ДУ разделяющимися переменными с начальными условиями интегрируем, выражаем a(t):

$$L1(t) := \int_0^t \frac{17}{1000}\,dt \to \frac{17 \cdot t}{1000}$$

$$L2(a) := \int_{3600000000}^{a} \frac{1}{a}\,da \to \ln(a) - 2 \cdot \ln(60000)$$

$$a(t) := 3600000000\,e^{\frac{17 \cdot t}{1000}}$$

Его график показан на рисунке красным цветом



Выведен график полученного решения.

Затем решим это уравнение с использованием системы MathCad. Введём ключевое слово Given на листе Mathcad, запишем дифференциальное уравнение. В следующей строке внесём начальные условия. Строкой ниже присвоим функции *a* Odesolve, указав промежуток исследования. Построим график функции.

Given

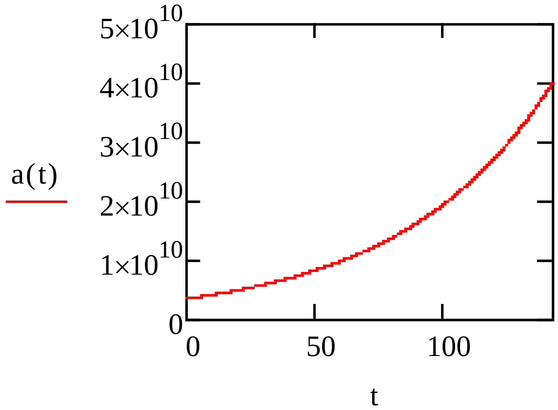
$$k := \frac{17}{1000}$$

$$a0 := 3.6 \cdot 10^{9}$$

$$\frac{d}{dt}a(t) = k\,a(t)$$

$$a(0) = a0$$

$$a := \mathrm{Odesolve}(t, 142)$$



Используя аналитическое решение, найдём такое t,

чтобы $a = 40 \cdot 10^9$

Тогда $40 \cdot 10^9 = 3{,}6 \cdot 10^9 \cdot e^{0{,}017t}$.

Откуда $e^{0{,}017t} = \frac{40 \cdot 10^9}{3{,}6 \cdot 10^9} = 11{,}11.$

Логарифмируя последнее равенство, имеем

$$0{,}017t = \ln 11{,}11 \approx 2{,}408$$

Откуда $t = 142.$

Итак, в 2112 г. Мир достиг бы предела насыщения, если бы сохранился темп роста населения и не появилось новых источников пищи.

Ответ: в 2112 г.

Следующая задача - 6 отражает реалии 2010г. и также предлагается к решению школьникам с использованием системы MathCad.

Задача 6. «Единственная хлебопекарня посёлка выпекает и продаёт тысячу буханок хлеба в сутки стоимостью 8 рублей за одну буханку. В течение месяца 3% выручки от реализации хлеба будет направляться на расширение производства. Известно, что удвоение вложений в производство приводит к увеличению скорости выпечки хлеба в полтора раза. Сколько буханок хлеба в день будет выпекать пекарня к концу месяца?» [40, 73].

Задача экономического содержания неизменно вызывает интерес школьников. Составление дифференциального уравнения процесса, описанного в задаче, требует экономических знаний, которыми школьники не владеют. Поэтому, работу с задачей необходимо начать с объяснений учителем, что такое выручка, вложения в производство, скорость выпечки хлеба. После этого можно перейти к математической стороне решения задачи.

Если обозначить $y(t)$ — количество испечённого в момент времени t хлеба, t – время, измеренное в сутках, тогда выручка от реализации испеченного хлеба составит $8\,y$ рублей. Из этой выручки 3% направляется на расширение производства, т.е. $0{,}03 \cdot 8y = 0{,}24y$ рублей. Эти вложения приводят к увеличению скорости выпечки хлеба, т.е. величины y', в $\frac{1,5}{2}0,24y = 0,18y$ раз. Приходим к необходимости решить задачу Коши:

$$\frac{d}{dt}y(t) = 0.18y(t),$$

$$y(0) = 1000.$$

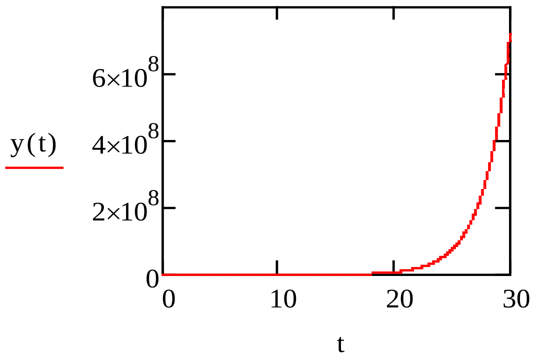
Это ДУ с разделяющимися переменными с начальным условием, решаем его аналитически и с использованием системы MathCad.

Разделяем переменные и интегрируем левую и правую части уравнения, выражаем $y(t)$, выводим на экран график решения:

$$L1(t) := \int_0^t \frac{9}{20}\,dt \to \frac{9\cdot t}{20}$$

$$L2(y) := \int_{1000}^{y} \frac{1}{y}\,dy \to \ln(y) - \ln(1000)$$

$$y(t) := 1000e^{9\frac{t}{20}}$$



Значение искомой функции при $t = 30$ равно $y(30) = 2.214\times 10^{5}$.

Найдём численное решение с помощью приложения Odesolve. Введём ключевое слово Given на листе MathCad, запишем дифференциальное уравнение с помощью штриха. В следующей строке внесём начальные условия. Строкой ниже присвоим функции y Odesolve, указав промежуток исследования. График решения выводится на монитор.

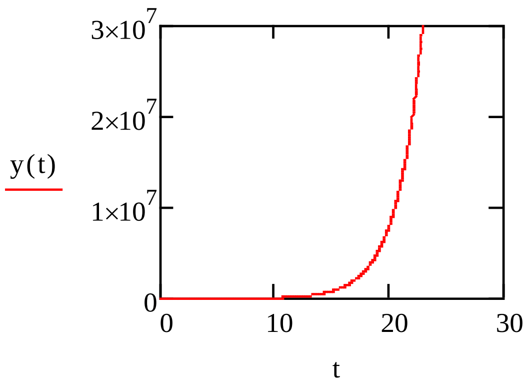
Given

$$\frac{d}{dt}y(t) = 0.18y(t)$$

$$y(0) = 1000$$

$$y := \mathrm{Odesolve}(t, 30)$$

$$y(30) = 2.214\times 10^5$$



На слайде выведен ответ задачи: $y(30) = 2.214\times 10^5$

Ответ: 221406 буханок.

Как завершение работы, можно перейти к следующей задаче, в которой сконцентрированы все, полученные ранее, знания школьников. Решение задачи-7 рассчитано на одно занятие и осуществляется школьниками самостоятельно в малых группах с последующим коллективным обсуждением и проверкой решения.

Задача 7**.** Согласно предположению И. Ньютона, которое он проверил экспериментально, тепловая мощность, отдаваемая нагретым до температуры T телом в окружающую среду с более низкой температурой T_0, пропорциональна разности температур тела и среды. Отсюда следует, что скорость охлаждения тела $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$.

Пусть стальной чайник с кипятком общей массой m = 3 кг остывает от 100 °С до примерно 40 °С в воздухе с температурой T_0 = 20 °С. Выберем Δt = 4 мин., k = 0,05 мин$^{-1}$.

1) Рассчитайте, чему будет равна температура чайника через 4 мин, 8 мин, 12 мин и т. д. с момента начала остывания до момента достижения конечной температуры.

2) Постройте по найденным точкам график зависимости температуры T чайника от времени t.

3) За какое время t_0 чайник остынет от 100 °С до примерно 40 °С?

Ученики переходят к решению, оформляя записи в тетрадях. Примерные действия старшеклассников могут выглядеть следующим образом.

1) Рассчитаем, чему будет равна температура чайника через 4 мин, 8 мин, 12 мин и т. д. с момента начала остывания до момента достижения конечной температуры.

Данное уравнение примет вид (подставим численные значения k и T_0):

$$\frac{d}{dt}T(t) = -0.05(T(t) - 20)$$

$$D(t, T) := -0.05T + 1$$

В среде MathCad найдём численное решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}T(t) = -0.05(T(t) - 20)$$

С начальным условием P (0) = 100 на отрезке [0;24]. Интервал будем разбивать с шагом *h = (t2 – t1)/n,* где n - число значений, которые принимает дискретизованная переменная t.

Определим функцию

$$D(t, T) := -0.05T + 1$$

Определим начальное условие

$$t := 0 \quad T := 100$$

Определим интервал поиска решения и количество узлов сетки

$$t1 := 0 \qquad t2 := 24 \qquad n := 6$$

Вызовем функцию

$$D := \mathrm{rkfixed}(T, t1, t2, 6, D)$$

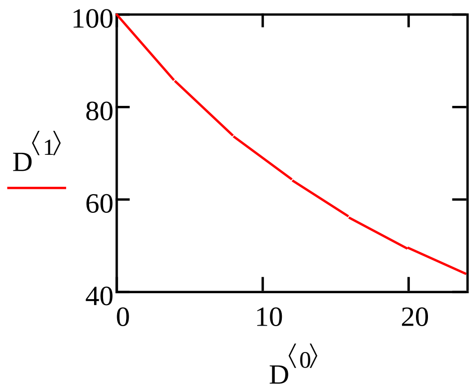
Для вызова функции rkfixed (решения задачи Коши методом Рунге-Кутта) нужно открыть вкладку Вызвать Функцию нажатием кнопки $f(x)$, в появившимся окне в разделе *Категории функций* выбрать *Решение дифференциальных уравнений*, а в разделе *Имя функции* кликнуть на rkfixed, и нажать кнопку ОК.

Далее введём параметр D, поставим знак равно, щёлкнем кнопкой мыши на пустом месте рабочего листа, таким образом, Mathcad численно решит дифференциальные уравнения. Решение представлено ниже:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 100 \\ 4 & 85.499 \\ 8 & 73.626 \\ 12 & 63.905 \\ 16 & 55.947 \\ 20 & 49.431 \\ 24 & 44.096 \end{pmatrix}$$

2) Построим по найденным точкам график зависимости температуры T чайника от времени t.

Выберем на панели *Математика* кнопку *График* и вызовем панель *График.* В появившейся панели нажмём кнопку *График* X-У. В шаблоне графика по оси x, введём переменную D, затем в панели *Матрица* щёлкнем кнопку $M^{<>}$ (*Столбец матрицы*), в скобки внесём значение — 0 (ноль); по оси y внесём $D^{<1>}$. Получим график решения.



3) Найдём за какое время *t* чайник остынет от 100 °С до примерно 40 °С

Аналитическое решение задачи в среде Mathcad:

$$k := 0.05$$

$$t := 0$$

$$T0 := 100$$

$$\frac{d}{dt}T(t) = -0.05(T(t) - 20)$$

$$T(0) = 100$$

Это ДУ с разделяющимися переменными с начальными условиями, интегрируем левую и правую части уравнения, выражаем T(t):

$$L1(t) := -\int_0^t \frac{1}{20}\,dt \rightarrow -\frac{t}{20}$$

$$L2(T) := \int_{100}^{T} \frac{1}{T-20}\,dT \rightarrow \ln(T-20) - \ln(80)$$

$$L0(t,T) := L2(T) - L1(t) \text{ solve}, T \rightarrow 80\cdot e^{-\frac{t}{20}} + 20$$

Окончательно, решение задачи Коши будет иметь вид:

$$T(t) := 80 \cdot e^{-\frac{t}{20}} + 20$$

Определим *f*(*t*) как корень уравнения $e^{-\frac{t}{20}} = \frac{1}{4}$ для этого введём:

$$f(t) := \mathrm{root}\left(e^{-\frac{t}{20}} - \frac{1}{4}, t\right)$$

Напечатаем на рабочем листе Mathcad *f*(*t*) =, чтобы увидеть значение корня:

$$f(t) = 27.726$$

Численное решение, график представлен на рисунке 7:

Given

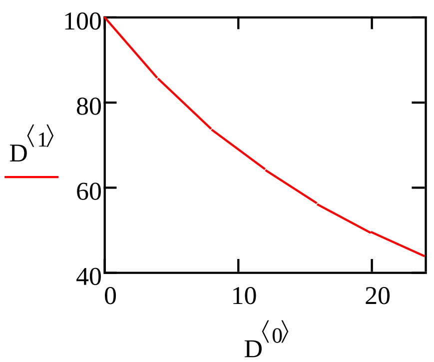
$$\frac{d}{dt}T(t) = \frac{-1}{20}T(t) + 1$$

$$t := 0$$

$$T0 := 100$$

$$T(0) = 100$$

$$T(t) := \mathrm{Odesolve}(t, 24)$$



Ответ: через 24 минуты чайник остынет от 100 °С до примерно 40 °С.

Освоив все необходимые содержательные элементы курса ДУ, старшеклассники могут переходить к работе над исследовательским проектом.

По мнению Л.В. Байбородовой, Г.А. Каменевой, Л.И. Савва, в большинстве случаев «исследовательский проект требует систематизации всех знаний, полученных при изучении курса, актуализации приобретённых умений» [17, 121]. Такой вид учебно-познавательной деятельности, как работа над исследовательским проектом и его защита, логически завершает изучение всего курса ДУ.

При отборе содержания образования, которого мы коснулись в настоящем параграфе, можно будет констатировать, что цели обучения на курсе изучения ДУ в системе ДО будут достигнуты:

- цели обучения ДУ на высшем уровне целеполагания: расширение и углубление знаний, полученных на уроках математики в стенах общеобразовательной школы, развитие способностей и навыков учащихся, поддерживание интереса школьников на познавательном уровне, формирование математической культуры, воспитание самостоятельности мышления;

- цель обучения ДУ на среднем уровне целеполагания: формирование целостной картины мира школьника в системе дополнительного образования;

- цели обучения ДУ на нижнем уровне целеполагания - уровне целей для отдельного занятия: формирование каждого из компонентов целостной картины мира старшеклассника средствами дифференциальных уравнений: знаний основных законов (естественного роста, логистический, колебаний, взрывного роста, противоборствующих сил), овладение этапами математического моделирования, освоение IT-технологиями, обогащение личностных качеств и ценностей.

2.2. Средства изучения курса ДУ в системе дополнительного образования.

В качестве средств реализации методики изучения ДУ с целью формирования целостной картины мира рассмотрим систематизированный набор понятийных карт, практико-ориентированные задачи, IT- средства решения ДУ, исследовательские проекты.

2.2.1. Систематизированный набор понятийных карт

Одним из средств реализации модели, построенной в п.1.4 являются понятийные карты.

Для достижения целостности знаний учащихся целесообразно применение понятийных карт (concept map)[93]. Использование этих средств ведёт к реализации непрерывности, преемственности, системности образования, глубине, прочности, осознанности приобретаемых старшеклассниками знаний, что отмечалось в первой главе. Картирование понятий позволяет визуально представить структуру информации, показать взаимосвязь понятий в пределах темы.

«Составление учащимися понятийных карт помогает систематизации математических знаний» [4]. Тем самым достигается взаимосвязанность понятий, методов, устанавливается их иерархическая структура, прослеживаются межпредметные и внутрипредметные связи, знания учащихся становятся целостными, у них формируется представление о единстве мира. Понятийные карты помогают образному представлению основных идей рассматриваемой темы.

Следует отметить, что изучению понятий высшей математики, их взаимосвязи и структуре посвящены многие работы, отличающиеся своими подходами [95]. Так, Л.И. Токарева «выделяет блочно-иерархическую структуру системы понятий и доказывает необходимость установления связей между понятиями (внутрисистемные, внутрипредметные, межсистемные и межпредметные)» [134]; С.В. Иванова формирует «понятия высшей математики путём включения в специальную систему знаний на основе учебных понятийных образований» [58]; И.В. Кисельников «устанавливает связи между новыми понятиями и ранее изученными, выделяя четыре мыслительных действия: уподобление, абстрагирование, обобщение и выделение новых свойств и отношений в объектах» [64]; Н.Ю. Милованов рассматривает основные подходы по «формированию понятий математического анализа и обосновывает идею о том, что одним из приёмов по формированию данных понятий в систему является приём перекодирования» [99, 100].

Понятийные карты представляют собой визуальные представления информации. Они могут принимать форму диаграмм, графических организаторов, таблиц, блок-схем, диаграмм Венна, временных графиков и др. Концептуальные карты особенно полезны для обучающихся, у которых наиболее развита визуальная компонента мышления, хотя они могут принести пользу любому учащемуся. Они являются мощной стратегией исследования, потому что помогают увидеть объект или процесс в целом, понятие со всеми его связями. Другими словами, знание большой картины делает детали более значимыми и легче запоминающимися. Понятийные карты значимы при освоении материала, который имеет визуальные элементы. Они также могут использоваться для анализа информации, сравнения: сопоставления и противопоставления.

Обучающие функции составления старшеклассниками понятийных карт сводятся к «системности знаний старшеклассников, к формированию умений и навыков структурировать, систематизировать и запоминать учебный материал. Развивающие функции этой деятельности состоят в развитии образного мышления и формировании познавательной активности обучающихся» [55].

Основные положения теории понятийных карт разработал в 1960-е годы Джозеф Новак из Корнелльского университета. Его теория рассматривает фазы построения, функции и области применения графических организаторов [86]. Учащихся следует познакомить с создателями понятийных карт и их аналогов (фреймов, опорных сигналов, блок-схем и пр.), как иностранными, так и отечественными. Целесообразно подготовить обучающихся с сообщениями о Д. Новаке, В.Ф. Шаталове, В.И. Арнольде, Л.Д. Кудрявцеве, А.Н. Колмогорове и других выдающихся современниках, внесших существенный вклад в развитие математического образования и популяризации теории ДУ. Показать их портреты, кратко осветить их основные работы, привести необычные эпизоды из их жизни, чтобы учащиеся понимали, что наука создаётся обычными, но одарёнными людьми с их слабостями и достоинствами. Замечено, что школьники с большей заинтересованностью воспринимают рассказы своих одноклассников, чем рассказ учителя.

Для использования в курсе ДУ разработан систематизированный набор понятийных карт, каждая из которых относится к одному из наиболее общих законов, описываемых с помощью ДУ.

К систематизированному набору понятийных карт предъявляются методические требования

- фундаментальности,
- наглядности,
- доступности,
- систематичности,
- обогащения деятельности,
- единства аффекта и интеллекта.

Систематизированный набор понятийных карт

1. Закон естественного роста;
2. Логистический закон;
3. Закон взрывного развития.
4. Закон колебаний
5. Закон взаимодействия противоборствующих видов;

Каждая из понятийных карт включает:

- название закона,
- дифференциальное уравнение или систему дифференциальных уравнений - математическую модель закона,
- словесное описание закона,
- перечень практико-ориентированных задач, относящихся к данному закону,
- пример решения модельной практико-ориентированной задачи.

Важным аспектом в понятийных картах является их иерархическая структура. *Систематизированный набор понятийных карт,* построенный в работе, упорядочен или систематизирован по возрастанию сложности описанного в понятийной карте закона. Поясним это. Упорядочение набора понятийных карт в курсе ДУ осуществляется по свойствам тех законов, которые описаны в карте: от карты к карте в этом наборе происходит усложнение вида зависимости между переменными величинами. Так, в первой карте - закон естественного роста - скорость роста $y'(x)$ пропорциональна функции $y(x)$. Во второй карте – логистический закон – скорость роста $y'(x)$ возрастает пропорционально $y(x)$ и замедляется пропорционально $y^2(x)$, её можно считать уточнением модели естественного роста. В третьей карте – закон взрывного развития – рассматривается пропорциональность $y'(x)$ и $y^2(x)$ [8]. В четвертой карте – закон взаимодействия противоборствующих видов – совокупность двух логистических зависимостей. В последней карте этого набора – закон колебаний – используется вторая производная, которая характеризует более сложный характер зависимости между переменными величинами. Иерархия набора понятийных карт отражена далее в рисунке 6 - Фрейм «Понятийные карты курса ДУ». Таким образом, термин «упорядоченный набор понятийных карт» имеет свое логическое обоснование.

Первые две понятийные карты из систематизированного набора: закон естественного роста и логистический закон представлены в п.1.4.

Понятийная карта – закон взрывного развития: $y' = -ky^2$

Скорость изменения функции $y(x)$, т.е. $y'(x)$, пропорциональна квадрату величины, т.е. $y^2(x)$.

Задачи: динамика популяции редких видов животных, химическая реакция горения быстровоспламеняющихся веществ, процесс взрыва.

Характерная особенность: при малых значениях x прирост функции *y(x)* идёт очень медленно, а при больших x прирост идёт гораздо быстрее, чем в законе естественного роста, и за конечное время достигает бесконечных значений. Эта ситуация встречается в физико-химических задачах, где скорость реакции пропорциональна концентрациям обоих реагентов; или при размножении редких видов животных, в естественных условиях это означает пропорциональность числу создаваемых пар особей, например, китов или аллигаторов, когда аллигаторам некоторых видов трудно найти себе пару, и их размножение подчиняется закону взрывного развития.

Задача 1. Предположим, что популяция аллигаторов первоначально насчитывает 100 особей и что её показатель смертности $\delta = 0$, так что ни один аллигатор никогда не умирает. Коэффициент рождаемости $\beta = 0.0005p$, где p – численность аллигаторов. Найти закон развития популяции аллигаторов.

Решение. *1) Математизация.* Пусть $p = p(t)$ – численность аллигаторов, $\beta -$ показатель рождаемости, $\delta -$показатель смертности аллигаторов.

2) Формализация, математическая модель. Тогда $\frac{dp}{dt} = (\beta - \delta)\cdot p$,

$$\frac{d}{dt}p(t) = 0.0005p(t)^2$$

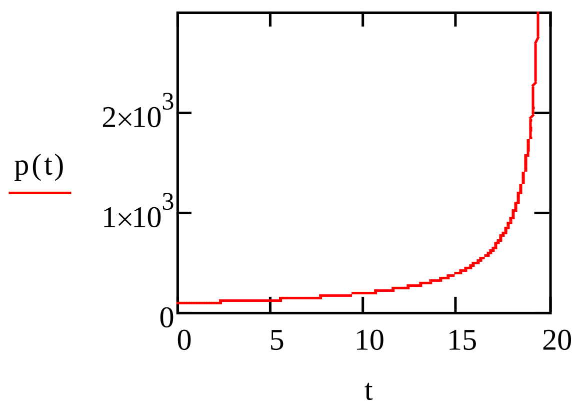
$$p(0) = 10($$

3) Внутримодельное решение. После разделения переменных и интегрирования левой и правой частей уравнения получим общее решение, а используя начальные условия – частное решение.

Решение задачи Коши будет иметь вид:

$$p(t) := -\frac{1}{\frac{t}{2000} - \frac{1}{100}}$$

Его график показан на рисунке красным цветом



Найдём, например, $p(t)$ при $t = 10$, т. е. $p(10) = 200$.

4) Интерпретация. Через 10 лет количество аллигаторов в популяции удвоится. Так как $p \to \infty$ при $t \to 20$, то реальный «демографический» взрыв произойдёт через 20 лет.

Задача 2. В физико-химических задачах часто встречается ситуация, когда скорость реакции пропорциональна концентрации обоих реагентов, т.е. их произведению:

$$\dot{x} = kx^2, k > 0.$$

Решение и интерпретация. В данном случае рост решения происходит гораздо быстрее экспоненциального, и величина $x(t)$ неограниченно возрастает за конечное время: интегральная кривая решения с начальным условием $x(0) = x_0 \neq 0$ описывается формулой

$$x(t) = \frac{1}{k} \cdot \frac{x_0}{\frac{1}{k} - tx_0} \ ; \ \ x_0 \neq 0$$

и имеет вертикальную асимптоту (момент взрыва) при $t = \frac{1}{kx_0}$

Практико-ориентированные задачи для этой карты приведены в Приложении -3.

Понятийная карта - закон колебаний: $y'' = -k^2 y$.

Задачи: свободные колебания математического маятника, малые механические колебания маятника, колебания тока в электрической цепи, сезонные колебания объёма продаж и потребительского спроса (времена года, начало учебного года, сезон праздников и т.п.).

Задача 1. Вывод уравнения малых свободных колебаний происходит на основании второго закона Ньютона. Тело, подвешенное на пружине, без учёта сил сопротивления и внешнего воздействия совершает свободные гармонические колебания: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, A-амплитуда, ω – частота, t- время.

Задача 2. Уравнение гармонического осциллятора

$$\omega^2 \cdot y'' + \beta \cdot y' + y = 0$$

моделирует колебания маятника: $y(t)$ описывает изменения угла его отклонения от вертикали, $y'(t)$ — угловую скорость маятника, $y''(t)$ — ускорение. Здесь параметр ω задаёт частоту колебаний, а параметр β — параметр затухания. Если $\beta = 0$, то это случай не затухающих колебаний, а если значение β отлично от нуля, то колебания в итоге затухают.

Для решения этого дифференциального уравнения используем пакет MathCad. Численное решение задачи Коши для ОДУ второго порядка (модель затухающего гармонического осциллятора при $\beta \neq 0$ *и* модель незатухающего гармонического осциллятора при $\beta = 0$ *по*средством ключевого слова *Given* и функции *Odesolve*. Зададим начальные условия в виде: $y'(0) = 0;\ y(0) = 1.1$

При записи уравнения и начальных условий необходимо ставить логический оператор «=» и соответствующие символы производной. Тогда задача Коши будет поставлена правильно и численный алгоритм даст осмысленное решение.

Перед ключевым словом *Given* введём значения параметров ω и β. В зависимости от времени динамику угла задаёт $y(t)$. График функции и производной функции $y(t)$ построим после вызова функции y := *Odesolve*(t,15)

$\omega := 0.4 \qquad \beta := 0.1$

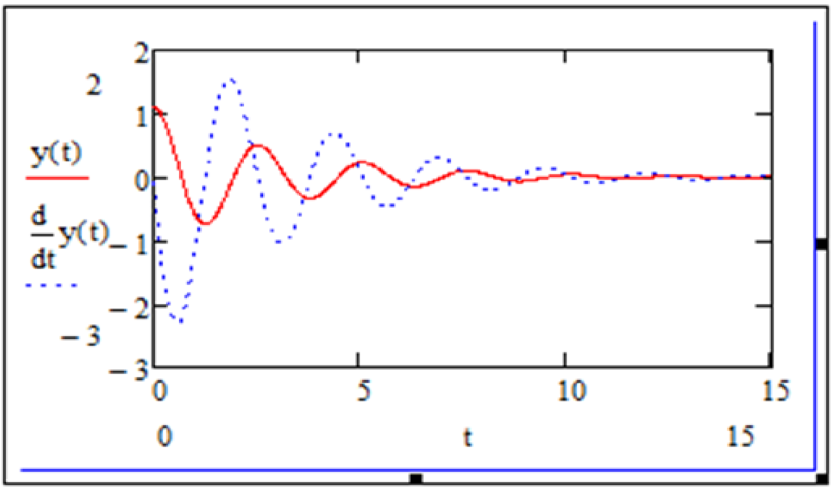
Given

$$\omega^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \beta \cdot \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) + y(t) = 0$$

$y'(0) = 0$

$y(0) = 1.1$

$y := \mathrm{Odesolve}(t, 15)$



Практико-ориентированные задачи для закона взрывного развития приведены в Приложении -3.

Понятийная карта – закон взаимодействия конкурирующих видов (закон Лотки-Вольтерра):

$$\begin{cases} x' = (\alpha - \beta y) \cdot x \\ y' = (-\gamma + \delta x) \cdot y \end{cases}$$

$x(t)$— количество/ численность «жертв» в популяции,

$y(t)$— количество/численность «хищников» в популяции, t — время,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — коэффициенты, отражающие взаимодействия между конкурирующими видами.

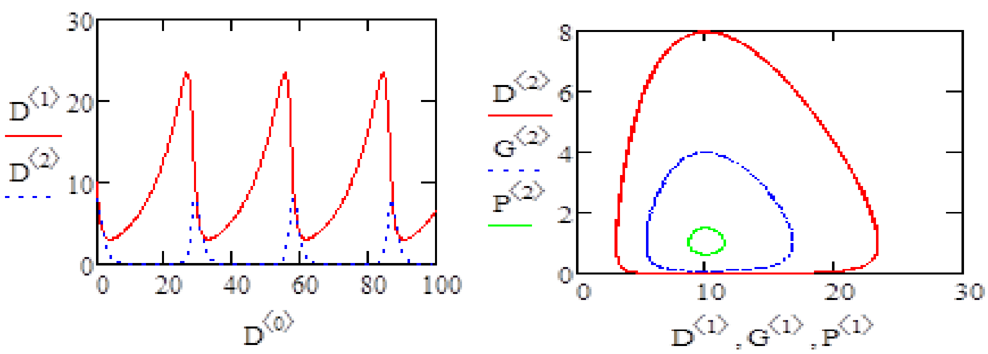
Первое уравнение системы показывает число жертв, а второе – число хищников. Число жертв и число хищников между собой связаны: чем больше жертв, тем больше хищников, и, наоборот, с некоторым запаздыванием. Два дифференциальных уравнения моделируют временную динамику численности двух биологических популяций: жертв $x(t)$ и хищников $y(t)$.

Словесное описание закона:

скорость изменения численности «жертв» в популяции $x'(t)$ возрастает пропорционально их численности (в первом уравнении слагаемое αx) и убывает пропорционально числу «встреч» с «хищниками» (в первом уравнении слагаемое $-\beta yx$);

скорость роста численности «хищников» $y'(t)$ убывает пропорционально числу самих хищников $y(t)$ (во втором уравнении слагаемое $-\gamma y$) и возрастает пропорционально количеству «встреч» хищников и жертв (во втором уравнении слагаемое δxy)

Аналитическое решение этой системы ДУ в конечном виде возможно лишь в частных случаях при некоторых значениях коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Поэтому систему решаем численно, используя пакет MathCad. Для наглядной интерпретации изменения популяций «хищников» и «жертв» обращаются к графической иллюстрации зависимостей $y = y(x)$-численность «хищников» в зависимости от численности «жертв» или $x = x(y)$ -численность «жертв» в зависимости от численности «хищников», т.е. изображаем фазовый портрет:



Простейшая модель войны может быть получена, если «обозначить через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеющиеся ресурсы у противоборствующих сторон для продолжения конфликта, и предположить, что каждая из сторон уничтожает ресурс соперника со скоростью, пропорциональной имеющемуся у неё собственному ресурсу с некоторым коэффициентом пропорциональности» [13].

Получим: $\begin{cases} x' = -\beta y \\ y' = -\gamma x \end{cases}$, $\beta > 0, \gamma > o$.

Решение системы ДУ получаем аналитическое или численное с использование пакета MathCad, для визуализации зависимостей график решения выводим на экран компьютера.

Задачи: процесс ведения войны, взаимодействие «хищник – жертва», обмен знаниями, технологиями, энергией между объектами. Практико-ориентированные задачи для закона взаимодействия противоборствующих видов приведены в Приложении -3.

Структурированное изображение материала, выполненное в виде понятийных карт, является важным элементом современного обучения. Использование наглядного представления содержания курса или темы способствует быстрому и качественному усвоению материала любой сложности [88]. Можно воспользоваться созданием фрейма (рисунок 6).

Закон естественного роста: $y' = ky$

Логистический закон: $y' = ky\,(a - y)$

Закон взрывного развития: $y' = -ky^2$

Закон взаимодействия противоборствующих видов: $\begin{cases} x' = (\alpha - \beta y)\cdot x \\ y' = (-\gamma + \delta x)\cdot y \end{cases}$

Дифференциальные уравнения

Закон колебаний: $y'' = -k^2 \cdot y$

Рисунок 6 - *Фрейм «Понятийные карты курса ДУ»*

Центром фреймовой формы для понятийных карт может быть любой объект, в нашем случае – ДУ. В фрейме отражена общность некоторых свойств, связывающая центр фрейма с периферийными элементами. Успех обучения во многом зависит от готовности учителя организовать и управлять познавательной деятельностью учащихся. Познавательная и творческая активность учащихся зависит от ряда факторов (субъективных и объективных), что во многом обусловлено методической и профессиональной подготовленностью учителя-педагога, сформированности его собственной картины мира, интеллектуальным и нравственным обликом учителя, способностью быстро реагировать, адаптироваться к изменяющимся условиям, требованиям жизни и развивающейся науки сегодняшнего дня [102].

Известна «последовательность упорядочивания понятийных карт:

1) выделить область знаний, описывающую специфическую проблему;

2) отобрать ключевые понятия, относящиеся к этой области и дать им точное определение;

3) построить предварительную карту, раскладывая в иерархическом порядке понятия, затем между ними устанавливая связи;

4) пересмотреть карту (таких пересмотров бывает несколько);

5) для большей наглядности и лучшего понимания можно изменять цвет, размер и стиль шрифта» [86].

Таким образом, в этом пункте рассмотрено использование понятийных карт, являющихся одной из стратегий достижения целостности знаний старшеклассников, усвоения основных положений, терминов и понятий, в процессе изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования. В процессе такого обучения у старшеклассников формируется система фундаментальных знаний в области дифференциальных уравнений, они приобретают новые научные знания как в области теоретической математики, так и в области прикладной математики, развивается математическая интуиция. Понятийные карты позволяют старшеклассникам лучше понять связи между различными понятиями и идеями, что помогает им сформировать более глубокое и осознанное понимание предмета. Это также помогает связать математику с другими предметами, такими как естественные науки и технологии, что может помочь учащимся лучше понять мир вокруг них. Принципы непрерывности, преемственности и системности образования важны для обеспечения того, чтобы знания учащихся были последовательными, связанными и понятными. Используя понятийные карты, учителя могут помочь обеспечить, чтобы эти принципы применялись на практике. Понятийные карты — это эффективный инструмент для систематизации и запоминания информации. Они помогают обучающимся понять структуру материала и взаимосвязь между различными концепциями. Кроме того, понятийные карты могут быть использованы для демонстрации прогресса обучающегося в изучении материала.

2.2.2 Практико-ориентированные задачи и их решение методом математического моделирования

Знания учащихся закрепляются и углубляются посредством решения задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Особое внимание при этом уделяется практико-ориентированным задачам, при решении которых у обучающихся формируются определённые формы мышления, необходимые для понимания явлений и процессов, происходящих в окружающем нас мире, и целостная картина мира. Практико-ориентированные задачи показывают учащимся значимость прикладного характера математики. Задача, как известно, является важнейшим элементом в математической подготовке обучающихся.

Практико-ориентированные задачи, кроме того, знакомят старшеклассников со связью между процессами и явлениями реального мира и его математическими моделями, способствуют формированию целостного мировоззрения.

Подобно тому, как «новые понятия базируются на уже усвоенных учащимися понятиях, решение новых, расширяющих и углубляющих знания учащихся задач часто сводится к уже решённым известным задачам» [6]. Математическая задача способствует формированию определённых форм мышления, необходимых для освоения окружающей нас действительности, так как изучает понятия, введённые путём абстрагирования от явлений реального мира. Большую роль при изучении и усвоении новых математических абстракций играет решение практико-ориентированных задач, выступающих как стимулирующий мотив их изучения и вызывающих интерес к этим абстракциям. В связи с этим педагогу необходимо тренировать учащихся в умении анализировать задачную ситуацию, рассматривать её с разных сторон, не теряя при этом из виду целое, выделять различные аспекты и связывать их между собой, т.е. развивать соответствующие мыслительные операции [3].

При решении практико-ориентированных задач у обучающихся формируются определённые формы мышления, необходимые для понимания явлений и процессов, происходящих в окружающем нас мире. Именно практико-ориентированные задачи показывают учащимся значимость прикладного характера математики. Задача, как известно, развивает логическое мышление обучающихся, учит умению анализировать условия, выделять главный вопрос, определять неизвестное и находить пути их решения, она является важнейшим элементом в математической подготовке обучающихся. Практико-ориентированные задачи, кроме того, знакомят старшеклассников со связью между процессами и явлениями реального мира и его математическими моделями. При умелом подборе задач ликвидируется формализм при проверке знаний обучающихся и активизируется процесс закрепления учебного материала [6].

Важную роль для создания условий системности в обучении, для глубокого и ясного понимания, изучаемого играют понятийные карты, рассмотренные в предыдущем пункте, и тесно связанные с ними блок-схемы, предписания для решения практико-ориентированных задач.

Предписание для решения практико-ориентированных задач с опорой на этапы математического моделирования и набор понятийных карт:

1. По условию задачи ввести независимую переменную, описать искомую величину - функцию, определить прикладной смысл её производной.
2. Выявить характер зависимостей между введёнными величинами.
3. Определить, какой из законов действует в задачной ситуации, выбрать соответствующую понятийную карту.
4. Составить ДУ – математическую модель.
5. Решить ДУ аналитически или с помощью IT – средств, системы MathCad.
6. Интерпретировать полученный результат.

Учащиеся знакомятся с конкретными примерами применений математических знаний, относящимися к явлениям, с которыми сталкиваются в повседневной жизни. Задачи о внутривенном питании глюкозой, о радиоактивном распаде, об охлаждении тела, о всхожести семян, о порче арбузов при транспортировке, о нахождении закона размножения бактерий, роста клеток с течением времени, разрушения клеток в звуковом поле, о реакции организма на введение лекарства, о функциях спроса и предложения и др. иллюстрируют для учащихся многочисленные ситуации из разных областей деятельности человека, разрешаемые методом составления математической модели в виде дифференциального уравнения, решение которого даёт ответ на поставленный жизненными обстоятельствами вопрос. Дифференциальные уравнения необходимы для создания математических моделей большинства физических законов. Дифференциальные уравнения можно использовать для вычисления вероятности некоторых событий и для построения тактики на поле боя.

Кроме того, учащиеся видят применение теории дифференциальных уравнений в различных профессиях (физика, медика, агронома, фармацевта, экономиста и др.).

Задачи на составление и решение дифференциальных уравнений в теории эпидемий показывают старшеклассникам жизненность и важность математического аппарата в виде дифференциальных уравнений для такой проблемы человечества, как вековая борьба с эпидемиями, косившими людей на протяжении веков.

Из всего приведённого выше следует, что решение практико-ориентированных задач способствует формированию у старшеклассников целостной картины мира, единства знаний, целостного мировоззрения.

Поскольку большую роль при изучении и усвоении новых математических абстракций играет решение практико-ориентированных задач, выступающих как стимулирующий мотив их изучения и вызывающих интерес к этим абстракциям, то в связи с этим педагогу необходимо тренировать учащихся в умении анализировать задачную ситуацию, рассматривать её с разных сторон, не теряя при этом из виду целое, выделять различные аспекты и связывать их между собой, т. е. развивать соответствующие мыслительные операции.

Важным аспектом использования практико-ориентированных задач является знакомство обучающихся с методом математического моделирования и его освоением. Старшеклассникам необходимо прочно усвоить суть этого, одного из основных в математике, метода, знать его этапы, видеть применение при решении практико-ориентированных задач. Как известно, «метод математического моделирования включает следующие основные этапы:

1.Математизация.

2. Формализация, математическая модель.

3. Внутримодельное решение.

4.Интерпретация». [2].

В практико-ориентированных задачах при их решении методом математического моделирования производная имеет смысл скорости изменения той величины, о которой идёт речь в задаче. Если в задаче дано, что скорость изменения пропорциональна самой величине, то выбирается закон естественного роста; если скорость изменения пропорциональна произведению величины и её оставшейся части, то выбирается логистический закон; в случае, когда скорость изменения величины пропорциональна квадрату самой величины, то выбирается закон взрывного роста. К законам взаимодействия противоборствующих видов и колебаний следует обращаться после анализа характера связей между введёнными величинами и скоростью их изменения.

Математическая модель, как было видно из вышеизложенного, представляется в виде дифференциального уравнения. Для решения задач методом дифференциальных уравнений со старшеклассниками составляются алгоритмы решения этих задач.

На занятиях необходимо приводить историко-математический материал. Целесообразно предложить учащимся подготовить выступления, посвящённые истории развития теории дифференциальных уравнений. Благодаря этому происходит знакомство с именами, биографиями, научными достижениями и жизненными путями конкретных исторических личностей – учёных-математиков. Так, решение первых задач, приводящих к дифференциальным уравнениям, встречаются уже в 17 веке. К ним относится исследование Р. Декарта плоской кривой с применением свойств касательной после открытия в оптике закона преломления света. Сам термин «дифференциальные уравнения» впервые употребил Лейбниц в письме к Ньютону (1676), а затем он появился и в печати (с 1684) [13].

Проблема касается и изучения старшеклассниками курсов математики и физики. Эти два предмета взаимно обогащают друг друга: математика придаёт физическим фактам строгость и доказательность, физика наполняет содержанием математические формулы и их преобразования. Однако можно заметить, что физические и математические знания не всегда интегрируются, даже в тех случаях, когда интеграция естественна и просто необходима. В частности, это касается использования аппарата дифференциального и интегрального исчислений при выводе некоторых теоретических фактов ряда физических разделов, а также при решении задач. Чаще в школьных учебниках используются понятия среднего значения величины, приращения величины, суммирования, а обобщение суммы – интеграл остаётся невостребованным. Тем самым игнорируется то обстоятельство, что старшеклассники знакомы с понятиями интегральных сумм и интеграла. С понятием интеграла учащиеся знакомятся в 11 классе, и то обстоятельство, что это понятие, изученное в курсе математики, не находит практического применения при изучении физики, оказывает негативное влияние как на усвоение самого понятия, так и на осознание учащимися целесообразности его изучения.

Как отмечалось ранее, некоторые разделы школьного курса физики опираются на понятия производной и интеграла. Поэтому учебники физики должны содержать достаточное количество задач, решаемых с помощью этих математических понятий. Однако в действующих школьных учебниках таких задач явно недостаточно, и в изложении теоретических фактов также не прослеживается опора на понятия производной и интеграла. Поэтому эту ситуацию призваны изменить учреждения дополнительного образования. Кроме того, «Механика» до сих пор изучалась в 7-8 классах общеобразовательной школы, и выпускнику школы полезно пересмотреть знакомые факты механики с новых теоретических позиций. Такого пересмотра в школе, как правило, не делается (в том числе, за неимением времени). Тем более, это важно делать в рамках дополнительного образования. Решая задачи по разделам «Механика», «Молекулярная физика», «Электродинамика», «Магнетизм», «Электромагнитная индукция», «Оптика», «Атомная физика» и др., учащиеся реализуют свои математические знания. Целесообразно, чтобы некоторые теоретические факты: закон радиоактивного распада, формулу Циолковского, уравнение Пуассона и др. учащиеся выводили сами в процессе решения предлагаемых задач, причём в ряде случаев они как раз получают теоретическое обоснование тех фактов, которые даются им в учебнике в готовом виде.

Решение практико-ориентированных задач делает жизненным для обучающихся изучение абстрактных математических понятий, каковыми являются производная и интеграл, способствует предупреждению формализма в сознании учащихся при обучении, установлению межпредметных связей. Кроме этого, рассмотрение предлагаемых задач расширяет кругозор старшеклассников, позволяет обучать их умению применять усвоенные математические понятия в конкретных ситуациях, обусловленных происходящими физическими процессами. Такая работа способствует подготовке обучающихся к восприятию и усвоению систематического курса дифференциального и интегрального исчисления, теории дифференциальных уравнений в вузе.

Решение со старшеклассниками практико-ориентированных задач методом математического моделирования необходимо начинать с мотивационного этапа, с привлечения интереса к задачному материалу. Практика показывает, что обучающиеся интересуются взаимосвязями учебных предметов. Они с увлечением решают задачи по физике, биологии, химии не традиционными, а иными методами, в частности, методом математического моделирования на основе дифференциальных уравнений.

Приведем пример работы с практико-ориентированной задачей биологического содержания.

Задача -1. «Известно, что рождаемость и смертность особей в изолированной популяции в условиях неограниченных ресурсов пропорциональны численности популяции. Найти закон изменения численности такой популяции во времени» [13], [120].

После знакомства обучающихся с текстом задачи и обсуждения способов решения необходимо сориентировать школьников на известные этапы математического моделирования: *математизацию; формализацию, составление математическая модели; внутримодельное решение; интерпретацию,* - актуализировать содержание этих этапов.

1. Математизация. Обозначим через $x(t)$ функцию численности популяции к моменту времени t, $R(x)$ — число родившихся и $S(x)$ — число умерших особей

2. Формализация, математическая модель**.** Пусть за промежуток времени Δt прирост численности Δx некоторой популяции равен $\Delta x = R - S$, где R — число родившихся и S — число умерших за время Δt особей. Считаем, что величины R и S пропорциональны промежутку времени Δt : $R = R(x)\Delta t$, $S = S(x)\Delta t$, тогда $\Delta x = (R(x) - S(x))\,\Delta t$

Разделив это равенство на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение, которое является моделью описанного в задаче процесса: $\dot{x} = R(x) - S(x)$

В условии известно, что рождаемость и смертность пропорциональны численности популяции, т.е. R(x) = αx, S(x) = βx. Обозначим: r = α − β, тогда получим модель неограниченного роста (модель Мальтуса): $\dot{x} =$ rx.

3. Внутримодельное решение**.** Полученное дифференциальное уравнение имеет первый порядок и переменные в нем разделяются, его можно решить аналитически, можно использовать какой-либо интернет – «решатель».

Получим: $x(t) = x_0 e^{rt}$, где $x_0 = x(0)$.

4.Интерпретация. Эта модель описывает изолированную популяцию, которая развивается в условиях неограниченных ресурсов. Такие условия в природе встречаются крайне редко. Примером может служить размножение видов, завезенных в места, где имеется много пищи, отсутствуют конкурирующие виды и хищники, например, кролики в Австралии. Это модель неограниченного роста.

После решения этой задачи необходимо со школьниками обобщить полученные результаты, связать с понятийной картой закона естественного роста, обсудить, что закон естественного роста выражает следующий характер зависимостей между переменными: если дана некоторая величина величины y(x) и скорость ее изменения (возрастания или убывания) $y'(x)$ пропорциональна самой величине y(x), тогда математически закон естественного роста выражается с помощью дифференциального уравнения первого порядка: $y' = ky$.

Общим решением этого дифференциального уравнения является функция, выражающая экспоненциальную зависимость: $y = Ce^{kx}$, где C – const.

Если $C > 0, y(x) \geq 0$, то при k >0 будем иметь неограниченное возрастание величины y(x) на [0, ∞) , а при k<0 убывание величины y(x) на [0, ∞).

Если для этого дифференциального уравнения задать начальные условия: $y(x_0) = y_0$, то дифференциальное уравнение будет иметь единственное решение: $y = y_0\, e^{kx}$. Этот факт выражает принцип научного детерминизма, ввиду которого последующее поведение величины y(x) однозначно определяется характером ее поведения и начальным состоянием. Принцип научного детерминизма дополняет конструируемую целостную картину мира школьника еще одним важным фактом для объяснения различных явлений природы.

После решенной первой задачи можно предложить школьникам самостоятельно решить следующую задачу, подобную рассмотренной, теперь уже самостоятельно, проверить ответ, обсудить полученный результат.

Задача 2. Пусть $N(t)$ – количество бактерий в сосуде. Известно, что производная $N'(t)$ – (скорость размножения бактерий) пропорциональна $N(t)$ с коэффициентом пропорциональности k. Определить k, если в 10 часов в сосуде было 2 000 бактерий, а в 12 часов уже 32 000.

Решение. $\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$. Разделяем переменные и интегрируем

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = k \int dt, \quad ln|(N(t))/C| = kt, \quad N(t) = Ce^{kt}.$$

$$N(10) = Ce^{k10} = 2000, \qquad N(12) = Ce^{k12} = 32000, \qquad e^{2k} = 16,$$

$$2k = \ln 16\,, k = \ln 4.$$

Ответ. $k = \ln 4$.

Метод математического моделирования, примененный для решения практико-ориентированных задач к описанию процессов в различных предметных областях, позволяет сделать общий вывод об универсальности как самого метода математического моделирования, так и основного инструмента моделирования – дифференциальных уравнений. Для подтверждения этого вывода можно рассмотреть задачу физического содержания.

Задача 3. При разгоне автомобиля скорость движения пропорциональна пройденному пути. За первые 10 сек. автомобиль проходит 100м., за 15 сек. – 200м. Какой путь проходит автомобиль за время t при разгоне ?

Школьники, решая эту задачу, могут опираться на этапы математического моделирования, подробно рассмотренные ранее, а также на понятийную карту закона естественного роста. Два первых этапа: математизацию, формализацию и составление математическая модели, - школьники легко выполняют, т.к. ими усвоен факт, что скорость движения – это производная от пути по времени.

Математическая модель: $S' = k S$, $S(10)=100$, $S(15) = 200$.

Внутримодельное решение школьники могут выполнить самостоятельно, проведя разделение переменных и интегрирование, а затем, получить

ответ: $S= 25 \cdot 2^{t/5}$

Опираясь на интерес школьников к задачам экономики, можно перейти к математическому моделированию для практико-ориентированных задач экономического содержания. Проблема экономической грамотности актуальна в наши дни, и предложенная следующая практико-ориентированная задача и ее решение методом математического моделирования должна вызвать интерес школьников. Учащиеся сталкиваются с экономическими проблемами на бытовом уровне: оплата потребляемых электроэнергии, горячей и холодной воды и пр. и связанная с этим экономия денежных средств в бюджете семьи. Поэтому учащиеся с интересом относятся к решению задач экономической направленности с помощью составления ДУ.

Задача 4. Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют соответственно вид

$$y = 50 - 2p - 4\frac{dp}{dt};$$

$$x = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p(0) = 10$, и определить, является ли равновесная цена устойчивой?

Ее моделирование и решение можно начинать со второго этапа, поскольку первый – математизация – уже выполнен.

2.Формализация, математическая модель. Из условия равенства спроса и предложения имеем

$$50 - 2p - 4\frac{dp}{dt} = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt},$$

Откуда $\frac{dp}{dt} = 20 + 4p$, т. е. получаем уравнение с разделяющимися переменными. Это ДУ и будет математической моделью.

3.Внутримодельное решение. Решая полученное ДУ, учащиеся получают:

$$\int \frac{dp}{20+4p} = \int dt\,;$$

$$\frac{1}{4}\ln|20+4p| = t + C_1;$$

$$(20+4p)^{\frac{1}{4}} = C_2 e^t, \qquad \text{где } C_2 = e^{C_1};$$

$$20+4p = C_3 E^{4t}, \qquad \text{где } C_3 = C_2^4;$$

$$p = C_4 E^{4t} - 5, \qquad \text{где } C_4 = \frac{C_3}{4}.$$

Из условия $p(0) = 10$ следует, что $10 = C4 - 5 \Rightarrow C4 = 15$, поэтому $p = 15e^{4t} - 5$.

4. Интерпретация. Заметим, что поскольку $\lim_{t\to\infty} p = \lim_{t\to\infty}(15e^{4t} - 5) = \infty$, то цена не обладает устойчивостью.

С учащимися можно обсудить полученный результат. Ответ задачи показывает, что если даже не очень большую часть прибыли постоянно вкладывать в производство дефицитного товара, то очень быстро можно добиться большого роста объёма его выпуска, рост – экспоненциальный. Данная модель является весьма упрощённой и редко наблюдается в реальности, так как в ней не учитываются, например, насыщение рынка и износ оборудования.

На следующих занятиях, когда школьники познакомятся с законом взаимодействия противоборствующих видов, с понятийной картой этого закона, можно приступить к моделированию практико-ориентированной задачи о ведении войны. Все этапы математического моделирования необходимо вновь прослеживать, как и при решении задачи 1. Школьники активно участвуют в обсуждении решения задачи, предлагают введение переменных, анализируя условие задачи, выделяют вид зависимости между ними, осуществляют решение с использованием системы MfthCad, делают выводы и обобщения.

Задача 5. «Регулярные войска двух противостоящих сил ведут боевые действия. Обе стороны не получают подкреплений и не терпят потерь от внешних факторов. Коэффициент огневой мощи первой стороны равен 1,7, а коэффициент поражающей силы равен 0,3. У второй стороны коэффициент огневой мощи равен 2,4, а коэффициент поражающей силы 0,6. Определите, какая должна быть численность войск у второй стороны, чтобы она одержала победу, если известно, что численность первой стороны равен 200 тыс.человек» [13] .

1. Математизация. Обозначим численный состав противоборствующих сторон в момент времени t через x(t) и y(t), где t -время, тогда скорости изменения этих величин, соответственно $x'(t)$ и $y'(t)$. Используя условия задачи и описание закона противоборствующих видов из понятийной карты, получим систему дифференциальных уравнений, которая будет являться математической моделью процесса.

2. Формализация и математическая модель.

$$\begin{cases} x' = -by \\ y' = -cx \end{cases}$$

где b = - 1,44 = 2,4 · 0,6 ; c = - 0,51= 1,7 · 0, 3

x(0) = 200

3. Внутримодельное решение.

$1,44\, y^2 - 0,51x^2 = C$

4.Интерпретация.

$1,44\ (y_0)^2 - 0,51 \cdot 200^2 = C$.

Поскольку C > 0 , то y_0 должно быть более 119 тыс.человек.

Дополнительные задачи имеются в источниках: [8, 11,13, 20, 40, 50, 68, 69, 120]. Обширный задачный материал приведен в Приложении-3.

Решая с обучающимися широкий класс практико-ориентированных задач методом математического моделирования, посвящённых разрешению ситуаций из разных областей знания и человеческой деятельности, тем самым способствуем формированию у старшеклассников целостной картины мира и утверждаем их в мысли, что столь разнообразные задачи решаются посредством универсальной математической модели – дифференциального уравнения. Старшеклассники устанавливают межпредметные связи, усваивают суть и этапы метода математического моделирования, приобретают твёрдые навыки в составлении моделей и решении дифференциальных уравнений, знакомятся с многочисленными явлениями и процессами, позволяющими им получить представление о целостности окружающего мира, о наиболее общих закономерностях, действующих в природе, о ведущей роли математики в описании целостной картины окружающего мира методом математического моделирования на основе дифференциальных уравнений.

2.2.3 Система компьютерной математики Mathcad как средство обучения решению ДУ.

В наш век информационных технологий сегодняшнее образование трудно представить без современных IT – средств обучения. К современным средствам обучения можно отнести системы компьютерной математики. Среди них Mathematica, Maple, Reduce, Macsyma, Axiom, MuPad, Derive. Мы остановились на системе Mathcad ввиду её широкой распространённости, доступности и удобств. На уроках информатики старшеклассники, в своём большинстве, знакомятся с этой системой, получают первичные навыки работы в этой системе. К преимуществам Mathcad можно отнести простоту её применения, наглядность графических средств. В этой системе используется язык, приближенный к общепринятому математическому, существенным является простота интерфейса, высокие вычислительные и графические возможности. От пользователя требуется корректность применения её инструментов.

Компьютерные средства (Mathcad, различные IT – решатели) используются в курсе изучения ДУ после прочного усвоения старшеклассниками аналитического метода решения ДУ - разделения переменных. Компьютерные средства служат полноправным инструментом решения ДУ, обогащают возможности обучения.

Система компьютерной математики Mathcad как средство обучению ДУ позволяет:

- находить аналитические решения ДУ,
- находить численные решения ДУ,
- визуализировать на экране компьютера в виде графика полученные решения,
- проводить анализ изменения решений в зависимости от значений параметров,
- избежать рутинной вычислительной работы

- активизировать работу старшеклассников, привлечь их интерес, повысить учебно-познавательную мотивацию.

Использование Mathcad в изучении ДУ подробно освещено в учебно-методическом пособии.

Начальное ознакомление с системой Mathcad начинается со знакомства с интерфейсом, затем – вычисление первой и второй производных, определённого и неопределённого интегралов. После этого переходим к решению ДУ: нахождению общего и частного решений. К рассмотрению алгоритмов решения ДУ и визуализации решений можно обратиться сразу после знакомства с интерфейсом. Освоение системы Mathcad предполагает выработку умений и навыков решения ДУ в разработанном курсе.

Приведём примеры решения ДУ в системе Mathcad с соответствующими комментариями.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$y'(t) = B \cdot y(t) - D \cdot y(t)^2,$$

с начальным условием: $y(0) = 0{,}1$ и параметрах $B = 1$и $D = 1$.

Решение.

Физический смысл данного дифференциального уравнения заключается в том, что оно описывает динамику некоторой экологической популяции с течением времени в условиях ограниченности ресурсов. Уравнение имеет два параметра B и D, B — коэффициент рождаемости, D — коэффициент смертности. Чем больше коэффициент B, тем больше особей рождается, соответственно, тем больше рост функции $y(t)$. Чем больше коэффициент D, тем больше смертность, соответственно, тем быстрее будет уменьшаться в численности эта популяция. График данной функции $y(t)$ показывает, что вначале идёт бурный рост популяции, близкий к экспоненциальному, а затем, когда рост привёл к большой численности, выходит на некоторое стационарное значение — некоторый баланс рождаемости и смертности.

Для решения данного дифференциального уравнения запишем на листе Mathcad в первой строке значения параметров B и D: $B := 1$ $D := 1$. Параметры нужно задать выше слова *Given*, чтобы между *Given* и *Odesolve* не было посторонних математических выражений.

На второй строке введём с клавиатуры ключевое слово *Given*, ниже — исходное уравнение в таком виде:

$$\frac{d}{dt}y(t) = B{\cdot}y(t) - D{\cdot}y(t)^2$$

Далее начальное условие: $y(0) = 0{,}1$

После задания начальных условий вызовем функцию *Odesolve*. Её значение присвоим функции *y*.

$$y := Odesolve(t{,}10)$$

Решение уравнения получено (рисунок 7)

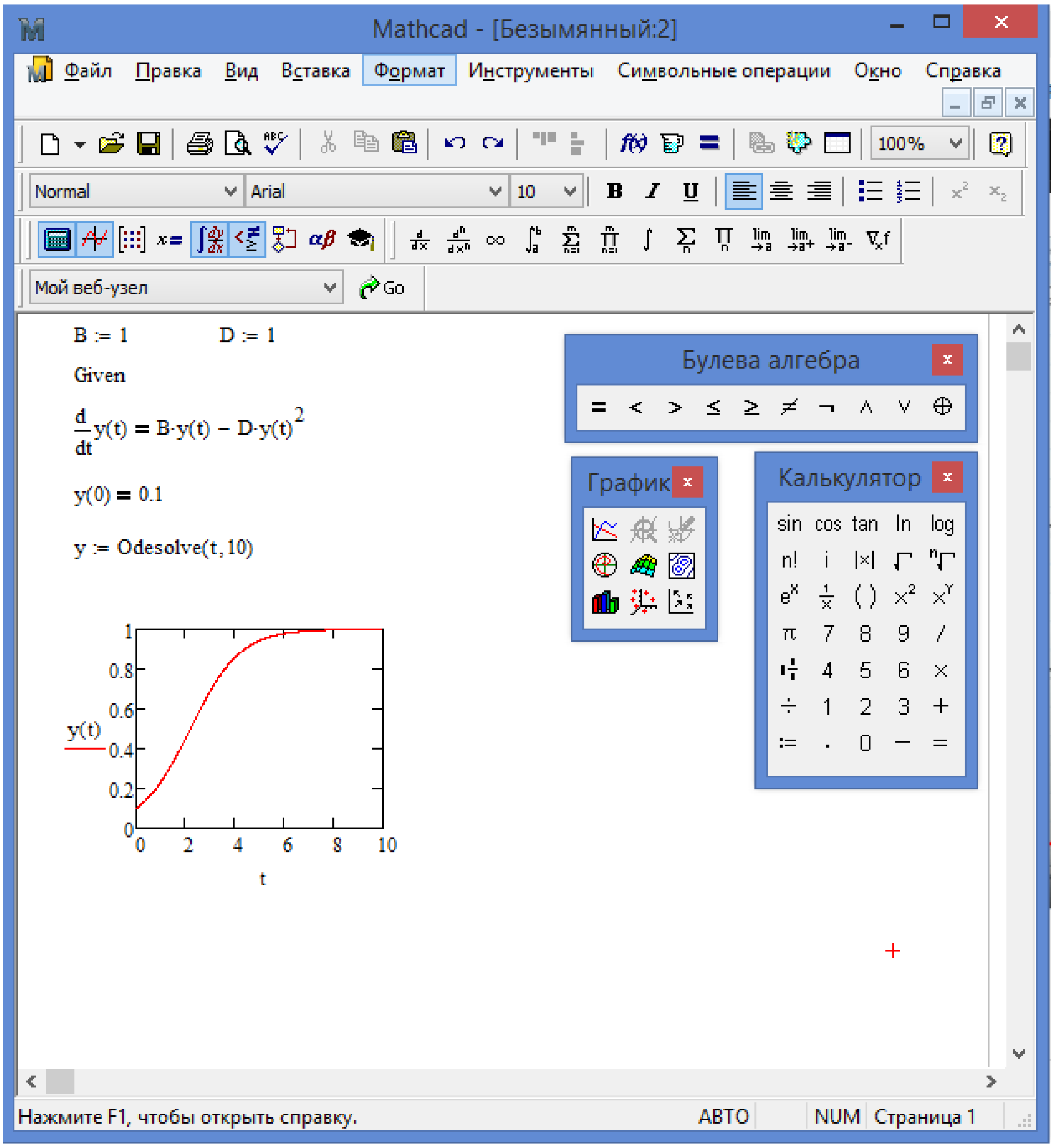


Рисунок 7- *Решение логистического уравнения в системе Mathcad*

Для того, чтобы увидеть графическую интерпретацию решения уравнения, построим график функции $y(t)$, используя панель *График* (рисунок 8).

Используя возможности системы Mathcad, проведём анализ решения. Если взять начальное условие $y(0) = 2{,}2$, то на графике будет видно, что численность популяции сначала будет снижаться, а затем достигнет некоторого баланса (рисунок 9). Начальное условие является показателем того, какова была численность популяции первоначально. При начальном условии $y(0) = 0$ уравнение имеет тривиальное решение $y = 0$, (рисунок 10). Действительно, если популяции не было, то ни вырасти, ни уменьшиться она не может. Если начальное условие взять несколько меньше первоначального, например, $y(0) = 0{,}03$, то график функции продемонстрирует незначительные изменения (рисунок 11). Популяция, выходя на стационарное равновесное значение так в нём и остаётся.

$B := 1 \qquad D := 1$

Given

$\frac{d}{dt}y(t) = B \cdot y(t) - D \cdot y(t)^2$

$y(0) = 0.1$

$y := \mathrm{Odesolve}(t, 10)$

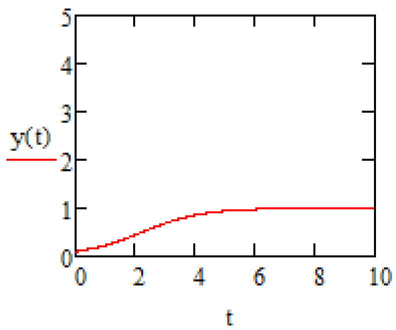


Рисунок 8

$B := 1 \qquad D := 1$

Given

$\frac{d}{dt}y(t) = B \cdot y(t) - D \cdot y(t)^2$

$y(0) = 2.2$

$y := \mathrm{Odesolve}(t, 10)$

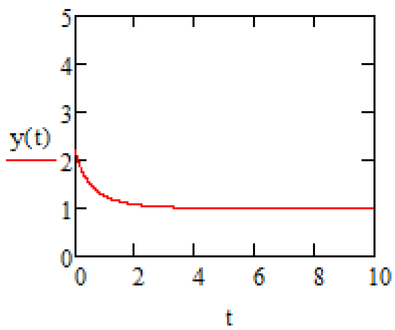


Рисунок 9

$B := 1 \qquad D := 1$

Given

$$\frac{d}{dt}y(t) = B \cdot y(t) - D \cdot y(t)^2$$

$y(0) = 0$

$y := \mathrm{Odesolve}(t, 10)$

$B := 1 \qquad D := 1$

Given

$$\frac{d}{dt}y(t) = B \cdot y(t) - D \cdot y(t)^2$$

$y(0) = 0.03$

$y := \mathrm{Odesolve}(t, 10)$

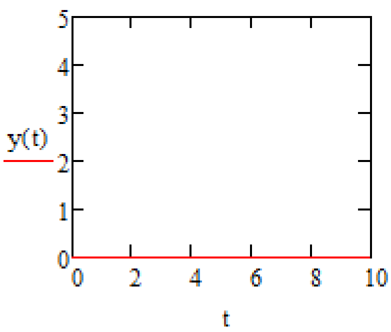


Рисунок 10

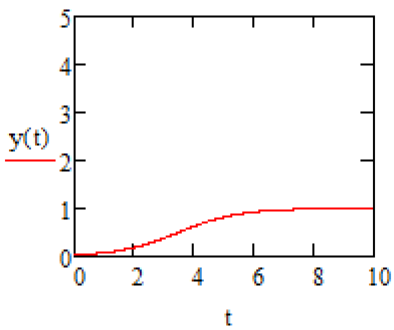


Рисунок 11

В примере 2 покажем, что аналитические методы решения могут сопровождаться решением ДУ в системе Mathcad.

Пример 2. Определить, во сколько раз увеличится количество бактерий за 9 часов, если в течение 3 часов их количество изменилось от 100 тыс. до 200 тыс. Известно, что скорость размножения бактерий, если для них имеется достаточный запас пищи и созданы другие необходимые внешние условия (например, отсутствие подавления бактерий другими видами), пропорциональна их количеству.

Решение. Пусть x - количество бактерий, имеющееся в данный момент, тогда скорость изменения

$$\frac{dx}{dt}.$$

Так как скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству, то существует такое k, что:

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Разделяем в дифференциальном уравнении переменные:

$$\frac{dx}{x} = kdt.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{dx}{x} = \int kdt,$$

$$\ln x = kt + \ln C,$$

что после потенцирования даёт:

$$x = Ce^{kt}.$$

Для нахождения C используем начальное условие: при $t = 0$ $x = 100$. Имеем: $Ce^{\circ} = 100$, $C = 100$, и, значит, $x = 100\ e^{kt}$.

Коэффициент e^{k} находим из условия: при $t = 3x = 200$. Имеем:

$$200 = 100e^{3k}, e^{k} = \sqrt[3]{2}.$$

Искомая функция:

$$x = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}.$$

При $t = 9$ $x = 800$.

Ответ. Количество бактерий за 9 часов увеличится в 8 раз.

Решим задачу аналитически и численно в Mathcad

Аналитическое решение:

$k := \ln\left(\sqrt[3]{2}\right)$

$x0 := 10($

$\frac{d}{dt} x(t) = k\, x(t)$

$$x(0) = x0$$

$$L1(t) := \int_0^t \ln\left(\sqrt[3]{2}\right) dt \rightarrow \frac{t \cdot \ln(2)}{3}$$

$$L2(x) := \int_{100}^{x} \frac{1}{x}\, dx \rightarrow \ln(x) - \ln(100)$$

$$L0(t, x) := L2(x) - L1(t) \rightarrow \ln(x) - \ln(100) - \frac{t \cdot \ln(2)}{3}$$

$$L2(x) - L1(t) \text{ solve}, x \rightarrow 25 \cdot 2^{\frac{t}{3}+2}$$

$$x(t) := 25 \cdot 2^{\frac{t}{3}+2}$$

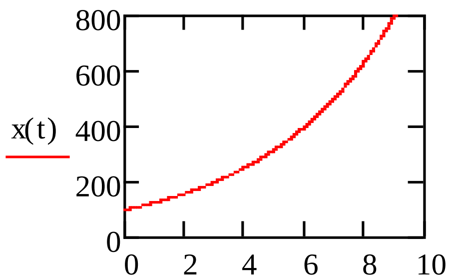


Рисунок 12.

$$x(9) = 800$$

Численное решение:

Given

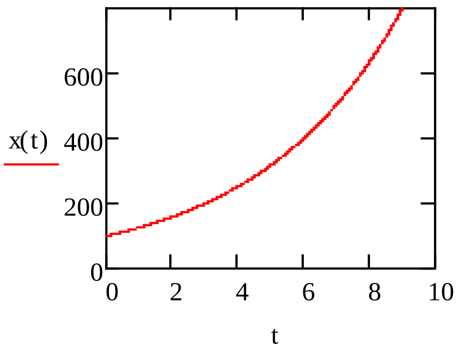
$$k := \ln\left(\sqrt[3]{2}\right)$$

$$x0 := 100$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = k\,x(t)$$

$$x(O) = x($$

$$x := \mathrm{Odesolve}(t, 10)$$



$$x(9) = 800$$

Ответ: в 8 раз.

Использование компьютерных средств обучения не предполагает вытеснение или замену традиционных, необходима целесообразная интеграция всех возможных средств обучения. Занятия с применением компьютерной математики позволяют:

- активизировать процесс обучения, т.к. компьютерная техника позволяет легко избежать вычислительных трудностей,

- придать процессу обучения исследовательский характер, т.к. появляется легко реализуемая возможность варьирования данными,

- индивидуализировать обучение, т.к. каждый из учеников, освоив работу в системе Mathcad, способен самостоятельно удовлетворять свои познавательные интересы.

Система компьютерной математики Mathcad является оптимальной для использования её в процессе обучения ДУ не только как средство обучения, но и как средство развития личности обучающихся.

2.2.4 Лабораторно-практические работы, исследовательские проекты

Известно, что чем более длительное время обучающийся занимается решением какой-либо проблемы, тем более прочно откладываются в его сознании все сопутствующие знания, которые актуализируются для решения этой проблемы. А если постановка и решение проблемы, а также сбор необходимых данных отыскиваются самим обучающимся, то материал, с которым работает учащийся, надолго запечатлевается в его сознании. Поэтому так важно включать в систему занятий лабораторно-практические работы. Лабораторные работы предполагают сбор эмпирических данных самими учащимися, дальнейшее моделирование рассматриваемых процессов осуществляется на основе ДУ. Такие задачи могут основываться на данных о транспорте или другой технике, собранных учащимися у родителей или знакомых, учителю целесообразно провести лабораторную работу. Она будет индивидуальной или на двух учащихся. Учащиеся должны быть информированы о порядке выполнения лабораторной работы и получить письменную инструкцию об этом. В инструкции должны быть пункты: тема, цель работы, собранные данные, теоретические основы, порядок выполнения работы: составление задачи, подбор математической модели, решение дифференциального уравнения, интерпретация результата, выводы.

Подходящих сюжетов для создания проблемной ситуации, формулирования проблемы и последующего её решения с привлечением изученного материала можно найти немало в любой местности. Это может быть бизнес по выпечке хлеба (частные предприятия «Жар-свежар», «Горячий хлеб» «Булка» и др.), статистические данные о числе жителей в городах и посёлках, экономические сюжеты (например, на спрос и предложение), сюжеты на основе анализа механического движения (скорость моторной лодки и др.), на остывание нагретого предмета (хлеба, чайника и пр.), на количество выдыхаемого людьми в замкнутом помещении углекислого газа, на концентрацию используемого в домашнем консервировании рассола, сахарных сиропов и мн. др. Самое главное заключается в том, что числовые данные для составления задач учащиеся могут собрать сами, совершив экскурсию на предприятие малого бизнеса и побеседовав с его владельцем, или непосредственно произведя измерения исследуемых величин для лабораторной работы (причём такие измерения старшеклассники могут проделать в домашних условиях, а на занятии заняться их обработкой), или из статистических источников (опубликованных статистических данных в газетах, бюллетенях и т. п.), или в результате социального опроса. Активность познавательной деятельности – важный фактор заинтересованности учащихся в учении, способствующей формированию целостного мировоззрения, целостного взгляда на окружающий мир, так как так организованное обучение показывает учащимся единение разнообразных знаний (экономических, экологических, физических, математических и др.) и единение способов их достижения (двигательных, умственных, коммуникативных и пр.).

Приведём примеры.

Задачи на концентрацию растворов также отнесём к той категории, которая предполагает предварительный сбор данных на местности или в бытовых условиях или сбор данных другими способами. А можно провести социальный опрос. Например, пригласить 2-3 родителей учащихся на занятие, которые занимаются консервированием в домашних условиях, или провести организованную экскурсию всей группы обучающихся к нескольким родителям. Ведь многие хозяйки, в том числе и родители учащихся, занимаются домашним консервированием, заготавливают соленья и варенья на зиму. В связи с этим учитель просит учащихся собрать у родителей нужные данные для составления задач, решаемых методом дифференциальных уравнений. Учащиеся, как показывает практика, приносят много составленных ими на полученном материале задач. Каждый учащийся обрабатывает свои данные на занятии в рамках лабораторно-практической работы. Затем можно предложить им следующие задачи.

Задача 1. В резервуаре имеется 100 литров рассола, содержащего 10 кг растворенной соли. Каждую минуту 2 литра рассола вытекает из резервуара, а 3 литра пресной воды притекает в него. Перемешивание сохраняет одинаковую концентрацию соли в резервуаре. Скорость растворения соли прямо пропорциональна количеству нерастворённой соли и обратно пропорциональна количеству жидкости в резервуаре. Сколько соли останется в резервуаре через час?

Решение. Учащиеся обозначают: x – количество соли в резервуаре, t– время, отсчитываемое от начального момента в минутах. За промежуток времени dt из резервуара уходит $(-dx)$ кг соли (ведь икс – убывающая функция времени, значит, dx – отрицательная величина, а $(-dx)$ – положительная). Чтобы составить уравнение, вычислим убыль соли иным путём. В момент t в резервуаре находится $(100 + t)$ л жидкости (притекло $3t$ л и утекло $2t$), в ней растворено x кг соли. Значит, в одном литре рассола содержится $\frac{x}{100+t}$ кг соли. За время dt из резервуара вытекает $2dt$ литра рассола, значит, количество соли уменьшится на $\frac{x}{100+t}2dt$ кг.

Получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2xdt}{100+t}$$

Затем учащиеся решают полученное дифференциальное уравнение. Разделяя переменные и учитывая, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ в резервуаре было 10 литров рассола ($x_0 = 10$), а через 60 минут его стало x, интегрируя, получают:

$$-\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{2d(100+t)}{100+t},$$

$$-\int_{10}^{x} \frac{dx}{x} = \int_{0}^{60} \frac{2d(100+t)}{100+t},$$

$$-\ln x \Big|_{10}^{x} = 2\ln{(100+t)} \Big|_{0}^{60},$$

$$\ln\frac{10}{x} = 2\ln\frac{160}{100}$$

Потенцируя данное выражение, имеем:

$$\frac{10}{x} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$$

находят искомое количество соли $x \approx 3{,}91$ (кг).

Ответ: 3,91 кг.

Целесообразно помочь учащимся осмыслить решение этой задачи, привести теоретическое обоснование. Для данного исследования было применено обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, имеющее вид:

$$\frac{dy}{dx}f(y) + g(x) = 0,$$

которое решается следующим образом:

$$f(y)dy = -g(x)dx,$$

$$\int f(y)dy \ = -\int g(x)dx,$$

$$F(y) \ + \ C_1 = G(x) + C_2$$

$$F(y) \ = G(x) + C.$$

При проведении массовых мероприятий со старшеклассниками осуществляется их выход на открытую местность, в лес. В этом случае целесообразно предложить задачу о скорости ветра. Полученные теоретические результаты могут быть проверены на местности.

Задача 2. Ветер теряет часть своей скорости при прохождении через лес из-за сопротивления деревьев. На бесконечно малом участке пути потеря скорости прямо пропорциональна начальной скорости ветра и длине пути. Какая будет скорость ветра, после прохождения по лесу 150м, перед лесом начальная скорость ветра составляла $V_0 = 12 м/с$; после прохождения пути $S = 1$м, скорость ветра уменьшилась до величины $V_1 = 11{,}8 м/с$.

Следующий тип задач, сюжеты которых можно получить с помощью социального опроса или из опыта, – это задачи, связанные с техникой, транспортом и т. п. У многих старшеклассников в семьях есть моторные лодки, и учащиеся вместе с родителями выезжают на природу.

В связи с этим учитель, предложив им решить представленную ниже задачу о моторной лодке, даёт задание составить другие задачи о *скорости* своей моторной лодки, решаемые методом дифференциальных уравнений, взяв данные непосредственно из измерения (опытным путём) или узнав у родителей.

Задача 3. Катер двигался по озеру со скоростью 32 км/ч и через 1 минуту, после того как был выключен двигатель, его скорость стала равной 8 км/ч. Чему будет равна скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя, если сопротивление воды пропорционально скорости движения катера? Какое расстояние он пройдёт через 1 минуту после выключения мотора? Какое расстояние он пройдёт через 2 минуты после выключения мотора?

Решение. Пусть v – скорость движения катера, а k – коэффициент пропорциональности. По условию задачи, на движущийся катер действует сила $F = -k \cdot v$. С другой стороны, по второму закону Ньютона, эта сила $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$, где m – масса, а $\frac{dv}{dt}$ – ускорение. Следовательно,

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v \tag{1.1}$$

есть дифференциальное уравнение (математическая модель), описывающее движение катера. Разделяя переменные и затем интегрируя из (1.1), получим

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot v \,,$$

$$\ln|v| = \ln e^{-\frac{k}{m}t} + \ln C \,.$$

Значит, общее решение дифференциального уравнения (1.1) имеет вид:

$$v = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \,. \tag{1.2}$$

Так как в момент времени $t = 0$ сек скорость катера была $v = 16$ км/ч, а через одну минуту, т. е. при $t = 1$ мин. $= \frac{1}{60}$ ч. она была $v = 8$ км/ч, то из общего решения (1.2), получаем:

$$16 = \text{С и } 8 = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{60}} \,.$$

Значит,

$$C = 16 \text{ и } 8 = 16 \cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{60}}, \text{ т. е. } 2^{-1} = e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{60}} \text{ или } e^{-\frac{k}{m}} = 2^{-60}.$$

Подставив в (1.2), имеем

$$v = 16 \cdot 2^{-60t}\ . \tag{1.3}$$

При $t = 2$ мин. $= \frac{1}{30}$ ч., из (1.3) получим

$$v = 16 \cdot 2^{-60\cdot\frac{1}{30}} = 16 \cdot 2^{-2} = 4.$$

Таким образом, скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя будет равна 4 км/ч.

Обозначим через S расстояние, которое катер будет проходить после остановки двигателя. Очевидно, что оно зависит от времени t, т. е. $S = S(t)$, и в момент $t = 0$ остановки двигателя $S(0) = 0$. Так как, в силу физического смысла производной, скорость есть производная пути по времени, то, используя формулу (1.3), имеем

$$S' = 16 \cdot 2^{-60t}\ ,$$

откуда интегрируя, с учётом, что $S(0) = 0$, получаем

$$S = \int_0^t 16 \cdot 2^{-60x} dx =$$

$$= -\frac{16}{60}\int_0^t 2^{-60x} d(-60x) = -\frac{4}{15}\frac{2^{-60x}}{\ln 60}\Bigg|_0^t = \frac{4}{15 \cdot \ln 60}\left[1 - 2^{-60t}\right].$$

Так как $\ln 60 = 4{,}094344562$, то для простоты вычислений можно считать $\ln 60 = 4$. Поэтому из предыдущего равенства окончательно получаем:

$$S = \frac{1}{15}\left[1 - 2^{-60t}\right]. \tag{1.4}$$

При $t = 1$мин. $= \frac{1}{60}$ ч. из (1.4), имеем

$$S = \frac{1}{15}\left[1 - 2^{-1}\right] = \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{30} \text{ (км)},$$

т. е. через минуту после остановки двигателя катер пройдёт 30 метров.

При $t = 2$мин. $= \frac{1}{30}$ ч. из (1.4), имеем

$$S = \frac{2}{15}[1 - 2^{-2}] = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{10}\,(\text{км}),$$

т. е. через 2 минуты после остановки двигателя катер пройдёт 100 метров.

Ответ. Через 2 мин. после остановки двигателя скорость катера будет 4 км/ч., и он пройдёт расстояние 100 м, а через 1 мин. после остановки двигателя он пройдёт расстояние 30 метров.

Учащиеся могли предложить воспользоваться хорошо известной формулой $S = v \cdot t$, где v определяется по формуле (1.3), но она привела бы к ошибочным парадоксальным результатам: через минуту пройденное после остановки двигателя расстояние равнялось бы $\frac{2}{15}$ км, а через 2 минуты – $\frac{1}{15}$ км, т. е. расстояние бы уменьшилось, что невозможно. Здесь нужно обратить внимание учеников, что формула $S = v \cdot t$ справедлива для *равномерного* движения и в данном случае неприменима.

Приведём ещё типы задач, которые могут лечь в основу практико-лабораторных работ. Данные для сюжетов, аналогичных задаче 4, учащиеся получают в домашних условиях или на занятии. Эксперимент с чайником может проделать каждый учащийся.

Задача 4. Скорость остывания воды в чайнике пропорциональна разности температуры чайника и кухни. Чайник выключился в 10.20 при температуре воды 100° С. В 10.30 температура воды в чайнике была 80° С. Найти время, за которое температура воды в чайнике будет равна 40° С, если температура на кухне 20° С.

Решение.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20), \int \frac{dT}{T - 20} = k \int dt\,, ln\frac{T - 20}{C} = kt,$$

$$T - 20 = Ce^{kt}, T(t) = 20 + Ce^{kt},$$

$$T(0) = 20 + C = 100, C = 80, T(1/6) = 20 + 80e^{k/6} = 80,$$

$$e^{k/6} = \frac{3}{4}, k = 6\ln\left(\frac{3}{4}\right),$$

$$T(t) = 20 + 80e^{6\ln\left(\frac{3}{4}\right)t} = 40, e^{6\ln\left(\frac{3}{4}\right)t} = \frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)t = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/6}, t = \left(\frac{1}{3}\right)4^{\frac{5}{6}} \text{час.} \approx 1 \text{ час.}$$

Ответ: $t \approx 1$ час.

Анализ решения показывает, что с течением времени t температура чайника не может стать ниже 20° Ст. е. ниже температуры воздуха на кухне, и выше 100° С. Таким образом, анализ полученных формул показывает учащимся, что они адекватно описывают (математически моделируют) процессы, рассматриваемые в подобных задачах.

Подобно задаче 4 в домашних условиях можно провести испытание об остывании хлеба, вынутого из духовки, о концентрации углекислого газа в квартире.

Задача 5. В течение 20 минут температура вынутого из печи хлеба и помещённого на складе падает от 100° С до 60^0. Температура воздуха на складе равна 20^0. Через сколько времени от момента охлаждения температура хлеба понизится до: 1) 40^0? 2) 30^0?

Задача 6. В воздухе комнаты объёмом 400 м^3 содержится 0,15% углекислого газа (CO_2). Вентилятор подаёт в минуту 40 м^3 воздуха, содержащего 0,04% CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?

Решение. Допустим $Q(t)$кг – количество углекислого газа в комнате в момент времени t после начала работы вентилятора. Тогда $\frac{Q(t)}{400}$ есть его концентрация в комнате в момент времени t. Следовательно, 40 м^3 воздуха, которые уходят из комнаты за минуту, содержат $0{,}1Q(t)$ м^3 CO_2. Поэтому за время dt минут из комнаты уйдёт $0{,}1Q(t)$ м^3 CO_2. За это же время вентилятор подаст $\frac{0{,}04\%}{100\%}$ $40\,dt$ м^3 $= 0{,}008\,dt$ м^3 CO_2 в комнату. Следовательно, приращение dQ газа CO_2 за время dt *равно* $(0{,}008 - 0{,}1Q(t))dt$, и мы имеем дифференциальное уравнение

$$dQ = (0{,}008 - 0{,}1Q(t))dt.$$

Проинтегрировав, получаем

$$T = 10ln11 \approx 24 \text{ мин.}$$

Ответ: 24 мин.

Решив предложенную учителем задачу 6, учащиеся могут сделать аналогичные расчёты для комнаты в своём доме или квартире.

В задачах о росте населения чаще всего известны исходное количество населения и время прироста, а искомым является конечное количество населения. Данные для составления таких задач берутся из газет, журналов, интернета. С учащимися на занятии решается задача в общем виде, т. е. с буквенными данными. В результате обучающиеся получают зависимость в общем виде (формулу), пользуясь которой, они могут решать большое количество задач этого типа, в том числе, самостоятельно составленных.

Задача 7. Известно, что рост числа $y = y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0.2y}{m}(m - y),$$

где m – максимально допустимое число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1% от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80% от максимального?

Экономические задачи также представляют собой материал, который удобно реализовать на занятиях с предварительным проведением экскурсий или в форме лабораторных работ. При решении задач с экономическим содержанием (на спрос и предложение, на коммунальные платежи и др.) учитель решает ещё одну проблему – финансовой грамотности старшеклассников. Учащиеся знакомятся с содержанием экономических терминов, знание которого обязательно понадобится им, когда они вступят во взрослую жизнь. Ещё раз подтверждается тезис о необходимости формирования целостного мышления учащихся, целостных представлений о жизни на земле, о единстве мира и единых законах, в нем действующих.

Заметим, что поскольку в условиях дополнительного образования нет возможности проводить лабораторно-практические работы, требующих больше времени, а целостное представление о мире, в котором старшеклассник живёт, необходимо будущему активному члену общества, то становится ясной необходимость такой работы в системе дополнительного образования.

Работа над исследовательскими проектами в организационной части схожа с работой в рамках лабораторно-практических занятий. Старшеклассники выполняют индивидуальные исследовательские проекты, заранее знакомятся с критериями его оценки (см.п.2.3). Задача старшеклассника: собрать, обработать и обобщить необходимую информацию по теме проекта, решить задачу из списка практико-ориентированных задач или сформулировать задачу самостоятельно, оформить проект, приготовить доклад и презентацию, защитить свой исследовательский проект.

Тематика исследовательских проектов.

1. Применение системы Mathcad при моделировании житейских ситуаций с помощью ДУ.

2. Применение пакета Mathcad для решения задач школьной математики.

3. Решение практико-ориентированных задач на дифференциальные уравнения в среде Mathcad.

4. Технология решения дифференциальных уравнений с применением Mathcad.

5. Использование метода математического моделирования средствами дифференциальных уравнений при решении задач на закон естественного роста.

6. Использование метода математического моделирования средствами дифференциальных уравнений при решении задач на логистический закон.

7. Моделирование взаимодействия «хищник – жертва» с использованием системы Mathcad.

8. Моделирование колебательных и периодических процессов средствами ДУ. Практико-ориентированные задачи для исследовательских проектов приведены в Приложении-3.

С целью формирования целостной картины мира старшеклассника в системе дополнительного образования в качестве *средств изучения курса дифференциальных уравнений* выступают:

- систематизированный набор понятийных карт,
- практико-ориентированные задачи,
- система компьютерной математики MathCad,
- лабораторно-практические работы,
- исследовательские проекты.

Понятийные карты и блок-схемы являются важными инструментами для организации и представления знаний, особенно для старшеклассников, которые изучают сложные темы, такие как дифференциальные уравнения. Они помогают учащимся визуализировать и понимать основные понятия, термины и принципы, связанные с дифференциальными уравнениями. Использование этих инструментов также может способствовать достижению целостности знаний учащихся и помочь им лучше усвоить материал. В системе дополнительного образования, где учащиеся часто имеют более продвинутые и специфические потребности в обучении, использование понятийных карт может быть особенно полезным для обеспечения эффективного обучения с целью формирования целостной картины мира. При решении практико-ориентированных задач происходит установление межпредметных связей, поскольку постановка задач охватывает все области знания и все отрасли человеческой деятельности. В результате проведённых лабораторных занятий у учащихся повышается интерес к изучению математики, потому что они видят её практическую значимость.

Среди IT-средств компьютерной алгебры выбран пакет MathCad. Достоинством системы MathCad является полное соответствие используемых в ней функций и операторов согласно традициям оформления в математике. В Mathcad можно посчитать как значение функции в заданной точке или вычислить интеграл, так и можно создать свои математические модели при изучении ДУ.

С помощью исследовательских проектов старшеклассники получают знания об окружающем мире, проявляют самостоятельность и инициативность, осознают свою активную роль в познании наиболее общих законов окружающего мира. Это служит закреплению представлений о целостности и единстве реального мира, осознанию своего значимого места и активной роли в окружающей действительности.

2.3. Экспериментальная проверка результативности методики изучения ДУ в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ старшеклассника

С целью подтверждения гипотезы исследования и выдвинутых нами теоретических выводов была организована экспериментальная проверка. Экспериментальная проверка проводилась с группами старшеклассников в Центре внешкольной работы (МУДО «ЦВР»), на базе МОУ «СОШ № 12» г. Зеленокумска в Ставропольском крае, в Воскресной компьютерной школе ЮФУ в г. Ростов-на-Дону. Экспериментальная проверка проводилась с 2018 года по 2023 год в три этапа:

- констатирующий этап (2018 – 2020 гг.);
- формирующий этап (2020 – 2022 гг.);
- контролирующий этап (2022 - 2023 гг.).

На всех этапах было задействовано 194 обучающихся.

В констатирующем этапе эксперимента приняли участие 48 старшеклассников, в формирующем – 35 старшеклассников. В контролирующем этапе экспериментальной проверки приняли участие 111 учащихся, причём 54 учащихся составили контрольную группу, а 57 – экспериментальную.

Целью эксперимента являлась проверка результативности предлагаемой методики обучения старшеклассников дифференциальным уравнениям на основе практико-ориентированного подхода в рамках дополнительного образования, направленного на формирование целостной картины мира. Результативность разработанной методики проверялась на основании разработанных в модели критериев путём оценки продуктов учебной деятельности старшеклассников: анализа анкетирования, результатов контрольных работ, исследовательских проектов.

Первый этап эксперимента, констатирующий (2018 – 2020), направлен на решение первой задачи исследования и заключался в обосновании актуальности выбранной темы исследования. Он был важным этапом исследования, целью которого было изучение текущего состояния обучения дифференциальным уравнениям в системе дополнительного образования. Исследование включало анализ школьной документации, посещение уроков, проведение бесед с учителями и учащимися, а также анкетирование учащихся. Результаты исследования показали, что обучение дифференциальным уравнениям в средней школе ограничено, и они редко изучаются в системе дополнительного образования из-за отсутствия времени в общем образовании и методического обеспечения для изучения этого материала.

С целью выяснения отношения старшеклассников к предлагаемому им для изучения разделу и сформированности у них представлений о целостности окружающего мира был проведён опрос в начале и в конце экспериментальной проверки. Опрос состоял из приведённых ниже 7 вопросов.

Анкета-1.

1. Интересно ли вам узнать, как решаются уравнения следующего вида:

а) $y^2 + \sin x = 1 + x^2$; *б)* $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$; *в)* $y(x)' = k \cdot y(x)$;

г) $f(x+1) + f(x-1)=2$? (да/нет/затрудняюсь ответить)

2. При изучении школьных предметов (физики, химии, биологии, экологии и др) или в других ситуациях встречались ли вам уравнения, в которых кроме неизвестной функции $y(t)$, зависящей от переменной t, в уравнении содержится и ее производная $y'(t)$, т.е. дифференциальные уравнения? (да/нет/ затрудняюсь ответить)

3. Как вы считаете, а)применяются ли на практике, в жизни дифференциальные уравнения? б)описывают ли дифференциальные уравнения реальные процессы в окружающем мире? (да/нет/затрудняюсь ответить)

4. Математиками открыта система уравнений, описывающая взаимосвязь численности волков ($y(t)$) и численности зайцев ($x(t)$) в зависимости от времени t. а)предполагаете ли вы, что это единственная ситуация, или есть другие подобные процессы, моделируемые такой же системой уравнений ? (единственная / есть другие процессы / затрудняюсь ответить); б)есть ли у вас желание познакомиться с такими системами уравнений? (да/нет/ затрудняюсь ответить).

5. Вам уже известно, что зависимость пройденного телом пути (y) от времени (t) при свободном падении описывается равенством $y = y_0 + v_0\, t - \frac{gt^2}{2}$. Считаете ли вы, что это единственная ситуация, или есть другие процессы, подчиняющиеся такой закономерности? (единственная- положительный ответ / есть другие процессы -отрицательный ответ / затрудняюсь ответить).

6. Хотите ли вы научиться решать дифференциальные уравнения? (да/нет/затрудняюсь ответить)

7. Как вы представляете, что такое целостная картина мира? (дайте развёрнутый ответ)».

В опросе участвовали 48 обучающихся.

Результаты анкетирования представлены в таблице 1.

Таблица 1. *Результаты анкетирования обучающихся*

Вопросы анкеты	Количество ответов		
	Положительных	Отрицательных	Затрудняюсь ответить
1	37	7	4
2	9	21	18
3	а)10 б) 7	а) 34 б) 34	а) 4 б)7
4	42	4	2
5	40	4	4
6	39	4	5

Результаты этой части работы показывают, что у старшеклассников имеется познавательный интерес к изучению ДУ. На первый, четвертый, пятый и шестой вопросы анкеты большинство обучающихся дали положительные ответы; на второй и третий вопросы большая половина обучающихся дали отрицательный ответ либо затруднились с ответом. Отвечая на последний - седьмой - вопрос анкеты, лишь пятая часть обучающихся смогла своими словами описать ЦКМ, большая же часть обучающихся привели неточное описание ЦКМ, остальные – оставили данный вопрос без ответа. По этому вопросу, мы провели дополнительное интервьюирование, которое позволило убедиться, не только в том, какое содержание учащиеся вкладывают в понятие ЦКМ, но и в некоторой степени выяснить, является ли их картина мира целостной.

Особое внимание было обращено на ответы учащихся на 3-ий, 4-й и 5-й вопросы. Старшеклассники не смогли рассказать, как и где, с какой целью применяются в жизни, в различных сферах деятельности человека дифференциальные уравнения и применяются ли вообще. Из ответов на эти простейшие вопросы становится ясно, что целостной картины мира, целостных представлений о мире в сознании старшеклассников не сложилось: математические знания отдельно, а реальные задачи из жизнедеятельности человека - также отдельно, т. е. математика и, в частности, дифференциальные уравнения в представлении старшеклассников не значительно участвуют в решении практических задач.

Таким образом, результаты анкетирования приводят нас к выводу о том, что целостная картина мира у обучающихся в условиях современной общеобразовательной школы сформирована недостаточно, но старшеклассники проявляют интерес к изучению дифференциальных уравнений, к общим закономерностям, действующим в окружающем мире. Опрос учителей показывает, что им доступны лишь отдельные материалы о методиках формирования ЦКМ. К изучению ДУ как в общем, так и в дополнительном образовании, также нет доступных методических разработок и рекомендаций. Полученные на этом этапе экспериментальной проверки результаты позволили нам сделать вывод о том, что необходимо перейти к разработке модели изучения ДУ с целью формирования ЦКМ в системе дополнительного образования, которая позволила бы:

а) реализовать современные цели обучения математике, задачи дополнительного образования, требования ФГОС СОО;

б) осуществить изучение ДУ старшеклассниками, нацеленное на формирование ЦКМ старшеклассников на основе практико-ориентированного подхода.

Эти экспериментальные действия, в сочетании с анализом научно-методической литературы и результатов практики работы школы и учреждений дополнительного образования на предмет состояния и направленности обучения старшеклассников математике на формирование ЦКМ, попытки отбора материала и разработки первого варианта разрешения выявленных противоречий, - позволили убедиться в актуальности исследования и сформулировать проблему.

На втором этапе, формирующем (2 года: 2020-2022гг.), продолжены поиски наиболее эффективных путей решения проблемы, апробированы различные формы учебной деятельности старшеклассников, создающие предпосылки для разработки основы методики конструирования и апробации компонентов модели обучения старшеклассников решению обыкновенных дифференциальных уравнений на основе практико-ориентированного подхода в рамках дополнительного образования как средства формирования целостной картины мира. Проведено апробирование предлагаемой экспериментальной методики на малой группе обучающихся, проведены анкетирование, тестирование обучающихся, контрольные работы и опрос учителей с целью выяснения их отношения к выработанной методике; на основе выводов, диктуемых полученными результатами, вносились изменения в разрабатываемые положения; на этом этапе в теоретической части исследования разработана модель изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ старшеклассника.

В ходе этой части эксперимента осуществлена проверка первого варианта методики обучения старшеклассников ДУ в рамках дополнительного образования на основе разработанной программы дополнительного образования, которую далее мы будем называть классической. Эта программа была разработана с учётом знаний, полученных в общеобразовательной школе, и способности старшеклассников усваивать практическую и прикладную направленность математических разделов, а также решать практические и ориентированные на ДУ проблемы.

Обучение по классической методике осуществлялось в соответствии со Схемой-1 (рисунок 13).

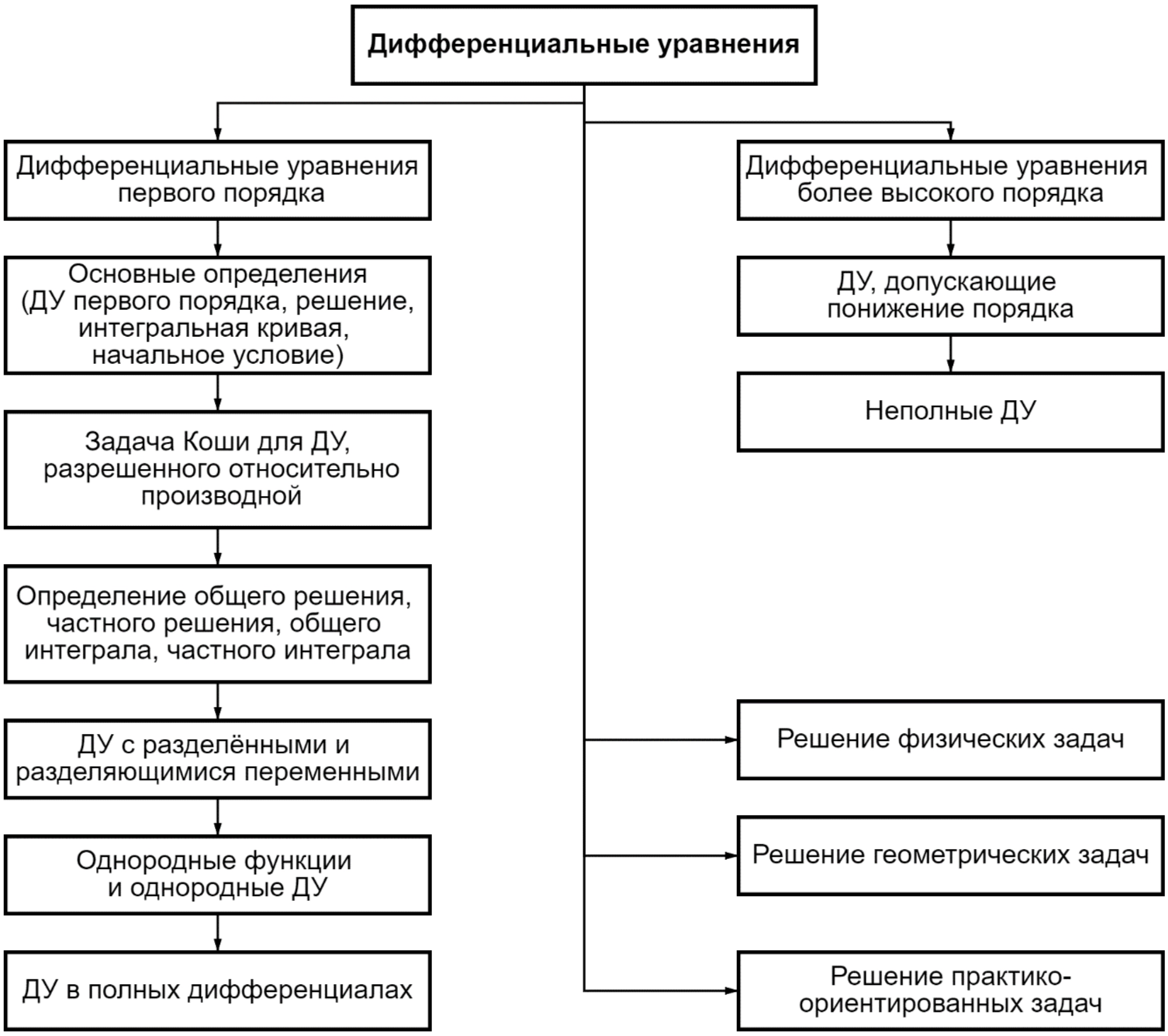


Рисунок 13 – *Схема-1. План курса ДУ: формирование ЦКМ старшеклассника на основе решения практико-ориентированных задач*

Программа дополнительного образования по изучению ДУ с целью формирования ЦКМ старшеклассника на основе решения практико-ориентированных задач:

1. История возникновения и развития понятия дифференциального и интегрального исчислений (1 ч.).
2. Предел функции (4 ч.).

Приращения аргумента и функции.

Предел функции в точке и на бесконечности.

Свойства конечных пределов.

Правосторонний и левосторонний односторонние пределы.

3. Производная и дифференциал (6 ч.).

Производная функции в точке.

Механический и геометрический смысл производной.

Таблица производных основных элементарных функций.

Производная сложной функции.

Нахождение производной функции, техника дифференцирования.

Дифференциал, его механический и геометрический смысл.

4. Первообразная и интеграл (5 ч.).

Понятия первообразной и неопределённого интеграла.

Правила интегрирования.

Методы интегрирования.

Таблица интегралов от основных элементарных функций.

Понятие определённого интеграла, его свойства и геометрический смысл.

5. Дифференциальные уравнения (8 ч.).

Понятие дифференциального уравнения и его решения, задача Коши.

Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Однородные дифференциальные уравнения и сводящиеся к ним.

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.

Неполные дифференциальные уравнения второго порядка (допускающие понижение порядка).

6. Применение дифференциальных уравнений к решению практико-ориентированных задач (7 ч.):

- экономических,

- физических,
- механических,
- химических,
- биологических,
- геометрических,
- бытовых.

7. Самостоятельная (отчётная) работа, исследовательский проект (2 ч.).

8. Заключительное занятие (1ч.)**.**

Пункт 1 имеет целью формирование мотивации старшеклассников на изучение предлагаемого фрагмента дифференциальных уравнений: исторические аспекты развивают познавательный интерес обучающихся, а иллюстрации приложений теории к различным областям человеческой деятельности способствуют пониманию старшеклассниками целесообразности изучения предлагаемого материала, особенно в связи с предстоящим выбором будущей профессии.

Пункты 2-4 имеют подготовительный характер, актуализируются имеющиеся у старшеклассников знания, добавляются необходимые математические сведения, материал обобщается и систематизируется.

Пункт 5 посвящён ознакомлению с новым материалом, опирающимся на актуализированные знания, а пункт 6 – прикладным вопросам теории. Учащиеся знакомятся с многочисленными приложениями дифференциальных уравнений к различным областям знания.

После завершения курса занятий проводится контрольная работа, которая позволяет оценить уровень усвоения учащимися материала. На заключительном занятии происходит защита исследовательского проекта, подводятся итоги работы и озвучиваются перспективы дальнейшей работы в этом направлении.

Диагностика сформированности знаниевой и операционно-деятельностной составляющих ЦКМ при обучении в соответствии со схемой-1 позволила констатировать определённые результаты. Были проведены наблюдения за деятельностью старшеклассников на занятиях, проверочные работы, защита проектов. Пример варианта самостоятельной работы приведён в Приложении-1, самостоятельная работа -1.

Анализ результатов самостоятельной работы показал, что с первой задачей учащиеся в целом справились; при решении второй и четвертой испытывали затруднения, потому что представили решение с существенными недочётами и порой с ошибками; третью задачу решили немногие учащиеся. С пятой задачей справились единицы.

Для проверки сформированности ценностно-смысловой составляющей ЦКМ проводилось анкетирование. В опросе участвовали 35 обучающихся. Им было предложено ответить на вопросы той же анкеты (Анкета-1), которая использовалась на констатирующем этапе.

Результаты анкетирования. На первый и третий вопросы многие обучающихся дали положительные ответы; на шестой вопрос все обучающиеся ответили положительно. Особое внимание было обращено на ответы учащихся на 4-ый, 5-й и 7-ый вопросы, т.к. они непосредственно касаются ЦКМ. Отвечая на седьмой вопрос анкеты, четверть обучающихся описали ЦКМ, частично раскрыв понятие; остальные – неверно раскрыли данный вопрос. Незначительная часть обучающихся смогла дать ответ на второй вопрос анкеты, как и где применяются дифференциальные уравнения, вспомнив физику или биологию, с какой целью применяются в жизни, какие описывают процессы и явления.

Результаты самостоятельных, контрольных работ, проведённые опросы позволили сделать выводы: обучение старшеклассников по классической методике показывает, что математическое содержание старшеклассники, в основном, усваивают, но целостная картина мира формируется недостаточно. Признавая, что по ответам на вопросы данной анкеты невозможно со стопроцентной уверенностью утверждать о степени сформированности ЦКМ, мы, тем не менее, имеем основания для произведенных оценочных суждений.

Интерес старшеклассников вызывают практико-ориентированные задачи, но встречающиеся трудности при их решении играют негативную роль. Попытка познакомить старшеклассников с богатым содержанием учебной вузовской дисциплины ДУ и широким разнообразием практико-ориентированных задач за весьма ограниченное время ведёт, скорее, к нежелательным образовательным результатам в плане формирования ЦКМ. Порой старшеклассники теряют интерес ввиду того, что сталкиваются с техническими вычислительными трудностями, несформированностью навыков интегрирования, обучающиеся не могут обрести устойчивые умения по курсу ДУ, сориентироваться среди множества частных приёмов решения ДУ и методов математического моделирования.

Полученные результаты обучения привели нас к выводу, что данный курс дифференциальных уравнений необходимо перестроить. Мы изменили структуру курса. Среди наиболее общих взаимосвязей окружающего мира мы выделили для изучения дифференциальные уравнения, выражающие наиболее общие законы окружающего мира: естественного роста, логистический, закон колебаний, взаимодействия конкурирующих видов, уравнение взрывного развития. При обучении старались воплотить главную идею курса, которая способствует формированию целостности картины мира: системный изоморфизм разнообразных по предметному содержанию реальных процессов и явлений окружающего мира ведёт к одной и той же математической модели, к одному и тому же дифференциальному уравнению. Схематично курс представлен на Рисунке – 14 Схема-2.

Изучение дифференциальных уравнений в соответствии со схемой – 2 имеет ряд отличий от вузовского. Вузовский курс строится на последовательном изучении основных типов ДУ первого порядка, разрешимых в квадратурах, и достаточно большом количестве методов, рекомендованных для каждого из типов ДУ. Ввиду перегруженности курса теоретическими сведениями, мы приняли решение другого построения курса. Предлагаемый по схеме-2 курс опирается на известные школьникам знания из курса алгебры и начал анализа общего образования, в качестве основного метода решения рассматривается лишь разделение переменных, большая роль отводится IT – решателям.

Начало обучения – пропедевтика классического курса ДУ: основные понятия ДУ, метод разделения переменных. Основные понятия: дифференциальное уравнение, порядок ДУ, общее, частное, особое решения – даются по аналогии с алгебраическими. Понятие ДУ вводится описательно, как соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производную. Это понятие аналогично понятию уравнения из курса алгебры. Но следует обратить внимание обучающихся на тот факт, что ДУ – это функциональное уравнение и его решением является функция, другой математический объект по сравнению с известными ранее уравнениями из курса алгебры, где решением является действительное число. Понятие ДУ иллюстрируется примерами, школьники решают задачи на распознавание ДУ, приводят свои примеры, основываясь на имеющихся знаниях. Определяют порядок ДУ по порядку входящей в уравнение старшей производной. Необходимо указать, что порядок ДУ и порядок или степень алгебраического уравнения – различные понятия. В них принята разная основа классификации: в первом случае – для ДУ – это порядок старшей производной, во втором - старшая степень неизвестной, входящей в уравнение. Для проверки, является ли функция решением ДУ, необходимо эту функцию подставить в уравнение и получить тождество, справедливое при всех допустимых значениях аргумента. Этот алгоритм из курса школьной математики старшеклассникам хорошо знаком по непосредственной проверке решения уравнений методом подстановки.

Основной аналитический метод решения ДУ – разделение переменных - основан на свойствах пропорций. Школьники его легко осваивают. Для выполнения дальнейшего интегрирования необходимо предварительно актуализировать таблицу первообразных.

Далее на занятиях можно переходить к формулировке законов, выраженных на языке дифференциальных уравнений. При решении задач используем метод математического моделирования. При выборе средств решения ДУ останавливаемся среди аналитических методов на разделении переменных, но отдаём предпочтение компьютерным средам, пакетам компьютерной алгебры, IT-решателям. У старшеклассников, как правило, не бывает затруднений при работе с такими IT-инструментами, они им хорошо известны по занятиям информатикой и в связи с общей тенденцией цифровизации общества. Большое внимание на занятиях уделять интерпретации полученных решений и их визуализации. При изучении ДУ по схеме-2 реализуется генеральная идея всего курса: в результате абстрагирования от сюжета задачи, от конкретного содержания и смысла решаемых практико-ориентированных задач, выполняя обобщения, допущения, мы приходим к общим законам природы, выраженным на языке ДУ, что является неоспоримым свидетельством целостности картины окружающего мира.

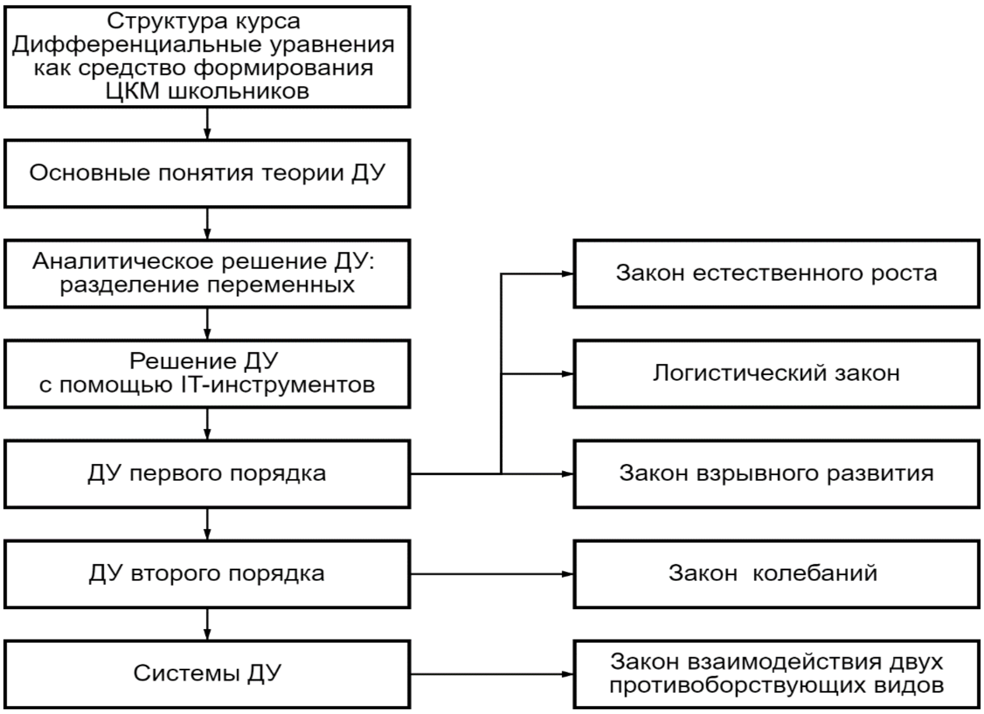


Рисунок 14 – Схема-2. План курса ДУ: формирование ЦКМ старшеклассника на основе изучения основных законов окружающего мира

Обучение старшеклассников в учреждении дополнительного образования «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района» представлены в таблице-1. Изучение ДУ осуществлялось по экспериментальной методике на основе Схемы-2 в малой группе (9 человек) и позволило предварительно утверждать результативность разработанного курса ДУ в плане формирования целостной картины мира старшеклассников.

При этом использовался диагностический инструментарий, представленный в Приложении 2, который позволил оценить приращения ЦКМ путем проверки умений находить аналогии на этапе интерпретации и подмечать изоморфность ситуаций.

Результаты обучения старшеклассников в учреждении дополнительного образования «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района», г. Зеленокумска по экспериментальной методике представлены в таблице-2.

Таблица-2. *Результаты достижения каждым учеником уровней сформированности ЦКМ в результате экспериментального обучения.*

Список старшеклассников	Начало обучения	Конец обучения	Эффект воздействия
Б.К.	0	I	+
Г.Н.	I	III	+
К.Я.	I	I	0
Л.М.	I	II	+
П.Д.	0	I	+
Р.А.	I	III	+
Х.М.	0	0	0
С.Е.	0	II	+
К.К	I	II	+

I, II, III – уровни сформированности ЦКМ в соответствии с критериями, разработанными в модели, п.1.4. Ноль соответствует не диагностируемости сформированности ЦКМ, когда ни по одному из критериев не было получено положительных данных.

При статистической обработке результатов таблицы 2 используем критерий знаков [115**;** с.43]. Из таблицы 2 видно, что у большинства старшеклассников отмечается улучшение результатов (знаков «+» – 7), но есть и такие, у которых уровень сформированности ЦКМ не изменился

(«0» – 2). Отрицательных результатов нет (знаков «–» - нет). Таким образом, большее число результатов оказалось со знаком
«+» - 7 учащихся. По критерию знаков это число является наблюдаемым значением критерия. Критическое табличное значение для n= 9–2=7 при 5%-ном уровне значимости, оно равно 7. Поэтому можно утверждать, что различия между полученными результатами статистически достоверны.

Полученный результат позволил сделать предположение: реализация сконструированной методики может дать устойчивые результаты в плане формирования ЦКМ старшеклассника на основе изучения ДУ.

Это позволило принять разработанный курс ДУ, основанный на системном изоморфизме, в качестве основного и развернуть построение модели изучения ДУ с целью формирования ЦКМ старшеклассников.

В течение последнего, контролирующего, этапа (1 год: 2022-2023) проверялась результативность предлагаемой методики обучения старшеклассников решению обыкновенных дифференциальных уравнений на основе практико-ориентированного подхода в рамках дополнительного образования как средства формирования целостной картины мира посредством анализа продуктов учебной деятельности обучающихся.

Обучение в контрольной группе (57 старшеклассника) проводилось по классической методике, в экспериментальной (54 старшеклассника) по разработанной методике в соответствии со схемой-2 изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ. Было осуществлено входное и выходное анкетирование, проведены самостоятельные и контрольные работы, выполнение и защита исследовательских проектов в конце обучения, наблюдения за поведением учащихся во время занятий, фиксировалось отношение старшеклассников к изучаемому материалу, проводились беседы с обучающимися и их родителями с целью установления влияния занятий по предлагаемой методике на развитие взглядов, формирование отношения к значимости изучения математики и осознанию старшеклассниками своего места в мире. Уточнена методика, сформулированы теоретические выводы, конкретизированы методические рекомендации, дано обоснование полученным экспериментальным результатам.

В конце курса ДУ были проведены контрольные мероприятия: тестирование (Приложение-1, Тесты-1,2), контрольная работа (Приложение-1, Контрольные работы), анкетирование, защита исследовательских проектов, диагностика уровня сформированности ЦКМ старшеклассников (Приложение-2, Анкета).

Таблица 3. *Отметки за контрольную работу по решению ДУ в ЭГ и КГ*

Оценки	КГ (кол-во старшеклассников)	ЭГ (кол-во старшеклассников)
	В ходе проведения контролирующего этапа экспериментальной проверки	
5	2	4
4	27	35
3	25	13
2	3	2
Всего	57	54

Статистическая обработка результатов контрольной работы проводилась с использованием критерия однородности Хи-квадрат:

$$\mathrm{K}_{набл} = n_1 \cdot n_2 \cdot \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\frac{v_{i1}}{n_1} - \frac{v_{i2}}{n_2} \right)^2}{v_{i1} + v_{i2}}$$

Проверим гипотезы о различии в умениях учеников решать ДУ первой и второй группы, установив уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

H_0: $F_1(x) = F_2(x)$- выборки различаются статистически незначимо;

H_1: $F_1(x) \neq F_2(x)$- выборки различаются статистически значимо.

По таблице 3: $n_1 = 57$; $n_2 = 54$.

$$\text{K}_{набл}=57\cdot 54\cdot\left[\frac{(2/57-4/54)^2}{2+4}+\frac{(27/57-35/54)^2}{27+35}+\frac{(25/57-13/54)^2}{25+13}+\frac{(3/57-2/54)^2}{3+2}\right]\approx 5.61.$$

Число степеней свободы $r-1=4-1=3$. По таблице критических точек распределения χ^2 с 3-мя степенями свободы находим критическое значение

$k_{кр}=k_{кр}(3;0{,}05)=7{,}82$. Так как $\text{K}_{набл}$ = 5,61 < 7,82= $k_{кр}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 на уровне значимости 5% . Делаем вывод: выборки различаются статистически незначимо.

Проведённая статистическая обработка свидетельствует о статистической неразличимости отметок за контрольную работу в ЭГ и КГ, при выполнении которой мы определяли сформированность умений старшеклассников решать ДУ в контрольной группе - КГ и экспериментальной группе - ЭГ.

Оценка уровня сформированности ЦКМ старшеклассника осуществлялась на основе разработанных критериев, анкетирования (см. Приложение-2, Анкета) и качества выполнения исследовательских проектов.

Критерии оценивания исследовательских проектов.

По каждому критерию может быть выставлено от 0 до 2 баллов, где: 2 балла – полностью соответствует, 1 балл – частично соответствует, 0 баллов – полностью не соответствует. Перевод в 5-балльную шкалу: 18-25 – 5 баллов; 12-17 – 4 балла; 5-11 – 3 балла; менее 5 баллов – 2.

В ходе проведения контрольных мероприятий уровень сформированности ЦКМ методом экспертной оценки в соответствии с разработанными критериями (знаниевым, операционно-деятельностным, ценностно-смысловым) в контрольной и экспериментальной группах приведены в таблице 4. Уровни сформированности ЦКМ: I – низкий, II – средний, III – высокий.

<table>
<tr><th colspan="5">Аспекты</th></tr>
<tr>
<td>A.
Соблюдение логики проектной деятельности, результаты работы</td>
<td>Проблемное поле
Актуальность работы обоснована. Продемонстрировано, как проект будет решать проблему.</td>
<td>Образ продукта
Характеристики продукта в заявке дают исчерпывающее представление о нем и соотнесены с задачами.</td>
<td>Планирование
Соблюдена логика поэтапного планирования, продукт и проектная документация (окончательная заявка и отчёт) представлены в срок.</td>
<td>Продукт
Итоговый продукт соответствует заявленному образу и решает поставленную задачу. Изменения ключевых характеристик обоснованы.</td>
</tr>
<tr>
<td>B.
Отчёт</td>
<td colspan="2">Соответствие формату
Структура и оформление отчёта соответствуют формату академического/профессионального общения и нормам современного русского литературного языка.</td>
<td colspan="2">Рефлексия
Раздел «Рефлексия» даёт представление о возникших проблемах и способах их решения. Указаны возможные пути развития проекта и способы применения приобретённых компетенций</td>
</tr>
<tr>
<td>C.
Представление работы</td>
<td colspan="2">Выступление
Даёт представление о процессе и результате проделанной проектной работы, повествование логично, речь грамотна.</td>
<td>Презентация
Презентация поддерживает выступление, не подменяя его собой. Текст и оформление не содержат ошибок.</td>
<td>Вопросы
Ответы на вопросы хорошо аргументированы и демонстрируют осведомлённость в теме.</td>
</tr>
</table>

Рисунок 15 – *Критерии оценивания исследовательских проектов*

Таблица 4 −*Уровни сформированности ЦКМ старшеклассников в контрольной группе (КГ) и экспериментальной группе (ЭГ) на контролирующем этапе экспериментальной проверки*

Уровень сформированности	КГ (кол-во старшеклассников)	ЭГ (кол-во старшеклассников)	КГ (кол-во старшеклассников)	ЭГ (кол-во старшеклассников)
	до обучения		после обучения	
I	47	43	15	6
II	9	10	33	29
III	1	1	9	19
	57	54	57	54

Для статистической обработки данных таблицы 4 применяем критерий хи-квадрат Пирсона. Экспериментальное значение статистики $\chi^2_{экс}$ рассчитываем автоматически на сайте https://medstatistic.ru/calculators/calchit.html

Выдвигаем гипотезы: нулевую: H_0 – значимые различия в сформированности ЦКМ старшеклассников контрольной и экспериментальной групп отсутствуют;
и конкурирующую: H_1 – значимые различия в сформированности ЦКМ старшеклассников контрольной и экспериментальной групп имеют место.

ДО обучения: значение статистики критерия Пирсона $\chi^2_{экс}$ при двух степенях свободы составляет 0,149. При уровне значимости $p < 0.05$ критическое значение $\chi 2$ составляет 5,991. Очевидно, что $0{,}149 < 5{,}991$, поэтому нет оснований гипотезу H_0 отвергать. Таким образом, группы ДО обучения однородны по признаку «сформированность ЦКМ», т.е. группы контрольная – КГ и экспериментальная – ЭГ сформированы верно.

ПОСЛЕ обучения: значение статистики критерия Пирсона $\chi^2_{экс}$ при двух степенях свободы составляет 7,611. При уровне значимости $p < 0.05$ критическое значение $\chi 2$ составляет 5,991. Очевидно, что 7,611> 5,991, поэтому имеются основания гипотезу H_0 отвергнуть и принять альтернативную о том, что различия в сформированности ЦКМ старшеклассников статистически значимы. Эти изменения связаны с экспериментальной методикой обучения. Таким образом, уровень сформированности ЦКМ у старшеклассников ЭГ оказался существенно ВЫШЕ, чем в КГ.

Кроме того, было осоществлено сравнение уровней сформированности ЦКМ обучающихся экспериментальной группы до обучения и после обучения. Пусть ξ -случайная величина, характеризующая уровень сформированности ЦКМ до обучения, а случайная величина η характеризует уровень сформированности ЦКМ после обучения с использованием разработанных рекомендаций.

В ходе наблюдений получены две выборки экспериментальных значений этих случайных величин по шкале измерений, имеющей 2 категории:

«–» (показатель сформированности ЦКМ недостаточный: 0 или I) и

«+ » (показатель сформированности ЦКМ достаточный: II или III) (таблица 5).

Таблица 5– Результаты оценивания уровня сформированности ЦКМ

		После обучения		Всего
		«+ »	«–»	
До обучения	«+ »	a = 10	b = 1	11
	«–»	c = 38	d = 5	43
Всего		48	6	54

Воспользуемся критерием Макнамары (Мак-Немара) [115; с.48] для зависимых выборок, выбрав 5% -ный уровень значимости.

Гипотезы об однородности выборок

$$H_0: \ F_\xi(x)=F_\eta(x) \text{ и } H_1: F_\xi(x)\neq F_\eta(x)$$

сводятся к гипотезам

$H_0: P(x_i = 0, y_i = 1) = P(x_i = 1, y_i = 0)$- отсутствуют значимые различия в уровне сформированности ЦКМ при первичном и вторичном измерениях

и $H_1: P(x_i = 0, y_i = 1) \neq P(x_i = 1, y_i = 0)$- существуют значимые различия в уровне сформированности ЦКМ при первичном и вторичном измерениях.

Так как $n = b + c = 1 + 37 = 38 > 20$, то наблюдаемое значение критерия вычисляем следующим образом: $K_{набл} = \frac{(b-c)^2}{b+c} = \frac{(1-38)^2}{1+38} \approx 35{,}10$.

Критическое значение для заданного уровня значимости α=0,05 равно $k_{кр}$= 3,84. Видим, что $K_{набл} \approx 35{,}10 > 3{,}84 = k_{кр}$.

Потому гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α = 0,05. Выборки числовых данных различаются статистически значимо.

Полученные данные позволяют сделать вывод, что предложенная методика изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования способствует повышению уровня сформированности ЦКМ. Статистическая обработка результатов измерений приводит к положительной оценке изменений показателей сформированности ЦКМ старшеклассников при изучении ДУ в системе дополнительного образования в условиях построенной модели.

Выдвинутая гипотеза исследования получила статистическое подтверждение: изучение старшеклассниками элементов теории дифференциальных уравнений на основе практико-ориентированного подхода с применением метода математического моделирования в рамках дополнительного образования в соответствии с разработанной моделью является результативным средством формирования целостной картины мира.

Выводы по главе 2.

В главе 2 описана методика изучения старшеклассниками дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования целостной картины мира на основе разработанной в главе 1 теоретической модели этого процесса.

Иерархическая структура целей изучения старшеклассниками ДУ в дополнительном образовании, ориентированное на формирование ЦКМ, представлена на трёх уровнях: глобальном, этапном, оперативном, - и находится в контексте социального заказа общества, требований ФГОС СОО, Концепции развития дополнительного образования детей до 2030 года.

Основой отбора содержания курса ДУ выступает системный изоморфизм, при котором одно дифференциальное уравнение является математической моделью различных процессов и явлений в разнообразных предметных областях, подчинённых общим закономерностям и выражающим целостность окружающего мира. Поэтому изучение ДУ с целью формирования целостной картины мира начинаем с основных понятий ДУ и метода разделения переменных, а далее содержание курса ДУ упорядочивается по базовым наиболее общим законам окружающей действительности: естественного роста, логистическому, взрывного развития, взаимодействия противоборствующих видов, колебаний, - выраженным с помощью дифференциальных уравнений.

В качестве *средств изучения курса ДУ* в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ старшеклассника выступают:

- систематизированный набор понятийных карт,
- практико-ориентированные задачи,
- система компьютерной математики Mathcad,
- лабораторно-практические работы,
- исследовательские проекты.

Систематизированный набор понятийных карт соответствует выделенным для изучения законам, выраженным с помощью ДУ и способствующим формированию целостного восприятия картины окружающего мира. Каждая из понятийных карт содержит название закона, его словесное описание, соответствующее дифференциальное уравнение, пример решения модельной задачи, перечень практико-ориентированных задач из различных научных областей, относящихся к данному закону. Составлен упорядоченный фрейм понятийных карт. Набор понятийных карт удовлетворяет методическим требованиям фундаментальности, наглядности, доступности, систематичности, обогащения деятельности, единства аффекта и интеллекта.

Практико-ориентированные задачи решаются методом математического моделирования на основе разработанного предписания*:* ввести независимую переменную, описать искомую зависимую величину, определить прикладной смысл её производной; выявить характер взаимосвязей между переменными; проанализировать задачную ситуацию и выбрать для моделирования понятийную карту; составить ДУ и решить аналитически или с помощью IT – средств; интерпретировать полученный результат.

Система компьютерной математики Mathcad позволяет:

- находить аналитические и численные решения ДУ,
- визуализировать полученные решения,
- анализировать изменения решений в зависимости от значений параметров,
- избежать рутинной вычислительной работы,
- активизировать работу старшеклассников, привлечь их интерес, повысить учебно-познавательную мотивацию.

Лабораторно-практические работы и исследовательские проекты основаны на сюжетах из реальной жизни, когда формулирование проблемы и последующее её решение осуществляется с привлечением изученного материала.

Проведённая экспериментальная проверка подтвердила результативность применения методики изучения ДУ в системе дополнительного образования с целью формирования ЦКМ старшеклассника. Использование такой методики даёт устойчивые результаты в плане формирования целостной картины мира старшеклассника.

Заключение

Проведённое исследование по проблеме изучения старшеклассниками дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования целостной картины мира отвечает современным тенденциям модернизации российского общего и дополнительного образования в плане углублённого изучения учебных предметов, которое обеспечивает достижение требований к образовательным результатам в соответствии с обновлённым ФГОС СОО и позволяет связывать знания из различных учебных предметов в целостную картину мира. Анализ нормативных образовательных документов показывает, что создание курса изучения дифференциальных уравнений, ориентированного на формирование целостной картины мира старшеклассника, обеспечивается регламентированной возможностью широкого выбора программ в системе дополнительного образования.

Анализ психолого-педагогических и методических работ по проблемам формирования целостной картины мира (ЦКМ) старшеклассника позволил сформулировать понятие ЦКМ старшеклассника на основе изучения ДУ, выделить его структурные компоненты, уровни сформированности, обосновать роль практико-ориентированного подхода в качестве методологической основы и метода математического моделирования на основе ДУ как основного конструкта при решении практико-ориентированных задач.

Анализ научно-методических работ по проблемам формирования ЦКМ старшеклассника позволил обосновать, что предметная разрозненность при решении этой проблемы может быть преодолена путём выхода в систему дополнительного образования, в которой имеется возможность широкого выбора образовательных программ и создания курса ДУ, реализующего идею системного изоморфизма и иллюстрирующего целостность окружающего мира. Выделение наиболее общих закономерностей окружающего мира, выраженных с помощью дифференциальных уравнений, определило этапы изучения ДУ в конструируемом курсе. На основе доказанных теоретических положений построена модель изучения старшеклассниками ДУ с целью формирования целостной картины мира, а также разработана соответствующая ей методика, выполнены отбор содержания, выбор средств, сформированы диагностические инструменты.

Таким образом, в ходе исследования получены следующие выводы и результаты.

1. На основе анализа литературных источников уточнено базовое понятие «Целостная картина мира (ЦКМ) старшеклассника, построенная на основе дифференциальных уравнений (ДУ)» как научной картины мира, которая является системным отражением в сознании школьника реальных процессов, явлений, состояний окружающего мира, подчинённых наиболее общим закономерностям, полученного на основе метода математического моделирования изоморфных систем на основе ДУ, способствующее осознанию своего места в мире и приобретению соответствующих ценностных ориентаций.

2. Конкретизирована сущность применения метода математического моделирования средствами аппарата дифференциальных уравнений, выражающих наиболее общие законы окружающего мира (законы естественного роста, логистический, колебаний, взаимодействия конкурирующих видов, взрывного развития), и показана его роль в формировании целостной картины мира старшеклассника.

3. Методологической основой формирования ЦКМ при изучении дифференциальных уравнений мира является практико-ориентированный подход, который отражает дуальность процесса обучения и позволяет, с одной стороны, описывать и изучать реальные объекты с точки зрения ДУ, а с другой - развивает математические умения старшеклассников через исследование объектов реальной действительности при решении практико-ориентированных задач.

4. Обоснована целесообразность разработки курса дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования с целью формирования целостной картины мира старшеклассников. Осуществлён целенаправленный отбор математического содержания и средств изучения этого курса старшеклассников, в основу которого положена идея системного изоморфизма,

когда одним и тем же ДУ описывается целый кластер разнообразных процессов или явлений окружающего мира.

5. Для реализации практико-ориентированного подхода построена модель изучения старшеклассниками курса ДУ с целью формирования ЦКМ, которая представлена целевым, методологическим, содержательно-организационным и диагностическим блоками. Особенностями её функционирования являются специфическая содержательная направленность (ДУ), существенное привлечение IT-средств, изначально предусматриваемый активный и интерактивный характер организации учебного процесса, а также обеспечение преемственности задействованного содержания с более высокими уровнями математического образования.

6. Разработана методика изучения старшеклассниками ДУ с целью формирования ЦКМ, в которой основными средствами обучения выступают систематизированный набор понятийных карт, практико-ориентированные задачи, система компьютерной алгебры MathCad, реализуемые преимущественно в форматах лабораторно-практических работ и исследовательских проектов. Диагностику эффективности формирования ЦКМ в рамках методики целесообразно осуществлять в соответствии со знаниевым, операционно-деятельностным и ценностно-смысловым критериями.

7. Экспериментально подтверждено, что разработанная методика обеспечивает достаточно устойчивые позитивные результаты в плане формирования ЦКМ старшеклассника на основе изучения ДУ в рамках дополнительного образования.

Таким образом, все задачи исследования решены и его цель достигнута, гипотеза исследования экспериментально подтверждена. Проведённое исследование показывает значимость внедрения его результатов в процесс обучения в системе дополнительного образования. В качестве перспектив дальнейших исследований в данном направлении мы видим поиск и реализацию возможностей межпредметной интеграции как основы формировании ЦКМ в рамках базового общего образования, а так же изучения ДУ с привлечением эмпирического метода познания.

Список литературы

1. Абраухова, В. В. Развитие творческой направленности личности воспитанников учреждений дополнительного образования. Дисс. … доктора пед. наук / В.В.Абраухова В.В.; ЮФУ. – Ростов-на-Дону, 2012. – 354 с. – Текст : непосредственный.
2. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 208 с. – Текст : непосредственный.
3. Аммосова, Н. В. Знакомство с приложениями дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования / Н.В. Аммосова, Б.Б. Коваленко, Н.И. Лобанова // Сборник научных трудов Шестой Международной конференции «Актуальные проблемы современного образования. Синергетические подходы в решении проблем науки, культуры и современного образования». – Астрахань, 2017. Т. Вып. 1(22). – С. 71-76 - Текст: непосредственный.
4. Аммосова, Н. В. Понятийные карты как средство понимания учебных материалов в ВУЗе / Н.В. Аммосова, Г.А. Зелинская – Текст : непосредственный. // Вестник Костромского государственного университета имени Н.А. Некрасова. Серия «Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювеналия. Социокинетика». 2009. Т. 15. № 4. – С. 65-75 – Текст: непосредственный.
5. Аммосова, Н. В. Решение неопределённых уравнений первой степени с двумя неизвестными в системе дополнительного образования / Н.В. Аммосова, Н.И. Лобанова – Текст : непосредственный. // Сибирский педагогический журнал. 2016. № 2. – С. 24-30 – Текст: непосредственный.
6. Аносов, Д. В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем / Д. В. Аносов – М.: МЦНМО, 2008. – 200 с. – Текст : непосредственный.

7. Анфилатов, В. С. Системный анализ в управлении: Учеб. пособие / В. С. Анфилатов, А. А. Емельянов, А. А. Кукушкин; ред. А. А. Емельянова – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с. – Текст : непосредственный.
8. Арнольд, В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд ; Электронное – М.: МЦНМО, 2014. – 32 с.– ISBN 978-5-4439-2008-5. – Текст : непосредственный.
9. Арнольд, В. И. Математика с человеческим лицом / В.И. Арнольд // Природа. 1988. № 3. – С. 117-119.– Текст : непосредственный.
10. Арнольд, В. И. Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора) / В. И. Арнольд ; 3- е изд., стереотип – М.: МЦНМО, 2011. – 144 с. – Текст : непосредственный.
11. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд ; Новое издание, исправл – М.: МЦНМО, 2012. – 344 с. – Текст : непосредственный.
12. Асланов, Р. М. - оглы. Методическая система обучения дифференциальным уравнениям в педвузе .Автореф. дисс…. доктора пед. / Асланов Р.М.; МПГУ – М., 1997. – 36 с. – Текст : непосредственный.
13. Асланов, Р. М.- оглы. Задачник по дифференциальным уравнениям (с использованием систем компьютерной математики) / Р. М. Асланов, Безручко А.С., Матросов В.Л. – М.: Изд-во «Прометей» МПГУ, 2013. – 243 с. – Текст : непосредственный.
14. Асмолов, А. Г. Дополнительное образование как зона ближайшего развития в России: от традиционной педагогики к педагогике развития / А.Г. Асмолов // Внешкольник. 1997. № 9. – С. 6-8.– Текст : непосредственный.
15. Баврин, Г. И. Усиление профессиональной и прикладной направленности преподавания математического анализа в педвузе: на материале курса «Дифференциальные уравнения». Дисс. …кандидата пед. наук / Баврин Г.

И. нститут общего образования МОПО РФ. – М., 1998. – 202 с. – Текст : непосредственный.

16. Баврин, И. И. Высшая математика / И. И. Баврин – М.: Академия, Высшая школа, 2000. – 616 с. – Текст : непосредственный.
17. Байбородова, Л. В. Методика преподавания по программам дополнительного образования в избранной области деятельности : учебное пособие для среднего профессионального образования : Профессиональное образование / Л. В. Байбородова, А. В. Золотарева, Е. Б. Кириченко [и др.]; ред. Л. В. Байбородова ; 2- е изд., испр. и доп. – Москва: Изд-во Юрайт, 2023. – 241 с.– ISBN 978-5-534-06828-3. – Текст : непосредственный.
18. Бахтин, М. М. Собрание сочинений : в 7 т. Т. 1 Философская эстетика 1920-х годов (сборник) / М. М. Бахтин – М.: Русские словари, Языки славянской культуры, 2003. – 957 с.– ISBN 5-98010-006-7. – Текст : непосредственный.
19. Березина, В. А. Дополнительное образование детей как средство их творческого развития: дисс….кандидата пед. наук / Березина В.А. – М., 1998. – 147 с. – Текст : непосредственный.
20. Болотов, М. И. Задачи для курса «концепции современного естествознания»: Практикум / М. И. Болотов, Е. В. Губина – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2022. – 38 с. – Текст : непосредственный.
21. Большая советская энциклопедия / ред. А. М. Прохоров ; 3- е изд – М.: Сов. энцикл., 1969. – 1978 с. – Текст : непосредственный.
22. Бурова, Л. И. Формирование у младших школьников первоначальной системы знаний о природе: Учеб. Пособие. / Л. И. Бурова – М.: Прометей ; Череповец : Изд-во Череповец. гос. пед. ин-та, 1996. – 123 с. – Текст : непосредственный.
23. Вайнштейн, Ю. В. Педагогическое проектирование персонализированного адаптивного предметного обучения студентов вуза в условиях

цифровизации. Автореф.дисс…. доктора пед.наук / Вайнштейн Ю.В. ; ФГОУ ВО «Сибирский федеральный университет». – Красноярск, 2021. – 425 с. – Текст : непосредственный.

24. Вайсгербер, Й. Л. Родной язык и формирование духа. Пер. с нем. / Й. Л. Вайсгербер ; Изд. 2-е, испр. и доп – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 232 с. – Текст : непосредственный.

25. Вербицкий, А. А. Новая образовательная парадигма и контекстное обучение: монография / А. А. Вербицкий – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 1999. – 75 с. – Текст : непосредственный.

26. Витгенштейн, Л. Философские работы / Пер. с нем. М. С. Козловой и Ю. А. Асеева. Ч. I. — М.: Гнозис, 1994. — ISBN .; Ч. II. Замечания по основаниям математики. — М.: 1994 / Л. Витгенштейн – М.: Гнозис, 1994. – 612 с. – Текст : непосредственный.

27. Воронина, Л. В. Формирование естественнонаучной картины мира средствами математического образования / Л.В. Воронина, А.А. Симонова // Педагогическое образование в России. 2014. № 10.– Текст : непосредственный.

28. Гачев, Г. Д. Ментальности народов мира. – М.: Изд-во: Эксмо, 2008 : Философский бестселлер / Г. Д. Гачев – М.: Изд-во: Эксмо, 2008. – 544 с.– ISBN 978-5-699-28541-9. – Текст : непосредственный.

29. Гербеков, Х. А. Дифференциальные уравнения в системе профессиональной подготовки учителя математики в педвузе : дисс…..кандидата пед. наук / Гербеков Х.А – М., 1991. – 145 с. – Текст : непосредственный.

30. Гнеденко, Б. В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике / Б. В. Гнеденко – Москва: Просвещение, 1982. – 145 с. – Текст : непосредственный.

31. Горский, В. А. Концепция дополнительного образования детей / В.А. Горский // Внешкольник. 1996. № 1. – С. 6-11.– Текст : непосредственный.

32. Грин, А. А. Приёмы педагогической техники. Пособие для учителя / А. А. Грин – М.: Вита-пресс, 2004. – 88 с. – Текст : непосредственный.
33. Гриншпон, Я. С. Геометрические, физические и экономические задачи,сводящиеся к дифференциальным уравнениям : учеб. пособие / Я. С. Гриншпон – Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та систем упр. и радиоэлектроники, 2011. – 74 с– Текст : непосредственный.
34. Гумбольдт, В. Язык и философия культуры. / В. Гумбольдт – М.: Прогресс, 1985. – 450 с. – Текст : непосредственный.
35. Гуревич, А. Я. Индивид и социум на средневековом Западе : «Российские Пропилеи» / А. Я. Гуревич – М.: Российская политическая энциклопедия (РОССПЭН), 2005. – 424 с. – Текст : непосредственный.
36. Далингер, В. А. Моделирование с помощью дифференциальных уравнений : учеб. пособие / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков – Омск: ООО ИПЦ «Сфера», 2008. – 44 с. – Текст : непосредственный.
37. Далингер, В. А. Применение метода визуализации в обучении математике / В.А. Далингер // Школьные технологии: научно-практический журнал. – М.: «Народное образование». 2009. № 4. – С. 117-125.– Текст : непосредственный.
38. Дворяткина, С. Н. Практико-ориентированные математические задачи как средство формирования общекультурной и профессиональной компетентности будущих юристов / С.Н. Дворяткина, А.М. Лопухин – // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2017. № 3(7). – С. 77-85– Текст : непосредственный.
39. Деменкова, Л. Г. Использование практико-ориентированных задач в процессе обучения студентов технического вуза / Л.Г. Деменкова, Е.В. Полицинский // Профессиональное образование в России и за рубежом. 2014. № 3(15). – С. 121-125.– Текст : непосредственный.
40. Доброва, О. П. Задания по алгебре и математическому анализу : Пособие для учащихся / О. П. Доброва – М.: Просвещение, 1996. – 352 с. – Текст : непосредственный.

41. Дюльдина, Э. В. Естественнонаучная картина мира : Бакалавриат / Э. В. Дюльдина, С. П. Клочковский, Б. Р. Гельчинский [и др.] – М.: Академия, 2012. – 224 с. – Текст : непосредственный.
42. Егупова, М. В. Достижение метапредметных результатов в практико-ориентированном обучении геометрии (7 - 9 классы) : монография / М. В. Егупова, Ю. В. Мошура – Калуга: Центр дистанционного образования «Эйдос», 2019. – 152 с. – Текст : непосредственный.
43. Егупова, М. В. Концепция методической подготовки учителя к практико-ориентированному обучению математике в школе / М.В. Егупова // Преподаватель XXI век. 2013. № 4. – С. 124-134.– Текст : непосредственный.
44. Егупова, М. В. Математическое моделирование как необходимый компонент математического образования школьников / М.В. Егупова // Практико-ориентированный подход в условиях трансформации образования : монография / ред. Т.И. Шукшина. – Саранск: Мордов. гос. пед. университет, 2022. – С. 102-121.– Текст : непосредственный.
45. Егупова, М. В. Методическая система подготовки учителя к практико-ориентированному обучению математике в школе. Автореф. дисс…. доктора педагогических наук / Егупова М.В. – М., 2015. –36 с. – Текст : непосредственный.
46. Егупова, М. В. О практико-ориентированном обучении математике в школе / М.В. Егупова // В сборнике: Совершенствование подготовки по математике и информатике в школе и вузе. Сборник научных статей / ред. Л.И. Боженкова, Ю.А. Глазкова, И.М. Смирнова. – Москва, 2013. – С. 65-68.– Текст : непосредственный.
47. Егупова, М. В. Практико-ориентированное обучение математике в школе, как предмет методической подготовки учителя. Монография / М. В. Егупова – М.: МПГУ, 2014. – 284 с. – Текст : непосредственный.

48. Егупова, М. В. Практико-ориентированное обучение математике в школе: проблемы и перспективы научных исследований / М.В. Егупова // Наука и Школа. 2022. № 4. – С. 85-95.– Текст : непосредственный.
49. Егупова, М. В. Составление задач на практические приложения математики как средство развития речевой культуры студентов-педагогов / М.В. Егупова // Проблемы современного педагогического образования. 2017. № 55-2. – С. 170-180.– Текст : непосредственный.
50. Емельянова, Т. В. Зарубежный опыт профессиональной подготовки кадров на основе практикоориентированного подхода / Т.В. Емельянова // Отечественная и зарубежная педагогика. 2020. Т. 1. № 6(72). – С. 137-151.– Текст : непосредственный.
51. Ермак, Е. А. Геометрическая составляющая естественнонаучной картины мира старшеклассников. Автореф.дисс… доктора пед. / Ермак Е. А.;РГПУ им. А.И. Герцена. – С-Пб, 2005. – 40 с. – Текст : непосредственный.
52. Ермилин, А. И. Дополнительное научное образование школьников: проблемы и перспективы. / А.И. Ермилин, Е.В. Ермилина // IX Международная научно-практическая конференции «Исследовательская деятельность учащихся в современном образовательном пространстве». – Москва, 2018. – С. 142-147– Текст : непосредственный.
53. Зелинская, Г. А. Структурирование учебных материалов на основе понятийных карт / Г.А. Зелинская, М.М. Зелинский – Текст : непосредственный. // Известия волгоградского гос. Тех. Университета; серия: новые образовательные системы и технологии обучения в вузе. 2008. Т. 5. № 5 (43). – С. 43-47.– Текст : непосредственный.
54. Зинченко, В. О. Методологическая основа практико-ориентированного обучения в вузе / В.О. Зинченко, О.М. Россомахина – Текст : непосредственный. // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2020. Т. 26. № 1. – С. 151-156.– Текст : непосредственный.

55. Зорина, Л. Я. Дидактические. основы формирования системности знаний старшеклассников. – М., 1978 / Л. Я. Зорина – М.: Педагогика, 1978. – 128 с. – Текст : непосредственный.
56. Зорина, Л. Я. Ступени педагогического творчества / Л.Я. Зорина // Дидактико-методические основания конструирования учебного материала по методологии научного познания. – М., 2001. – С. 89-104.– Текст : непосредственный.
57. Иванов, В. М. Практико-ориентированное обучение школьников и самоопределение личности / В.М. Иванов, А.А. Гурдуз, И.А. Мачульная // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2014. № S18. – С. 21-25.– Текст : непосредственный.
58. Иванова, С. В. Обучение студентов доказательству на основе системы учебных понятийных образований высшей математики. / С.В. Иванова // Математика в образовании. : , 2010. – С. 95-102. – Чебоксары: Издательство Чувашского университета, 2010. – С. 95-102.– Текст : непосредственный.
59. Исаев, А. А. Философия как экзистенциальный выбор / А.А. Исаев – Текст : непосредственный. // Философские науки. 2005. № 6. – С. 59-72.– Текст : непосредственный.
60. Ишутин, А. А. Некоторые теоретические аспекты холизма как философской позиции. / А.А. Ишутин // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Философские науки. 2017. № 4. – С. 21-30.– Текст : непосредственный.
61. Калугина, И. Ю. Образовательные возможности практико-ориентированного обучения учащихся: дисс. …кандидата пед.наук / Калугина И.Ю.– Екатеринбург, 2000. – 215 с. – Текст : непосредственный.
62. Картина мира и образ мира как технологии социогуманитарного исследования /Ф. Ф. Корочкин. – URL: http://aesthetics-herzen.narod.ru/issl.html (дата обращения: 12.07.2023) – Текст: электронный.

63. Килькеев, В. Н. Клиффорд Гирц: концепция культуры и семиотический подход к ее изучению / В.Н. Килькеев // Вестник Челябинского государственного университета. Философия. Социология. Культорология. 2009. № 11 (149). – С. 138-142.– Текст : непосредственный.
64. Кисельников, И. В. Поэтапное описание процесса обучения математическим понятиям в системе обеспечения качества обучения математике. / И.В. Кисельников – Текст : непосредственный. // Теория и практика общественного развития. 2011. № 7. – С. 173-177.– Текст : непосредственный.
65. Климов, К.А. Практико-ориентированное обучение в системе высшего образования: монография/ К.А. Климов, Л.Л. Мешкова, В.В. Смирнов и др. – Тамбов : Изд-во Першина Р.В., 2016. – 144 с. / Климов К.А.– Текст : непосредственный.
66. Коваленко, И. Б. Использование дифференциальных уравнений при решении задач по физике в старших классах средней школы / И.Б. Коваленко // сборник научных трудов V международной конференции серии «Нелинейный мир» : Информатика. Образование. Экология и здоровье человека. – Астрахань: Изд-во Астраханского гос. Ун-та, 2001. – С. 227-229.– Текст : непосредственный.
67. Коваленко, И. Б. Об интеграции математических и физических знаний в средней школе / И.Б. Коваленко // Математика. Компьютер. Образование : сборник научных трудов. – М.: Прогресс-Традиция, 1999. Вып. 6. – Ч. 1. – С. 212-215.– Текст : непосредственный.
68. Коваленко, И. Б. Решение задач по курсу физики в старших классах средней школы с помощью дифференциальных уравнений / И.Б. Коваленко // Математика. Компьютер. Образование: сборник тезисов VI международной конференции. Вып. 6. – М.: изд-во МГУ, 1999. – С. 135.– Текст : непосредственный.
69. Коваленко, И. Б. Установление межпредметных связей при решении задач в средней школе методом дифференциальных уравнений / И.Б. Коваленко

// Экология и здоровье человека. Экологическое образование. Математические модели и информационные технологии: тезисы VI международной конференции. – Краснодар, 2001. – С. 167.– Текст : непосредственный.

70. Колчин, А. А. Деятельность учреждений дополнительного образования детей по развитию творческих способностей и воспитанию учащихся: дисс. …. кандидата пед. наук / Колчин А.А.; – Владикавказ, 2004. – 147 с. – Текст : непосредственный.
71. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математике. Часть 1. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся / Ю. М. Колягин – М.: Просвещение, 1977. – 113 с. – Текст : непосредственный.
72. Концепция развития дополнительного образования детей до 2030 года. Правительство российской федерации, распоряжение от 31 марта 2022 г. № 678-р. – URL: http://government.ru/docs/all/140314/ (Дата обращения 18.09.2023).Текст : электронный
73. Коробейников А.Г. Разработка и анализ. математических моделей с использованием MATLAB и MAPLE. Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010.– 145с. – Текст : непосредственный.
74. Кудрявцев, Л. Д. Мысли о современной математике и ее изучении / Л. Д. Кудрявцев – Москва: Наука, 1977. – 112 с. – Текст : непосредственный.
75. Кузибецкий, И. А. Формирование личностной информационной картины мира старшеклассников с применением компьютерных технологий образования. Автореф. дисс. …. кандидата пед. наук / Кузибецкий И.А. – Волгоград, 2003. – 32 с. – Текст : непосредственный.
76. Кузнецова, Т. Ф. Культурная картина мира: теоретические проблемы : науч. монография / Т. Ф. Кузнецова – М.: ГИТР, 2012. – 250 с. – Текст : непосредственный.
77. Куликовская И. Э. Технологии формирования у дошкольников целостной картины мира // И. Э. Куликовская, Р. М. Чумичева / Куликовская И. Э.,

Р. М. Чумичева – М.: Педагогическое общество России, 2004. – 159 с.– Текст : непосредственный.

78. Лахина, М. В. Проблема формирования целостной научной картины мира в культуре современного общества / М.В. Лахина // Современные наукоёмкие технологии. 2010. № 9. – С. 86-87– Текст : непосредственный.
79. Леонтьев, А. Н. Образ мира / А.Н. Леонтьев // Избранные психологические труды. – М.: Просвещение, 2013. – С. 253-264– Текст : непосредственный.
80. Лобанова, Н.И. Использование понятийных карт при изучении элементов теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования // Вестник КГУ Серия Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2018. – № 1. – С. 123–129. / Лобанова Н.И. – Текст : непосредственный.
81. Лобанова, Н. И. Естественно-научные законы как основа математического моделирования при формировании целостной картины мира школьника в системе доп.образования // Актуальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования : материалы междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 120-летию со дня рождения А. Н. Колмогорова (25–27 мая 2023 г.) / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Тихоокеанский государственный университет ; – Хабаровск : ТОГУ, 2023. – с. С. 214-224 / Н.И. Лобанова, Н.Н. Яремко.– Текст : непосредственный.
82. Лобанова, Н. И. Методика изучения дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования на основе практико-ориентированного подхода. Научный доклад : / Н. И. Лобанова – Астрахань: Астраханский государственный университет, 2018– Текст : непосредственный.
83. Лобанова, Н. И. Обучение методу математического моделирования при решении геометрических и физических задач с помощью дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования /

Н.И. Лобанова // Сборник материалов VII Международной научно-практической конференции «Математическое образование в школе и вузе: теория и практика» Mathedu-2017. – Казань, 2017. – С. 115-119– Текст : непосредственный.

84. Лобанова, Н. И. Обучение методу моделирования средствами дифференциальных уравнений при решении геометрических задач в системе дополнительного образования школьников / Н.И. Лобанова, Н.В. Аммосова // Современные проблемы науки и образования. 2017. № 5. – С. 1-12– Текст : непосредственный.
85. Лобанова, Н. И. Обучение способам выбора корней тригонометрических уравнений на заданном промежутке / Н.И. Лобанова // Сборник тезисов докладов Международной Школы-конференции молодых ученых «Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании». – Москва, 2016. – С. 234-236 – Текст : непосредственный.
86. Лобанова, Н. И. Понятийные карты и блок-схемы как средство понимания учебных материалов в рамках дополнительного образования / Н.И. Лобанова // Сборник научных трудов Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». – Стерлитамак, 2018. – С. 346-350 – Текст : непосредственный.
87. Лобанова, Н. И. Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования / Н.И. Лобанова // Интернет-журнал «Мир науки» (серия Педагогика и психология). - 2016. Т. 4. № 6. – С. 1-9.– Текст : непосредственный.
88. Лобанова, Н. И. Методическая система обучения дифференциальным уравнениям в рамках дополнительного образования / Н. И. Лобанова // Мир науки. Педагогика и психология. — 2023. — Т. 11. — No 2. — URL: https://mir-nauki.com/PDF/56PDMN223. – Текст электронный
89. Лобанова, Н.И. Методические особенности построения курса дифференциальных уравнений с целью формирования целостной картины мира школьника/ Н.И.Лобанова, Н.Н.Яремко. // Ученые записки

Орловского государственного университета. – 2023. № 2 (99). – С. 250-255. – Текст: непосредственный

90. Лобанова, Н.И. Логистический закон как основа математического моделирования при формировании целостной картины мира школьника // Образование и общество. 2023 № 3(140). С. 28-34. – Текст: непосредственный.
91. Лурье, С. В. Историческая этнология : Учебное пособие для вузов / С. В. Лурье – М.: Академический Проект: Гаудеамус, 2004. – 624 с. – Текст : непосредственный.
92. Лыкова, К. Г. Формирование стохастического мировоззрения старшеклассников в условиях цифровизации математического образования: дисс…..кандидата пед.наук/ Лыкова К.Г.; ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина». – Елец, 2022. – 163 с. – Текст : непосредственный.
93. Лысенкова, С. Н. Я читаю. Я считаю. Я пишу : Как учить маленьких / С. Н. Лысенкова ил – М.: Школа-Пресс, 1997. – 96 с. – Текст : непосредственный.
94. Львова, В. Д. Профессиональная направленность обучения математике студентов химико-технологических специальностей. Автореф. Дисс.пед.наук / Львова В.Д.; – Астрахань, АГУ, 2009. – 22 с. – Текст : непосредственный.
95. Максимова, С. М. Формирование у старших дошкольников целостной картины мира средствами театрализованной деятельности: автореф. дисс….кандидата пед. наук / Максимова С.М.; – Москва, 2021. – 24 с. – Текст : непосредственный.
96. Мамедяров, Д. М. Развитие творческого мышления учащихся на основе фреймовой формы обучения на факультативных занятиях. / Д.М. Мамедяров, Ш.М. Вакилов // Вестник Костромского государственного Университета имени Некрасова. Научно – методический журнал

«Акмеология образования». 2007. Т. 13. – С. 171-176.– Текст : непосредственный.

97. Медведева, Н. Г. Формирование целостной картины мира у ребёнка на начальной ступени обучения в педагогической системе К. Д. Ушинского: автореф.дисс….кандидата пед. наук / Медведева Н. Г. – Курск, 2009. – 23 с. – Текст : непосредственный.

98. Мельников, Р. А. Интеграция фундаментального и прикладного компонентов в обучении дифференциальным уравнениям будущих учителей физики. Автореф.дисс. … кандидата пед.наук / Мельников Р.А. – Елец, 2007. – 24 с. – Текст : непосредственный.

99. Милованов, Н. Ю. Методика формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений . Дисс. …кандидата пед. / Милованов Н. Ю. ; Орлов. гос. ун-т им. И.С. Тургенева. – Волгоград, 2016. – 161 с. – Текст : непосредственный.

100. Милованов, Н. Ю. Методика формирования у старшеклассников системы понятий математического анализа на основе графических представлений. Автореф. дисс. … кандидата пед. / Милованов Н.Ю. ; Орлов. гос. ун-т им. И.С. Тургенева. – Орёл, 2017. – 26 с. – Текст : непосредственный.

101. Милованов, Н. Ю. Формирование у старшеклассников умения перекодировать информацию (на примере изучения понятий математического анализа) / Н.Ю. Милованов // Мир науки, культуры, образования. 2016. № 1(56). – С. 45-47– Текст : непосредственный.

102. Михайлова, Н. В. Роль математической картины мира в университетском математическом образовании / Н.В. Михайлова // «Вышэйшая школа» навукова-метадычны і публіцыстычны часопіс. 2020. № 2. – С. 47-50 – Текст : непосредственный.

103. Мышкис, А. Д. Элементы теории математических моделей / А. Д. Мышкис ; Изд. 3-е, исправленное – М.: КомКнига, 2014. – 192 с. – Текст : непосредственный.

104. Найманов, Б. А. Реализация прикладной направленности преподавания дифференциальных уравнений в педагогическом институте.Автореф. дисс. кандидата пед. наук / Найманов Б.А. ; Павлодарский педагогический институт. – М., 1992. – 172 с. – Текст : непосредственный.

105. Нечаев, Н. П. Реализация механизма поддержки принятия решений с использованием фреймовой модели на примере задачи Эйнштейна / Н.П. Нечаев, О.В. Рогозин // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. 2007. № 10. – С. 87-96– Текст : непосредственный.

106. Новейший философский словарь: 3-е изд., исправл. - Мн.: Книжный Дом. 2003. - 1280 с. – Текст : непосредственный.

107. Новиков, А. М. Методология образования / А. М. Новиков ; Издание второе – М.: «Эгвес», 2006. – 488 с. – Текст : непосредственный.

108. Ожегов, С. И. Толковый словарь русского языка / С. И. Ожегов, Н. Ю. Шведова ; 2- е изд., испр. и доп – М.: АЗЪ, 1995. – 944 с. – Текст : непосредственный.

109. Орлов, С. Ю. Оптимизация системы государственных закупок (математическое решение) / С.Ю. Орлов, А.М. Лопухин // Вопросы Российского и международного права. 2017. Т. 7. № 4А. – С. 76-88– Текст : непосредственный.

110. Основы разработки практико-ориентированного обучения. Коллективная монография. – URL: https://knowledge.allbest.ru/pedagogics/3c0b65625b2ac68b4c43b88521316c36_0.html (дата обращения: 01.08.2023) – Текст: электронный.

111. Охлопков, Н. М. Математическая картина мира философии науки / Н.М. Охлопков // Вестник Якутского государственного университета. 2009. Т. 6. № 4. – С. 113-118– Текст : непосредственный.

112. Панов, В. Г. Российская педагогическая энциклопедия / Главный редактор: В. Г. Панов, 1993. : в 2 т. / В. Г. Панов – М.: Большая рос. энцикл, 1993. Т. 1-2.– Текст : непосредственный.

113. Педагогический энциклопедический словарь / ред. Б. М. Бим-Бад. – М.: Большая Российская энциклопедия, 2003. – 528 с. – Текст : непосредственный.

114. Петрова, И. В. Практико-ориентированный подход в обучении / И.В. Петрова, Н.Г. Мамаев // Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. Основные вопросы теории и практики педагогики и психологии. – Омск: инновационный центр развития образования и науки, 2015. Т. II. – С. 99-101– Текст : непосредственный.

115. Петров П.К. Математико-статистическая обработка и графическое представление результатов педагогических исследований с использованием информационных технологий: учеб. пособие, Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2013. 179 с. – Текст: непосредственный.

116. Пожарова, Г. А. Практико-ориентированные задачи как один из важнейших элементов формирования математической грамотности учащихся / Г.А. Пожарова // Молодой ученый. 2021. № 1 (343). – С. 62-64– Текст : непосредственный.

117. Полехина, Г. Е. Дифференциальные уравнения как завершающий этап развития методической линии уравнений в школе. Дисс ….кандидата пед. наук / Полехина Г.Е. ; МПГУ – М., 1996. – 182 с. – Текст : непосредственный.

118. Поляруш, А. А. Системный анализ современного образовательного процесса: монография /Поляруш А.А:монография / А. А. Поляруш – Ачинск: Ачинский филиал, Красноярский государственный аграрный университет, 2019. – 119 с.– Текст : непосредственный.

119. Приказ Министерства просвещения РФ «Об утверждении целевой модели развития региональных систем дополнительного образования детей» от 03.09.2019 №467 (Зарегистрирован 06.12.2019 № 56722). URL : http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001201912090014 (Дата обращения18.09.2023) Текст: электронный.

120. Родина, Л.И. Применение дифференциальных уравнений для решения прикладных задач: учеб. пособие / Л. И. Родина, А. В. Егорова – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2022. – 83 с. – Текст : непосредственный.

121. Савва, Л. И. Межличностное познание учителя в системе его профессиональной подготовки : Монография / Л. И. Савва – Магнитогорск: МаГУ, 2001. – 246 с. – Текст : непосредственный.

122. Саранцев, Г. И. Методология методики обучения математике : Монография / Г. И. Саранцев – Саранск: Тип. «Красн. Окт.», 2001. – 144 с. – Текст : непосредственный.

123. Северов, В. Г. Практико-ориентированная профессиональная подготовка кадров в колледже для сферы малого бизнеса / В. Г. Северов – Самара, 2012. – 417 с. – Текст : непосредственный.

124. Селевко, Г. К. Современные образовательные технологии DOC : Учебное пособие / Г. К. Селевко – М.: Народное образование, 1998. – 256 с. – Текст : непосредственный.

125. Семенова, Н. Г. Формирование основ биологической картины мира посредством обобщения при обучении учащихся 9-х классов: дисс….кандидата пед. наук / Семенова Н.Г. – Саранск, 2016. – 196 с. – Текст : непосредственный.

126. Сластенин, В. А. Педагогика / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; ред. В. А. Сластенин – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 576 с.– Текст : непосредственный.

127. Смагина, Н. Н. Развитие познавательной активности детей младшего школьного возраста в системе дополнительного образования:

дисс….кандидата пед. наук / Смагина Н.Н. Елец. гос. ун-т им. И.А. Бунина. – Мичуринск, 2011. – 197 с. – Текст : непосредственный.

128. Советский энциклопедический словарь / ред. А. М. Прохоров ; 2- е издание, с изменениями – М.: Советская энциклопедия, 1982. – 764 с. – Текст : непосредственный.

129. Степин, В. С. Наука и лженаука / В.С. Степин – Текст : непосредственный. // Науковедение. 2000. № 1. – С. 53-61. - Текст : непосредственный

130. Степин, В. С. Философия науки. Общие проблемы / В. С. Степин – М.: Гардарики, 2006. – 384 с. – Текст : непосредственный.

131. Сычева, Н. В. Методика изучения дифференциальных уравнений средствами поисковой деятельности студентами технических направлений подготовки. Дисс …. кандидата пед. наук / Сычева Н.В.; Орлов. гос. ун-т. – Брянск, 2013. – 201 с. – Текст : непосредственный.

132. Тарасов, С. В. Образ мира : опыт изучения категориальных структур мировосприятия школьников / С. В. Тарасов; Рос. акад. образования. Ин-т образования взрослых. – С-Пб, 1996. – 72 с. – Текст : непосредственный.

133. Телицына, Г.В. Визуализация целостной научной картины мира в учебной, проектной и исследовательской деятельности школьников через ментальные карты: методическое пособие / Телицына Г.В. – Старый Оскол, 2016. – 39 с. – Текст : непосредственный.

134. Токарева, Л. И. Формирование систем математических понятий у учащихся общеобразовательных школ: дисс….доктора пед. наук / Токарева Л.И.; ФГОУ ВПО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова». – М., 2010. – 404 с. – Текст : непосредственный.

135. Ушинский, К. Д. Избр. пед. соч / К. Д. Ушинский – М., 1968. – 164 с. – Текст : непосредственный.

136. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. Утверждён приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «12» августа 2022 г. № 732 URL:

.http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202209120008 (Дата обращения 18.09.2023) Текст:электронный.

137. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 (ред. от 17.02.2023) «Об образовании в Российской Федерации». Статья 75. Дополнительное образование детей и взрослых. URL: https://edu.sbor.ru/sites/default/files/FZ273_23.pdf (Дата обращения 18.09.2023) Текст:электронный.

138. Филатова, М. Н. Социокультурное развитие учащихся в учреждениях дополнительного образования детей: дисс….кандидата пед. наук / Филатова М.Н. ; МПГУ – Москва, 2013. – 242 с. – Текст : непосредственный.

139. Философский словарь / ред. И. Т. Фролова ; 7- е изд., перераб. и доп – М.: Республика, 2001. – 719 с. – Текст : непосредственный.

140. Философский энциклопедический словарь / сост. Л. Ф. Ильичев, П. Н. Федосеев, С. М. Ковалев,, В. Г. Панов – М.: Советская энциклопедия, 1983. – 840 с. – Текст : непосредственный.

141. Фридман, Л. М. Наглядность и моделирование в обучении : Новое в жизни, науке, технике. Серия «Педагогика и психология» / Л. М. Фридман – М.: Знание, 1984. Вып. 6 – 80 с. – Текст : непосредственный.

142. Фридман, Л. М. Как научиться решать задачи : Пособие для учащихся / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий ; Издание второе, переработанное и дополненное – М.: Просвещение, 1984. – 180 с. – Текст : непосредственный.

143. Хакимзянов, Г. С. Математическое моделирование: В 2 ч. : учеб. пособие / Г. С. Хакимзянов, Л. Б. Чубаров, П. В. Воронина ; Ч. 1: Общие принципы математического моделирования – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. – 148 с. – Текст : непосредственный.

144. Харитонова, В. А. Синергетика и образование : Хрестоматия / В. А. Харитонова, И. В. Меньшиков, О. В. Санникова – Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2001. – 480 с. – Текст : непосредственный.

145. Хуторской, А. В. Современная дидактика : учебник для вузов / А. В. Хуторской – СПб: Питер, 2001. – 544 с. – Текст : непосредственный.

146. Цюпка, В. П. О формировании картин мира, в том числе научной, естественнонаучной, физической, химической и биологической / В.П. Цюпка // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2012. № 6. – С. 36-37– Текст : непосредственный.

147. Шихнабиева Т.Ш. Шишлянникова, Н. П. Формирование живого мировосприятия у младших школьников средствами искусства / Н.П. Шишлянникова // Вестник Бурятского государственного университета. Философия. 2017. № 1. – С. 20-24.– Текст : непосредственный.

148. Шихнабиева Т.Ш. Щукина, Г. И. Проблема познавательного интереса в педагогике / Г. И. Щукина – М.: Педагогика, 1971. – 351 с. – Текст : непосредственный.

149. Энциклопедия эпистемологии и философии науки / сост. И. Т. Касавин – М.: Канон+, 2009. – 1247 с.– Текст : непосредственный.

150. Эрентраут, Е. Н. Практико-ориентированные задачи как средство реализации прикладной направленности курса математики в профильных школах : автореф. дисс… кандидата пед. / Эрентраут Е.Н.; Уральский гос. проф.-педагогический универ. – Екатеринбург, 2005, 24с. – Текст : непосредственный.

151. Эшби, У. Р. Введение в кибернетику / У. Р. Эшби – Москва: Издательство иностранной литературы, 1959. – 432 с. – Текст : непосредственный.

152. Яковлева, Е. С. Фрагменты русской языковой картины мира (модели пространства, времени и восприятия) / Е. С. Яковлева – Москва: Гнозис, 1994. – 343 с. – Текст : непосредственный.

153. Examples of Mathematics in Everyday Life. – URL: https://studiousguy.com/examples-of-mathematics/comment-page-1/?unapproved=50217&moderation-

hash=698c1a82a4cd877f1ee0deaacf40a049#comment-50217 (дата обращения: 30.07.2023) – Текст: электронный.

154. Blum, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? / W. Blum // In S. J. Cho (Ed.), The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges. – New York, NY: Springer, 2015. – С. 73-96.

155. Borisov, V. F. "Asymptotic growth rates in knowledge-exchanging economies", Nonlinear dynamical systems and adaptive methods (Vienna, 1997), Ann. Oper. Res., 89, 1999, 61–73. / V. F. Borisov, G. Hutschenreiter,, A. V. Kryazhimskii.

156. Lobanova, N. I. Elements of the theory of differential equations as a means of forming ideas about a holistic picture of the world among senior students // International Congress on Academic Research in Society, Technology and Culture (october 24-25, 2020 Grozny) / «European Proceedings of Social and Behavioural Sciences» (Великобритания). Web of Science Core Collection. V.107 - ISCKMC 2020. pp. 981-989 Doi : 10.15405 / epsbs.2021.05.131.

157. Lobanova, N. I. Theory Of Differential Equations In Forming A Holistic Picture Of The World // European Proceedings of Social and Behavioural Sciences EpSBS ISCKMC 2020 International Scientific Congress "Rnowledge, Man and Civilization". – Complex Scientific Research Institute named after H.I. Ibragimov of the Russian Academy of Sciences, 2020. – P. 981-989.

158. Real-Life Applications of Mathematics | University of Northern British Columbia. – URL: https://www2.unbc.ca/math-statistics/real-life-applications-mathematics (дата обращения: 30.07.2023)

159. Rezer, T. Practice-Oriented Training as a Mechanism of Development of Professional Potential of Students of Higher Education in Russia and Abroad: Historical and Social aspect / T. Rezer // Advances in Social Science, Education and Humanities Research. – 2019. – V. 392. – С. 41.

Приложение-1. Тесты, самостоятельные и контрольная работа по проверке сформированности умений школьников решать ДУ.

Самостоятельная работа-1.

1. Согласно закону Гука, эластичный шнур длины l под действием растягивающей силы F получает приращение длины, равное klF (k - константа). Шнур длиной 2 м подвешен за один его конец. На сколько увеличится длина шнура, если его вес равен 2Н?

2. Известно, что скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент с коэффициентом пропорциональности k. Определить k, если в 10 часов в сосуде было 2 000 бактерий, а в 12 часов уже 32000.

3. Составить задачу по дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dt}=kx,$$

4. На основании данных, полученных во время экскурсии в хозяйство индивидуального предпринимателя, составить задачу, решаемую с помощью дифференциального уравнения.

5. Опытным путём получить зависимость укорочения (растяжения) мышцы руки при поднятии тяжестей.

Тест-1 с вариантами ответов для общей проверки знаний старшеклассников по элементам теории ДУ

1. Сколько решений имеет дифференциальное уравнение: $y' = 2x$?

А) одно; Б) не имеет решений; В) не более двух; Г) бесконечно много решений.

2. Сколько решений имеет задача Коши: $y' = 2x$, $y(0) = 0$?

А) бесконечно много решений; Б) не имеет решений; В) не более двух; Г) одно.

3. Что представляет собой каждая интегральная кривая уравнения: $y' = 2x$?

А) прямую; Б) окружность: В) гиперболу; Г) параболу.

4. Указать дифференциальное уравнение с разделёнными переменными.

А) $F(x,y,y')=0$; Б) $y'=f(x,y)$; В) $P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$; Г) $P(x)dx+Q(y)dy=0$.

5. Указать общее решение дифференциального уравнения $y'=2x$.

А) $y=2x+C$; Б) $y=2x$; В) $y=x^2-1$; Г) $y=x^2+C$.

6. Указать решение задачи Коши: $y'=2x$, $y(0)=0$.

А) $y=2x+C$; Б) $y=2x$; В) $y=x^2-1$; Г) $y=x^2$.

7. Указать дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

А) $F(x,y,y')=0$; Б) $y'=f(x,y)$; В) $P(x)dx+Q(y)dy=0$; Г) $P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$.

8. Указать дифференциальное уравнение, сводящееся к уравнению с разделяющимися переменными.

А) $(y-x)dx=(x+y)dy$; Б) $(x+y)dx=(y-x)dy$; В) $(xy-1)dx=(xy+1)dy$; Г) $y'=xy$.

9. Указать дифференциальное уравнение, разрешённое относительно производной.

А) $F(x,y,y')=0$; Б) $P(x)dx+Q(y)dy=0$; В) $P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$; Г) $y'=f(x,y)$.

10. Указать все дифференциальные уравнения первого порядка.

А) $y'=f(x,y)$; Б) $P(x)dx+Q(y)dy=0$; В) $P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)dy=0$; Г) $F(x,y,y')=0$.

ТЕСТ-2
по ДУ первого порядка

1. Указать дифференциальное уравнение первого порядка.

1) $y+2x=0$; 2) $y''+y'=1$.; 3) $y^2-x^2=0$; 4) $y'+y=x+1$.

2. Сколько произвольных постоянных содержит общее решение дифференциального уравнения первого порядка?

1) Бесконечное число; 2) Ни одной; 3) Две; 4) Одну.

3. Сколько произвольных постоянных содержит общее решение дифференциального уравнения второго порядка?

1) Одну; 2) Ни одной; 3) Бесконечное число; 4) Две.

4. Сколько произвольных постоянных содержит частное решение дифференциального уравнения?

1) Одну; 2) Две; 3) Бесконечное число; 4) Ни одной.

5. Как ставится задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка?

1) $f(x, y) = 0,\ y'(x_0) = y_0$; 2). $y' = f(x, y),\ y_0 = 0$; 3). $y' = f(x, y),\ x_0 = 0$; 4) $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$.

6. Как выглядит начальное условие для дифференциального уравнения первого порядка?

1) $y_0 = 0$; 2) $y'(x_0) = y_0$; 3) $x_0 = 0$; 4) $y(x_0) = y_0$.

7. Указать уравнение с разделёнными переменными.

1) $\sin x\, dy = \cos y\, dx$; 2) $xdy = ydx$; 3) $y' + y = x$; 4) $\sin y\, dy = \cos x\, dx$.

8. Указать уравнение с разделяющимися переменными.

1) $(x + y)dy = (x - y)dx$; 2) $y' - y = x$; 3) $y' + y = x$; 4) $\sin x\, dy - \cos y\, dx = 0$.

9. Указать уравнение, разрешённое относительно производной.

1) $F(x, y, y') = 0$; 2) $F(x, y') = 0$; 3) $y = f(x, y')$; 4) $y' = f(x, y)$.

10. Указать уравнение, не разрешённое относительно производной

1) $y' = f(x, y)$; 2) $y' = x + y$; 3) $y' = x - y$; 4) $F(x, y, y') = 0$.

11. Сколько решений имеет линейное ДУ первого порядка?

1) одно; 2) ни одного; 3) конечное число решений; 4) бесконечное число решений.

12. Сколько решений имеет уравнение Бернулли?

1) одно; 2) ни одного; 3) конечное число решений; 4) бесконечное число решений.

13. Сколько решений может иметь задача Коши для ДУ первого порядка?

1) бесконечное число решений; 2) ни одного; 3) два; 4) одно.

14. Какой порядок имеет ДУ $x^4y' + x^3y = 2$?

1) четвёртый; 2) третий; 3) второй; 4) первый.

15. Какое уравнение является линейным?

1) $y \cdot y' + x \cdot y = \sin x$;2) $y' + y^2 = \cos x$; 3) $y \cdot y' + xy = x$; 4) $y' + x \cdot y = 0$.

16. Указать линейное однородное дифференциальное уравнение:

1) $y \cdot y' + x \cdot y = 0$; 2) $y' + y^2 = 0$; 3) $y' + x \cdot y = x$; 4) $y' + x \cdot y = 0$.

17. Указать линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

1) $y \cdot y' + x \cdot y = \cos x$; 2) $y' + y^2 = 0$; 3) $y' + x \cdot y = 0$; 4) $y' + x \cdot y = \sin x$.

18. Какое из уравнений является уравнением Бернулли?

1) $y' - y^2 = \sin x$; 2) $y' + 2y = y^2 + 1$; 3) $y \cdot y' + xy = x$; 4) $y' + x \cdot y = y^3$.

19. Какое из уравнений является однородным?

1) $y' - y^2 = \sin x$; 2) $y' + 2y = y^2 + 1$; 3) $y \cdot y' + xy = x$; 4) $y' = \frac{y+x}{x}$.

20. Что представляет собой интегральная кривая дифференциального уравнения?

1) параболу; 2) гиперболу; 3) синусоиду; 4) график решения.

Контрольная работа. Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2y = 4x$.
2. Найти линию, у которой начальная ордината любой касательной на две единицы меньше абсциссы точки касания.
3. Определить путь, пройдённый телом за время *t*, если его скорость пропорциональна проходимому пути и, если тело проходит 100 м за 10с и 20м – за 15с.

Контрольная работа. Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$
2. Найти линию, у которой длина полярного радиуса любой её точки М равняется расстоянию между точкой пересечения касательной в точке М с осью ординат и началом координат.

3. Определить удлинение эластичного шнура, свободно подвешенного за один его конец. Длина шнура $\alpha = 3{,}5 м$, вес её равен 3Н. Удлинение шнура подчиняется закону Гука.

Приложение-2. Анкета определения уровня сформированности ЦКМ старшеклассников на основе изучения ДУ.

1. Как бы ты описал своё место в мире?

   - исследователь, выявляющий закономерности окружающего мира,

   - преобразователь,

   - сторонний наблюдатель,

   - безразличный участник в реальной жизни,

   - не участник вовсе,

   - разделяю точку зрения: окружающий мир меня мало интересует,

   - другое, дайте свой ответ.

2. Каково твоё отношение к окружающему миру?

   - ценностное,

   - безразличное,

   - этим занимаются взрослые,

   - другое, дайте свой ответ.

3. Какова роль науки и технологий в изучении и преобразовании окружающего мира?

   - ведущая,

   - второстепенная,

   - все события предопределены,

   - другое, дайте свой ответ.

4. Какова ценность и значимость каждого человека и тебя лично в реальной жизни?

   - высокая,

   - не очень высокая,

   - низкая,

- от одного человека ничего не зависит,
- затрудняюсь ответить,
- другое, дайте свой ответ.

5. Как ты считаешь, можно ли описать явления природы на языке математики?
   - да,
   - нет,
   - затрудняюсь ответить,
   - другое, дайте свой ответ.
6. Каким термином в науке называется описание на математическом языке состояний, явлений и процессов окружающего мира?
   - математическое моделирование,
   - описание,
   - представление,
   - затрудняюсь ответить
   - другое, дайте свой ответ.
7. Согласен ли ты с фразой: разнообразие явлений природы более богатое, чем множество математических законов, описывающих эти явления.
   - да,
   - нет,
   - затрудняюсь ответить
   - другое, дайте свой ответ.
8. На чём основана идея целостности окружающего мира?
   - системный изоморфизм,
   - философская теория холизма,
   - знания об окружающем мире и его законах,
   - в реальном мире имеются целые классы разнообразных явлений или процессов, которые описываются одинаковыми математическими законами,
   - материальность окружающего мира,
   - другое, дайте свой ответ.

9. Можно ли выразить закономерности окружающего мира на языке математики?

- да,
- нет,
- затрудняюсь ответить,
- другое, дайте свой ответ.

10. Какие ты знаешь наиболее общие законы, описывающие с помощью ДУ явления, закономерности, состояния окружающего мира? (перечислить)
11. Интересно ли тебе изучать процессы и явления в различных предметных областях и их общее описание на языке ДУ?

- да,
- нет,
- затрудняюсь ответить,
- другое, дайте свой ответ.

12. В каких научных областях действуют математические законы, выраженные на языке ДУ? Соедините законы а), б), в), г), д) и научные области 1), 2), 3), 4), 5), 6).

Законы:

а) естественного роста ($y' = ky$),

б) логистический закон($y' \ = \ \alpha y - \beta y^2$),

в) закон взрывного развития ($y' = ky^2$),

г) закон взаимодействия противоборствующих видов ($\begin{cases} x' = C\cdot x - hyx, \\ y' = -Dy \ + r\ yx \end{cases}$),

д) закон колебаний ($y'' = -k^2 y$).

Научные области: 1. Химия; 2. Физика; 3. Биология; 4. Астрономия; 5. Геофизика; 6. Медицина;

а	б	в	г	д

13.Каким общим математическим законом а) – д) описываются процессы реального мира, данные ниже в предложениях 1), 2), 3), 4),5), 6)?

а) естественного роста ($y' = ky$),

б) логистический закон($y' = \alpha y - \beta y^2$),

в) закон взрывного развития ($y' = ky^2$),

г) закон взаимодействия противоборствующих видов

$$\begin{cases} x' = C\cdot x - hyx, \\ y' = -Dy + r\,yx \end{cases}$$

д) закон колебаний ($y'' = -k^2 y$)

1) Закон измерения массы радия описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности, $m\,(t)$ – масса радия в момент t.

2) Закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0), (1)$$

где T – температура тела, T_0 — температура окружающего воздуха, k — коэффициент пропорциональности.

3) «Закон размножения бактерий» описывается уравнением

$$\frac{dm}{dt} = km,$$

где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности.

4) Закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением

$$\frac{dp}{dh} = -kp,$$

где $p(h)$ — атмосферное давление воздуха на высоте $h, k > 0$.

5) Выведение лекарственного вещества из крови пациента описывается уравнением

$$\frac{dm}{dt} = -\,km,$$

где m(t) – количество лекарственного вещества в крови пациента на момент времени *t*.

6) Количество миллиграмм тетрациклина *m*(*t*), поступающее в кровоток через *t* минут после приёма таблетки, определяется скоростью его поступления и выражается закономерностью:

$$\frac{dm}{dt} = \,-\,km$$

14. Соотнесите описанные ниже процессы реального мира 1) - 5) с одним из перечисленных законов а)-д):

а) естественного роста: $y' = ky$,

б) логистический закон: $y' \;=\; \alpha y - \beta y^2$,

в) закон взрывного развития: $y' = ky^2$,

г) закон взаимодействия противоборствующих видов:

$$\begin{cases} x' = C\cdot x - hyx, \\ y' = -Dy\; + r\, yx \end{cases}$$

д) закон колебаний: $y'' = -k^2 y$.

1) Воздействие рекламы на население в условиях отсутствия вешнего регулирования подчинено зависимости: скорость изменения числа знающих о товаре покупателей пропорциональна числу знающих о товаре покупателей.

2) Скорость роста числа фирм, занимающихся определённым бизнесом, в условиях отсутствия конкуренции происходит пропорционально числу существующих фирм.

3) Текучесть кадров (скорость изменения численности работников) на предприятии пропорциональна численности работников в условиях отсутствия внешнего регулирования.

4) Остывание тела происходит со скоростью, пропорциональной разности температур тела и окружающей среды.

5) Скорость усвоения глюкозы организмом человека пропорциональна количеству глюкозы в крови человека.

15. Соотнесите описанные ниже процессы реального мира 1) - 3) с одним из перечисленных законов а) – д):

а) естественного роста ($y' = ky$),

б) логистический закон ($y' = \alpha y - \beta y^2$),

в) закон взрывного развития ($y' = ky^2$),

г) закон взаимодействия противоборствующих видов

$$\begin{cases} x' = C\cdot x - hyx, \\ y' = -Dy + r\,yx \end{cases}$$

д) закон колебаний ($y'' = -k^2 y$).

1) Воздействие рекламы в городе с населением N тысяч человек в условиях конкуренции подчинено зависимости: скорость распространения сведений о новом товаре или услуге пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей - жителей города, так и числу не знающих о товаре покупателей – жителей этого города.

2) Интенсивность распространения заболевания с учётом временного иммунитета жителей некоторого города пропорциональна как численности инфицированных индивидов в момент времени t, так и численности переболевших индивидов к моменту времени t.

3) Скорость размножения популяции в условиях конкуренции за ресурсы пропорциональна количеству особей в популяции, а также количеству доступных ресурсов, при прочих равных условиях.

16. Каким из перечисленных законов а)-д):

а) естественного роста ($y' = ky$),

б) логистический закон($y' = \alpha y - \beta y^2$),

в) закон взрывного развития ($y' = ky^2$),

г) закон взаимодействия противоборствующих видов

$$\begin{cases} x' = C\cdot x - hyx, \\ y' = -Dy + r\,yx \end{cases}$$

д) закон колебаний ($y'' = -k^2 y$),

подчиняются процессы 1) - 4) реального мира, описанные ниже:

1) Скорость размножения редких видов животных пропорциональна квадрату их численности.

2) Скорость роста атеросклеротической бляшки в сосуде человека пропорциональна квадрату её размера.

3) Для двух противостоящих сторон предположим, что каждая из сторон уничтожает ресурс соперника со скоростью, пропорциональной имеющемуся у неё собственному ресурсу с постоянным коэффициентом пропорциональности.

4) Модель обмена знаниями (технологиями, энергией) между двумя взаимодействующими объектами строится на основе закономерности: каждый из взаимодействующих объектов обладает некоторыми знаниями и знания каждого объекта растут пропорционально имеющемуся ресурсу другого из объектов.

17. Младший брат качается на качелях, средний брат раздобыл пружину и обратился к дедушке о возможности изготовления арбалета, а старший брат пытается сделать колебательный контур из конденсатора и катушки индуктивности. Какой общий закон, выраженный на языке ДУ, может использоваться для описания описанных ситуаций? Есть ли что-то общее в этих трёх ситуациях? Какие сведения из математики сможет использовать каждый брат, чтобы рассказать дедушке о своём занятии? Какая общая взаимосвязь существует в описании этих явлений? (Дайте письменный развернутый ответ).

18. Сопоставьте сформулированные задачи А) - Г) и соответствующие ДУ (система уравнений)1) - 4).

А. Рождаемость и смертность пропорциональны численности популяции.

Б. В основе размножения лежит скрещивание, предполагающее встречи между особями разных полов, то прирост популяции будет тем выше, чем больше количество встреч между особями. Скорость размножения редких видов животных пропорциональна квадрату их количества.

В. Пусть в некотором замкнутом районе живут хищники и жертвы, например, зайцы и волки. Зайцы могут питаться только растительной пищей, которая имеется всегда в достаточно количестве. Волки могут питаться только зайцами.

Обозначим число зайцев через x и число волков через y. У зайцев количество пищи не ограничено, поэтому можно предположить, что они размножаются со скоростью, пропорциональной их количеству, то есть со скоростью αx. Будем предполагать, что рождаемость зайцев превышает их смертность, тогда $\alpha > 0$. Также предполагаем, что убыль зайцев происходит пропорционально количеству встреч зайцев и волков, то есть произведению xy. В свою очередь, число волков растёт тем быстрее, чем чаще происходят их встречи с зайцами, то есть оно также пропорционально xy. Также имеет место процесс естественной смертности волков со скоростью, пропорциональной их количеству.

Г. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя.

1) $\left(\begin{cases} x' = C\cdot x - hyx, \\ y' = -Dy + r\,yx \end{cases}\right.$ 2) $y' = ky^2$, 3) $y' == \alpha y - \beta y^2$ 4) $y' = -ky$.

А	Б	В	Г

19. Какая взаимосвязь между описанными ниже процессами?

А. Количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющегося в рассматриваемый момент.

Б. Скорость потери заряда в данный момент времени пропорциональна наличному заряду проводника.

В. Скорость роста бактерий пропорциональна количеству бактерий.

Г. Скорость усвоения глюкозы организмом человека пропорциональна количеству глюкозы в крови человека.

Приложение-3. Практико-ориентированные задачи.

Задачи для исследовательских проектов.

Задача 1. «Кирпичная стена толщиной 30 см имеет температуру на внутренней поверхности 20 градусов, а на наружной 0 градусов. Найти зависимость температуры внутри стены от расстояния до её наружного края и количество теплоты, которое отдаёт наружу 1 квадратный метр стены в течение суток» [40].

Количество теплоты, проходящее через единицу поверхности в единицу времени, равно: $k \cdot \frac{dt}{dx}$, где: t – температура; x расстояние до наружной стены: k – коэффициент теплопроводности (для кирпича – 0,2 ккал/м*ч*град); $\frac{dt}{dx}$ – характеризует интенсивность падения температуры по направлению теплового потока перпендикулярно к поверхности стены.

Решение. «Пусть температура внутри стены (рисунок 16) есть функция расстояния до наружной поверхности x, т.е. $T = t(x)$. Интенсивность падения температуры по нормали к поверхности стены определяется производной $\frac{dt}{dx}$» [40].

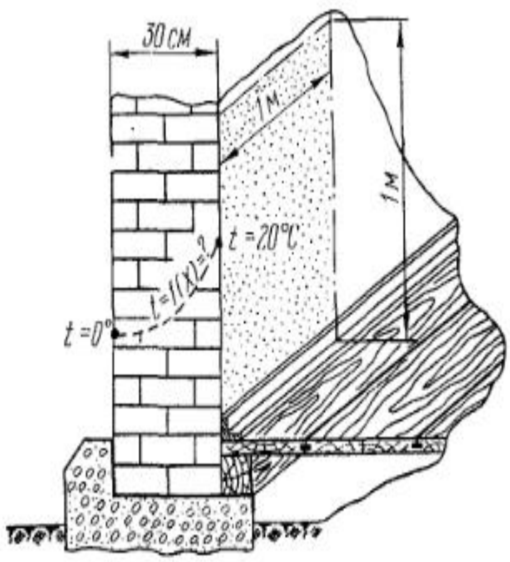


Рисунок 16

- *Стена*

«Возьмём на расстоянии x от наружной стены слой толщиной dx с постоянной (внутри этого элементарного слоя) температурой t. Количество теплоты Q_1, проходящее через этот слой, будет постоянным и по условию:

$$Q_1 = -\mathrm{k} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot S. \tag{1}$$

Так как поверхность S =1 м^2, то:

$$Q_1 = -\mathrm{k} \cdot \frac{dt}{dx}. \tag{2}$$

Решим полученное уравнение

$$dt = -\frac{Q_1}{\mathrm{k}} \cdot dx,$$

$$\int dt = -\int \frac{Q_1}{\mathrm{k}} \cdot dx,$$

$$t = -\frac{Q_1}{\mathrm{k}} \cdot x + C.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$t = -\frac{Q_1}{\mathrm{k}} \cdot x + C. \tag{3}$$

Начальное условие: при x = 0 t = 0, откуда согласно уравнению (3), C = 0. Тогда искомый закон температуры внутри стены:

$$t = -\frac{Q_1}{\mathrm{k}} \cdot x \tag{4}$$

Дополнительное условие: при x = 0,3м t = 20^0 k = 0,2 ккал/м*ч*град даёт возможность определить из уравнения (4) величину Q_1
$t = -\frac{Q_1}{\mathrm{k}} \cdot x,$

$$Q_1 = \frac{-\mathrm{k}}{x} = \frac{-0{,}2 \cdot 20}{0{,}3} = \frac{-40}{3}.$$

Подставляя найденное значение Q_1 в равенство (4), получим
$$t = \frac{40}{3 \cdot 0{,}2} \cdot x = \frac{200}{3} \cdot x.$$

Количество теплоты, которое отдаёт наружу 1 м^2 стены за сутки (24 часа), будет

$$Q = 24 \cdot Q_1 = 24 \cdot \frac{-40}{3} = -320 \text{ (ккал).}$$

Ответ: -320 ккал» [40].

Задача 2**.** Найти количество теплоты, необходимое для нагрева 1 кг железа от 20 до 21°С. Удельная теплоёмкость *C* железа выражается зависимостью *C* = 0,1053+0,000142·*t*, где *t* – температура.

Решение. Количество теплоты *Q*, необходимое для нагрева, будет функцией температуры, т.е. *Q* = *Q*(*t*). Теплоёмкость тела представляет изменение количества теплоты Q при изменении температуры *t* и определяется как производная. Удельная теплоёмкость представляет производную.

$$\frac{dQ}{dt} = 0{,}1053 + 0{,}000142 \cdot t,$$
$$dQ = (0{,}1053 + 0{,}000142 \cdot t) \cdot dt,$$
$$\int dQ = \int (0{,}1053 + 0{,}000142 \cdot t) \cdot dt,$$
$$Q = 0{,}1053t + 0{,}000142t^2 + \text{C}. \ (1)$$

Начальное условие: при *t* = 0 *Q* = 0. Отсюда, согласно уравнению (1), находим, что *C* = 0.

Тогда $Q = 0{,}1053t + 0{,}000071t^2$.

Для определения количества теплоты, необходимого для нагрева 1 кг железа от 20 до 21°*C*, находим

Q(21) = 0,1053·21 + 0,000071·441 = 2,2426 ккал,

Q(20) = 0,1053·20 + 0,000071·400 = 2,1344 ккал, откуда

$$Q(21) - Q(20) = 0{,}1082 \text{ ккал} \approx 0{,}11 \text{ ккал.}$$

Ответ: количество теплоты, необходимое для нагрева 1 кг железа от 20 до $21^{o}C$ равно 0,1082 ккал.

Температура металла при выпуске из конвертера около 1600^{0} С.

$$Q(t) = 0{,}1053t + 0{,}000142t^2$$

$$Q(1600) - Q(0) = 350{,}24 \text{ ккал.}$$

Задача 3**.** В условиях ненасыщаемости рынка найти объем производства по истечении шести месяцев, при норме инвестиций m = 0,6, продажной цене p = 0,15 (ден.ед) и l = 0,4, если в начальный момент времени объём производства $y0$ = y (0) = 24 (ден.ед).

Решение.

Исходя из того, что задано условие ненасыщаемости рынка, доход к моменту времени t будет составлять $Y(t)$ = $py(t)$. Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получаем $I(t)$ = $mY(t)$ = $mpy(t)$. Зная, что k = mpl, приходим к уравнению y' = $ky(t)$ = $mply(t)$. Подставим все известные значения: y' = 0,6 · 0,15 · 0,4 · $y(t) \Rightarrow dy$

$\frac{dy}{y}$ = 0,036. Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 0{,}036 \,,$$

$$lny = 0{,}036t + C_1,$$

$$y = Ce^{0{,}036t} \cdot e^{C_1} \,.$$

Обозначим $C = e^{C_1} \Rightarrow y = Ce^{0{,}036t}$,.

Зная, что в начальный момент времени объем производства $y_0 = y$ (0) = 24, найдём неизвестный коэффициент: $y_0 = Ce^{0{,}036t_0} \Rightarrow C = 24 \Rightarrow y = 24e^{0{,}036t}$.

Таким образом, найдём объем производства по истечении 6 месяцев: $y = y$ = $24e^{0{,}036\cdot 6} = 24e^{0{,}216} \approx 24 \cdot 1{,}24110 \approx 29{,}8$.

Ответ: 29,8

Задача 4. Рассмотрим двухвидовую модель «хищник - жертва», впервые построенную в первой половине XX в. итальянским математиком Вольтерра для объяснения колебаний рыбных уловов в Адриатическом море. Имеются два биологических вида, численностью в момент времени t, соответственно, $x(t)$ и $y(t)$. Особи первого вида являются пищей для особей второго вида (хищников). Численности популяций в начальный момент времени известны. Требуется определить численность видов в произвольный момент времени. Математической моделью задачи является система дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерра

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by) \cdot x \\ \frac{dy}{dt} = (-c + dx) \cdot y \end{cases};$$ где a, b, c, d положительные константы.

Проведём расчёт численности популяций, если $a = 3$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 1$, для двух вариантов начальных условий $x\ (0) = 2$, $y(0) = 1$ и $x\ (\ 0) = 1$, $y(0) = 2$, для которых построим фазовые траектории.

Задание №1**.** Рассчитать, какова будет численность популяции зайцев через 1,3,5 и 10 лет, если начальная численность волков составляет 15 особей и каждый год увеличивается на 2. Ответ: x=5000.

Задание №2**.** Рассчитать, какова будет численность популяции зайцев через 1, 3, 5 и 10 лет, если начальная численность волков составляет 20 особей и возрастает на 10% ежегодно. Отобразить изменения численности зайцев в течение данного периода графически.

Задание №3**.** Рассчитать, какой должна быть начальная численность растущей популяции волков, чтобы численность зайцев была относительно стабильной (то есть равнялась приблизительно 1000) в течение первых пять лет существования популяции. Как будет изменяться численность популяции зайцев в течении следующих пяти лет? Представьте данные графически.

Задание №4. Рассчитайте, какой должна быть начальная численность волков и оленей, чтобы численность оленей оставалась относительно стабильной (т.е.

равнялась примерно 2000) в течение первых пяти лет существования популяции. Как будет изменяться численность популяции оленей в течение последующих пяти лет? Представьте все полученные данные графически.

Термодинамика

1. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20°С. Известно, что в течение 20 мин. тело охлаждается от 100°С до 60°С. Найти зависимость изменения температуры θ тела от времени t.

2. В течение 20 минут температура вынутого из печи хлеба и помещённого на складе падает от 100°С до 60°С.Температура воздуха на складе равна 20^0. Через сколько времени от момента охлаждения температура хлеба понизится до 40°С? До 30°С?

Электродинамика

1.Шарик, масса которого m, нанизан на горизонтальную проволочную круговую петлю радиуса r. Зная коэффициент трения f, определить, какую начальную скорость v_0 нужно сообщить шарику для того, чтобы он сделал полный оборот по проволоке и остановился.

2. Электрическая цепь содержит источник ЭДС ε, сопротивление R и конденсатор ёмкостью C. Ключ разомкнут. ЭДС своего внутреннего сопротивления не имеет. В начальный момент конденсатор разряжен. Найти зависимость напряжения $U_c(t)$ на конденсаторе от времени, если в начальный момент ключ замкнули.

Физика

7. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью V_0 = 20 км/ч. На полном ходу её мотор выключается, и через 40 сек. После этого скорость лодки уменьшается до V_1 = 8 км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через две минуты после остановки мотора.

8. Катер двигался по озеру со скоростью 32 км/ч и через 1 минуту, после того как был выключен двигатель, его скорость стала равной 8 км/ч. Чему будет равна скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя, если сопротивление воды пропорционально скорости движения катера? Какое расстояние он пройдёт через 1 минуту после выключения мотора? Какое расстояние он пройдёт через 2 минуты после выключения мотора?

9. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу силы при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия её на 0,01 м нужна сила 10 Н.

10. Если при прохождении через слой воды толщиной 3 м поглощается половина первоначального количества света, то какая-то часть этого количества дойдёт до глубины 30 м? Количество света, поглощённого при прохождении через топкий слой воды, пропорционально толщине слоя и количеству света, падающего на его поверхность.

11. Изолированному проводнику сообщён заряд Q_0 = 1000кл. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени t = 10 мин., если за первую минуту потеряно 100кл?

12. Счётчик Гейгера, установленный вблизи препарата радиоактивного изотопа серебра, при первом изменении зарегистрировал 5200 (β-частиц в минуту, а через сутки – только 300. Определить период полураспада изотопа.

7. Исследуйте поведение математического маятника при малых колебаниях. Пусть масса груза равна единице, а стержень, на котором подвешена масса, невесом. Тогда дифференциальное уравнение движения груза имеет вид

$$\varphi'' + k\varphi' + \omega^2\varphi = 0$$

Где $\varphi(t)$ угол отклонения маятника от положения равновесия (нижнее положение), параметр k характеризует величину трения $\omega^2 = g/l$, (g ускорение свободного падения, l – длина маятника). Для определения конкретного движения к уравнению движения надо добавить начальные условия $\varphi(0) = \varphi_0$, $\varphi'(0) = \varphi_0'$. Выберем следующие значения параметров $k = 0.5, \omega^2 = 10$ и начальные условия: $\varphi_0 = 0$, $\varphi_0' = 5$. Найдите закон движения маятника.

Биология

1. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент t = 0 было 100 бактерий, а в течение 3 часов их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени.
2. В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна наличному его количеству x. Первоначальное количество фермента *a* в течение 1 часа удвоилось. Во сколько раз оно увеличится через 3 часа?
3. «Рассмотрим классическую модель взаимодействия видов «хищник– жертва», которую независимо друг от друга предложили американский математик и демограф Альфред Джеймс Лотка (1925 г.) и итальянский математик и механик Вито Вольтерра (1926 г.). Пусть в некотором замкнутом районе живут хищники и жертвы, например, зайцы и волки. Зайцы могут питаться только растительной пищей, которая имеется всегда в достаточном количестве. Волки могут питаться только зайцами. Обозначим число зайцев через x и число волков через y. У зайцев количество пищи не ограничено, поэтому можно предположить, что они размножаются со скоростью, пропорциональной их количеству, то есть со скоростью αx. Будем предполагать, что рождаемость зайцев превышает их смертность, тогда α > 0. Также предполагаем, что убыль зайцев пропорционально количеству встреч зайцев и волков, то есть произведению xy. В свою очередь, число волков растет тем быстрее, чем чаще происходят их встречи с зайцами, то есть оно также пропорционально xy. Также имеет место процесс естественной смертности волков со скоростью, пропорциональной их количеству. Таким образом, получаем систему уравнений:

$dx/dt = (\alpha - \beta y)x$,

$dy/dt = (-\gamma + \delta x)y$.

Найти численное решение данной задачи, если $\alpha=2$; $\beta=0{,}5$; $\gamma=0{,}3$; $\delta=1$;

$x(0) = 200$, $y(0) = 150$» [120]

Химия

1.В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту останется в резервуаре через t минут, предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

2.Если первоначально количество фермента равно 1 г, а через 1 ч становятся равным 1,2 г, то чему оно будет равно через 5 ч после начала брожения? Скорость прироста фермента считать пропорциональной его наличному количеству.

3.Вещество А превращается в вещество В. Определить первоначальное количество вещества А и время, когда останется половина этого вещества, если спустя 1 час после начала реакции осталось 24,4 г вещества А, а после 4 часов - 3,05 г.

Рекомендация. Имеет место реакция первого порядка. Обозначим через, a – первоначальное количество вещества А, через x - количество вещества, прореагировавшего за время t от начала реакции, k – коэффициент пропорциональности, называемый *константой скорости реакции,* тогда дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x).$$

Медицина

1.Скорость распада некоторого лекарственного вещества в организме человека пропорциональна наличному количеству лекарства. Известно, что по истечении 1 ч. в организме осталось 31,4 г лекарственного вещества, а по истечении 3 ч – 9,7 г. Определить: сколько лекарственного вещества было введено в организм?; через сколько времени после введения в организме останется 1% первоначального количества?[40]

1. а) Найдите период полураспада радиоактивного вещества, если за

1) 1 ч, 2) 1 день, 3) 1 год, 4) 2 года, 5) 10 лет

радиоактивного вещества уменьшается соответственно на:

1) 1%, 2) 2%, 3) 10%, 4) 20, 5) 25.

б) Период полураспада радиоактивного газа радона $T \approx 3{,}825$ суток. Определите, какое количество радона останется в запаянной ампуле через 1) 38 суток, 2) 10 дней, 3) 20 день, 4) 1 день, 5) 2 дня,6) 7 дней.

в) Период полураспада радия ≈1590 лет. Через сколько лет от начального количества радия останется: 1) 10%, 2) 20%, 3) 35%, 4) 5%, 5) 15%, 6) 75%.[40]

2. Вещество M вступило в реакцию с другим веществом. Скорость течения реакции пропорциональна имеющемуся количеству вещества M было в начале реакции, если

а) через час после начала реакции его осталось 100 г, а через 2 ч – 25 г;

б) через 20 минут после начала реакции его осталось 60 г, а через 40 минут – 16 г;

в) через 30 минут после начала реакции его осталось 120 г, а через 1 ч – 64 г;

г) через 1 час после начала реакции его осталось 100 г, а через 3 ч – 25 г;

д) через 20 минут после начала реакции его осталось 60 г, а через 1 ч – 15 г.

3.Вскипевший чайник тотчас выносится из помещения на улицу, где температура воздуха A градусов, и за m минут остывает до температуры T_1.

а) Через сколько времени чайник остынет до температуры T_2?

б) На сколько градусов чайник остынет через следующие n минут, если:

1) $A = 20°,\ m = 10, T_1 = 90°, T_2 = 40°, n = 30;$
2) $A = 18°,\ m = 25, T_1 = 70°, T_2 = 30°, n = 25;$
3) $A = 16°,\ m = 10, T_1 = 85°, T_2 = 25°, n = 20;$
4) $A = 10°,\ m = 5, T_1 = 85°, T_2 = 30°, n = 25$;
5) $A = 8°,\ m = 15, T_1 = 70°, T_2 = 20°, n = 45;$
6) $A = 5°,\ m = 8, T_1 = 80°, T_2 = 30°, n = 30;$
7) $A = 2°,\ m = 5, T_1 = 75°, T_2 = 25°, n = 15;$
8) $A = 0°,\ m = 5, T_1 = 72°, T_2 = 36°, n = 40;$
9) $A = -5°,\ m = 5, T_1 = 70°, T_2 = 40°, n = 20$
10) $A = -10°,\ m = 10, T_1 = 65°, T_2 = 15°, n = 30.$

4. Криминалисты, прибыв на место преступления, обнаружили труп человека, температура тела которого было A градусов. Через один час температура трупа стала B градусов. Температура окружающего воздуха C градусов. Считая, что в момент убийства человек имел температуру тела 37°, определите промежуток времени между моментом убийства человека и моментом обнаружения его тела, если:

1) $A = 27°,\ B = 25°,\ C = 16°$; 2) $A = 24°,\ B = 23°,\ C = 20°$;

3) $A = 30°,\ B = 28°,\ C = 18°$; 4) $A = 32°,\ B = 30°,\ C = 14°$;

5) $A = 28°,\ B = 25°,\ C = 6°$; 6) $A = 29°,\ B = 27°,\ C = 4°$;

7) $A = 25°,\ B = 21°,\ C = 0°$.

5. Парашютист летит вниз с ускорением $a = g - kv$, где $g -$ ускорение свободного падения, $v -$ скорость парашютиста, $k -$ коэффициент. Найдите законы изменения скорости и перемещения парашютиста, если в начальный момент его скорость и перемещение равны нулю [73].

1.(Логистический закон). «Руководством сталелитейного завода принята полугодовая программа развития, по которой десятая часть всей выручки предприятия направляется на расширение производства. Известно, что кривая спроса задаётся уравнением $p(y) = 330 - y$, где p — цена в долларах одной тонны стали; y — её объем в тоннах, и что скорость производства составляет один процент от вложенных инвестиций. Найти объём реализованной продукции за время действия программы, если до её начала продавалось 30 т стали в месяц» [73].

Решение. $y\ (t)$ тонн — это масса выпущенной заводом стали в момент времени t, причем время измеряется в месяцах. Тогда доход завода в рассмотренном месяце составит $(330 - y)\ y$ долларов, а скорость производства равна $0{,}01 \cdot 0{,}01(330 - y)\ y = 0{,}001(330 - y)\ y$. Отсюда следует уравнение $y' = 0{,}001(330 - y)\ y$. Дифференциальное уравнение $y' = 0{,}33\ y - 0{,}001y^2$. Решим задачу в MathCad.

B := 0.33   D := 0.001

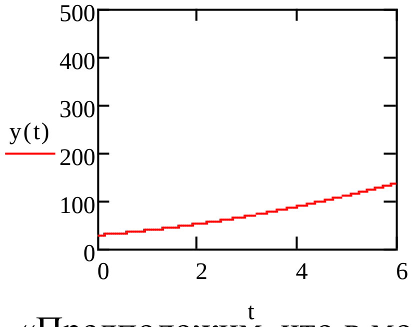
Given

$$\frac{d}{dt}y(t) = B\cdot y(t) - D\cdot y(t)^2$$

$y(0) = 30$

$y := \mathrm{Odesolve}(t, 6)$

$y(6) = 138.615$



Ответ: 138,615.

2. «Предположим, что в момент времени t = 0 в городе с населением M =100 тысяч человек некоторый слух услышали 10 тысяч человек. Через 1 неделю число P(t) тех, кто его услышал, увеличилось и стало равным P (1) = 20 тысячам. Предполагая, что P(t) удовлетворяет логистическому уравнению, вычислить, когда слух услышит 80% населения города. Ответ: приблизительно через 4 недели и 3 дня» [73].

3. «Однажды в городе с населением 100 000 человек начала распространяться определённая сомнительная информация о наличии недопустимых вредных примесей в питьевой воде. В течение недели этот слух услышали 10 000 человек. Предположим, что скорость распространения слухов пропорциональна произведению числа тех жителей, кто слышал слух, и тех, кто его не слышал. Сколько времени пройдёт, пока слух не услышит половина населения города? Ответ: примерно 46 дней» [73].