

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЛОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ И. С. ТУРГЕНЕВА»

На правах рукописи



Баракова Елена Александровна

ФОРМИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТИВНЫХ  
УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ  
ШКОЛЬНИКОВ  
ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

13.00.02 Теория и методика обучения и воспитания  
(математика)

Диссертация

на соискание учёной степени кандидата педагогических наук

Научный руководитель:  
доктор педагогических наук,  
доцент  
Яремко Наталия Николаевна

Орел 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
Глава I ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ МЕТОДИКИ ФОРМИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТИВНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ .....	14
1.1 Система универсальных учебных действий в реализации системно-деятельностного подхода как составляющая методологии проектирования содержания основного общего математического образования.....	14
1.2 Особенности формирования РУУД в контексте развития математической учебно-исследовательской деятельности школьников.....	35
1.3 Педагогические условия формирования РУУД школьников при обучении математике.....	63
1.4 Теоретико-методологические подходы и система дидактических принципов обучения математике в процессе формирования РУУД.....	85
Выводы по I главе .....	108
Глава II МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТИВНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ.....	112
2.1 Модель методической системы формирования РУУД школьников при обучении математике .....	112
2.2 Реализация процесса формирования РУУД школьников при обучении математике.....	140
2.3 Постановка и анализ результатов педагогического эксперимента.....	163
Выводы по II главе .....	188
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	192
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	197
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	227

## Введение

**Актуальность исследования.** С внедрением Федеральных государственных образовательных стандартов школьного образования второго поколения активно обсуждаются вопросы осмысления новых подходов к построению процесса обучения.

Важнейшей характеристикой современного школьного образовательного процесса является его организация на основе предоставления учащимся возможности самостоятельно ставить учебные цели, выбирать уровень и средства их достижения, определять способы контроля, оценки и коррекции процесса и результатов собственной учебно-познавательной деятельности. Предоставление таких возможностей предполагает целенаправленную работу по формированию у учащихся регулятивных универсальных учебных действий (РУУД) и овладение ими полной осознанной саморегуляцией в процессе обучения.

Установка на деятельность как средство овладения знаниями и цель обучения отражают деятельностную концепцию обучения. При этом наиболее действенным инструментом обучения математике выступает исследовательская деятельность, ориентированная на стимулирование познавательных потребностей и способностей личности ученика, реализующая его стремление к самостоятельности, самоуправлению учением и повышению активности.

### **Степень разработанности проблемы.**

Проблема регулятивной деятельности учащихся отражена в трудах Е. В. Барановой [26], С. И. Выготской [53], А. О. Зюзиной [90], А. М. Кондакова [116, 244], О. А. Конопкиной [114], В. В. Краевского [119], И. М. Логвиновой [120], А. А. Маркиной [150], А. К. Осницкого [172], В. В. Фирсова [190], Г. П. Щедровицкого [264] и др. В диссертационных исследованиях С. А. Никишовой [165], А. М. Суковых [221], И. Г. Сюсюкиной [222], Л. А. Теплоухо-

вой [230], Д. А. Хомяковой [249] и др. представлены пути формирования способностей к выполнению универсальных учебных действий учащимися.

Проблема формирования регулятивных учебных действий учащихся в процессе обучения математике раскрывается в работах А. Г. Асмолова [12], Л. И. Боженковой [33, 34, 35], М. В. Егуповой [77], В. Я. Барминой [28], И. Г. Липатниковой [139], Е. С. Квитко [105], Е. Н. Перевощиковой [176] и др.

Исследовательская деятельность выступала предметом изучения многих ученых, таких как В. Г. Болтянский [38, 39], Б. В. Гнеденко [59], В. А. Гусев [62], А. Н. Колмогоров [110], Ю. М. Колягин [112], А. И. Маркушевич [153], А. С. Обухов [167], М. В. Потоцкий [183, 184], А. И. Савенков [196], С. И. Шварцбурд [262], А. В. Ястребов [276] и др. В работах Е. В. Барановой [27], И. В. Владыкиной [46], Я. И. Груденова [61], В. А. Далингера [68, 70], В. П. Заесенок [80], М. И. Зайкина [81], Т. А. Ивановой [93, 95], Н. Ф. Кругловой [120, 121, 122, 123], М. М. Новожиловой [166], Л. Э. Орловой [171], А. А. Остапенко [175], Н. Г. Подаевой [181], Г. И. Саранцева [200], Т. Ф. Сергеевой [208], М. В. Шабановой [257], С. В. Щербатых [265], др. обосновано, что в процессе обучения, для активизации стремления к учебному познанию, исследовательская деятельность является эффективным средством.

Тем не менее, из-за не разработанности теоретических основ методики формирования регулятивных универсальных учебных действий при обучении математике потенциал исследовательской деятельности раскрывается в педагогической науке и образовательной практике недостаточно.

В настоящее время существуют **противоречия** между:

- реализацией системно-деятельностного подхода к образованию и недостаточной разработанностью вопросов саморегуляции деятельности учащихся на этапе школьного обучения математике;
- необходимостью включения вопросов формирования регулятивных универсальных учебных действий в процесс обучения предметным курсам и их слабой методической обеспеченностью при обучении математике;

- ориентацией школьного математического образования на активную, самостоятельную учебно-исследовательскую работу учащихся и степенью работанности методики формирования регулятивных универсальных учебных действий в процессе обучения математике.

Необходимость разрешения этих противоречий определяет актуальность настоящего исследования.

**Проблема исследования:** каковы компоненты методики формирования регулятивных универсальных учебных действий у учащихся основной общеобразовательной школы в процессе обучения математике.

**Объект исследования** – процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

**Предмет исследования** – методика формирования регулятивных универсальных учебных действий у учащихся основной общеобразовательной школы в процессе обучения математике.

**Цель исследования** – научное обоснование, разработка и экспериментальная проверка методики формирования регулятивных универсальных учебных действий школьников при обучении математике.

В основу исследования положена **гипотеза:** эффективность овладения школьниками регулятивными универсальными учебными действиями повысится, если будут:

- раскрыты возможности курса математики в их формировании;
- выявлена взаимосвязь процесса их формирования с учебно-исследовательской деятельностью учащегося при обучении математике;
- определены педагогические условия их формирования в процессе обучения математике в общеобразовательной основной школе;
- научно обоснована, построена и реализована модель методической системы формирования регулятивных универсальных учебных действий при обучении математике в общеобразовательной основной школе. При этом предполагается, что в результате будет разработана и внедрена в образовательную

практику методика формирования регулятивных универсальных учебных действий школьников при обучении математике, которая:

- разработана в соответствии с положениями системно-деятельностного подхода и теории учебной исследовательской деятельности;

- базируется на конструировании РУУД школьников при обучении математике с опорой на теорию осознанной саморегуляции личности;

- реализуется в процессе математической учебно-исследовательской деятельности, выступающей содержательно-процессуальной основой формирования РУУД;

- обеспечивает индивидуализацию освоения образовательной программы, создание личностно развивающей образовательной среды и специальную организацию внеурочной деятельности учащихся по математике в качестве непреложных условий формирования РУУД школьников;

- гарантирует поэтапное диагностируемое в процессе организованного взаимодействия обучающихся и преподавателя формирование РУУД школьников с помощью комплекса исследовательских практических заданий.

Для достижения цели в соответствии с объектом и предметом исследования поставлены следующие **задачи**:

- 1) раскрыть возможности курса математики в формировании регулятивных универсальных учебных действий учащихся общеобразовательной основной школы;

- 2) выявить взаимосвязь учебно-исследовательской деятельности учащегося при обучении математике с процессом формирования регулятивных универсальных учебных действий;

- 3) определить педагогические условия формирования регулятивных универсальных учебных действий в процессе обучения математике в общеобразовательной основной школе;

- 4) разработать и экспериментально проверить эффективность методики формирования регулятивных универсальных учебных действий в процессе

учебно-исследовательской деятельности при обучении математике в общеобразовательной основной школе.

**Общеметодологической основой** исследования являются философские и психолого-педагогические работы по теме исследования, где отражены современные научные представления о ведущей роли деятельности в становлении человека как личности; методология развития системы математического образования.

**Теоретическую основу** исследования составляют:

– системно-деятельностный подход в обучении (А. Г. Асмолов, Л. С. Выготский, П. Я. Гальперин, В. В. Давыдов, А. Н. Леонтьев, Д. Б. Эльконин);

– концепция формирования универсальных учебных действий (А. Г. Асмолов, Л. И. Боженкова, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская, О. А. Карабанова, С. В. Молчанов, Н. Г. Салмина);

– концептуальные основы организации исследовательской деятельности школьников (И. А. Зимняя, А. И. Савенков, Т. Ф. Сергеева, Л. Н. Фридман, М. А. Холодная, А. В. Хуторской и др.);

– теория саморегуляции собственной деятельности (Б. Г. Ананьев, О. А. Конопкин, А. Н. Леонтьев, А. Маслоу, А. К. Осницкий, К. Роджерс);

– теории саморазвития личности учащегося, развития учебной мотивации, познавательной самостоятельности (Л. И. Божович, Л. С. Выготский, А. К. Маркова, П. И. Пидкасистый, А. В. Хуторской, В. Д. Шадриков, Г. И. Щукина и др.);

– теории социализации личности (К. А. Абульханова-Славская, М. Вебер, Л. Н. Коган, И. С. Кон, П. А. Лавров, Б. М. Парыгин, П. А. Сорокин, В. М. Шепель);

– методологические основы математики (М. Б. Волович, В. А. Гусев, В. А. Далингер, Г. В. Дорофеев, Н. Б. Истомина, Ю. М. Колягин, Г. И. Саранцев, Л. М. Фридман и др.);

– методологические положения, определяющие развитие системы совре-

менного математического образования (Г. Д. Глейзер, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев, Т. В. Иванова, А. Г. Мордкович, Г. И. Саранцев, И. М. Смирнова, М. В. Ткачева и др.).

В ходе исследования использовались **методы:**

– **теоретические** – анализ философских, психолого-педагогических работ по теме исследования, нормативных документов, предметных УМК по математике, процессов информатизации образования; моделирование гипотез, проектирование модели методической системы формирования регулятивных универсальных учебных действий, прогнозирование образовательных результатов;

– **эмпирические** – анкетирование, наблюдение, обобщение педагогического опыта, педагогический эксперимент и диагностика сформированности регулятивных универсальных учебных действий; качественный и количественный анализ экспериментальных данных, графические методы их представления;

– **статистические** – обработка данных, полученных в ходе опытно-экспериментальной работы средствами математической статистики.

**Экспериментальная база исследования.** Экспериментальная база исследования. Исследование проводилось в период с 2009 по 2020 год на базе образовательных учреждений г. Химки, Московской области и г. Москвы. В 2019 – 2020 годы в Орловском государственном университете имени И. С. Тургенева были подготовлены диссертация и автореферат.

**Этапы исследования.** На первом этапе (2009 – 2010 гг.) был осуществлен теоретический анализ проблемы исследования; определены объект, предмет, цель, гипотеза и задачи исследования; проведен констатирующий этап педагогического эксперимента.

На втором этапе (2010 – 2015 гг.) был выявлен комплекс педагогических условий, обеспечивающих формирование регулятивных универсальных учебных действий в процессе обучения математике в общеобразовательной основной школе, осуществлена разработка методики формирования регулятивных



универсальных учебных действий учащихся основной школы в процессе учебно-исследовательской деятельности, проведена опытно-экспериментальная работа по проверке ее эффективности и теоретическому осмыслению результатов исследования.

На третьем этапе (2015 – 2019гг.) проводилась систематизация и обобщение результатов исследования, (2019 – 2020 гг.) в Орловском государственном университете имени И. С. Тургенева были сформулированы выводы и рекомендации, осуществлена подготовка диссертации и автореферата к защите.

**Наиболее существенные результаты**, полученные лично соискателем, и их **научная новизна**.

1. Раскрыта сущность процесса формирования регулятивных универсальных учебных действий при обучении математике в структуре полной осознанной саморегуляции, представленной ее структурными компонентами: ценностно-мотивационным, смысловым, опытом рефлексии, опытом привычной активизации, операциональным опытом и опытом сотрудничества.

2. Выявлена взаимосвязь учебно-исследовательской деятельности учащегося при обучении математике с процессом формирования регулятивных универсальных учебных действий, способствующая трансформации внешней мотивации во внутреннюю, повышающая активность, самостоятельность, сознательность учащегося, его умение ориентироваться в новой ситуации.

3. Определен комплекс педагогических условий, обеспечивающий формирование регулятивных универсальных учебных действий в процессе обучения математике в общеобразовательной основной школе: обеспечение индивидуализации освоения образовательной программы с учетом интересов и способностей учащегося; создание личностно развивающей образовательной среды как пространства саморазвития и социального взаимодействия школьников; организация внеурочной деятельности учащихся по математике как процесса освоения метапредметных учебных действий.

4. Теоретически обоснована, разработана и апробирована методика формирования регулятивных универсальных учебных действий школьников в

процессе обучения математике на основе развития их учебно-исследовательской деятельности, представленная целевым, содержательным, операциональным и диагностическим компонентами.

**Существенность отличий** в новизне научных положений от результатов, полученных другими авторами, заключается в следующем:

- обоснована возможность формирования регулятивных универсальных учебных действий в процессе учебно-исследовательской деятельности учащегося при обучении математике;

- определен комплекс педагогических условий, обеспечивающий формирование регулятивных универсальных учебных действий в процессе обучения математике в урочной и внеурочной деятельности на основе учета индивидуальных особенностей обучаемых и создания личностно развивающей образовательной среды как пространства саморазвития и социального взаимодействия школьников;

- разработана методика формирования регулятивных универсальных учебных действий учащихся, основанная на организации учебно-исследовательской деятельности в процессе обучения математике в общеобразовательной основной школе.

**Теоретическая значимость исследования.** Данное исследование дополняет теорию и методику обучения математике, обосновывает возможности формирования и развития регулятивных универсальных учебных действий школьников. В исследовании конкретизированы РУУД учащихся при обучении математике, выявлены педагогические условия и разработана модель методической системы их формирования, обоснованы методика формирования РУУД школьников в развивающей образовательной среде в процессе управляемой учебно-исследовательской деятельности, его учебно-методическое обеспечение и критерии оценивания уровня развития РУУД школьников.

**Практическая значимость** результатов и выводов исследования заключается в том, что они могут повысить эффективность процесса формирования и развития регулятивных универсальных учебных действий школьников, что

позволит активизировать познавательную деятельность учащихся и в итоге обеспечит высокое качество освоения ими математики. Разработанный комплект дидактических и методических материалов для формирования регулятивных универсальных учебных действий школьников на основе исследовательского подхода (включающий в себя рекомендации по конструированию индивидуальных образовательных программ по математике, модель организации индивидуальной образовательной деятельности, совокупность методических приемов формирования РУУД и др.) поможет учителям общеобразовательной школы вызвать интерес учащихся к математике, повысить мотивацию к её изучению. В дальнейшем он может стать основой для подготовки учебно-методических программ и пособий.

**Личный вклад автора** заключается: в самостоятельной разработке основных положений исследования; установлении взаимосвязи учебно-исследовательской деятельности обучаемых с формированием РУУД; выявлении педагогических условий формирования РУУД; разработке модели методической системы формирования РУУД учащихся в процессе обучения математике в основной общеобразовательной школе; научном обосновании методики формирования РУУД учащихся в процессе обучения математике в основной общеобразовательной школе; разработке, организации и проведении опытно-экспериментальной работы; разработке методического обеспечения.

**Достоверность и обоснованность** результатов исследования обеспечены: методологической обоснованностью научных положений по формированию и развитию регулятивных универсальных учебных действий школьников; использованием методов исследования, адекватных его предмету и задачам, взаимопроверяемых методик сбора и обработки информации; согласованностью с опубликованными теоретическими и экспериментальными результатами предшествующих исследований; всесторонним анализом практики и обобщением передового опыта учителей математики.

**Апробация и внедрение результатов исследования.** Материалы диссертационного исследования обсуждались на Международных (Москва: 2010,

2012, 2013, 2015; Орел: 2011, 2020; Смоленск: 2012; Санкт-Петербург: 2012, 2013); Всероссийских (Тверь: 2010; Москва: 2012; Нижний Новгород : 2013) научных конференциях.

Основные результаты исследования используются в образовательной практике школ г. Химки Московской области (МБОУ Лицей №10, МБОУ Лицей №12) и г. Москвы (ГБОУ Школа № 1985).

Авторские программы «Наглядная геометрия, 5 – 6 классы» и «Методические подходы к конструированию сценария МЭШ с целью формирования РУУД учащихся» для педагогов получили официальное внедрение в ГБОУ Школа № 1985 г. Москвы.

4 сценария из 14, размещённых на платформе МЭШ и получившие Грант Правительства Москвы, размещены на платформе «Российская электронная школа».

**На защиту выносятся следующие положения:**

1. Формирование регулятивных учебных действий учащихся необходимо осуществлять в структуре полной осознанной саморегуляции, представленной ее компонентами: ценностно-мотивационным, смысловым, опытом рефлексии, опытом привычной активизации, операциональным опытом и опытом сотрудничества. Процесс формирования РУУД связан с учебно-исследовательской деятельностью, которая выступает для него содержательно-процессуальной основой, способствует трансформации внешней мотивации во внутреннюю, повышает активность, самостоятельность, сознательность учащегося, его умение ориентироваться в новой ситуации.

2. Педагогическими условиями, обеспечивающими формирование регулятивных универсальных учебных действий в процессе обучения математике в общеобразовательной школе, выступают: обеспечение индивидуализации образовательных программ и путей их усвоения в зависимости от способностей и интересов обучающихся к математике; формирование развивающей способности и интереса к математике, создание образовательной среды общеобразовательной организации и вовлечение в неё обучающихся; организация

внеурочной деятельности учащихся по математике как процесса освоения метапредметных учебных действий.

3. Методическая система формирования РУУД школьников при обучении математике в основной общеобразовательной школе – это целостная совокупность взаимосвязанных компонентов: цель, содержание, формы, методы, средства, диагностика, – выделенная из общего образовательного процесса. Методическая система является открытой (ее элементы взаимодействуют с внешней средой), и управляемой (имеется цель, которой подчинена система). Модель методической системы содержит четыре взаимосвязанных компонента: целевой, содержательный, операциональный (формы, методы, средства) и диагностический, – при ведущей роли целевого компонента.

4. Методика формирования РУУД школьников при обучении математике ориентирована на организацию образовательного процесса адекватно индивидуальным целям и обеспечению осознанной саморегуляции учащегося. Достижение тактических и оперативных целей при обучении математике в 5-6 классах, алгебре и геометрии в 7-9 классах осуществляется посредством вовлечения обучающихся в учебно-исследовательскую деятельность, в рамках которой регулируется детская инициатива, поддерживается поисковая активность, стремление к самостоятельному открытию средств и способов решения задач и доказательств теорем, формируется умение учиться самостоятельно. Операционный состав регулятивной деятельности охватывает вариативные, конвергентные, исследовательские задачи; учебно-исследовательские проекты, практические работы.

**Структура диссертации** отражает общую логику исследования и состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, приложений. В работе имеется 14 пронумерованных рисунков, 21 таблица, 6 Приложений; список литературы насчитывает 281 источник.

# **Глава I ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ МЕТОДИКИ ФОРМИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТИВНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ**

## **1.1 Система универсальных учебных действий в реализации системно-деятельностного подхода как составляющая методологии проектирования содержания основного общего математического образования**

Цели образования и стратегия его развития определяются социальными запросами. Экономическое положение и социально-культурная ситуация в Российской Федерации в настоящее время таковы, что проблема развития человека оказывается в ранге приоритетных задач образования в силу необходимости преобразований в обществе.

В качестве инструмента модернизации системы образования можно рассматривать действующий Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС), отличительной особенностью которого является его деятельностный характер, ставящий главной целью развитие личности учащегося [105]. Рассмотрим требования стандарта к образовательным результатам.

*Требования к личностным результатам: готовность и способность обучающихся к саморазвитию и личностному самоопределению [184], сформированность их мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности... [184]. Предметные результаты представляют собой совокупность «системы предметных знаний» и «системы предметных действий».*

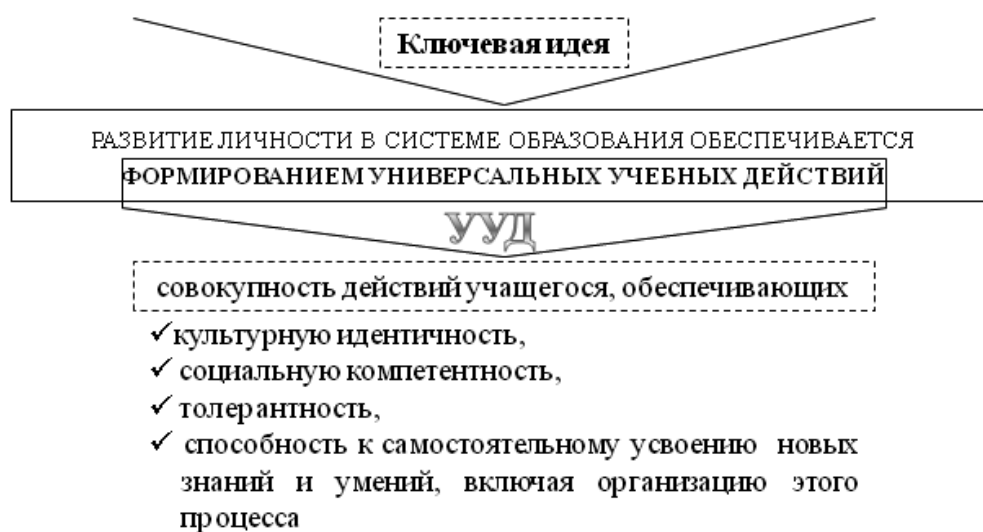
*Система предметных знаний – это опорные знания (необходимые для успешного обучения) и дополнительные (расширенные, углубленные). Так, например, знания в области решения квадратных уравнений в 8 классе относятся к опорным, а уравнения высших степеней – к дополняющим и углубляющим опорные знания. Основа системы предметных действий – универсальные учебные действия, соответствующие данному предмету и универсальные учебные действия, приобретённые при изучении других предметов. Математика по праву занимает лидирующее положение, укрепляющееся в условиях реализации потенциала межпредметных связей. К примеру, практика учебных действий при изучении векторов на плоскости при изучении математики и физики создает условия для оперирования ими в трехмерном пространстве. Требования стандарта к предметным результатам – освоение предметных знаний и овладение предметными действиями. Требования к метапредметным результатам: освоение обучающимися межпредметных понятий и метапредметных действий (регулятивных, познавательных, коммуникативных), способность их использования в учебной, познавательной и социальной практике, самостоятельность планирования и осуществления учебной деятельности и организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками, построение индивидуальной образовательной траектории [184].*

Таким образом, метапредметные действия (*регулятивные, познавательные, коммуникативные*), являясь ориентировочными действиями, составляют условие успешности решения предметных задач и психологическую основу развития личности учащегося.

В основе ФГОС – системно-деятельностный подход в обучении (Л. С. Выготский, П. Я. Гальперин, В. В. Давыдов, А. Н. Леонтьев, Д. Б. Эльконин). Системно-деятельностный подход декларирует исследование объекта как систему через деятельность.

*Сущность системно-деятельностного подхода* представлена на рисунке 1.

## СУЩНОСТЬ СИСТЕМНО – ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО ПОДХОДА



*Рисунок 1 – Сущность системно-деятельностного подхода в обучении*

Реализация принципов системно-деятельностного подхода в обучении математике [11] - [13], [33] - [34], [234], предполагает формирование регулятивных универсальных учебных действий (РУУД) школьников. Введение школьников в содержание нового учебного материала путем открытия знаний, а не их подачи, ставит школьников в положение, когда необходимо выполнять действия планирования, целеполагания, коррекции, оценки. Создание условий для использования на уроке научной информации, полученной вне школы, предполагает для школьников выполнение действий оценки, прогнозирования. Предвидение определенных интеллектуальных трудностей освоения учебного материала ведет к формированию волевой саморегуляции школьников; активизация познавательной деятельности с использованием проблемно-поисковых, исследовательских методов обучения способствует формированию всего состава РУУД, заявленных во ФГОС: целеполагания, планирования, прогнозирования, контроля, оценки, волевой саморегуляции. Такие действия необходимы для успешного освоения содержания, связанного с изучением уравнений и неравенств, числовых систем и тождественных преобразований, вероятностей и статистических характеристик, площадей фигур и объемов тел, и т.д.



Проведем сравнительный анализ возможности формирования регулятивных универсальных учебных действий при различных подходах в обучении.

Рассмотрим:

- **традиционное обучение;**
- **проблемное обучение** (В. Т. Кудрявцев, И. Я. Лернер, А. М. Матюшкин, М. И. Махмутов);
- **лично-ориентированное обучение** (В. И. Слободчиков, В. Д. Шадриков, И. С. Якиманская);
- **компетентностный подход** (А. М. Аронов, В. В. Башев, И. А. Зимняя, О. Е. Лебедев, Ю. В. Сенько, А. В. Хуторской, Д. Б. Эльконин и др.);
- **развивающее обучение** (Л. С. Выготский, Л.В. Занков, В. В. Давыдов, Д. Б. Эльконин, В. В. Репкин, др.);
- **системно-деятельностный подход** (Л. С. Выготский, П. Я. Гальперин, А. Н. Леонтьев, Д. Б. Эльконин).

Результаты сравнительного анализа представлены в таблице 1.

Таблица 1- Сравнительный анализ возможности целенаправленного формирования РУУД учащихся при различных подходах в обучении математике в общеобразовательной школе

№ п/п	Подходы в обучении	Действия учащихся	Плюсы (+)	Минусы (-)	Возможность целенаправленного формирования РУУД учащихся
1	<b>Традиционное обучение</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- воспринимает информацию, обнаруживает первичное понимание;</li> <li>- осмысливает усвоенный материал;</li> <li>- обобщает усвоенный материал;</li> <li>- закрепляет изученное путем повторения;</li> <li>- применяет изученное в упражнениях, заданиях и др.</li> </ul>	систематичность и возможность за короткий промежуток времени передать большой объём информации	<ul style="list-style-type: none"> <li>- деятельность учащегося преимущественно <b>репродуктивна</b>;</li> <li>- обучение ориентировано в большей степени на память, а не на мышление</li> </ul>	<b>маловероятно развитие всей группы РУУД</b> , т. к. отсутствует цель развития способностей, самостоятельности, активности, учение, вообще говоря, не имеет личностного смысла для учащегося
2	<b>Проблемное обучение</b> (В. Т. Кудрявцев, И. Я. Лернер, А. М. Матюшкин, М. И. Махмутов)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- усмотрение проблемы и её формулировка;</li> <li>- анализ условий;</li> <li>- выдвижение и выбор плана решения;</li> <li>- реализация плана решения;</li> <li>- поиск способов проверки правильности действий и результата</li> </ul>	можно рассматривать применительно к одному звену процесса обучения; эффективно на этапе усвоения новых знаний, способов или условий выполнения нового действия	<b>неэкономичен</b> , требует сложной индивидуальной работы с учащимися, высокого мастерства учителя для проблематизации учебных заданий и временных ресурсов	<b>частично способствует развитию РУУД: целеполагания, планирования, прогнозирования, оценивания</b> , - т.к. благоприятствует росту умственных способностей, самостоятельности, активности учащихся, мотивации к обучению; <b>возможности развития РУУД: контроль, коррекция, волевая саморегуляция</b> затруднены (см «+» и «-»)
3	<b>Личностно-ориентированное обучение</b> (В. И. Слободчиков, В. Д. Шадриков, И. С. Якиманская)	- решение учебной задачи: анализ ее условий, выявление некоторого общего отношения, выведение из него некоторых частных отношений, объединение их в одно целое	учёт возрастных и индивидуальных особенностей учащегося, опора на субъективный опыт учащегося	путь усвоения теоретических знаний (но не правил или определений, а понимание сути предмета явления) – <b>микроцикл от абстрактного к конкретному</b>	<b>возможности развития РУУД ограничены</b> : в связи с учётом индивидуальной избирательности учащегося к формам заданий, типу и виду материала формирование <b>целеполагания, планирования, прогнозирования</b> происходит индивидуально, возникает проблема отслеживания динамики формирования РУУД и своевременной корректировки

4	<p><b>Компетентностный подход</b> (А. М. Аронов, В. В. Башев, И. А. Зимняя, О. Е. Лебедев, Ю. В. Сенько, А. В. Хуторской, Д. Б. Эльконин и др.)</p>	<p>общие умения: - устанавливать связи между знанием и реальной ситуацией, - принимать решение в условиях неопределенности, - вырабатывать алгоритм действий по его реализации [11]</p>	<p>признавая значимость знаний, делает акцент на готовность применять их в различных сферах жизни, способность человека действовать в различных проблемных ситуациях</p>	<p>определение иерархии и состава компетенций, их несовместимость в разных предметах</p>	<p><b>возможности развития РУУД противоречивы:</b> <i>целеполагание, прогнозирование, оценивание</i>, - возможны в силу общей способности и готовности использовать знания, умения и обобщенные способы действий, усвоенные в процессе обучения в реальной деятельности [11]; <i>планирование, коррекция, оценивание и волевая саморегуляция</i> в силу отсутствия системы измерения и оценивания компетентности затруднены</p>
5	<p><b>Развивающее обучение</b> (Л. С. Выготский, Л. В. Занков, В. В. Давыдов, Д. Б. Эльконин, В. В. Репкин, др.)</p>	<p>приступая к изучению нового материала, учащиеся анализируют учебный материал, выделяют в нём некоторое сходное отношение, его проявление в частных отношениях, фиксируют исходное общее отношение, тем самым строят общую абстракцию, затем продолжают анализ содержания материала, раскрытие связи общего отношения с его различными проявлениями, получая тем самым содержательное обобщение изучаемого предмета</p>	<p>основные учебные действия, учебно-познавательные действия</p>	<p>реализуются требования стандарта только к знаниям и умениям</p>	<p><b>возможности развития РУУД:</b> <i>планирование, контроль, коррекция, оценивание</i>, - <b>затруднены</b> большим объемом информации [23]. РО способствует развитию и формированию деятельности (см. «-»)</p>
6	<p><b>Системно-деятельностный подход</b> (Л. С. Выготский, П. Я. Гальперин, А. Н. Леонтьев, Д. Б. Эльконин)</p>	<p>действия, составляющие основу условия усвоения учащимися основной информации, духовных ценностей, ориентировочная основа действий в новой проблемной ситуации</p>	<p>рассматривает процесс обучения и структуру учебной деятельности учащихся с позиции учета общих возрастных психологических особенностей развития подростков; ситуация совместной продуктивной творческой деятельности</p>	<p>ведущая роль в обучении теоретического содержания знаний</p>	<p><b>обеспечивает развитие всех РУУД формированием самостоятельности через систему универсальных метапредметных учебных действий</b></p>

Через универсальные учебные действия обеспечивается успешное развитие способности учащихся самостоятельно организовывать собственную учебную деятельность. Яркое подтверждение этому констатируется при обучении школьников элементам вероятностно-статистических знаний, где востребованы наблюдения, предметная деятельность и проведение случайных экспериментов. Более того, появляется возможность привлечения межпредметных связей для взаимообогащения математики с другими дисциплинами, способствующих формированию единой научной картины мира.

Благодаря надпредметному и метапредметному характеру универсальные учебные действия открывают учащимся возможность ориентации в предметных областях, в частности – в математике, в строении учебной деятельности, в том числе и математической, её целевой направленности, ценностно-смысловых и операциональных ее характеристик.

Теоретическая основа Фундаментального ядра основного общего образования – ранее сформулированные в отечественной педагогике и психологии идеи:

- «ядра» и «оболочки» школьных курсов, А. И. Маркушевича;
- выделения «объема знаний» по предмету, А. Н. Колмогорова;
- культурологического подхода к формированию содержания образования, В. В. Краевского, И. Я. Лернера, М. Н. Скаткина;
- системно-деятельностного подхода, Л. С. Выготского, А. Н. Леонтьева, Д. Б. Эльконина, П. Я. Гальперина, Л. В. Занкова, В. В. Давыдова, А. Г. Асмолова, В. В. Рубцова, – является теоретической основой для проектирования содержания образования [247].

Концепция развития универсальных учебных действий (А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская, О. А. Карабанова, Н. Г. Салмина и С. В. Молчанов) дополняет содержание образовательно-воспитательных программ, конкретизирует требования к результатам образования. Реализация данной концепции в образовательных учреждениях позволит целенаправленно фор-

мировать как предметные универсальные учебные действия, так и метапредметные универсальные учебные действия, что обеспечит обучающимся возможность саморазвития и в дальнейшем успешное решение жизненных задач.

Решение этой задачи образовательными учреждениями предполагает отказ в процессе обучения от репродуктивной передачи знаний, умений и навыков учителем обучающимся и переход к целенаправленному формированию и развитию способностей ученика самостоятельно открывать знания. Это станет залогом успешной адаптации молодого человека в обществе, ориентации в сложном, постоянно меняющемся мире, в котором профессиональные знания, в том числе и связанные с математикой, обновляются каждые пять – десять лет, а приобретенная в школе способность самостоятельно учиться благодаря сформированным УУД должна сохраняться на протяжении всей жизни человека. Приоритетом обучения математике становится не передача знаний-информации, а развитие личности ученика средствами предмета, вооружение его приемами деятельности, обретение опыта проведения исследований и творчества.

Учеными и педагогами активно обсуждаются проблемы внедрения ФГОС, пути реализации его требований, как в едином процессе обучения, так и при обучении различным предметам, в том числе и математике. Это работы А. А. Володина [48], А. Я. Данилюк [71], И. В. Душиной [75], М. В. Егуповой [77], Г. С. Калиновой [102], Е. С. Кочеровой [118], Г. А. Кузьменко [125], Е. К. Липкиной [142], И. М. Логиновой [145], А. М. Найденова [164], В. В. Разумовского [188] и др. Спектр обсуждаемых проблем достаточно широк: обучение и воспитание творчески мыслящей личности на уроках, организация внеурочной деятельности с целью развития исследовательских умений, достижение метапредметных результатов в практико-ориентированном обучении геометрии (7 – 9), интеллектуальный потенциал учителя как условие реализации ФГОС, реализация требований ФГОС к информационно-образовательной среде образовательного учреждения, универсальные учебные действия, как одно из средств реализации деятельностного подхода, др.

Все перечисленные работы объединяет следующая идея: школы должны решать не только насущные задачи, давая предметные знания для получения дальнейшего профессионального образования, но выстраивать стратегию обучения так, чтобы образовательный процесс способствовал развитию способности самостоятельно учиться в течение всей жизни, осуществлению успешной социализации.

Учитель сегодня должен в процессе обучения решать задачу формирования у учащихся умения осуществлять деятельность. Определение содержания образования – одно из стратегических направлений развития образования. При проектировании содержания математического образования важно помнить, что оно должно быть ориентировано на формирование высокого уровня интеллектуальных и универсальных способностей, творческую систему обучения математике, духовно-нравственное развитие и гражданско-правовое становление личности. Обучение математике в современной школе должно быть практико-ориентированным, направленным на развитие личности ученика, формирование его способностей, критического, понятийного мышления, компетенций, универсальных действий.

Важными составляющими проектирования школьного математического образования в плане реализации системно-деятельностного подхода являются:

- разработка и реализация программ развивающего обучения, индивидуальных программ в зависимости от способностей и интересов обучающихся к математике, ориентированных на формирование УУД учащихся, обеспечивающих их дальнейшее саморазвитие во всех видах жизнедеятельности [19];

- использование в образовательном процессе современных методик, ориентированных на активные методы, формы, средства взаимодействия участников образовательного процесса, на организацию обучения в виде учебно-исследовательской деятельности;

- создание системы, обеспечивающей качественное математическое образование, ориентированной на учебную деятельность, интегрирующую процесс обучения, воспитания и развития;

- использование возможностей дополнительного образования, организация внеурочной и внеучебной математической деятельности учащихся как процесса освоения метапредметных универсальных учебных действий.

Ожидаемым результатом при таком образом спланированном образовательном процессе является овладение школьником умением учиться, т. е. целенаправленно сформированные в процессе обучения УУД, которые позволят школьнику самостоятельно приобретать и применять знания в любой области. Выполнение учебно-исследовательских проектов на основе математических методов позволит ученикам включаться в творческий процесс прогнозирования будущих результатов, выдвижения, отбора и доказательства гипотез, планирования своих исследований. Решение математических задач должно быть направлено на освоение учениками методологии целенаправленного поиска решений, их осуществления, проверки и коррекции. Доказательство теорем необходимо ориентировать не только на передачу содержательной информации, но главным образом, на выявление математических идей, методов и возможностей их переноса в новые условия, на новые объекты. Работа с математическими понятиями должна быть нацелена на формирование умений учеников критично оценивать логику их построения и дальнейшего развития.

В ходе проектирования содержания математического образования и выбора УУД, которые необходимо сформировать, важным является разработка адекватного операционного состава всей системы УУД, соответствующего возрастному периоду, для которого предназначена образовательная программа, а также предмету обучения. Результат этой работы для формирования РУУД отражен в таблице 2.

Психологическими требованиями к эффективности формирования необходимых УУД являются ориентация на формирование обобщенных учебных

действий. Развитие умения учиться рассматривают как главную фундаментальную способность, которая дает основания развить все остальные. Сюда относятся знания, умения, навыки, организация планирования собственных действий, выбор путей решения проблемы, анализ, рефлексия, самооценка собственной деятельности, навыки продуктивной деятельности. В частности, при обучении математике: умение проанализировать текст задачи и установить отношения между исходными данными и вопросом, составить план её решения и спрогнозировать результат, рассмотреть возможную вариативность, проявить волевою саморегуляцию и др.

Построение урока математики в соответствии с методологией ФГОС обуславливает деятельностный подход к образовательному процессу и предполагает наличие следующих элементов, актуализирующих РУУД:

- создание проблемной ситуации, формулировка учебной проблемы (целеполагание, прогнозирование);
- актуализация необходимых опорных знаний (прогнозирование, планирование);
- составление плана решения проблемы; выдвижение гипотез (планирование, прогнозирование);
- поиск путей решения проблемы, открытие нового знания (прогнозирование);
- формулировка решения проблемы (планирование);
- применение новых знаний на практике (планирование, коррекция);
- подведение итогов (оценка, контроль, коррекция).

Успешность формирования универсальных учебных действий зависит от пересмотра роли обучающегося в образовательном процессе. Признание активной роли обучающегося влечёт изменения [23] содержания взаимодействия всех участников образовательного процесса: от трансляции знаний к сотрудничеству, совместной работе учителя и учащихся в решении учебных задач в ходе овладения математическими знаниями. Такое взаимодействие в



процессе образования [17] приводит к постепенному увеличению доли самостоятельности и ответственности обучающихся. Учитель, организуя совместный с обучающимися поиск математических знаний, поддерживает поисковую активность учащихся, направляет их к самостоятельному открытию средств и способов решения задач, формирует у учащихся умение учиться самостоятельно [23].

При этом разные учебные предметы предполагают различные возможности для формирования УУД. Это обусловлено и функцией учебного предмета, и его содержанием.

Математика, как учебный предмет, обладает особым потенциалом формирования универсальных учебных действий. Грамотный математический язык – свидетельство четкого организованного мышления и умственных способностей действий, способностей интерпретировать, преобразовывать информацию; математические знания выступают средством переработки информации, дают возможность структурировать информацию, анализировать, оценивать, делать прогноз и т. п.

В системе ключевых задач образовательной системы – задача формирования общего деятельностного базиса как системы универсальных учебных действий, определяющих способность школьника учиться самостоятельно.

Примем за основу мнение авторов концепции универсальных учебных действий: регулятивные универсальные учебные действия обеспечивают организацию учебной деятельности обучающегося, – и представим систему РУУД учащихся для успешного обучения математике, рассматривая ее как базу учебной деятельности школьников при обучении математике, при решении учебных задач (УЗ), как отдельных единиц математической деятельности школьников [185].

Обратимся к требованиям ФГОС к предметным результатам предметной области «Математика и информатика» [184].

Согласно ФГОС: «Изучение предметной области „Математика и информатика“ должно обеспечить:

- осознание значения математики и информатики в повседневной жизни человека;
- формирование представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математической науки;
- понимание роли информационных процессов в современном мире;
- формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.» [184].

Требования к предметным результатам предметной области «Математика и информатика» начинаются со слов: «формирование представлений о математике как о методе познания действительности ... , развитие умений работать с учебным математическим текстом ... , овладение навыками устных, письменных инструментальных вычислений ... , овладение способами представления и анализа статистических данных..., овладение приемами тождественных преобразований..., овладение системой функциональных понятий..., развитие умения моделировать реальные ситуации..., формирование алгоритмической культуры..., формирование систематических знаний о плоских фигурах ... .» [184].

Соотнесём эти требования:

**1) с регулятивными умениями по ФГОС:**

- ✓ *целеполагание*: постановка учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимися, и того, что ещё неизвестно;
- ✓ *планирование*: определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата [21];
- ✓ *прогнозирование*: предвосхищение результата и уровня усвоения, его временных характеристик [21];
- ✓ *контроль*: сличение способа действия и его результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений или отличий от эталона [21];

✓ *коррекция*: внесение необходимых дополнений и корректив в план и способ действия в случае расхождения эталона, реального действия и его продукта [21];

✓ *оценка*: выделение и осознание учащимися того, что уже усвоено и что ещё подлежит усвоению, осознание качества и уровня усвоения [21];

✓ *волевая саморегуляция*: способность к мобилизации сил и энергии; способность к волевому усилию и к преодолению препятствий [21];

## 2) с системой РУУД при обучении алгебре и геометрии, предложенных Л. И. Боженковой [33, 34] в ее трудах:

1. Постановка учебной цели в процессе освоения учебной информации;
2. Выявление объективной учебной информации, необходимой для освоения;
3. Соотнесение выявленной объективной учебной информации с собственными знаниями и умениями; принятие решения об использовании помощи и дальнейших действиях;
4. Составление плана деятельности, направленной на освоение учебной информации;
5. Реализация плана деятельности, направленной на освоение учебной информации;
6. Контроль усвоения учебной информации;
7. Промежуточная коррекция собственных учебных действий;
8. Оценивание результатов выполненной деятельности;
9. Итоговая коррекция собственных учебных действий [34].

*Назовем* в нашем исследовании *регулятивными универсальными учебными действиями (РУУД) управленческие действия школьников при обучении математике, обеспечивающие формирование саморегуляции личности в процессе решения учебных задач* [23]. Другими словами, РУУД одновременно выступают и как управляемый и как управляющий объект. Результатом управленческих усилий является сформированность [21] регулятивных УУД при обучении математике с точки зрения решения учебных задач (рисунок 2). Под учебной задачей (УЗ) в математике понимают цель учебной деятельности по

овладению обобщенными способами действий, например, обобщенной деятельностью при освоении понятий (выделять существенные и несущественные признаки понятий, кратко формулировать определение), доказательстве теорем (анализировать строгость доказательства, теоретический базис), решении задач (проводить целенаправленный поиск решения задачи, осуществлять проверку «шагом назад», рассмотрением частных и предельных случаев), овладение каким-либо общим приемом или методом и т.д. На рисунке 2 представлена, предлагаемая нами в исследовании система РУУД как результат управленческих усилий при обучении математике с точки зрения решения учебных задач.



*Рисунок 2 – РУУД как результат управленческих усилий при обучении математике с точки зрения решения учебных задач (УЗ).*

Операционный состав РУУД по классам/предметам см. Таблицу 2.

Таблица 2 - Операционный состав РУУД при обучении математике в 5-9 классах, класс (5-9кл)/ (предмет: математика, алгебра, геометрия)

РУУД ФГОС	Виды деятельности	Операционный состав РУУД (класс\предмет)				
		Математика		Алгебра/Геометрия	Алгебра/Геометрия	Алгебра/Геометрия
		5	6	7	8	9
целеполагание	- постановка учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимися, и того, что ещё неизвестно [21]	- <i>принимать УЗ</i> [20], <i>выделять составные части УЗ</i>	- понимать и принимать УЗ, определять цель деятельности, позволяющую решать УЗ	- понимать, принимать и сохранять УЗ / читать текст (готовый чертеж), выделять «Дано», «Найти», «Доказать»	- ставить УЗ, выбирать уровень достижения цели / читать текст, делать геометрическую интерпретацию (чертеж, рисунок) текста УЗ	- ставить УЗ, прогнозировать результат / видеть вариативность УЗ, выдвигать гипотезы (способ) решения УЗ
планирование	- определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата [21]	- <i>выявлять объективную информацию для решения учебной задачи</i>	- соотносить выявленную объективную информацию с собственными знаниями и умениями, выбирать уровень решения [19] УЗ, принимать решение о помощи	- составлять план решения УЗ и осуществлять необходимые действия по реализации плана [21]/ осуществлять поиск решения учебной задачи (необходимые определения, свойства, признаки, теоремы, следствия), составлять план решения УЗ	- планировать свои действия в соответствии с поставленной целью [21] / уметь выводить следствия из условия и требований УЗ, составлять чертеж и делать необходимые дополнительные построения с целью планирования «подзадач»	- учитывать правила планирования и находить контроль способа решения [21] / аргументировать (обосновывать с помощью теории) гипотезу решения УЗ

## Продолжение Таблицы 2

прогнозирование	предвосхищение результата и уровня усвоения, его временных характеристик [21]	- выполнять действия последовательно, вести запись в тетради	- осваивать алгоритмическую культуру действий, проявлять инициативу действия в учебной деятельности [19]	- различать способ и результат действия /объяснять решение и результат на языке геометрии (устно и письменно)	- выбирать рациональный способ решения УЗ / выбирать необходимые теоретические обоснования (теоремы, следствия, признаки, свойства, др.) для решения УЗ и обосновывать их применение	- вести последовательную математическую запись логических умозаключений решения УЗ / уметь приводить контрпримеры, подтверждающие (опровергающие) гипотезу решения УЗ
Контроль [34]	сличение способа действия и его результата с заданным эталоном с целью обнаружения отклонений или отличий от эталона [21]	- осуществлять сличение полученных результатов УЗ с эталоном	- сравнивать способы действий [19] и полученный результат с эталоном, развивать мысль: «если бы..., то...», анализируя возможные ошибки, отклонения	- осуществлять пошаговый и итоговый контроль по результату действий / выполнять правильную запись решения геометрической задачи (чертеж, «Дано», «Найти») («Доказать»), теоретическое обоснование, вычисление, «Ответ»)	- осваивать приемы моделирования УЗ для сравнения и сличения результатов решения УЗ / владеть приемами и техникой самопроверки полученного результата и способов действий (изменить чертеж, применить иной теоретический факт в обосновании, др.)	- осуществлять самоконтроль собственной деятельности и результата / систематизировать знания о плоских фигурах и их свойствах [19]

Продолжение Таблицы 2

коррекция	внесение необходимых дополнений и корректив в план и способ действия в случае расхождения эталона, реального действия и его продукта [19]	- осуществлять рациональный подход к выполнению деятельности	- находить самостоятельно рациональный подход к выполнению УЗ, обосновывать	- видеть самостоятельно разные способы решения, выбирать рациональный подход / стремиться к алгоритмизации записи решения на языке геометрии (например, УЗ на признаки равенства треугольников)	- различать необходимые и вспомогательные шаги решения УЗ и делать запись необходимых шагов [21] / осуществлять устно «многшаговку» в рассуждениях, опираясь на различный подход к определению геометрической фигуры (например, «прямоугольник»), делать знаково-символическую запись геометрических обоснований	- вносить изменения (дополнения, исключения) в содержание УЗ / составлять УЗ с измененными условиями, анализировать результат [21]
-----------	---	--	---	---	--	--



оценка	выделение и осознание учащимися того, что уже усвоено и что ещё подлежит усвоению, осознание качества и уровня усвоения [21]	- оценивать толерантно деятельность (свою, одноклассников)	- оценивать собственную деятельность, принимать решение о переходе на более высокий уровень выполнения УЗ	- оценивать собственную деятельность, принимать решение об освоении иных приемов решения УЗ / принимать различные подходы к решению УЗ (аналитические, практические, экспериментальные)	- самостоятельно оценивать правильность выполнения действия, вносить необходимые коррективы в исполнение, как в конце действия, так и по ходу [21] действия / решать УЗ разными способами	- оценивать приобретенные знания и навыки для применения их в дальнейшей учебной деятельности, жизни / осознавать значимость «открытия» в личностном развитии
--------	--	--	---	---	---	---

*Продолжение Таблицы 2*

волевая саморегуляция	способность к мобилизации сил и энергии; способность к волевому усилию и к преодолению препятствий [21]	- определять проблемы собственной деятельности и возможные причины	- преодолевать препятствия после установления ошибок выполнения УЗ, работать над ошибками	- стремиться к дополнительному математическому образованию (создание творческих работ, участие в конкурсах, олимпиадах по предмету, выполнение проектных, исследовательских работ) / осваивать программы (GeoGebra, ArtCAM, Publisher)	- использовать (преподносить для учащихся класса) дополнительные математические знания, приобретенные вне школы на уроках / демонстрировать (делиться) навыками работы в программах (GeoGebra, ArtCAM, Publisher)	- планировать собственную деятельность / целенаправленно изучать геометрию «за страницами учебника»
-----------------------	---	--	---	--	---	---

При проведении классификации операционного состава РУУД по классам и предметам для составления таблицы 2 мы пользовались теоретическими положениями психологической теории деятельности [54]–[57] о степени сформированности характеристик действия: формы, обобщенности, развернутости и освоенности. Автоматизированность и быстрота действия характеризуют его освоенность; форма действия связана с интериоризацией действия, выделяют материальную, внешнеречевую, умственную формы. Таким образом, операционный состав РУУД по классам 5-9 и предметам алгебра/геометрия определялся с учетом возрастных характеристик школьников, особенностей математического содержания и степени сформированности характеристик действия.

Все вышесказанное позволяет определить систему УУД в реализации системно-деятельностного подхода как составляющую методологии проектирования содержания среднего математического образования, а РУУД – как базу для управления учебной деятельностью школьника.

## **1.2 Особенности формирования регулятивных универсальных учебных действий (РУУД) в контексте развития математической учебно-исследовательской деятельности школьников**

В настоящее время обосновано, что важным средством развития личности ученика, формирования у него готовности к самостоятельной жизни, к реализации своего творческого потенциала, является исследовательская деятельность. Известны следующие составляющие содержания образования при реализации исследовательской деятельности [96]: 1 – построение ориентационных сетей, позволяющих учащимся вписывать любое явление или информацию в общую систему; 2 – приобретение исследовательского опыта, выражающегося в самостоятельном проведении исследовательского цикла и освоении его структурных элементов; 3 – выстраивание личностного отношения к объекту исследования, а также результатам, включая развитие рефлексивного мышления, а также эмоционально-нравственную оценку собственных действий; 4 – способность строить эффективные коммуникации для достижения результата, включая фиксацию недостающего ресурса [96], формирование запроса по его поиску, формулирование собственных ресурсов для их предъявления как условия вступления в коммуникацию [96].

Учебно-исследовательская деятельность, сохраняя сущность исследовательской деятельности, обладает отличием: учебно-исследовательская деятельность своей главной целью имеет образовательный результат, ее можно рассматривать как один из способов организации обучения [196] – [198], [167].

Учебно-исследовательская деятельность в процессе обучения осуществляет ряд функций.

*Образовательная функция:* позволяет значительно расширить и углубить теоретическую базу знаний учащихся, качественно повысить общий уровень владения знаниями и умениями через самостоятельную работу исследовательского характера как на уроках, так и во внеурочное время, а, значит,

освоить государственные образовательные программы основного общего образования.

*Развивающая функция:* отвечает за развитие психических функций, способностей, мотивации к учению школьников; способствует повышению успеваемости [23], совершенствованию базовых умений работы с материалом разной направленности, развитию навыков анализа информации, способности аргументировать, точно и четко выражать свои мысли [24].

*Воспитательная функция:* помогает формированию высоких нравственных качеств, усвоению правил этикета и поведения в обществе, обретению культурных ценностей и традиций научного сообщества; способ профориентации и начальной профессиональной подготовки [182].

Мы берем за основу принципиальный путь формирования математической учебно-исследовательской деятельности, который указывают ФГОС – принцип единства психики и внешней деятельности, что обосновано результатами исследований известных специалистов по возрастной и педагогической психологии Л. С. Выготского [51], П. Я. Гальперина [56], В. В. Давыдова [66], Д. Б. Эльконина [270] и др. Принимая, что регулятивные универсальные учебные действия (РУУД) являются базой для организации учебной деятельности школьников, а результатом целенаправленной саморегуляции учащегося являются его активность и самостоятельность, мы предлагаем авторский подход решения [23] задачи формирования РУУД учащихся средствами развития саморегуляции математической учебно-исследовательской деятельности школьников в процессе обучения математике. Заметим, что важнейшей характеристикой современного школьного образовательного процесса является его организация на основе предоставления ученику возможности выбора при освоении учебной информации, что наиболее адекватно реализуется в условиях учебно-исследовательской деятельности. Рамки учебно-исследовательской деятельности дают возможность выбрать уровень достижения целей (целеполагание), самостоятельно поставить цель (целеполагание, планирование, прогнозирование), выбрать средства [23] для достижения цели (планирование,

прогнозирование), а также способы контроля, оценки и коррекции процесса и результатов собственной учебно-познавательной деятельности [24]. Таким образом, в этом процессе вся система РУУД по ФГОС реализуется.

Рассмотрим три особенности формирования регулятивных универсальных учебных действий школьников; проанализируем формирование РУУД школьников при обучении математике в условиях учебно-исследовательской деятельности

- ✓ в структуре полной осознанной саморегуляции;
- ✓ при положительной динамике развития внутренней мотивации учащихся к изучению математики;
- ✓ при последовательной организации процесса обучения математике в соответствии с уровнями самостоятельной познавательной деятельности учащихся.

### **1. Особенность формирования РУУД школьников в структуре полной осознанной саморегуляции.**

Становление субъектности учащегося как условия реализации активной жизненной позиции человека предполагает сформированность структуры саморегуляции, включающей такие компоненты, как ценностно-мотивационный, смысловой, опыт рефлексии, опыт привычной активизации, операциональный опыт и опыт сотрудничества [23].

В нашем исследовании мы берем за основу положения теории по психологии, обоснованные в трудах О. А Конопкиным [115, 116]: 1) при организации учебно-познавательной деятельности учащихся важно понимать момент включения регуляторных процессов – это решение информационной задачи (т. е. процесс перехода от исходных данных к результату), при этом нет различия с какой целью организуется обработка информации (для получения новой информации или же для изменения её формы с сохранением содержания); 2) компоненты осознанной саморегуляции (системно организованной внутренней психической активности): *ценностно-мотивационный, смысловой, опыт*

*привычной активизации, операциональный опыт, опыт сотрудничества, опыт рефлексии; 3) осознанная саморегуляция – непрерывный процесс.*

В работах Н. А. Менчинской и её последователей саморегуляция рассматривается в рамках учения развивающейся личности. Изучая возрастные особенности произвольности и осознанности учебной деятельности учащихся, вслед за Л. С. Выготским, Н. А. Менчинская [159] считала, что ведущая закономерность учения – это постепенный переход от неосознанных, неуправляемых форм деятельности к осознанным, управляемым. Эта процедура связана с исследовательской деятельностью. Основываясь на работах А. И. Савенкова [197], мы установили взаимосвязь между компонентами саморегуляции и математической учебно-исследовательской деятельностью учащихся. Под общими математическими исследовательскими умениями и навыками будем понимать следующие умения и навыки: распознавать проблемы; ставить вопросы; формулировать гипотезы; проводить эксперименты; наблюдать; классифицировать; сравнивать; анализировать, систематизировать; делать выводы; устанавливать причинно-следственные связи; доказывать и защищать свои идеи. Таким образом, для математической учебно-исследовательской деятельности [169] характерны регулятивные универсальные учебные действия школьников, (см. рисунок 2). Опираясь на положения системного подхода, можно утверждать, что интеграция данных умений (общие исследовательские и регулятивные УУД) в единую систему образовательной практики быстрее приведет к достижению запланированных результатов, чем их применение и развитие как отдельных составляющих. Таким образом возможно и необходимо специальное формирование способности саморегуляции математической учебно-исследовательской деятельности учащихся.

Представим в виде таблицы 3 соотнесение этапов учебно-исследовательской деятельности и формируемых регулятивных универсальных учебных действий в соответствии с компонентами процесса саморегуляции по О. А. Конопкину [115].

Таблица 3 – Соотнесение этапов учебно-исследовательской деятельности и формируемых регулятивных универсальных учебных действий в соответствии с компонентами процесса саморегуляции (по О. А. Конопкину [115])

Компоненты процесса полной осознанной саморегуляции	Учебно-исследовательская деятельность	Формируемые регулятивные универсальные учебные действия
Ценностно-мотивационный	Жизненно-имитационная задача (общая проблемная ситуация), создание проблемной ситуации, обеспечивающей возникновение вопроса	<p>Постановка учебной задачи при решении общей проблемной ситуации, для освоения учебного материала по математике и выбор уровня её решения (целеполагание):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- осуществление поиска, извлечение, отбор и переработка информации;</li> <li>- наблюдение [23], сравнение, экспериментирование;</li> <li>- постановка вопросов различного уровня проблемности; гибкость, перестройка, коррекция мыслительной деятельности, уход от стереотипа, смена актуальных установок.</li> </ul>
Смысловой	Постановка проблемы, аргументирование её актуальности	<p>Определение учебной информации, для решения учебной математической задачи (планирование, прогнозирование):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- целеполагание, смысловое чтение, структурирование текста;</li> <li>- видение проблемы, прогнозирование, формулирование утверждения;</li> <li>- способность к концентрации энергии, способность к волевому усилию, к преодолению трудностей</li> </ul>

## Продолжение таблицы 3

Компоненты процесса полной осознанной саморегуляции	Учебно-исследовательская деятельность	Формируемые регулятивные универсальные учебные действия
Опыт привычной активизации	Планирование исследовательской работы	<p>Умение сопоставить найденную, необходимую для решения учебной математической задачи, учебную информацию со своими знаниями и умениями (прогнозирование, планирование) [19]:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- определение учебной информации, необходимой для решения учебной математической задачи, установка параметров оценки;</li> <li>- поиск истины путём собственного размышления, коррекции, исследования;</li> <li>- внутренний план действий</li> </ul>
Операциональный опыт	Поиск решения проблемы	<p>Определение порядка выполнения учебных действий при решении учебных математических задач (планирование):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- составление плана действий;</li> <li>- переработка информации, выдвижение гипотез, аргументирование;</li> <li>- наблюдение, сравнение, классификация, анализ, систематизация;</li> <li>- поиск обоснования, выполнение доказательства.</li> </ul>
Опыт сотрудничества	Контроль и коррекция результатов промежуточных и итоговых	<p>Контроль выполнения УПД (контроль промежуточный и итоговый):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- выделение учащимся качества и уровня усвоенного учебного математического материала и осознание объема неусвоенного;</li> <li>- умение делать выводы и умозаключения;</li> <li>- учет позиции других людей [281].</li> </ul>



## Продолжение таблицы 3

Компоненты процесса полной осознанной саморегуляции	Учебно-исследовательская деятельность	Формируемые регулятивные универсальные учебные действия
Опыт рефлексии	Обсуждение и оценка полученных результатов и применение их к новым исследованиям	<p>Самостоятельная проверка, оценивание и коррекция своих учебных математических действий (оценка, коррекция):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- определение цели и результатов обсуждения;</li> <li>- умение делать выводы о проведённых поисках необходимой информации, выдвигать гипотезы;</li> <li>- итоговый контроль выполнения исследования, оценивание результатов выполненной УПД</li> </ul>
	Подготовка к представлению результатов исследования, их представление	<p>Оценивание результатов выполненной УПД (оценка, коррекция):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- написание текстов различного рода, структурирование сообщения;</li> <li>- подготовка презентации в соответствии с учебной математической задачей и целью исследования;</li> <li>- продуктивное взаимодействие и сотрудничество со сверстниками и взрослыми</li> </ul>

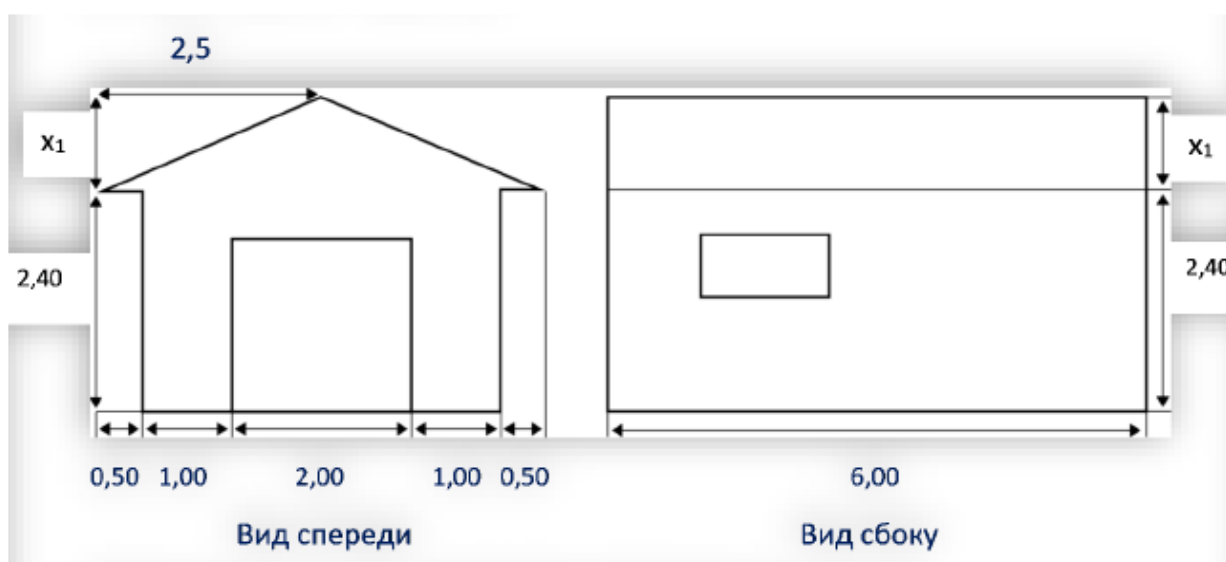
В таблице 3 представлены выделенные в педагогической литературе определённые этапы учебно-исследовательской деятельности, на каждом из которых используются определённые общие исследовательские умения. Если эти умения сформированы у школьника, то они служат средством саморегуляции его математической исследовательской деятельности. В этом случае на каждом этапе математического учебного исследования формируются отдельные компоненты регуляторного процесса, а в совокупности, у ученика постепенно формируется полная осознанная саморегуляция, что ведет к сформированности РУУД.

Приведем пример. Для осуществления *целеполагания* предлагается задание в формате PISA:

Решите задачу в тетради (ответ округлите до целого числа).

На двух приведенных ниже планах показаны размеры (в метрах) гаража, выбранного Димой. Высоту крыши ( $x_1$ ) вы найдете из равенства:

$$(x - x_1) \cdot (x - 2,5) = x^2 - 3,5x + 2,5.$$



Крыша сделана из двух одинаковых прямоугольных секций.  
Вычислите площадь **всей** крыши.

При изучении темы «Квадратный трёхчлен» (алгебра 9 класс) основная дидактическая задача, которую ставит учитель: ввести определение квадратного трёхчлена и его корней; научить выделять квадрат двучлена из квадратного трёхчлена; научить разложению квадратного трёхчлена на множители, научить применять приобретенные знания в жизни.

Такой подход позволяет активизировать влияние на развитие первого компонента процесса полной осознанной саморегуляции: *ценностно-мотивационного*. Организуется учебно-исследовательская деятельность учащихся для решения жизненно-имитационной задачи: при осуществлении поиска, извлечения, отбора и переработки информации у учащихся развивается способность постановки вопросов различного уровня проблемности. Гибко руководя постановкой вопросов и поиском ответов на них, учитель подводит учащихся к постановке учебной задачи для решения общей проблемы. А именно: нужны знания о квадратном трёхчлене и навыки работы с ним. Без них в задаче не хватает данных: неизвестно значение  $x_1$ .

Удерживая задачу в памяти учащихся демонстрацией её на экране планшетов, учитель сосредотачивает внимание на развитии следующего компонента процесса полной осознанной саморегуляции: *смыслового*, через формирование у учащихся РУУД: *планирование действий*. Учащиеся учатся определять учебную информацию для решения математической задачи. Актуализируются знания школьников по теме «Многочлены» выполнением, например, теста. Вопросы могут быть следующими:

*I группа вопросов.* Для каждого из многочленов с одной переменной:

а)  $x^8 - 7x^2 + 3$ ; б)  $5x^5 + 2 - x^{10}$ ; в)  $2x^3 - 4x^6 + 3x^5 - 1$ .

1. Укажите старший коэффициент многочлена (Ответ: а) 1; б)  $-1$ ; в)  $-4$ ).
2. Укажите степень многочлена с одной переменной (Ответ: а) 8; б) 10; в) 6).
3. Укажите свободный член многочлена с одной переменной

(Ответ: а) 3; б) 2; в)  $-1$ ).

*II группа вопросов (или вопрос):*

Для каждого из многочленов с одной переменной укажите корни:

а)  $x^2 + 6x + 9$ ; б)  $x^3 - 8x^2 + 16x$ ; в)  $x^3 - x^2$ .

Ответ: а)  $\{-3\}$ ; б)  $\{0; 4\}$ ; в)  $\{0; 1\}$ .

Формируется умение учащихся видеть проблему, аргументировать актуальность знаний, прогнозируя, контролируя, и формулируя утверждения, оценивая их правильность.

Развитие следующего компонента процесса полной осознанной саморегуляции: *опыта привычной активизации*, учитель осуществляет при объяснении новой темы. После формулирования определения квадратного трёхчлена (*Квадратным трёхчленом называется многочлен вида  $ax^2 + bx + c$ , где  $x$  – переменная,  $a, b, c$  – числа, причем  $a \neq 0$* ), учитель может сделать акцент на распознавании квадратного трёхчлена среди других многочленов с одной переменной на основании данного определения.

Например:

а)  $5x^2 + 6y - 10$ ; б)  $-x^2 + 4x$ ; в)  $8x^4 + 7x - 1$ ; г)  $0,5x^2 + 100$ ; другие.

Ответ: а) нет (т.к. две переменные  $x, y$ ); б) да ( $c = 0$ ); в) нет (показатель равен 4); г) да ( $b = 0$ ).

При неоднократном повторении такого упражнения развивается поиск истины путём собственного размышления и исследования, внутренний план действий, что способствует укреплению и положительной динамике развития РУУД – *планирование, прогнозирование и оценка*.

Оказывать влияние на развитие компонента полной осознанной саморегуляции *операциональный опыт* наиболее эффективно при объяснении и закреплении алгоритма, например, выделения квадрата двучлена из квадратного трёхчлена или разложения квадратного трёхчлена на множители. При этом развивается способность определения порядка выполнения действий и РУУД *контроль действий*.

Важно закрепить приобретенные алгоритмические навыки организацией самостоятельной работы учащихся по новой теме с взаимопроверкой. Полезно предложить выполнение задания неоднозначным способом.

Например, в первый раз предложить выполнить разложение квадратного трёхчлена  $3x^2 - 24x + 21$  на множители способом группировки:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 24x + 21 &= 3(x^2 - 8x + 7) = 3(x^2 - 7x - x + 7) \\ &= 3(x(x - 7) - (x - 7)) = 3(x - 7)(x - 1). \end{aligned}$$

Во второй раз выполнить то же задание, применив теорему о разложении квадратного трёхчлена на множители:

$$4x^2 + 8x - 32 = 0,$$

$$1) \quad x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36, \quad \sqrt{D} = 6, \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2 \cdot 1}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -4.$$

$$2) \quad 4x^2 + 8x - 32 = 4(x - 2)(x + 4).$$

После выполнения заданий организуется самопроверка и взаимопроверка. Компонент полной осознанной саморегуляции - *опыт сотрудничества* - позволяет развивать РУУД учащихся *оценку, контроль и коррекцию промежуточных и итоговых результатов*. Учащиеся учатся оценивать уровень и качество усвоения нового материала, учитывать и корректировать позицию одноклассников.

Наконец, последний компонент процесса полной осознанной саморегуляции: *опыт рефлексии* развивается при самостоятельной практической деятельности учащихся. На данном уроке это – готовность к продолжению решать самостоятельно жизненно-имитационную задачу. Учащиеся осмысленно выполняют необходимые вычисления, дополняют рисунок необходимым числом, достаточно быстро находят результат. На доске эталон записи решения задачи.

### Решение.

1. Найдем  $x_1$ , для этого решим квадратное уравнение

$$x^2 - 3,5x + 2,5 = 0,$$

$$D = (-3,5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2,5 = 2,25, \quad \sqrt{D} = 1,5,$$

$$x_{1,2} = \frac{3,5 \pm 1,5}{2 \cdot 1}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,5;$$

Получим:  $(x - x_1) \cdot (x - 2,5) = (x - 1) \cdot (x - 2,5)$

Второй корень квадратного уравнения не подходит к условию поставленной задачи. Действительно:

$(x - 2,5) \cdot (x - 2,5) \neq x^2 - 3,5x + 2,5$ , тогда как

$(x - 1) \cdot (x - 2,5) = x^2 - 3,5x + 2,5$ .

Таким образом, высота крыши 1 м.

2. По теореме Пифагора найдём ширину прямоугольной секции крыши (b) [20].

$$b^2 = 2,5^2 + 1^2 = 7,25, \quad b \approx 2,7(\text{м}).$$

4. Найдём площадь 1 части крыши:  $S_1 = 6 \cdot 2,7 = 16,2$  (кв. м).

5. Получим площадь крыши:

$$S = S_1 \cdot 2 = 16,2 \cdot 2 = 32,4 \approx 32(\text{кв. м}).$$

Ответ:  $\approx 32(\text{кв. м}).$

Данный пример урока [20] подтверждает возможность формирования РУУД учащихся в структуре полной осознанной саморегуляции. И, наоборот: развитие РУУД влияет на становление отдельных компонентов полной осознанной саморегуляции.

Таким образом, два процесса: целенаправленное формирование регулятивных универсальных учебных действий средствами учебно-исследовательской деятельности учащихся при обучении математике и развитие осознанной саморегуляции обучающимися своей учебно-познавательной математической деятельности – тесно взаимосвязаны, причем, связь прямая.

**2. Рассмотрим следующую особенность формирования РУУД школьников: влияние динамики внутренней мотивации к изучению математики в процессе учебно-исследовательской деятельности.**

Одной из составляющих успешной организации процесса учебно-исследовательской математической деятельности учащихся является наличие внутренней мотивации учащихся к изучению математики:

а) по результату (обучающийся ориентирован на результаты математической деятельности);

б) по процессу (обучающийся заинтересован самим процессом математической деятельности);

в) на оценку (обучающийся заинтересован в получении хорошей оценки по математике);

г) во избежание неприятностей (обучающемуся абсолютно не важен результат, но ему хочется не иметь неприятностей со стороны родителей, учителей и т. д. [19]).

Внутренние мотивы и соответствующая деятельность тесно связаны между собой. *Внутренние* мотивы: собственное желание познания нового, самостоятельное стремление к развитию при выполнении индивидуальной деятельности или совместных действий в процессе учения. *Внешние* мотивы: одобрение, положительная оценка со стороны окружающих. Если удастся осуществить сдвиг внешнего мотива на цель учения (открытие нового, др.), то можно говорить о развитии внутренней мотивации учения. Преобладание внутренней мотивации к изучению математики в структуре мотивации учащегося и означает положительную динамику развития внутренней мотивации учащегося [24].

Этому способствуют следующие условия:

1. Личность учителя математики: развивать внутреннюю мотивацию учащегося к изучению математики сможет только учитель с высокой внутренней мотивацией к своей профессиональной деятельности, компетентный и уверенный в своих действиях [24].

2. Умение учителя математики формулировать задачи обучения с учетом интересов обучающихся к математике и соответствующего запроса: показывая область применения изучаемого математического материала в настоящей жизни, обозначая перспективу математических знаний в будущем, учитель математики удовлетворяет устремления учащегося к учению.

3. Ориентирование на индивидуальные нормы показателей достижения учащихся по математике: оценивают результаты и учащийся, и учитель математики.

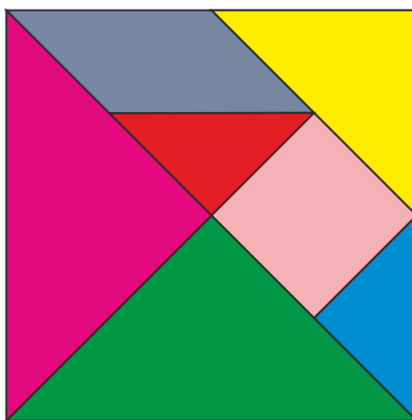
4. Организация урока математики, ориентированного на интерес самого процесса учения и общение его участников. У учащегося появляется возможность проявить самостоятельность, инициативу, творчество, креативность.

5. Предоставление свободы выбора действия учащемуся позволит ему испытать повышенную ответственность за результаты. Например, «свободное» домашнее задание (альтернативное), уровень проверочных работ, исследовательские работы, другое.

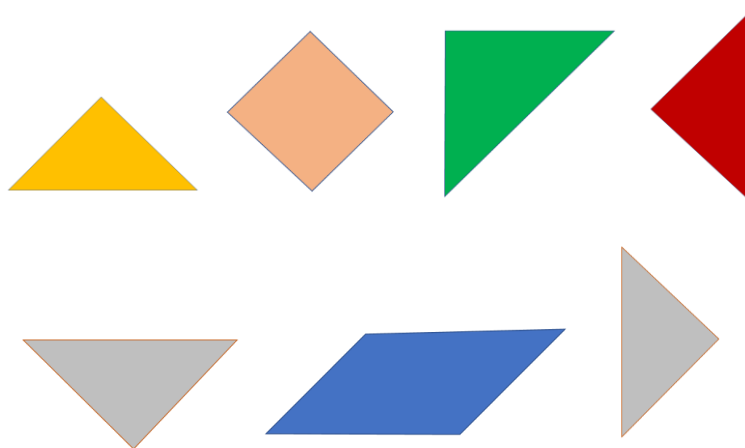
Л. И. Боженкова [33, 34] в своих работах предлагает методику формирования универсальных учебных действий на уроках геометрии и алгебры, основываясь на внутренней мотивации ученика [23]. Многие учащиеся испытывают трудности при изучении геометрии. Решение геометрических задач, построение чертежей по тексту задачи, необходимость доказательства, обоснования – вызывает отрицательные эмоции и неуспешность освоения предмета. Наша методика учитывает этот фактор. Мы предлагаем формирование РУУД учащихся на уроках в процессе учебно-исследовательской деятельности с возможностью *сдвига внешнего мотива на цель учения*, т. е. формируем *внутреннюю мотивацию*. Чем раньше эту работу на уроках осуществляет учитель, тем результат существеннее. Покажем на примере урока «Наглядная геометрия» в 6 классе. Тема урока «Геометрические головоломки». Дидактическая задача: научить решать задачи на разрезание и замощение фигур.

Пример. При формировании РУУД *целеполагание*, учащимся предлагается просмотр видео, на котором из набора геометрических фигур собирается квадрат. Учащимся на планшете предлагается набор геометрических фигур и задание: собрать ровно такой же квадрат. Но образца квадрата уже на экране нет.





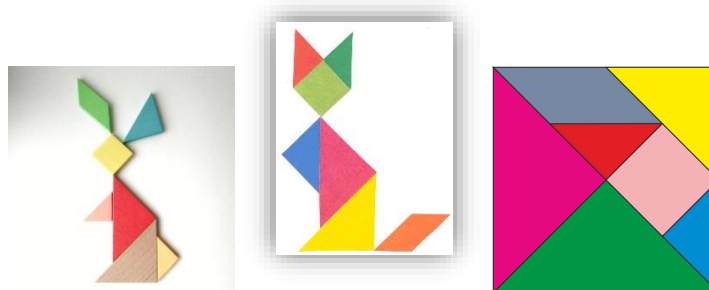
Не у всех школьников получается восстановить квадрат. Кто-то воспринимает эту деятельность как игру, преобладают внешние мотивы при выполнении задания: например, желание опередить одноклассников, или получить хорошую оценку за скорость выполнения задания. Учитель организует актуализацию знаний: определение геометрических фигур и их свойств – в виде теста на экране, где можно двигать фигуры, поворачивать, изменять. Таким образом, возникает обращение учащегося к себе, возникает вопрос о собственных знаниях свойств геометрических фигур, оценивание шансов справиться с заданием самостоятельно.



Не препятствуя изначальному восприятию темы как игры, учитель предлагает усложненный вариант работы с геометрическими фигурами в виде практической работы (вариативной по степени сложности выполнения заданий, оставляя за учащимися выбор степени сложности). Формируется РУУД *планирование и прогнозирование*.

**Вариант 1(2)**Задание 1.

Сделайте по инструкции заготовку из бумаги (картона) деталей квадрата для игры головоломки "Танграм".

Задание 2.

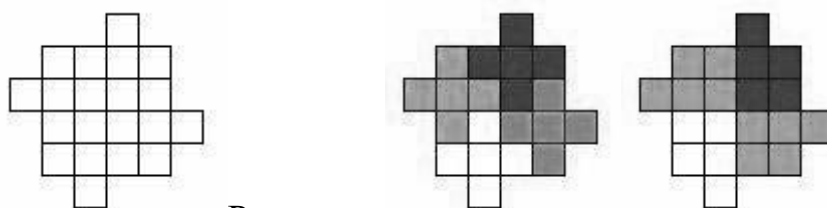
- а) соберите зайчика (кошечку) по образцу;
- б) измените зайчика (кошечку), переставив детали;
- в) соберите свою фигурку.

У учащихся появляется возможность проявить свою индивидуальность, фантазию, возникает понимание возможностей предмета для самовыражения. Происходит общение на языке геометрии: оценивается индивидуальная композиция, сочетание размеров, размещения деталей друг по отношению к другу, что сопровождается обсуждением настроения полученной фигурки (настороженный зайчик, веселый зайчик, или спящая кошечка, кошечка смотрит в окно, другое). Оценивая и комментируя наиболее удачные работы, формируя РУУД *оценивание, коррекция*, учитель продолжает сдвигать внешние мотивы к цели учения: предлагает задачи на разрезание, а затем замощение фигур, повышая коэффициент значимости знаний геометрических фигур и их свойств. Например.

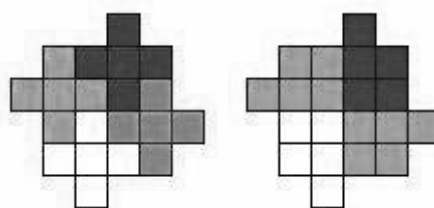
**Задача 1 (на разрезание)**

Разделите фигуру, изображенную на рисунке, на четыре равные части так, чтобы линия разрезов шла по сторонам квадратов.

Придумайте два способа решения.

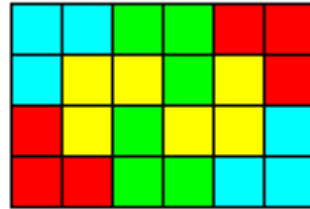
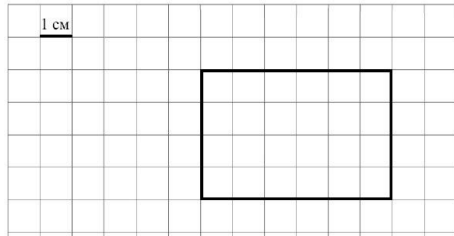


Решение.

**Задача 2 (на замощение)**

Начертите прямоугольник размером  $4 \times 6$  клеток. Покажите, как его "замостить" трехклеточными уголками так, чтобы никакие два из них не образовывали прямоугольник.

("Замостить" – покрыть без наложений и свободных клеток)



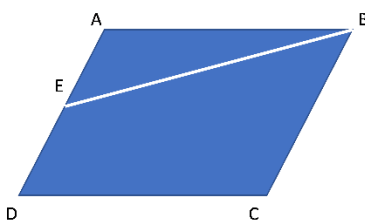
Решение.

Учитель объявляет, что универсального способа решения таких задач не существует, а значит, каждый может проявить свою смекалку, интуицию и способность к творческому мышлению, и выполнить задачу быстрее «математиков». Формируется РУУД у учащихся *контроль промежуточного и итогового результата*.

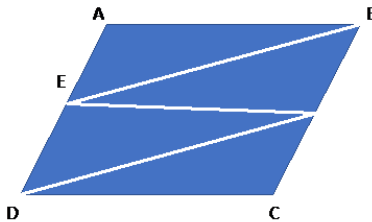
И, наконец, реальная задача банка ФИПИ (ОГЭ по математике) для 9 класса, то есть учитель обозначает перспективу изучения темы в будущем. У учащихся возникает чувство ответственности и желания справиться с заданием. Мотивация внутренняя на учение укрепляется после успешного выполнения данного задания. Формируется РУУД школьников *рефлексия*.

### Задача

Площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 60. Точка  $E$  – середина стороны  $AB$ . Найдите площадь трапеции  $DEBC$ .



Решение.



$$1) S_{DEBC} = S_{ABCD} - S_{ABE} ,$$

$$2) S_{DEBC} = 60 - \frac{1}{4} \cdot 60 = 60 - 15 = 45. \quad \text{Ответ: } 45.$$

Таким образом подтверждается возможность формирования РУУД школьников при положительной динамике развития внутренней мотивации учащихся к изучению математики.

Соотнесение этапов учебно-исследовательской деятельности в соответствии с классификацией мотивов учения, предложенной А. К. Марковой [154], формируемых РУУД представим в таблице 4.

Таблица 4 – Соотнесение этапов учебно-исследовательской деятельности и формируемых регулятивных универсальных учебных действий в соответствии с классификацией мотивов учения А. К Марковой [154]

Мотивы учебной деятельности	Учебно-исследовательская деятельность с учетом возрастных особенностей (подростковый период)	Формируемые регулятивные универсальные учебные действия
Широкие социальные мотивы	Жизненно-имитационная задача (общая проблемная ситуация), создание проблемной ситуации, обеспечивающей возникновение вопроса (подчинение познавательных процессов определённым целям жизни и деятельности)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- целеполагание: направленность к активности, действию, пониманию, принятию учебной цели, предлагаемой учителем математики;</li> <li>- планирование: сопоставление (осознанно или неосознанно) задачи со смыслом учения математики для себя, со своими возможностями;</li> <li>- оценка: высказывания (поступки), свидетельствующие о понимании ответственности, необходимости решения проблемы, достижения результата общественной значимости</li> </ul>
Широкие познавательные мотивы	Постановка проблемы, аргументирование её актуальности (задумываются о способах достижения целей, производят оценку собственных субъективных и объективных ресурсов)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- прогнозирование: содержательный комментарий, перебор вариантов, выбор наиболее рационального подхода решения проблемы;</li> <li>- планирование: вопросы к учителю математики по содержанию учебного материала, обращение к учителю математики за дополнительными сведениями;</li> <li>- целеполагание: удержание цели, переопределение её в соответствии со своими возможностями и мотивами</li> </ul>

## Продолжение таблицы 4

Мотивы учебной деятельности	Учебно-исследовательская деятельность с учетом возрастных особенностей (подростковый период)	Формируемые регулятивные универсальные учебные действия
Учебно-познавательные мотивы	Планирование исследовательской работы (интенсивное развитие и совершенствование интеллектуальных умений и навыков, рост познавательных потребностей)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- целеполагание: выделение целей в данных объективных обстоятельствах, осознание их в действии;</li> <li>- планирование: наполнение предметным математическим содержанием, конкретизацией, выделение условия достижения;</li> <li>- коррекция, оценка: самостоятельная деятельность по поиску различных способов решения, вопросы учителю математики о вариативности способов деятельности;</li> <li>- целеполагание: устойчивость целей</li> </ul>
Мотивы социального сотрудничества	Поиск решения проблемы (жизненное самоопределение, формирование планов на будущее, активный поиск своего «Я» и экспериментирование в разных социальных ролях)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- волевая саморегуляция: качественное овладение новыми способами действия;</li> <li>- оценка: изменение теоретического отношения к объекту: выделение в нем общественно выработанных параметров, их оценка;</li> <li>- оценка: преобразование параметров, к своей собственной математической деятельности, к мотивации, постановке собственной цели;</li> <li>- коррекция: коллективная работа по выбору рациональных способов [20].</li> </ul>

## Продолжение таблицы 4

Мотивы учебной деятельности	Учебно-исследовательская деятельность с учетом возрастных особенностей (подростковый период)	Формируемые регулятивные универсальные учебные действия
Мотивы самообразования	Контроль и коррекция результатов промежуточных и итоговых (формирование абстрактного, теоретического мышления, то есть конкретное мышление сменяется логическим, рост критичности) [21].	<ul style="list-style-type: none"> <li>- коррекция: обращение к учителю математики по поводу рациональной организации учебного труда;</li> <li>- контроль: овладение способами движения в системе изменяющихся «смыслов» и «значений», действия самоконтроля и самооценки для определения вероятности достижения цели, действия по сопоставлению своих «смыслов» и «смыслов» сверстников, сравнение результатов своих и результатов работы одноклассников;</li> <li>- целеполагание: постановка новых целей для себя [19].</li> </ul>

Таким образом, содержание таблицы 4 позволяет сделать вывод: добиться успешности в учебно-исследовательской математической деятельности учащихся может через развитие устойчивых осознаваемых внутренних мотивов, что в свою очередь обуславливает формирование РУУД [19].

**3. Третья особенность: формирование РУУД школьников в контексте развития математической учебно-исследовательской деятельности возможна при последовательной организации процесса обучения математике в соответствии с уровнями самостоятельной познавательной деятельности учащихся.**

Мы предлагаем последовательную организацию обучения школьников математике в соответствии с уровнями самостоятельной познавательной деятельности учащихся по П. И. Пидкасистому [180]: репродуктивно-вариативному, вариативно-эвристическому, эвристическому. При этом регулятивные УУД, необходимые для выполнения учебно-исследовательской деятельности, сначала формируются у учеников, а затем используются ими при освоении новой учебной информации [20].

Чтобы организовать учебно-исследовательскую деятельность школьников, учитель математики выбирает нужный уровень проведения учебного математического исследования с учетом уровня развития математического мышления учащихся, сочетает индивидуальные и коллективные формы проведения математических исследований на уроке [20]. Начинает с репродуктивно-вариативного, затем переходит на более высокий уровень самостоятельной познавательной деятельности к вариативно-эвристическому и далее к эвристическому. Создание проблемных ситуаций зависит от уровня освоенной учащимися познавательной деятельности, от содержания учебного математического исследования, его места в структуре урока и от цели урока [20].

Для успешного управления процессом формирования РУУД учащихся учитель должен:

– предвидеть возможные проблемы на пути достижения цели в проблемной ситуации [19];



– мгновенно переформулировать проблемную ситуацию, облегчая или усложняя ее на основе регулирования количества неизвестных компонентов [19];

– выбрать проблемные ситуации в соответствии с ходом мысли учащихся, решающих проблему [19];

– непредвзято оценить варианты решений учащихся, даже в случае несовпадения точек зрения учеников и учителя [19].

С приведенными выше уровнями самостоятельной познавательной деятельности учащихся по П. И. Пидкасистому [180]: I – репродуктивно-вариативному, II – вариативно-эвристическому, III – эвристическому, - согласуется обновленная таксономия образовательных целей Блума:

I – знание, понимание;

II – применение, анализ, оценка;

III – синтез, творчество.

В таблице 5 представлены результаты соотнесения формирования РУУД учащихся с их уровнем самостоятельной познавательной деятельности учащихся по П. И. Пидкасистому и в соответствии с обновлённой таксономией образовательных целей Блума.

Таблица 5 – Соотнесение этапов учебно-исследовательской деятельности и формируемых регулятивных универсальных учебных действий в соответствии с обновлённой таксономией образовательных целей Блума и с уровнем самостоятельной познавательной деятельности учащихся по П.И. Пидкасистому

Обновленная таксономия образоват. целей (Блум) /Уровень самостоятельной познавательной деятельности (Пидкасистый)	Учебно-исследовательская деятельность	Формируемые регулятивные универсальные учебные действия
Знание/репродуктивно-вариативный	Жизненно-имитационная задача (общая проблемная ситуация), создание проблемной ситуации, обеспечивающей возникновение вопроса	<ul style="list-style-type: none"> <li>- обнаружение и оценка учащимся несоответствия между имеющимися уже у него системами знаний и новыми требованиями;</li> <li>- выбор учащимся из систем имеющихся знаний тех, которые обеспечат правильное решение предложенной проблемной задачи, прогноз, планирование;</li> <li>- планирование, поиск путей применения знаний на практике [20]</li> </ul>
Понимание / репродуктивно-вариативный	Постановка проблемы, аргументирование её актуальности	<ul style="list-style-type: none"> <li>- описание учащимся точными конкретными терминами то, что раскрывают данные; интерпретация проблемы (рисунок, схема, таблица, уравнение) [20];</li> <li>- фокусирование различия между тем, что есть и тем, что должно быть; их измерение (количественное) [19]; приведение примеров; классификация; обобщение;</li> <li>- формулирование утверждения в позитивной манере (но не в виде вопроса); понимание влияния на окружающую действительность; умозаключение; сравнение; объяснение; оценка;</li> </ul>

## Продолжение таблицы 5

Обновленная таксономия образоват. целей (Блум) /Уровень самостоятельной познавательной деятельности (Пидкасистый)	Учебно-исследовательская деятельность	Формируемые регулятивные универсальные учебные действия
Применение / вариативно-эвристический	Планирование исследовательской работы	<ul style="list-style-type: none"> <li>- целеполагание (постановка учебной задачи);</li> <li>- планирование (определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата);</li> <li>- прогнозирование (предвосхищение результата и уровня усвоения, его временных характеристик)</li> </ul>
Анализ / вариативно-эвристический	Поиск решения проблемы	<ul style="list-style-type: none"> <li>- определение учебной информации, нужной для решения учебной задачи;</li> <li>- умение сопоставить найденную, необходимую для решения учебной задачи, учебную информацию со своими знаниями и умениями;</li> <li>- определение порядка выполнения учебных действий при решении учебных задач, составление плана действий и его выполнение; рефлексия</li> </ul>
Оценка / вариативно-эвристический	Контроль и коррекция результатов промежуточных и итоговых	<ul style="list-style-type: none"> <li>- контроль выполнения учебно-познавательной деятельности (промежуточный и итоговый);</li> <li>- самостоятельная проверка, оценивание и коррекция своих учебных действий, при решении учебной задачи;</li> <li>- внесение необходимых дополнений и корректив в план и способ действия в случае расхождения эталона, реального действия и его продукта;</li> </ul>

## Продолжение таблицы 5

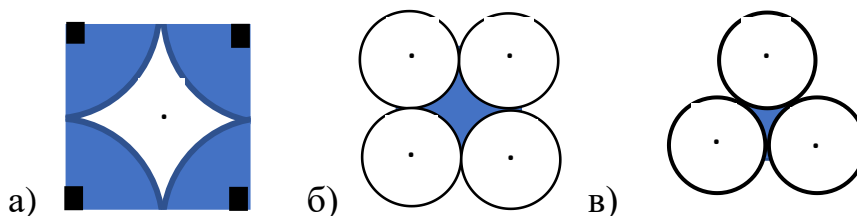
Обновленная таксономия образоват. целей (Блум) /Уровень самостоятельной познавательной деятельности (Пидкасистый)	Учебно-исследовательская деятельность	Формируемые регулятивные универсальные учебные действия
Синтез / эвристический	Подготовка к представлению результатов исследования, их представление;	<ul style="list-style-type: none"> <li>-оценка, ориентация в информационном пространстве; обобщение результатов;</li> <li>- волевая саморегуляция;</li> <li>- оценка, коррекция своей деятельности, создание презентаций и выступление перед аудиторией;</li> </ul>
Творчество/эвристический	Обсуждение и оценка полученных результатов, применение их к новым исследованиям	<ul style="list-style-type: none"> <li>- оценка, рефлексия;</li> <li>-прогнозирование, генерация;</li> <li>- волевая саморегуляция [17]</li> </ul>

С учетом индивидуальных особенностей учащихся и различных уровней [17] самостоятельной познавательной деятельности учеников их исследовательскую математическую деятельность необходимо организовывать по-разному. Достичь этого можно, используя вариативность задания по сложности содержания и процесса его выполнения.

Приведем пример. Учащимся при изучении темы «Площадь круга и его частей», на этапе закрепления знаний, предлагается выполнить уровневую Самостоятельную работу [22].

Задание: найти площадь заштрихованной фигуры:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 4; \quad R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2; \quad R_1 = R_2 = R_3 = 2$$



Выполнить нужно только один из предложенных пунктов (у ребят есть возможность оценить свои возможности, проявить волевое усилие, принять решение).

Несмотря на общую формулировку задачи ко всем трем пунктам, задача уровневая. Пункт а) задача I уровня – репродуктивно-вариативного. На чертеже обозначен квадрат и нетрудно из заштрихованных частей сложить круг. По формуле  $S = \pi R^2$ , подстановкой из условия задачи значения радиуса 4, получаем результат  $S = 16\pi$ . Таким образом, обнаружив несоответствие между имеющимися у учащихся знаниями и новыми требованиями в виде рисунка, фокусируя различие между тем, что должно быть и тем, что изображено на рисунке, на репродуктивно-вариативном уровне учащиеся могут сформулировать позитивное утверждение (не вопрос), актуализировать базовые знания, успешно решить задачу и попытаться пройти следующий уровень. Другими словами, задача решается на уровне *знания и понимания*, формируются РУУД: *целеполагание*.

В пункте б) задача II уровня – вариативно-эвристического. На чертеже квадрат явно не обозначен. Прежде чем приступить к вычислению площади, нужно: 1) обосновать, что отрезки, соединяющие центры окружностей образуют квадрат; 2) найти длину стороны квадрата и его площадь; 3) составить из частей кругов, закрывающих квадрат, новый круг и найти его площадь; 4) вычесть из площади квадрата площадь круга. Ответ:  $16 - 4\pi$ . Другими словами, кроме постановки цели учебной задачи, учащиеся должны определить последовательность промежуточных целей с учетом конечного результата [21], определить учебную информацию для решения задачи, порядок выполнения действий, т.е. провести мини-исследование и продумать промежуточный и итоговый контроль. Таким образом, задача решается не только на уровне знания и понимания, необходимы: применение, анализ и оценка имеющихся знаний и не только по теме «Площадь круга и его частей», специальные исследовательские умения: планирование исследовательской работы, поиск решения проблемы, формируются кроме *целеполагания* ещё и *планирование, прогнозирование* [281].

Задача, предложенная в пункте в) III уровня – эвристического. Необходим творческий подход к её решению (явно не квадрат).

Решение может быть таким:

1) Обосновываем, что треугольник, составленный из отрезков, последовательно соединяющих центры окружностей, - равносторонний; 2) находим сторону треугольника и площадь; 3) находим площадь круга; 4) из площади треугольника вычитаем 0,5 площади круга. Ответ:  $4\sqrt{3} - 2\pi$ .

Возможны и другие способы решения, которые могут предложить учащиеся. То есть при решении задачи необходимы умения ориентироваться в информационном пространстве, генерация, корректировка учебных действий: внесение дополнений, изменений, обоснование, промежуточный и итоговый контроль, оценка промежуточного и итогового результата, обобщение результатов, выбор рационального способа решения, другое. Другими словами, математиче-

ская задача решается уже в полном спектре обновленной таксономии образовательных целей Блума. Формируются РУУД учащихся: *целеполагание, планирование, прогнозирование, оценивание, коррекция, контроль, рефлексия.*

В этом пункте 1.2 мы теоретически обосновали наше предположение об эффективности формирования регулятивных УУД школьников в условиях специально организованной учебно-исследовательской математической деятельности. Самостоятельный поиск, сбор и переработка информации, постановка проблемы и поиск ее рационального решения, сам процесс решение и осмысление, оценка результата, выводы и аргументированная презентация, т.е. весь процесс исследовательской деятельности [25] в целом и его отдельные компоненты в частности способствуют формированию РУУД школьников [19]. Далее при проведении педагогического эксперимента этот вывод будет подтвержден с помощью статистических методов и описан в п. 2.3, т. е. будет статистически доказано, что овладение исследовательской деятельностью существенно коррелирует с уровнем сформированности РУУД школьников [25].

### **1.3 Педагогические условия формирования регулятивных универсальных учебных действий школьников при обучении математике**

Формирование и развитие регулятивных универсальных учебных действий при обучении математике обеспечит управляемая модель методической системы обучения [34]. Для создания искомой модели обучения математике выделим группу педагогических условий, выполнение которых обеспечит достижение результата – формирование регулятивных универсальных учебных действий у учащихся [25]. Для конструируемой методической системы выявленные условия будут играть роль свойств внешней среды, взаимодействие с

которой позволит успешно функционировать самой методической системе [19].

На основе анализа педагогической литературы и образовательной практики определим следующие педагогические условия:

- *обеспечение индивидуализации образовательных программ и путей их усвоения в зависимости от способностей и интересов обучающихся [25] к математике;*

- *формирование развивающей способности и интереса к математике, создание образовательной среды общеобразовательной организации и вовлечение в неё обучающихся [17];*

- *организация внеурочной деятельности учащихся по математике как процесса освоения метапредметных универсальных учебных действий.*

Перейдем к обоснованию каждого из перечисленных условий.

**1. Педагогическое условие: обеспечение индивидуализации образовательных программ и путей их усвоения в зависимости от способностей и интересов обучающихся к математике** – является одним из важнейших условий, от которого зависит развитие потенциальных способностей каждого обучающегося к математике, качество его образования.

Общие цели образования определяют стратегию педагогического процесса и материализуются в учебных планах, программах, учебниках, методических рекомендациях и других учебно-наглядных пособиях для учителей и учащихся. От учителя математики требуется творческий подход к реализации предлагаемых рекомендаций, использование возможности конструировать содержание математического образования, обеспечивая его индивидуализацию с учетом интересов, склонностей, способностей учащихся к математике [25].

Школьный компонент делает учебный план общеобразовательной организации вариативным. Это дает возможность в некоторой степени индивиду-



ализировать содержание образования. Но сведение конструирования содержания лишь к добавлению (исключению) отдельных предметов в учебный план (из учебного плана) учащихся ведет к нарушению принципа целостности и универсальности образования. Следовательно, нецелесообразно рассматривать возможности индивидуализации обучения только через содержание образования. Необходимо обратиться к процессуальной стороне обучения – средствам и способам адаптации содержания к индивидуальным особенностям ученика. Поскольку единство содержательной и процессуальной сторон обучения – это основной принцип формирования индивидуализированного содержания образования [25].

Прежде чем приступать непосредственно к конструированию содержания математического образования ученического коллектива, нужно выявить, изучить следующие индивидуальные особенности учащихся: тип восприятия информации, темперамент, способность к освоению математики, отношение к учению, степень внушаемости [23]. Опишем коротко эти параметры и покажем, как использовать знания об индивидуальных особенностях школьников при формировании РУУД учащихся в процессе обучения математике.

#### 1. *Тип восприятия информации учащимся.*

Человек получает информацию из внешнего мира различными способами: мы видим, слышим, чувствуем, осязаем, получаем информацию посредством обоняния и т. д. Но для каждого человека один из способов получения информации является преимущественным, по сравнению с другими.

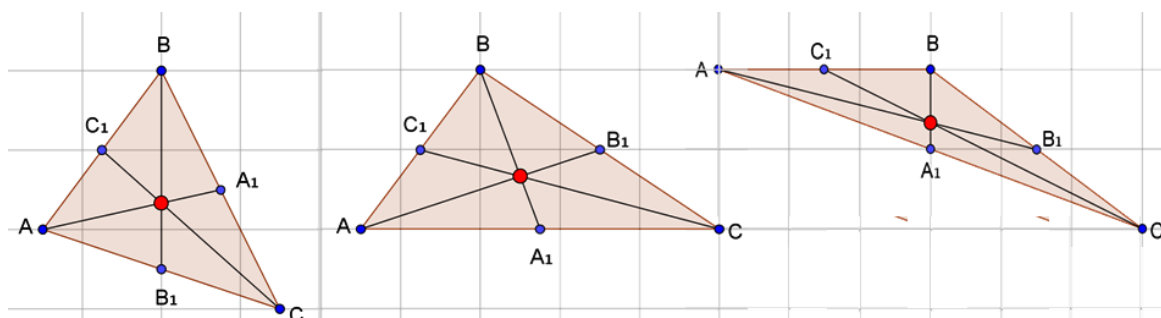
На основании этого выделяют 4 типа восприятия: *визуальное* – человек получает информацию преимущественно через зрительные образы; *аудиальное* – получение информации преимущественно через слуховые каналы; *кинестетическое* – получение информации преимущественно через обонятельные и осязательные каналы; *дискретное (дигитальное)* – получение информации через субъективно-логическое осмысление сигналов, поступивших по трем вышеназванным каналам.

Воспользуемся результатами исследований А.Г. Молибога [161], по восприятию информации человеком:

- зрительными рецепторами – плотность около 3 млн бит/с,
- человеческим ухом – 5 – 20 тыс. бит/с,
- осязанием –  $2 \times 10^5$  бит/с,
- обонянием – 10 – 100 бит/с,
- вкусом – около 10 бит/с.

Согласно исследованиям Е. Н. Кабановой-Меллер успешно решают геометрические задачи те учащиеся, которые «видят» чертёж, то есть могут преобразовывать словесно-логическую информацию в наглядно-образную. Способность визуализировать информацию возможно развивать в процессе обучения математике.

Приведём пример наглядно-образной передачи информации. При рассмотрении факта (Геометрия 8 класс): «Все медианы любого треугольника пересекаются в одной общей точке», – учащимся можно предложить в программе «GeoGebra» самостоятельно построить произвольный треугольник, провести в нём медианы, а затем, создав динамическую модель (перемещая одну из вершин треугольника), убедиться, что всякий раз точка пересечения медиан остается единственной общей для данной модели. При демонстрации рисунков ориентируемся на формирование целеполагания (Какое утверждение нужно доказать?), прогнозирования (Для любого ли треугольника выполняется утверждение?), коррекции (Правильно ли на рисунке отражено свойство медиан треугольника?), контроля (Какую теорему будем доказывать?); планирования (Какой план доказательства теоремы?).



Для определения типа восприятия существуют специальные техники, в том числе и рекомендуемые (использованные при эксперименте) «Тесты определения типа восприятия» по С. Ефремцеву [72].

2. *Темперамент учащегося.* Темперамент не только определяет динамику психической деятельности (скорость восприятия, быстрота ума, скорость переключения внимания, темп и ритм речи и пр.), он влияет на развитие и проявление личностных свойств, на индивидуальный стиль деятельности, на достижение цели и, следовательно, на результат деятельности.

Впервые в педагогической литературе Н. Ф. Бунаков (1837 – 1904) описал типы темперамента и приемы индивидуального подхода к детям различных темпераментов с целью добиться от всех успешного обучения [21].

Приведём пример работы над решением задачи (Алгебра 8 класс) по теме «Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций», УМК авторов А. Г. Мордкович и др. [163].

Учитель предоставляет реальную ситуацию учащимся вербально: «Перегон в 60 км поезд должен был проехать с постоянной скоростью за определённое по расписанию время. Но..., в результате прибыл вовремя».

а) Учитель предлагает ребятам продолжить возможное развитие дальнейших событий, а к диалогу привлекает *холерика*, так как для *холерика* важны социальные мотивы. Ученик с таким типом темперамента испытывает острую необходимость в самореализации, ранжирует получаемые знания: по степени общественной значимости (на первом месте), престижности и полезности для коллектива. Проблемная ситуация математической задачи активизирует учебную деятельность холерика, создаёт условия для преодоления его возбудимости, помогает сконцентрировать внимание учащегося на условиях задачи, осознать значимость ответа для одноклассников. В результате диалога формулируются следующие варианты задачи:

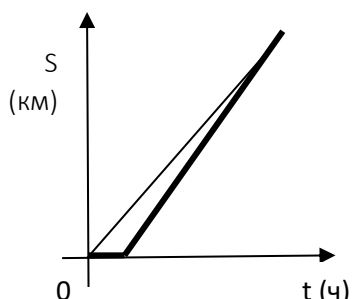
1 вариант: ..., но поезд простоял на светофоре перед перегоном 5 минут, в результате, чтобы прибыть вовремя должен был увеличить скорость на 10 км/ч.

2 вариант: ..., но первые 20 км он ехал со скоростью на 5 км/ч меньше, а затем на 10 км/ч больше постоянной скорости по расписанию. В результате прибыл вовремя.

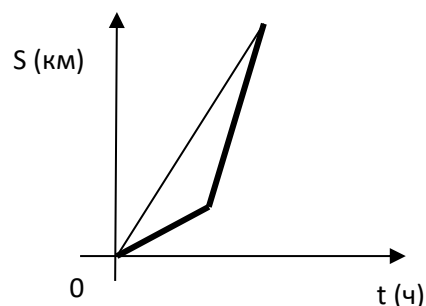
Формируемые РУУД: вносить дополнения и изменения в содержание задач; предвидеть результат; прогнозировать вариативность ситуации; планировать действия в соответствии с поставленной целью, осуществлять действия поиска решения проблемы; осуществлять необходимые действия по реализации плана [21].

б) Учитель предлагает учащимся представить реальную ситуацию в виде графика движения поезда:

*I вариант*



*II вариант*



На этом этапе решения математической задачи можно привлечь к работе *сангвиника*. *Сангвиник* – любознателен. Однако, часто отвлекается на уроке. Предложение проанализировать или оценить графическую интерпретацию условия вернет сангвиника к учебной деятельности, активизирует его внимание, интерес к происходящему на уроке. Его привлекает возможность использовать изучаемый на уроках математики материал в жизни, в практической деятельности. Формируемые РУУД: уметь соотносить результат своей деятельности с целью; вносить необходимые коррективы в действия; освоение приемов прогнозирования, анализа, оценки, коррекции; использовать внешние и внутренние ресурсы [21]; соотносить исходные данные задачи с реальностью [22].

в) Учитель предлагает учащимся составить таблицу

I вариант

Движение	s (км)	t (ч)	v (км/ч)
по расписанию	60	$\frac{60}{x}$	x
фактически	60	$\frac{60}{x+10} + \frac{1}{12}$	x+10

II вариант

Движение	s (км)	t (ч)	v (км/ч)
по расписанию	60	$\frac{60}{x}$	x
фактически	20//40	$\frac{20}{x-5} // \frac{40}{x+10}$	x - 5//x+10

Для заполнения таблицы можно привлечь *меланхолика*. Он отстает от ребят уже на старте выполнения задачи, но, работая медленно, все выполняет обстоятельно, последовательно, планомерно, до конца. Работа с таблицей у доски помогает снизить тревожность учащегося, приобрести уверенность в своих силах и освоить новую деятельность через решение задачи. Формируемые РУУД: осуществлять необходимые действия по реализации плана; учитывать правила планирования и находить контроль способа решения; сравнивать полученные результаты [21] с целью; систематизация, планирование, контроль последовательности и логичности рассуждений [22].

г) Учитель предлагает учащимся сформулировать вопросы, которые подходят к обеим задачам одновременно:

- ✓ Какова скорость поезда по расписанию?
- ✓ Каково время движения поезда по расписанию?

Это задание можно предложить выполнить *флегматику*. Характерное свойство нервной системы флегматика - инертность. Поэтому он или медленно реагирует на происходящее вокруг или вообще не замечает происходящее событие. Для того, чтобы вовлечь флегматика в математическую деятельность, нужны какие-то значимые для него сигналы. Переключив внимание

флегматика на предстоящую деятельность, т. е. формулировка вопросов, учитель сосредотачивает его на решении задачи, изучении темы. Мотивом для переключения внимания флегматика на выполнение деятельности может быть информация об использовании изучаемого содержания математики в жизни.

Формируемые РУУД: контроль за принятием и сохранением задачи, контроль удержания условия задачи, идеи решения, выбора рационального способа достижения цели решения задачи, постановка вопросов с целью коррекции своей деятельности.

Таким образом, создание на уроке математики условий, которые соответствуют типу темперамента ученика, содействует успешному формированию и развитию регулятивных УУД при обучении математике.

3. *Отношение обучаемого к учению.* Выделим несколько ступеней включённости школьника в процессе освоения математики:

- *отрицательное отношение к математике,*
- *нейтральное отношение к математике,*
- *положительное отношение к математике.*

*Отрицательное отношение к математике:* слабая заинтересованность в успехах, нацеленность на оценку, неумение ставить цели, преодолевать трудности, отрицательное отношение к образовательному учреждению, к преподавателю.

*Нейтральное отношение к математике:* характеристики те же, но при изменении мотивации можно достигнуть положительных результатов, так как учащийся способный, но ленивый.

*Положительное отношение к математике:* постепенное изменение мотивации; учащийся умеет ставить перспективные цели, предвидеть результат своей учебной деятельности, преодолевать трудности, др.

Итак (продолжение урока): д) Учащиеся вместе с учителем переходят к планированию решения проблемы, реализуют план, оценивают, корректируют решение, каждый раз выделяя и называя этап деятельности, формируемое РУУД.

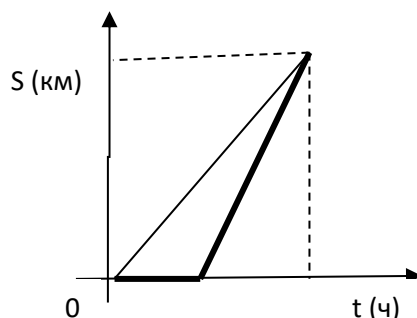
Для работы над вопросом: Какова скорость поезда по расписанию? - учитель напоминает полный текст 1 варианта задачи: *Перегон в 60 км поезд должен был проехать с постоянной скоростью за определённое по расписанию время. Но поезд простоял на светофоре перед перегоном 5 минут, в результате, чтобы прибыть вовремя, должен был увеличить скорость на 10 км/ч.*

4. *Способность к освоению математики.* «Способности не сводятся к знаниям, умениям и навыкам, хотя проявляются и развиваются на их основе», замечает Л.И. Боженкова [35]. Поэтому надо быть очень осторожными и тактичными в определении способностей учащихся, чтобы не принять слабое знание ребенка за отсутствие у него способностей. Способности обнаруживаются только в деятельности, и притом только в такой деятельности, которая не может осуществляться без наличия этих способностей.

Поэтому на данном уроке учитель предлагает учащимся уточнить: какая характеристика движения поезда постоянна по тексту, а какая по требованию условия задачи. Наблюдение за процессом выполнения задания в измененных условиях, за ходом рассуждения, овладения деятельностью позволит учителю судить о способностях учащихся к математике. Одновременно для выхода из проблемы, заданной учителем, ученики должны будут выполнить действия оценки, корректировки.

Ответы учащихся не совпадают, т. к. вводят в заблуждение слова из текста «с постоянной скоростью».

Учитель дополняет график 1 варианта задачи дополнительными (пунктирными) линиями:



Учащиеся уточняют: путь – постоянная величина по тексту, а время должно быть постоянной величиной по требованию условия задачи. Чтобы выполнить требование, необходимо изменить скорость (увеличить).

Учитель предлагает записать это требование для движения поезда по расписанию:  $t = \frac{S}{v}$ , или, с учетом обозначений и данных задачи:  $t = \frac{60}{x}$ . Затем - записать это же требование для реального движения поезда:  $t = \frac{S}{v} + \frac{1}{12}$ , или  $t = \frac{60}{x+10} + \frac{1}{12}$ . И, наконец: выполнить требование задачи:  $\frac{60}{x} = \frac{60}{x+10} + \frac{1}{12}$ .

Изменение условий решения задачи позволяет осуществить школьникам действия оценки, корректировки, проявляя элементы волевой саморегуляции.

*5. Степень внушаемости.* Учитель обозначает другой вариант решения задачи: составить математическую модель задачи относительно другой постоянной величины, то есть пути. Путем рассуждений учащиеся приходят к уравнению:  $v \cdot t = (v + 10) \cdot (t - \frac{1}{12})$ , или  $x \cdot t = (x + 10) \cdot (t - \frac{1}{12})$ . С учетом:  $t = \frac{60}{x}$ , окончательная модель:  $x \cdot \frac{60}{x} = (x + 10) \cdot (\frac{60}{x} - \frac{1}{12})$ .

Учитель обращает внимание учащихся к таблице 1 варианта и предлагает составить ещё одну математическую модель задачи (по формуле  $S = v \cdot t$ ):

$$\text{Учащиеся составляют: } 60 = (x+10) \cdot (\frac{60}{x+10} + \frac{1}{12}).$$

Решение всех полученных уравнений учитель предлагает ребятам выполнить самостоятельно, произвести оценку и коррекцию своих решений, оценить результаты и сделать вывод.

Исследование 2 варианта задачи организуется в форме групповой работы, что позволяет влиять на степень внушаемости школьников. В этих условиях формирование волевой саморегуляции способствует уменьшению внушаемости обучающегося.

Формируемые РУУД: логика рассуждений ведет к умению ставить задачу, последовательная математическая запись ведет к формированию способ-



ности планировать свои действия, аргументировать, обосновывать, представлять и отстаивать свое решение, контролировать результат, формировать самооценивание.

Диагностику индивидуальных особенностей учащихся можно представить в виде следующей таблицы 6.

*Таблица 6 – Диагностика индивидуальных особенностей учащихся*

Параметры диагностики	Фамилия, имя учащегося		
	№ 1	№ 2	№ 3
По каналу преимущественного восприятия информации	визуал (преимущественно воспринимает зрением)	аудиал (преимущественно воспринимает на слух, «вербально»)	кинестет (преимущественно воспринимает через движение и осязание)
По темпераменту	сангвиник, экстраверт	флегматик, интроверт	холерик, интроверт
По уровню освоения информации	осваивает много, но не основательно	осваивает что-то одно, но качественно;	осваивает много, но ненадолго
По мотивированности к учению, степени желаний учиться	активно не желающий учиться	интересующийся учением, школой	интересующийся учением, постижением нового и т. п.
По способности к данному учебному предмету	средних способностей	способный	одарённый
По степени внушаемости	не внушаемый	сильно внушаемый	слабо внушаемый

После выявления индивидуальных особенностей учащихся можно приступать к конструированию индивидуальных образовательных программ (ИОП) по освоению математики, ориентированному на формирование РУУД.

*Первый этап конструирования* – анализ исходных данных и постановка диагноза. Речь идёт о выборе соответствующих *типа обучения* и *уровня изучения* содержания математического образования, соответствующих индивидуальным особенностям учащихся. Изучение типа и способа мышления может быть осуществлено с помощью методики «Тип мышления». Известна модификация типов мышления по Г. В. Резапкиной: наглядно-образное, предметно-действенное, словесно-логическое, абстрактно-символическое, креативное. В чистом виде типы мышления встречаются редко, поэтому нужно говорить о ведущем типе мышления на определённом уровне его развития (низкий, средний, высокий). Важно изучить тип мышления учащегося для результативного формирования регулятивных учебных действий [25].

Далее, в соответствии с типом мышления можно осуществить выбор *типа обучения математике* [25]. Следуя В. Д. Шадрикову [185], выделим следующие два типа обучения: *репродуктивный (связан с содержанием образования и развивающий (предполагает методы обучения, способствующие развитию способностей учащихся)*.

Не менее важно для учителя понимать на *каком уровне изучения* школьнику важен данный предмет. При обучении математике это могут быть следующие уровни изучения содержания: *базовый уровень, расширенный уровень, углубленный уровень* [25].

Информацию можно собрать в виде матрицы (таблица 7).

Таблица 7 – Информация о личностных особенностях обучаемых

Характеристики	Фамилия, имя учащегося			
	№ 1	№ 2	№ 3	...
Тип мышления				
- предметно-образное	+	+	+	
- абстрактно-логическое [25]				
Тип обучения				
- репродуктивный	+			
- развивающий		+	+	
Уровень изучения содержания образования (математика) [25]				
- базовый	+			
- расширенный		+		
- углубленный (повышенной сложности)			+	

Для выявления степени индивидуализации программ обучения учащихся предлагается *спроектировать индивидуальную образовательную программу [25] (ИОП)* 1) выбор цели учащимся; 2) соотнесение внешних требований и потребностей учащегося; 3) определение пути достижения цели [25].

Далее учитель математики приступает к созданию индивидуальных образовательных программ для учащихся данного класса, используя различные способы её реализации: занятие в классе (изучение модуля по обычной классно-урочной системе на базовом уровне), групповые занятия (для группы учащихся может быть организовано групповое выполнение модуля на углублённом уровне), самостоятельное изучение [25] (форма организации учебной деятельности учащихся на расширенном уровне, осуществляемая под прямым или косвенным руководством преподавателя), проектно-исследовательская деятельность [25], внеурочная деятельность, элективный курс (обеспечивает индивидуализацию образовательных программ по запросу учащихся и их родителей) [25].

Таблица 8 – Вариант учебного плана индивидуализированного изучения темы «Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями» учащимися 6 класса (УМК Н. Я. Виленкин и др. [44])

Класс: 6 Л	Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями (21ч)				
Ф. И. уч-ся	Занятие в классе (база)	Групповое занятие (углубленное)	Самостоятельное изучение (расширенное)	Проектно-исследовательская деятельность (расширенное)	Внеурочные занятия, элективный курс (по желанию)
1 уч-ся	21 ч				4 ч Математика и жизнь
2 уч-ся	14 ч	4 ч		3 ч	4 ч Основы исследовательской деятельности
3 уч-ся	14 ч		4 ч	3 ч	-
... [25]					

Такой подход обеспечивает информированность всех участников образовательного процесса о содержании индивидуальной образовательной программы учащихся по математике и путей их реализации, а в совокупности с методами исследования позволяет выявить динамику личностных изменений у учащихся, формирование регулятивных учебных умений, развитие личности [25].

*Второй этап конструирования* – прогнозирование с переходом в проектирование (по существу – педагогическое целеполагание) [25]. Учитель материализует педагогическую задачу в конкретном учебном материале с учётом

подготовленности учащихся и их индивидуальных особенностей; согласовывает и синтезирует содержательную, мотивационную и операциональную стороны деятельности свою и учащихся; формулирует педагогическую задачу для себя, корректирует формирование задачи для себя учащимся; оформляет замысел решения педагогической задачи [25].

Обратимся к содержательной стороне обучения, нацеленного на развитие личности в процессе формирования регулятивных универсальных учебных действий. Известно, что все элементы содержания образования, имеют две составляющие: социальную и личностную. Учителю важно выстроить работу таким образом, чтобы максимально выявлять интересы и склонности каждого ребенка [25], и учитывать их при конструировании содержания индивидуальных образовательных программ. И тогда усвоение учебного материала будет способствовать не только развитию познавательной сферы обучаемых, но и формированию у них регулятивных универсальных учебных действий, таких личностных свойств, как организованность, инициативность, активность, самостоятельность, трудолюбие, ответственность, способность к самообразованию, саморазвитию [25].

Представим педагогическую деятельность и содержание взаимодействия педагога и обучающегося на этапах конструирования индивидуального содержания образования школьника в виде таблицы 9 [25].

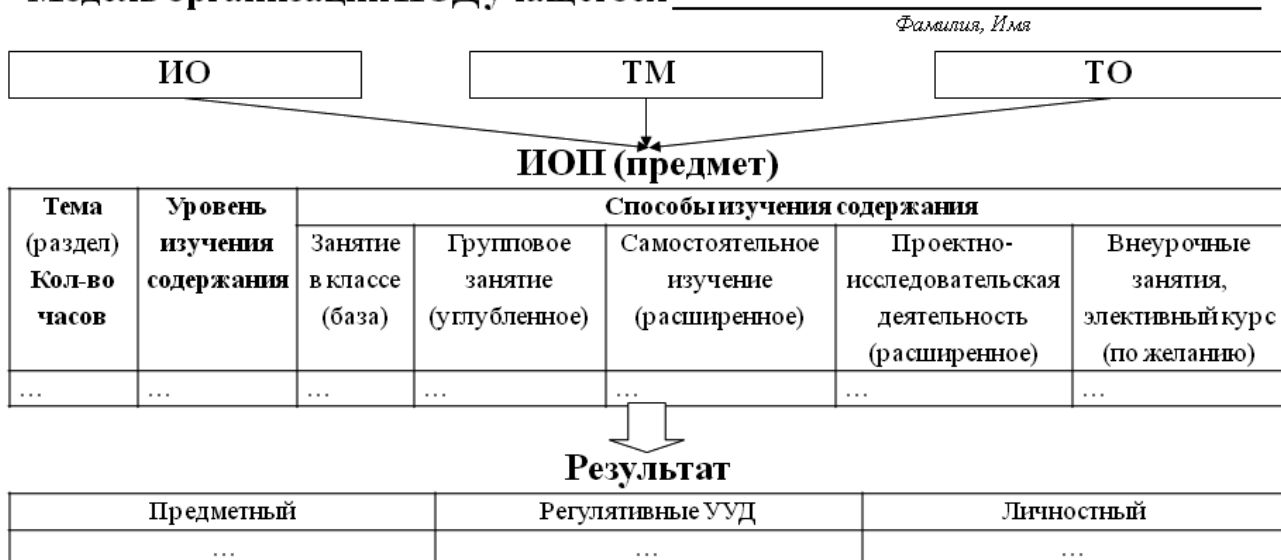
Таблица 9 – Содержание взаимодействия педагога и обучающегося в процессе конструирования индивидуального содержания образования

Этапы	Педагогическая деятельность	Содержание взаимодействия	
		проектирование	реализация
<i>Анализ исходных данных и постановка диагноза</i>	- выявление составляющих индивидуально-сти учащегося	- обсуждение с родителями учащихся направления индивидуального образования; - определение диапазона возможного дополнительного образования, как в школе, так и в других образовательных учреждениях;	- индивидуальное консультирование учащихся; - организация согласованных действий педагогов, психолога и социального работника общеобразовательного учреждения, привлечение педагогов учреждений дополнительного образования
<i>Прогнозирование</i>	- выявление личностно значимых для учащихся целей и задач; - соотнесение индивидуальных потребностей с внешними требованиями	- обсуждение с родителями учащихся направления индивидуального образования; - определение диапазона возможного дополнительного образования, как в школе, так и в других образовательных учреждениях;	- индивидуальное консультирование учащихся; - организация согласованных действий педагогов, психолога и социального работника общеобразовательного учреждения, привлечение педагогов учреждений дополнительного образования [21];
<i>Проектирование</i>	- проектирование индивидуального содержания образования	-конкретизация цели; -разработка индивидуальной образовательной программы	- индивидуальные собеседования с учащимися; - отбор средств и способов работы, определение сроков выполнения программы, формы представления результата и оценки деятельности
<i>Планирование</i>	- оказание помощи в планировании индивидуальной образовательной программы	- обсуждение участия в работе школьного НОУ [21] (научного общества учащихся), в театральном (другом) кружке, ученических конференциях (других мероприятиях)	- обеспечение ситуации успеха; - рефлексия результатов выполнения программы; - устранение причин, оказывающих отрицательное влияние на личностное развитие учащегося

Мы можем утверждать, что, обеспечивая взаимодействие обучающего и обучаемого при проектировании *индивидуальных образовательных программ по математике*, мы тем самым проектируем целенаправленную программу деятельности подростка в процессе формирования регулятивных универсальных учебных действий, обеспечиваем ему позицию субъекта выбора вариативного содержания математического образования и соответствующих его интересам и потребностям форм образования [25].

*Третий этап конструирования* – планирование – обеспечение индивидуализации обучения. Оформить планирование можно, используя модель организации индивидуальной образовательной деятельности (ИОД) учащегося [19], рисунок 3.

### Модель организации ИОД учащегося \_\_\_\_\_



*Условные обозначения: ИО – индивидуальные особенности учащегося; ТМ – тип мышления; ТО – тип обучения; ИОП – индивидуальная образовательная программа; УУД – универсальные учебные действия*

*Рисунок 3 – Модель организации индивидуальной образовательной деятельности учащегося*

Как было нами установлено, модель организации индивидуальной образовательной деятельности динамична: в зависимости от результатов, изменений предпочтений учащихся, обсуждается и корректируется с целью обеспечения индивидуальной образовательной траектории обучающихся с учётом их способностей и интересов [25].

Таким образом, обеспечение индивидуализации образовательных программ и путей их усвоения в зависимости от способностей и интересов обучающихся к математике является необходимым условием формирования регулятивных универсальных учебных действий [25].

## **2. Второе педагогическое условие - формирование развивающей способности и интереса к математике, создание образовательной среды общеобразовательной организации и вовлечение в неё обучающихся.**

Индивидуальная образовательная программа обучающегося – необходимое, но не достаточное условие построения и успешного осуществления индивидуальной траектории реализации образовательных потребностей и интересов обучающегося.

В отечественной педагогической науке термин «среда» появился в 20-е годы: «педагогика среды» (С. Т. Шацкий [261]), «общественная среда ребенка» (П. П. Блонский [32]), «окружающая среда» (А. С. Макаренко [148]). Немало исследований посвящены доказательству того, что оказывать воздействие педагог должен не на учащегося (его качества, поведение, др.), а на условия, в которых происходит их взаимодействие, развитие ребёнка. Опираясь на мнение Л. С. Выготского [49], П. Я. Гальперина [56], В. В. Давыдова [65], Л. В. Занкова [82], А. Н. Леонтьева [135], Д. Б. Эльконина [271] и др., будем понимать под развивающей образовательной средой – образовательное пространство для реализации развивающего обучения.

В нашем исследовании *развивающая среда* – это среда, направленная на обеспечение единства процессов саморазвития и социального взаимодействия с учетом психофизиологических обстоятельств жизнедеятельности школьника, адекватных его возрастным особенностям [21]. Потенциал развивающей образовательной среды: средообразующие компоненты, принципы организации, учет возможностей управлять процессом организации обучения, направленного на формирование РУУД.



Принципы, которые необходимо учитывать при создании развивающей образовательной среды с целью формирования РУУД при обучении математике, отражены в таблице 10.

*Таблица 10 – Принципы формирования РУУД учащихся в развивающей образовательной среде в процессе обучения математике*

№ п/п	Принцип	Содержание
1	Принцип информированности	Подразумевает возможность обеспечения учащихся широким спектром тем, поддержкой интереса к новому в математике и его удовлетворения, наличием объектов и средств для осуществления различной деятельности: исследовательской, регулятивной, учебно-познавательной [186]
2	Принцип эмоциональной насыщенности	Направлен на реализацию способности среды воздействовать на ученика, его эмоциональную сферу, волевую саморегуляцию: смена впечатлений, регуляция эмоций, чувств через вовлечение в различные виды деятельности [186]
3	Принцип оптимального соотношения развития и саморазвития	Нацелен на создание тесной взаимосвязи, оценки, коррекции, контроля за самостоятельной активностью учащегося и активностью, организуемой педагогом [186]
4	Принцип открывающейся перспективы	Ориентирует организации, центры, находящиеся в развивающей среде, на стимулирование и сопровождение поисковой активности, учебно-исследовательской деятельности учащихся через математическое содержание
5	Принцип реализации собственного опыта в различных видах деятельности	Предполагает обеспечение условий (например, наличие материала, который позволит выполнить намеченный план, проверить и откорректировать математический результат) для проявления самостоятельной активности учащихся, индивидуальных способностей, мотивации в учебно-исследовательской деятельности

№ п/п	Принцип	Содержание
6	Принцип направленности на формирование ИКЛ	ИКЛ – интегративные качества личности развиваются в интегрированной деятельности учащихся при наличии и работе всех компонентов развивающей среды одновременно в соответствии с обозначенными принципами

Сказанное приводит к выводу о том, что создание развивающей образовательной среды образовательного учреждения, вовлечение в неё учащихся – является обязательным условием развития потенциала обучающихся, педагогическим условием формирования регулятивных универсальных учебных действий, самореализации и самоопределения школьников [19].

### **3. Третье педагогическое условие – организация внеурочной деятельности учащихся по математике как процесса освоения метапредметных учебных действий.**

Внеурочная деятельность учащихся – целенаправленный процесс воспитания, развития личности и обучения посредством реализации дополнительных образовательных программ, оказания дополнительных образовательных услуг и информационно-образовательной деятельности за пределами основных образовательных программ в интересах человека, государства [186]. Если предметные результаты достигаются в процессе освоения школьниками математики, то в достижении метапредметных – формировании УУД, в число которых входят РУУД – возрастает удельный вес внеурочной деятельности по математике, так как обучающийся выбирает самостоятельно, чем будет заниматься исходя из своих потребностей, интересов, мотивов [186].

Внеурочная деятельность по математике является составной частью учебного процесса, естественным продолжением работы на уроке. Совокупность внеурочных программ придает развивающей образовательной среде образовательного учреждения свою индивидуальность.

Программа внеурочной деятельности по математике, «направленная на формирование РУУД, ориентирована на достижение следующих результатов освоения образовательной программы основного общего образования:

*личностные:*

- контролировать усвоение прочитанного, уметь грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать и принимать цель поставленной задачи;

- оценивать отсутствие логики или её некорректность, критически мыслить, отличать предположение от реального события;

- представлять математическую науку как исследовательскую сферу деятельности человека;

- уметь осуществлять контроль процесса и результата учебной математической деятельности;

- поддерживать эмоциональное восприятие математических объектов, задач и решений;

*метапредметные:*

- оценивать математический язык как универсальный язык науки и техники, иметь представление о методах математического прогнозирования, контроля как средствах моделирования реальных процессов и явлений;

- уметь представить в виде математической задачи проблемные ситуации, возникающие при изучении других учебных предметов или в окружающей жизни, при этом выполнять этапы целеполагания, планирования, контроля, коррекции для ее решения;

- уметь делать предположения, выдвигать гипотезы при решении учебных задач, уметь проверять их и делать выводы;

- уметь вырабатывать различные стратегии решения задач, применяя индуктивные и дедуктивные способы рассуждений;

- понимать необходимость и смысл планирования и алгоритмических действий, уметь действовать по заданному плану;

- уметь самостоятельно ставить цели и выработать алгоритм для решения учебных задач;

- уметь составлять план деятельности при решении исследовательских заданий, осуществлять, контролировать и корректировать эту деятельность;

*предметные:*

- уметь определять геометрическое тело по рисунку, узнавать его по развертке, понимать, что геометрические формы являются уменьшенными образами реальных объектов;

- познакомиться с первоначальными геометрическими сведениями о плоских фигурах и объемных телах;

- научиться пользоваться геометрическими инструментами, уметь изображать геометрические фигуры;

- научиться решать простейшие задачи на построение, вычисление, доказательство;

- узнавать простейшие геометрические фигуры на сложных рисунках;

- уметь выполнять рисунок по условию задачи;

- уметь решать простые задачи на вычисление, применяя свойства фигур» [24, 25].

Таким образом, можем утверждать необходимость обеспечения совокупности педагогических условий, а именно:

- обеспечение индивидуализации образовательных программ и путей их усвоения в зависимости от способностей и интересов обучающихся к математике [25];

- формирование развивающей способности и интереса к математике, создание образовательной среды общеобразовательной организации и вовлечение [17] в неё обучающихся;

- организация внеурочной деятельности учащихся по математике как процесса освоения метапредметных учебных действий.

Соблюдение выделенных педагогических условий позволит организовать системную и целенаправленную работу по формированию регулятивных

учебных действий [17] школьников при обучении математике.

#### **1.4 Теоретико-методологические подходы и система дидактических принципов обучения математике в процессе формирования РУУД**

Сегодня в соответствии с социальным заказом школьное образование ориентировано на формирование личности, способной к адаптации в изменяющихся условиях, к освоению информации, к самостоятельному поиску, что может обеспечить сформированная система РУУД. Задача ФГОС в современных условиях приобретает вполне конкретное звучание: эффективное использование потенциала школьных предметов для развития личностных качеств обучаемых, включая саморегуляцию. ФГОС предусматривает изменения школьного образования не только в содержательной плоскости, но и в процессуальной.

Современное общество понимает важность математического образования и его необходимость. Математика – обязательный предмет на всех ступенях школьного образования с 1-ого по 11-ый класс; экзамен по математике в выпускных классах (и в 9-м и в 11-м) тоже является обязательным. Необходимость всеобщей математической грамотности связана с особенностями функционирования человека в информационно-технологическом мире, причём, как в профессиональной, так и в бытовой сфере. Овладение практически любой современной профессией требует тех или иных знаний по математике. И на вопрос:

- Как обучать? – ответим:

- Через целенаправленное формирование всей системы универсальных учебных действий учащегося, в том числе и регулятивных, средствами предмета. Сформированные регулятивные универсальные учебные действия являются залогом качества знаний: «знания» переходят в обучении из ранга стратегических понятий в ранг тактических, т. е. они становятся средством развития личности обучающихся.

Теоретико-методологические подходы и дидактические принципы регулируют весь образовательный процесс, подчиняют его современным требованиям. Обучение математике строится в соответствии с положениями системно-деятельностного подхода (см.п.1.1) и ряда дидактических принципов. Известны дидактические принципы обучения математике [111]:

1) принцип научности; 2) принцип воспитания; 3) принцип наглядности; 4) принцип системности и последовательности; 5) принцип прочности знаний; 6) принцип доступности; 7) принцип сознательности, активности и самостоятельности; 8) принцип индивидуального подхода к учащимся.

Применительно к процессу формирования РУУД в процессе обучения математике их можно представить в виде таблицы 11.

Таблица 11 – Система дидактических принципов обучения математике в процессе формирования РУУД

№ п/п	Название	Описание
1	Принцип математической научности, целостности обучения математике, воспитания	обязательность соответствия содержания и методов преподавания уровню и требованиям математики как науки в ее современном состоянии
2	Принцип целенаправленного формирования РУУД учащихся	обучение, воспитание и целенаправленное формирование регулятивных универсальных учебных действий учащихся организуется как единая целостная система
2	Принцип воспитания, запуска внутренней мотивации изучения математики	<p>планомерная и целенаправленная выработка у учащихся определенных взглядов и мировоззрений; формирование у учащихся интереса к математике, выработка у них стремления к новому знанию, к полному и прочному его усвоению;</p> <p>стимулирование стремления к самообучению, самоконтролю, самокорректированию, самооцениванию</p>
3	Принцип наглядности, собственного математического открытия [23]	<p>вытекает из сущности процесса восприятия математики, осмысливания и обобщения учащимися изучаемого материала средствами современной техники;</p> <p>организация обучения как собственного открытия под руководством учителя</p>
4	Принцип сознательности, активности и самостоятельности в учебно-исследовательской математической деятельности [21]	<p>целенаправленное активное восприятие изучаемого содержания математических разделов, их осмысливание, творческая переработка и применение;</p> <p>организация самостоятельной поисковой деятельности, учебного исследования или эксперимента, анализ результата</p>

5	Принцип прочности математических знаний, применения их в других областях [25]	опора на приобретенные математические знания, умения и навыки на последующих этапах обучения, при освоении других предметов, в жизни
6	Принцип систематичности и последовательности, учет возрастных особенностей при формировании РУУД	соблюдение определенного порядка в рассмотрении и изучении тем и постепенное овладение основными понятиями и утверждениями школьного курса математики, развитие РУУД в соответствии с возрастом учащихся
7	Принцип доступности, совместной деятельности	предполагает обязательное преодоление учащимися посильных для них трудностей; построение процесса обучения математике, как совместного поиска ответа на вопрос (учитель+ учащиеся)
8	Принцип индивидуального подхода к учащимся с учетом степени сформированности РУУД	оптимальное приспособление учебного материала и методов к индивидуальным способностям каждого школьника, организация обучения математике с учетом степени сформированности отдельных регуляторных компонентов каждого учащегося



Для аргументирования положения: «целенаправленное формирование РУУД учащихся средствами предмета...», — рассмотрим потенциал школьного курса математики 5-9 классов в соответствии с требованиями к обучению математике, выявим его особенности и закономерности.

Обратимся к содержанию современного курса математики основной школы. Содержание математического образования основано на фундаментальном ядре, которое формировалось с доисторических времён (возникновение понятия «целое положительное число» относят к доисторическому времени, а позиционную систему записи чисел и способы выполнения арифметических действий к первым векам нашей эры). В соответствии с изменениями направления развития общества и, как следствие, изменениями социального заказа к образованию, содержание школьного математического образования претерпевало изменения, обновления, в основном – содержательно-методические.

Рассмотрим эти обновления на примере изменений курса «Числа и вычисления». В начале XX века основной целью курса являлось обучение вычислениям на трудных, длинных, и сложных (со скобками, обыкновенными дробями с «плохими» знаменателями, десятичными дробями, другое) примерах. В 60-е годы на смену пришла методика раннего овладения алгоритмами действия с десятичными дробями, логарифмической линейкой. К началу нового столетия, с появлением, калькуляторов, рассматривалось инструментальное вычисление. Сами вычисления проверялись не на примерах, а при решении задач. Сегодня с введением ФГОС вычисления проверяются и требуются в контексте задач для получения содержательного результата. Такие изменения претерпели и другие курсы: «Приближенные вычисления», «Теория множеств», «Геометрические преобразования», др. Поэтому будем рассматривать школьное математическое образование не через изменения в содержании добавлением, усложнением или упрощением, исключением разделов, тем, курсов и т. д., а через содержательно-методические линии. Существенной характеристикой содержательно-методических линий является наличие «собственного» метода

(группы методов), так как с позиции деятельностного подхода знания усваиваются только в процессе собственной деятельности. Например, функциональная содержательно-методическая линия включает следующее содержание, связанное с понятием «Функция» (изучается в разных разделах, курсах):

- понятия области определения, области значений функции, графика функции, др.;
- понятия, выражающие свойства функций: четность, периодичность, монотонность, обратимость, непрерывность, др.;
- теоремы, выражающие свойства классов функций, их признаки;
- учебные действия: распознавание функций, исследование функций, построение графиков функций, др.

Деятельность, адекватная «собственному» методу содержательно-методических линий [23], способствует целенаправленному воздействию на формирование регулятивных учебных действий учащихся [17]. Усиления этого воздействия можно достичь, используя учебную исследовательскую деятельность учащихся, как средство для обучения в любой из содержательно-методических линий. Рассматривая учебное исследование как универсальную структурную единицу деятельности, важно выделять его логическим путем на уроках различного типа в любой содержательно-методической линии, как преобладающего средства обучения. Такой подход позволит выстроить систему формирования регулятивных универсальных учебных действий учащихся благодаря взаимосвязи содержательных математических линий, их «собственных» методов и необходимых регулятивных учебных действий учащихся.

Представим в таблице 12 взаимосвязь РУУД и «собственных» методов нескольких *содержательно-методических линий*.

Таблица 12 – Взаимосвязь содержательно-методических линий, «собственных» предметных методов и регулятивных универсальных учебных действий учащихся

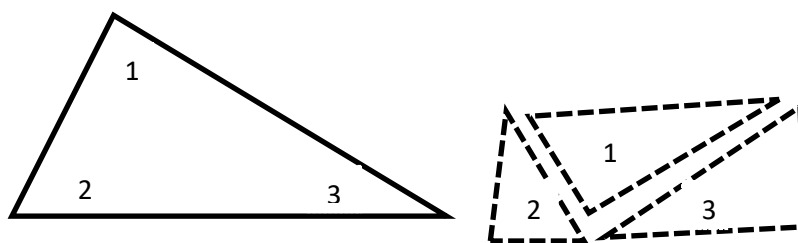
Содержательно-методические линии	«Собственные» методы	Регулятивные универсальные учебные действия учащихся
1) числовая линия	арифметические операции в различных числовых множествах; вычислительный метод	<ul style="list-style-type: none"> <li>- анализ структуры числового выражения; выбор рационального подхода к решению;</li> <li>- установление порядка арифметических операций;</li> <li>- алгоритмизация вычислений;</li> <li>- оценка и проверка результата;</li> <li>- концентрация внимания</li> </ul>
2) линия выражений и тождественных преобразований	метод тождественных преобразований	<ul style="list-style-type: none"> <li>- аргументированный подход к выбору приема преобразования;</li> <li>- удержание цели выполнения преобразований</li> <li>- контроль последовательности выполнения шагов преобразования;</li> <li>- обоснование, оценка тождественности результата;</li> <li>- контроль равносильности преобразований в решении;</li> </ul>
3) функциональная линия	метод исследования функций; функциональный метод решения уравнений и неравенств; координатный метод; функция как пример математической модели	<ul style="list-style-type: none"> <li>- распознавание функций, контроль, коррекция;</li> <li>- осознание степени проблемности в нерациональном выборе способа решения, регуляция своей деятельности;</li> <li>- планирование при исследовании функций, построении графиков функций;</li> <li>- контроль аналитических исследований через геометрическую интерпретацию результатов; аналитическая запись ответа;</li> <li>- построение математических моделей с помощью функций, проверка их адекватности, коррекция</li> </ul>

## Продолжение таблицы 12

Содержательно-методические линии	«Собственные» методы	Регулятивные универсальные учебные действия учащихся
4) линия уравнений и неравенств	метод моделирования; обобщенные методы решения уравнений и неравенств	<ul style="list-style-type: none"> <li>- установление связи между условием и вопросом, соотношения между данными;</li> <li>- проведение параллели с реальной жизненной ситуацией;</li> <li>- постановка вопроса и прогнозирование результата;</li> <li>- конструирование модели, оценка ее адекватности; анализ результата</li> </ul>
5) линия геометрических фигур	метод цепочки треугольников; метод геометрических мест точек	<ul style="list-style-type: none"> <li>- поиск необходимой и достаточной для решения информации;</li> <li>- абстрагирование задания; рассуждение и выдвижение гипотез;</li> <li>- поиск решения и построение плана решения; обоснование решения;</li> <li>- выполнение, корректировка чертежа по условию и дополнительных построений;</li> <li>- запись решения на математическом языке, ее контроль</li> </ul>
6) линия геометрических величин	метод «разрезания» (перекраивания) фигур; метод площадей и объёмов; метод интегрального исчисления	<ul style="list-style-type: none"> <li>- создание вариантов решения; прогнозирование;</li> <li>- выбор рационального способа решения; контроль;</li> <li>- количественная оценка; сравнительный анализ;</li> <li>- примеры применения в жизни; планирование и контроль.</li> </ul>
7) векторно-координатная линия	векторный метод; координатный метод	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ориентирование на координатной плоскости;</li> <li>- графическая интерпретация решения;</li> <li>- выбор правила и способа действий; их коррекция.</li> </ul>
8) линия геометрических преобразований	метод геометрических преобразований	<ul style="list-style-type: none"> <li>- осуществление и контроль равносильности преобразований, перехода к равновеликим, равносоставленным фигурам; оценивание свойств «новой» фигуры; связь с реальностью.</li> </ul>

Сегодня, наряду с общеизвестными содержательно-методическими линиями, можно назвать линию исследовательских задач, а её собственным методом - учебное исследование. Тогда можно говорить о целенаправленном формировании общих исследовательских умений и РУУД школьников.

Покажем, как меняется методика работы, если использовать учебное исследование в качестве инструмента в профессиональной педагогической деятельности. Рассмотрим формирование регулятивных универсальных учебных действий, когда учитель математики реализует содержательно-методическую линию геометрических величин и соответствующий ей метод «разрезания» (перекраивания) фигур на примере доказательства теоремы о сумме углов любого треугольника. Как правило, для доказательства этого факта традиционно учитель предлагает учащимся начертить произвольный треугольник, измерить с помощью транспортира его углы и сложить их, результаты сопоставляются, делается вывод, то есть организуется коллективный эксперимент. Сделать эксперимент более индивидуальным открытием «нового» факта для учащихся можно, изменив (усовершенствовав) этапы работы с теоремой. Скажем, этап ознакомления с фактом, отраженным в теореме, можно заменить этапом подведения учащихся к формулированию гипотезы, сходной по содержанию с фактом теоремы, организовав следующий эксперимент. Учащимся предлагается набор геометрических фигур: треугольники, квадраты, прямоугольники и ножницы (по требованию). Задание звучит в виде вопроса, побуждающего к действию, наблюдению, размышлению, формулированию результата близкого к тексту теоремы. Например, для тех учащихся, кто выбрал треугольник: что получим, если все углы треугольника совместим вершинами в одну точку?



*Рисунок 4 – Совмещение вершин треугольника*

Учащиеся перегибают углы треугольника, совмещая вершины треугольника в одну точку. Выявляют закономерность: точка, в которой «встретились» все вершины является вершиной развернутого угла, градусная мера которого известна,  $180^\circ$ . Формулируют гипотезу о сумме углов любого треугольника.

Или, для тех учащихся, кто выбрал прямоугольник: что получим, если из вершин  $B$  и  $C$  сделаем надрезы к общей точке на стороне  $AD$  и перегнём полученный треугольник по другую сторону  $AD$ ?

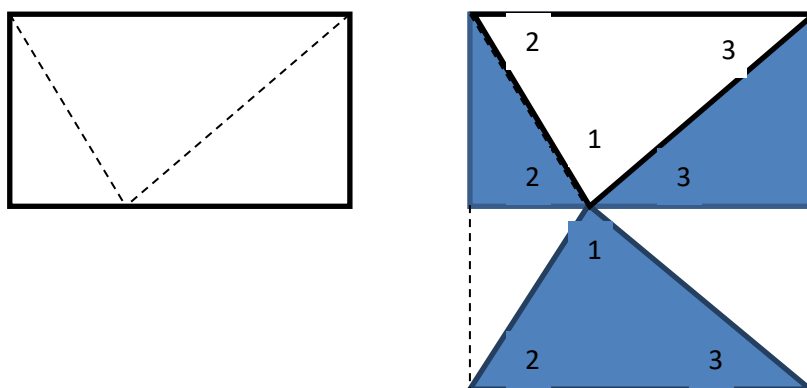


Рисунок 5 – Иллюстрация суммы углов треугольника

Используя свойство равенства накрест лежащих углов при параллельных прямых, несложно увидеть закономерность и сформулировать гипотезу о сумме углов треугольника.

Вместо традиционного этапа освоения содержания теоремы учащиеся включаются в деятельность проверки выдвинутой гипотезы и уточнения выявленной закономерности. Постепенно приходят к мысли о необходимости подкрепления проверок вариантов логическим доказательством.

Поиск идеи доказательства подсказывает собственный метод данной содержательно-методической линии: «разрезание фигур», а также базовые знания свойств равнобедренного треугольника, признаков равенства треугольников, др. Для реализации идеи доказательства обсуждается план, теоретическая платформа, математический язык.

Однако, чтобы теорема была сформулирована полноценно (т. е. «для любого треугольника»), далее очень эффективно использовать интерактивную программу «GeoGebra», позволяющую за короткий промежуток времени про-

вести компьютерный эксперимент, меняя условия: виды треугольников, соответственно величины углов, – проверить, наглядно продемонстрировать и закрепить справедливость факта для любого треугольника. План исследования может быть следующим:

- 1) задаётся изменение треугольника, сохраняющее вид, но изменяющее величину угла при вершине;
- 2) отслеживаются соответствующие изменения величин двух других углов и формулируется зависимость (если существует) между значениями углов;
- 3) вводится и проверяется на компьютере динамическая формула (придуманная ребятами) по замеченным изменениям значений углов;
- 4) обобщается и формулируется вывод для данного вида треугольника, гипотеза для любого треугольника;
- 5) проверяется обобщенная формула в программе с заданными условиями изменения вида треугольника, результатами измерений и вычислений углов;
- 6) сравнивается «открытие» с текстом теоремы в учебнике.

Теоретическое доказательство с компьютерной поддержкой становится простым и наглядным, доступным учащимся с любым набором индивидуальных особенностей. В результате такого открытия у учащегося формируются регулятивные универсальные учебные действия: постановка вопроса и прогнозирование результата, поиск и выбор рационального подхода к выполнению решения, конструирование модели, количественная оценка, сравнение результата, оценивание свойств «новой» фигуры, выработка плана доказательства, обоснование гипотезы, др.

Потенциал школьного курса математики для формирования регулятивных универсальных учебных действий очень высок. Приведем аргументы в пользу доказательства данного утверждения, выявим закономерности обучения математике, которые лежат в основе формулировки дидактических принципов.

## 1. Математический язык

Язык – это особая, фундаментальная часть научного знания, основные функции которой оформление мысли, определение формы и содержания знания, структурирование реальности, коммуникативные функции. Разные языки делают это по-разному. Математика представляет собой высокоорганизованную знаковую систему, гибкую, операционную, универсальную. Математический язык, возник как дополнение и уточнение к естественному языку, но в отличие от естественного языка, лишен такого недостатка как неоднозначность толкования смысла. С помощью математического языка закрепляются, сохраняются и передаются новым поколениям не только математические знания, но и знания по физике, химии, биологии, психологии, другим наукам. Грамотный математический язык является свидетельством четкого и организованного мышления, и владение этим языком (понимание точного содержания предложений, логических связей между предложениями) распространяется и на владение естественным языком и, тем самым вносит весомый вклад в формирование и развитие мышления человека в целом [159]. Математический язык – универсальное средство выражения математической мысли, форма её существования. Математический язык позволяет в словесной форме регулировать математическую деятельность; использование математического языка и его совершенствование способствует адекватному выполнению действий планирования, целеполагания, построения прогнозов, осуществления оценки, коррекции и контроля. Выполнение этих действий сопровождается устной или письменной речью учащихся, ее внешним или внутренним проявлением, т.е. математический язык служит средством развития осознанной саморегуляции личности и индикатором ее сформированности.

С помощью языка математики возможно развивать способность преобразовывать информацию, предметно общаться. С возникновением новых профессий, новых видов деятельности математический язык становится принципиально важным в плане межпредметных связей, является специфическим средством коммуникации в его сопоставлении с реальным языком. Матема-



тику сегодня можно декларировать как основу кадрового потенциала, обеспечивающего научный, технический, технологический и социальный прогресс общества. Сказанное позволяет рассматривать математический язык в качестве основы формирования регулятивных универсальных учебных действий [25].

## 2. Использование математических знаний и методов для овладения эффективными способами переработки учебной информации [17].

Например, при проектировании отдельных фрагментов предметного содержания, при отборе информационных ресурсов для сопровождения учебного процесса, интерпретации информации с учетом предметной области, представления информации, соответствующей области будущей профессиональной деятельности (схемы, диаграммы, графы, графики, таблицы). Важны навыки осуществления первичной статистической обработки данных, реализации отдельных этапов метода математического моделирования, интерпретации и адаптации математических знаний для решения образовательных задач в профессиональной области, др.

В качестве примера возьмём регулятивные универсальные учебные действия, формируемые при обучении решению задач в математике. Известны общие компоненты решения задач: анализ текста (семантический, логический, математический); перевод текста с помощью вербальных и невербальных единиц в форму модели; установление отношений между данными и вопросом (достаточность, недостаточность, избыточность данных); составление и осуществление плана решения задачи; проверка и оценка решения задачи. Работа над каждым компонентом решения задач способствует формированию следующих регулятивных учебных действий: количественная оценка, структурирование информации, алгоритмический подход, моделирование, индуктивное и дедуктивное рассуждение, др. [17]. Применение математических знаний и методов (количественная оценка, структурирование информации, алгоритмический подход, моделирование, индуктивное и дедуктивное рассуждение, и др.)

важны для овладения эффективными способами *переработки математической учебной информации, что в обязательном порядке предполагает выполнение действий целеполагания, построения прогноза, оценивания и коррекции информации*. Содержание практической части школьного курса математики с необходимостью требует моделирования проблемных ситуаций в обучении, вариативного подхода к их разрешению, выбора наиболее рационального из подходов и основано на полном составе РУУД. Умения делать *анализ текста* (семантический, логический, математический), *переводить текст* с помощью вербальных и невербальных единиц в форму модели (выявлять свойства математических объектов и отношения между ними), *устанавливать взаимосвязь* между данными и требованиями (определять достаточность, недостаточность, избыточность данных), *составлять и осуществлять план решения*, делать *проверку и оценивать* результат – все это связано с целеполаганием, контролем, оценкой, коррекцией, прогнозированием, действиями по плану и представляет необходимый набор регулятивных умений при работе с математическими текстами.

Отсюда следует, что использование математических знаний и методов способствует решению задач [17] в других областях, и в реальных жизненных ситуациях.

### 3. Организация самостоятельной работы с дифференцируемыми заданиями [17].

Назовём регулятивные универсальные учебные действия учащихся, формируемые через организацию самостоятельной работы с дифференцируемыми заданиями: стремление и умение сразу включаться в самостоятельную деятельность, стремление решить задание разными способами, внесение элементов рационализации в выполнение задания, умение критически подходить к фактам, умение произвести перенос знаний и навыков в новую ситуацию.

Способы организации деятельности учащихся зависят от содержания учебных заданий, которые нужно дифференцировать и по уровню сложности, и по объёму, и по необходимости творчества при выполнении [18]. При этом

важно выполнение двух позиций: содержание – единое, а работа дифференцирована по уровню самостоятельности учащихся, по форме учебных действий, по характеру помощи.

Организация такой деятельности учащихся на уроке требует от учителя подготовки:

- определение критерия для разбиения на группы;
- разбиение на группы с учетом предварительной диагностики по выбранному критерию;
- выбор способов дифференциации и разработка разноуровневых заданий;
- реализация дифференцированного подхода;
- контроль результата деятельности учащихся;
- осуществление возможных изменений состава групп учащихся.

Например, учитель, планирует дифференциацию учебного задания *по уровню творчества*. Для организации процесса обучения учитель подбирает продуктивное задание:

- поиск закономерностей,
- классификацию математических объектов,
- преобразование математического объекта в новый, различные способы выполнения задания;
- составление задачи и др.

При этом учащимся с низким уровнем обучаемости, можно предложить задание с элементами творчества на применение знаний и умений в измененной ситуации. А учащимся со средним и высоким уровнем обучаемости – творческое задание на применение знаний и умений в новой ситуации.

Если это задача математическая (продуктивное задание – преобразование математического объекта в новый математический объект), то задания для групп могут звучать так:

- 1 группа. Подумайте, можно ли решить задачу другим способом?
- 2 группа. Решите задачу двумя способами.

3 группа. Измените задачу так, чтобы её можно было решить тремя способами. Решите полученную задачу тремя способами.

Таким образом, организация самостоятельной работы учащихся с дифференцируемыми заданиями формирует у учащихся способность регуляции самооценивания своих возможностей, знаний (выбор уровня заданий), уровень самостоятельности и степень помощи при выполнении заданий (волевая регуляция), планирования действий по коррекции знаний [17]. Коллективное обсуждение условий, действий и результатов способствует формированию умения корректировать, оценивать, выдвигать гипотезы, планировать и согласованно выполнять совместную деятельность, прогнозировать результат, распределять роли, взаимно контролировать друг друга [17].

#### 4. Развитие логического мышления.

Известно, что логическое мышление обнаруживается, прежде всего, в протекании самого мыслительного процесса. Человек рассуждает, анализирует, устанавливает нужные связи, отбирает и применяет к данной конкретной задаче известные ему подходящие правила, приёмы, действия, сравнивает и устанавливает искомые связи, группирует разное и различает сходное.

Потенциал математики для развития логического мышления учащихся лежит в самом содержании предмета. А главные возможности заложены в текстовых задачах. Выполнение умственных операций при решении задач оказывает влияние на развитие мыслительности учащихся, их умственное развитие. Решение любой задачи ученик начинает с анализа с тем, чтобы осмыслить вопрос (что необходимо найти) и обозначить условия (данные задачи). Затем он намечает план решения и выполняет синтез, то есть конкретизирует условие задачи и абстрагируется от него, выполняя арифметические действия. При многократном решении типовых задач ученик обобщает связи между данными и неизвестным и, как следствие, способ решения задач такого типа.

Решение задач – упражнения, развивающие логическое мышление, пробуждающие интерес к самому поиску решения, воспитывающие настойчивость и силу воли, дающие возможность испытать радость правильного решения.

Из вышеизложенного следует, что развитие логического мышления при рассмотрении объектов математических умозаключений и правил их конструирования влияет на формирование регулятивных универсальных учебных действий анализировать объект, раскрывать причинно-следственные связи, сравнивать, выделять общее и различное, осуществлять классификацию, проводить аналогию, обобщать, аргументировать собственное решение задания [17].

### 5. Развитие критического мышления.

В контексте психологии критичность трактуется как одно из свойств ума и определяется как осознанный контроль за ходом интеллектуальной деятельности человека. Критичное мышление – мышление, способное рассудить объективно и поступить логично с учетом, как своей точки зрения, так и других мнений, а также, основанное на собственном опыте, при решении мыслительных задач. В процессе решения математических задач критическое мышление позволяет осуществить выбор между несколькими гипотезами и тем самым определяет дальнейшее направление мысли. Критическое мышление необходимо при анализе, синтезе, классификации, сравнении [17]. Оно подразумевает обязательное присутствие этапа проверки, позволяет делать обоснованные оценки предположений перед ответом на поставленный вопрос с точки зрения их достоверности и значимости, в противовес оперированию готовыми фразами, подсказанными памятью, без участия их творческой переработки, интерпретации и применять полученные результаты к изменённым ситуациям и проблемам. Одним из эффективных методических приёмов в работе по формированию критичности мышления на уроках математики является использование математических софизмов. Можно сделать заключение: развитие критического мышления – важный фактор усиления потенциала школьной математики для формирования РУУД обучающихся [17].

## 6. Развитие творческого мышления.

Творческое мышление или креативность – это способ мыслить, процесс, который ведёт к созданию нового. Оно связано с развитым ассоциативным мышлением и воображением человека [17]. Развитие способности мыслить креативно, творчески на уроках математики эффективно через решение учебно-исследовательских задач, позволяющих находить всегда и во всем несколько вариантов решения, выбирать лучший вариант, и т. д. Поэтому такие задачи способствуют формированию самостоятельного поиска решения математических задач, «открытия» новых знаний, фактов, явлений закономерности, закреплению научных методов исследования [17].

Можно отметить потенциал математики и для развития других, личностных качеств учащихся, в процессе обучения: гуманитарный, воспитательный, эстетический. Но, для организации системной и целенаправленной работы по формированию регулятивных универсальных учебных действий у учащихся общеобразовательной школы в процессе обучения математике не менее важно определить подходы, и разработать модель организации образовательного процесса [17].

В ходе проведенного анализа и смежных научных исследований мы пришли к выводу, что основными теоретическими положениями должны стать следующие:

1. Единство психики и внешней деятельности (Л. С. Выготский, П. Я Гальперин, В. В. Давыдов, Д. Б. Эльконин, др.). При этом деятельность следует рассматривать как преднамеренную активность человека при взаимодействии его с окружающим миром для решения жизненно важных задач, определяющих его существование и развитие [17].

2. Обучение как процесс взаимодействия субъектов, т. е. организованное общение между теми, кто обладает знаниями и определённым опытом, и теми, кто их приобретает [281].

3. Исследовательская деятельность как основа процесса формирования регулятивных универсальных учебных действий. Исследовательская деятельность рассматривается как особый вид интеллектуально-творческой деятельности и эффективный способ стимулирования познавательных потребностей личности учащегося, обеспечивает максимальное развитие способностей учащегося к саморегуляции и самообразованию [17].

4. Система формирования регулятивных универсальных учебных действий одновременно выступает и как управляемый и как управляющий объект.

Результатом управленческих усилий является сформированность регулятивных универсальных учебных действий. Предпосылки для формирования и развития регулятивных универсальных учебных действий создает управляемая педагогом модель обучения, направленная на саморазвитие обучаемых, обучение их эффективному управлению процессами саморазвития и самоконтроля [17] (рисунок 6). Исследовательское обучение способствует тому, чтобы психическое развитие ребенка изначально разворачивалось как управляемый процесс саморазвития, саморегуляции.

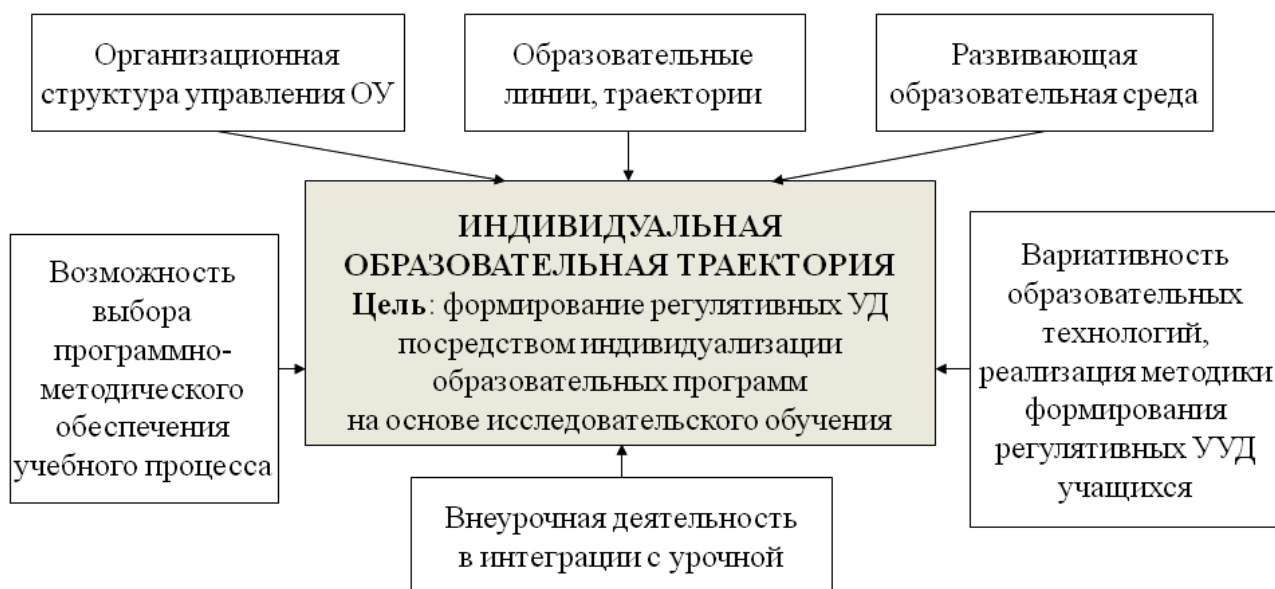


Рисунок 6 – Модель организации образовательного процесса, ориентированного на формирование регулятивных универсальных учебных действий при исследовательском обучении

Рассмотрим характеристики модели организации образовательного процесса, ориентированного на формирование регулятивных универсальных учебных действий при исследовательском обучении [17] математике.

Концептуальной идеей построения модели является индивидуализация содержания математического образования в зависимости от способностей и интересов обучающихся к математике. Модель направлена на использование учебного исследования в процессе обучения математике для формирования регулятивных универсальных учебных действий учащегося. Целевое назначение модели состоит в формировании регулятивных универсальных учебных действий в процессе обучения математике в интеграции урочной и внеурочной деятельности [17]. Задачи модели:

- создание развивающей способности и интерес к математике образовательной среды общеобразовательной организации и вовлечение в неё обучающихся;

- формирование регулятивных учебных действий;

- обеспечение самореализации и самоопределения школьников в процессе обучения математике.

Следуя данной модели, обучение математике в 5 классе может быть организовано следующим образом.

Предложение общеобразовательного учреждения (ОУ):

1. Урочная деятельность (5 ч).

2. Внеурочная деятельность: курс «Наглядная геометрия» (2 ч).

3. Курс «Проектная деятельность по математике» (2 ч).

4. Внеклассная работа:

- кружок «Готовимся к Олимпиаде по математике» (1 ч),

- «Оригами» (1 ч),

- посещение музеев естественнонаучной направленности,

- участие в математических и интеллектуальных конкурсах различного уровня.



Регулятивные УУД: целеполагание, прогнозирование, планирование, контроль, оценка, коррекция, волевая саморегуляция, – при обучении математике специфичны. В зависимости от индивидуальных особенностей учащихся, их уровня подготовки и выбора уровня изучения предмета, учитель должен быть готов определить операционный состав регулятивной деятельности:

- на репродуктивно-вариативном: учитель ставит проблему, определяет стратегию и тактику её решения, а учащийся, выполняя наблюдение, сравнение свойств, явлений, исследуя причинно-следственные связи, формулируя выводы на основе единичных операций действия, находит решение [22].

- на вариативно-эвристическом:

1) учитель ставит проблему, но уже метод её решения ученик ищет самостоятельно (допускается коллективный поиск), или

2) учитель ставит проблему, ученик самостоятельно ищет метод её решения и осуществляет его (допускается индивидуальное сопровождение учителем, формулируя цели работы, выявляя зависимости между свойствами [22], явлениями, используя математический язык для изображения (график, схема, таблица), высказывая суждения, формулируя выводы [17];

- на эвристическом:

учащиеся самостоятельно ставят проблему, осуществляют поиск методов её решения, разрабатывают план решения, проводят эксперимент, делают умозаключения и выводы, структурируют материал, подготавливают текст выступления, защищают свою идею [22].

Учитель математики продолжает уровневый подход в целенаправленном формировании операционного состава РУУД и во внеурочной деятельности по математике.

*Первый уровень (репродуктивно-вариативный) – «Экспромт-исследование».* Учитель предлагает учащимся задание, выполненное на уроке, изменить, ввести дополнительные условия и оценить результат [247]. Учащиеся развивают ход событий (в силу фантазии) и составляют математическую модель «своей» задачи. Учитель помогает ученикам составить план решения задачи и

реализовать его, осуществляя контроль и коррекцию результатов. Исследования этого уровня выполняют все ученики, что предполагает формирование мотивационно-ценностного компонента самоорганизации в учебной деятельности каждого учащегося [17].

*Второй уровень (вариативно-эвристический) – «Мини-исследование».* Учитель математики предлагает учебные задания на «знание», «понимание», «умение» и «диагностику» [17], а учащиеся, выполняя эти задания, осваивают новое предметное содержание и УУД метапредметного характера.

Например, при изучении темы «Пропорции» в 6 классе учитель предлагает ученику задание (на занятии внеурочной деятельности) на небольшой (2 – 3 занятия) промежуток времени – «Золотое сечение в архитектуре» (краткая информация есть в школьном учебнике). План выполнения задания, его реализацию и защиту ученик выполняет самостоятельно (в сотрудничестве с одноклассниками или со старшими). Исследования этого вида выполняются учащимися по желанию, при этом формируется устойчивый интерес к изучению математики, устойчивая мотивация к успешному обучению [17].

*Третий уровень (эвристический) – «Самостоятельное исследование» (макси):* практико-ориентированное задание. Уровни заданий:

- 1) эвристический, учащиеся самостоятельно определяют объем, уровень, источники информации и собственный вариант решения;
- 2) импровизационный, учащиеся самостоятельно выбирают информационный материал изученной темы и форму выполнения задания;
- 3) информативный, информацию и форму выполнения задания предлагает учитель.

Такие исследования ученики выполняют только по желанию, при этом формируются стремление к самообразованию, саморазвитию [17].

Всё вышесказанное даёт возможность утверждать: при обучении математике интеграция урочной и внеурочной деятельности на основе исследовательского обучения, способствует формированию регулятивных учебных действий учащихся [20].

Мы предлагаем сопроводить действующую систему дидактических принципов обучения математике [105] следующими условиями:

- обучение, воспитание и целенаправленное формирование РУУД учащихся организуется как единая целостная система;

- основа процесса обучения - специально организованная учебно-исследовательская деятельность каждого ученика с учетом его индивидуальных особенностей;

- процесс получения знаний учащимся - результат его собственного открытия, учебно-исследовательской деятельности, которой руководит учитель;

- процесс обучения – вопросы, которые необходимо решить в совместной деятельности: педагог + учащиеся;

- необходимо обеспечить запуск внутренней мотивации ученика, стимулирование желания учиться, стремления самообучения, самоконтроля, самокорректирования, самооценивания.

Подводя итоги сказанному в данном параграфе, заключаем, что система дидактических принципов обучения математике в процессе формирования РУУД, выявленные взаимосвязи содержательных математических линий, их «собственных» методов и необходимых регулятивных учебных действий учащихся позволят выстроить методическую систему формирования РУУД учащихся при обучении математике.

## Выводы по I главе

1. Регулятивные универсальные учебные действия (РУУД) учащихся обеспечивают возможность управления собственной учебной деятельностью при обучении математике путем определения целей, планирования, контроля, коррекции своих действий и оценки успешности выполнения намеченных задач по результатам обучения математике, что создает почву для последовательного перехода к самоуправлению и полной осознанной саморегуляции. Показателями сформированности регулятивных универсальных учебных действий выступают активность и самостоятельность в учебной деятельности, способность ориентироваться в новой ситуации, сознательные мотивированные действия.

2. Содержательно-процессуальной основой формирования регулятивных универсальных учебных действий при обучении математике может стать учебно-исследовательская деятельность. Управление регулятивными универсальными учебными действиями в процессе учебно-исследовательской математической деятельности обеспечивает целенаправленное, точечное воздействие на определенные объектные и субъектные характеристики обучающихся. В результате достигается цель стабилизации или изменения их состояния таким образом, чтобы достичь поставленных учебных целей, направленных на личностно-интеллектуальное развитие обучаемых.

3. Педагогическими условиями формирования регулятивных универсальных учебных действий в процессе обучения математике являются:

- обеспечение индивидуализации образовательных программ и путей их усвоения в зависимости от способностей и интересов обучающихся к математике;

- формирование развивающей способности и интереса к математике, создание образовательной среды общеобразовательной организации и вовлечение в неё обучающихся;

- организация внеурочной деятельности учащихся по математике как процесса освоения регулятивных универсальных учебных действий.

Индивидуальная образовательная программа – это программа деятельности школьника, которая обеспечивает ему позицию субъекта в выборе вариативного содержания образования и соответствующих его интересам и потребностям форм образования.

Развивающая среда – это среда, направленная на обеспечение единства процессов саморазвития и социального взаимодействия с учетом психофизиологических обстоятельств жизнедеятельности школьника, адекватных его возрастным особенностям. Принципами формирования РУУД учащихся в процессе обучения математике в развивающей образовательной среде являются: информированность, эмоциональная насыщенность, оптимальное соотношение процессов развития и саморазвития школьника, открывающее перспективы реализации субъектного опыта детей в различных видах деятельности, направленность на формирование интегративных качеств личности.

Внеурочная деятельность учащихся рассматривается как целенаправленный процесс обучения, воспитания и развития личности посредством реализации дополнительных образовательных программ [17]. Внеурочная деятельность по математике способствует формированию у учащихся деятельной активности, социального интеллекта, саморегуляции, ответственности, толерантности, эмоционально-позитивного отношения к миру, диалогичности и сотрудничества с другими, стремления к позитивным изменениям в социуме.

4. Процесс формирования регулятивных универсальных учебных действий в рамках любого учебного предмета обладает специфическими особенностями. В процессе обучения математике он связан с интеллектуальным воспитанием учащихся и управлением обогащением его умственного опыта. Возможности школьного курса математики в продуктивном формировании регулятивных универсальных учебных действий проявляются в следующем:

- изложение школьного курса математики закодировано разными способами: словесно, символично-графически, таблично, др. [17]. Понимание этого

своеобразного языка связано с развитием речи (как внешней, так и внутренней). Математический язык – универсальное средство выражения математической мысли, форма её существования. Применение математического языка позволяет преобразовать специальную информацию в доступную для широкой аудитории форму.

- применение математических знаний и методов (количественная оценка, структурирование информации, алгоритмический подход, моделирование, индуктивное и дедуктивное рассуждение, др.) важны для овладения эффективными способами *переработки учебной информации*. Содержание практической части школьного курса математики предполагает моделирование проблемных ситуаций, вариативный подход к решению, выбор наиболее рационального. Умения делать *анализ текста* (семантический, логический, математический), *переводить текст* с помощью вербальных и невербальных единиц в форму модели (выявлять свойства и отношения), *устанавливать отношения* между данными и вопросом (определять достаточность, недостаточность, избыточность данных), *составлять и осуществлять план решения*, *делать проверку и оценивать результат* – необходимый набор регулятивных умений.

- применение навыков самостоятельной работы с дифференцируемыми заданиями по математике (задания на репродуктивно-вариативном уровне, на вариативно-эвристическом уровне, на эвристическом уровне) [17] формирует у учащихся способность регуляции самооценивания своих возможностей, знаний (выбор уровня заданий), уровень самостоятельности и степень помощи при выполнении заданий (волевая регуляция), планирования действий по коррекции знаний [17];

- развитие логического мышления при рассмотрении объектов математических умозаключений и правил их конструирования вскрывает механизм логических построений, вырабатывает умения раскрывать причинно-следственные связи, различать обоснованные и необоснованные суждения, сравнивать, проводить аналогию и обобщать, аргументировать эффективность собственного реше-

ния [17], формирует действие смыслообразования, установление связи между целью учебной деятельности, её мотивом и результатом учения;

- развитие критического мышления используется для анализа, синтеза, классификации, сравнения вещей и событий с формулированием обоснованных выводов и позволяет выносить обоснованные оценки, интерпретации, а также корректно применять полученные результаты к ситуациям и проблемам;

- развитие творческого мышления на уроках математики через решение учебно-исследовательских задач способствуют формированию самостоятельного поиска решения, «открытия» новых математических знаний, фактов, явлений закономерности, закреплению навыков научного исследования [17].

## **Глава II МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ РЕГУЛЯТИВНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ**

### **2.1 Модель методической системы формирования РУУД школьников при обучении математике**

Для описания основного понятия нашего исследования – модели методической системы формирования РУУД школьников при обучении математике – будем следовать идеологии системного подхода. С этой целью будем исходить из общенаучных положений теории систем и ее реализации в педагогических науках.

Под системой в общем случае понимается совокупность элементов и связей между ними, выделенных как единое целое из внешней среды [278] в соответствии с некоторыми признаками [8]. Эти признаки, придающие выделенным элементам целостность, называются эмерджентностью (целостность). Модель системы – это идеальный образ объективно существующей системы, адекватно отражающий как сами элементы системы, так и их взаимодействия между собой и с внешней средой.

Системный подход в теории и методике обучения математике применяется довольно широко. В частности, с точки зрения системного подхода описано понятие методической системы. Компонентный состав методической системы обучения математике предложен А. М. Пышкало в 1975 году [187]. Первоначально А.М. Пышкало включает в состав методической системы пять элементов: цели, содержание, методы, формы и средства [278]. Далее эта система усовершенству-



ется рядом авторов и в ее состав включаются дополнительные элементы. В частности, исследованиями методической системы занимались ученые-методисты: В. П. Беспалько, В. А. Гусев, Т. А. Иванова [96], Н. В. Кузьмина [126], А. Г. Мордкович, В. А. Тестов [231], Г. И. Саранцев [203] и др. В результате, в состав методической системы был включен еще один элемент – диагностика.

Таким образом, методическая система формирования РУУД учащихся при обучении математике будет представлена в составе четырех компонентов:

- целевого;
- содержательного;
- операционального (формы, методы, средства);
- диагностического.

Система реализует задачи обучения, воспитания и развития личности в единстве и взаимосвязи [278]. Проведенные в первой главе теоретический анализ, обобщения, систематизация позволяют перейти к конструированию модели методической системы формирования РУУД школьников при обучении математике (см. рис. 7). В представленной модели формирование РУУД рассматривается как результат целенаправленно-мотивированных управленческих усилий в контексте реализации положений системно-деятельностного подхода и осознанной саморегуляции учеников. Особая роль в формировании РУУД принадлежит УИД – учебно-исследовательской деятельности. Составляющие методической системы подчинены целевому компоненту и соответствуют выявленным педагогическим условиям. Модель методической системы формирования РУУД учащихся в процессе обучения математике в общеобразовательной школе конструируется в составе четырех компонентов: целевого, содержательного, операционального (формы, методы, средства обучения), диагностического.

Методологической основой конструируемой методической системы является системно-деятельностный подход и общедидактические принципы, рассмотренные в п.1.1. Целостность (эмерджентность) системе придает ее ориентированность на достижение межпредметных результатов обучения и рассмотре-

ние РУУД с точки зрения осознанной саморегуляции личности, что является интегративным свойством личности, см. п. 1.2. Эта система – управляемая, т.к. имеет целевой блок: глобальные цели описаны в п.1.1 [19]. Основой отбора содержания, форм, методов и средств обучения является система дидактических принципов (см. п. 1.4, Таблица 12) и обоснованная целесообразность организации учебного процесса в виде УИД – учебной исследовательской деятельности учащихся, см. п.1.2. Методическая система является открытой, т. к. ее элементы взаимодействуют с внешней средой; педагогические условия функционирования системы обоснованы в п. 1.3 [19]. Дальнейшее построение компонентов системы, их более детальное описание будет продолжено в работе во второй главе.

Итак, методическая система формирования РУУД учащихся при обучении математике включает в качестве основных компоненты, характеризующие установление целей обучения, определение её основного содержания, описывающие педагогический процесс технологии (формы, методы, средства), дающие представление о результатах обучения и их диагностике. Указанные компоненты определяют проектируемую модель методической системы в виде совокупности четырёх взаимосвязанных компонентов:

- *целевого* (глобальная и сопутствующие цели),
- *содержательного* (основные содержательные компоненты учебного материала, состав РУУД по математике, разработанные с опорой на развитие мотивации и саморегуляции учащихся),
- *операционального* (формы, методы, средства, обеспечивающие организацию учебной деятельности в виде УИД – учебной исследовательской деятельности)
- *диагностического*.

**МОДЕЛЬ МЕТОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ  
ФОРМИРОВАНИЯ РУУД УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ  
В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ**



*Рисунок 7 - Модель методической системы формирования РУУД учащихся в процессе обучения математике в основной общеобразовательной школе*

Как уже отмечалось, методологической основой построенной методической системы являются системно-деятельностный подход, система общедидактических принципов, а также и следующие специальные принципы методики формирования регулятивных универсальных учебных действий учащихся при обучении математике:

- *принцип структуризации* требует деления учебного материала урока по математике на структурные элементы – математические учебные исследования, каждое из которых имеет свою конкретную дидактическую цель, а содержание обучения математике представляется в объеме, обеспечивающем ее достижение;

- *принцип динамичности* обеспечивает вариативность набора математических приёмов исследовательской деятельности с учетом индивидуальности учащихся;

- *принцип гибкости* предполагает организацию математических исследований таким образом, чтобы они легко адаптировались к уровням математической подготовки обучаемых;

- *принцип постепенности* обеспечивает поэтапное выполнение математической деятельности, не пропуская ни одного «шага» исследования;

- *принцип паритетности* предполагает субъект-субъектные отношения между учителем математики и обучаемым;

- *принцип реализации обратной связи* способствует созданию системы контроля и самоконтроля, коррекции и самокоррекции, оценки и самооценки успешности учебно-познавательной математической деятельности;

- *принцип осознанной перспективы* подчеркивает, что условием успешности обучения математике являются сформированная осознанная саморегуляция учебно-познавательной математической деятельности [19].

Основным видом учебно-познавательной деятельности учеников, который реализуется в построенной методической системе, является учебно-исследовательская деятельность – УИД. Она нацелена на максимальное использование

внутренней познавательной активности учащегося, на его познавательную мотивацию [20]. Этот вид деятельности направлен на раскрытие, развитие и саморазвитие саморегуляции учащегося, его психологического познавательного потенциала, предполагает создание в рамках образовательного процесса условий для творчества, самостоятельного разрешения проблемных ситуаций, выдвижения гипотез, поиска путей их опровержения или доказательства, подведения итогов, – т. е. всех тех действий, которые ведут к формированию РУУД. Таким образом, учебно-исследовательская деятельность является именно той деятельностью, в рамках которой формирование РУУД осуществляется наиболее естественным путем. Рассмотрим это подробнее.

Содержание УИД формируется на основе анализа специфики деятельности учителя математики, в результате которого определяются конкретные задачи деятельности и её структура.

За структурную единицу деятельности принимается *учебное исследование (УИ)* – относительно самостоятельная единица профессиональной деятельности, выполняемое в рамках конкретного этапа урока; выделяется логическим путем и имеет четко обозначенные начало и окончание [19].

Результатом выполнения учебного исследования является открытие нового для учащегося математического знания, формирование регулятивных универсальных учебных действий или принятие значимого решения.

Структурирование профессиональной деятельности учителя математики в виде учебного исследования как преобладающего инструмента обучения позволяет формировать на их основе систему формирования регулятивных универсальных учебных действий учащихся [19].

Учащиеся многократно выполняют необходимые приёмы в самостоятельном математическом учебном исследовании и оценке результатов, что обеспечивает формирование у обучаемых устойчивых знаний и навыков учебно-познавательной математической деятельности, регулятивных универсальных учебных действий.

Совокупность математических учебных исследований, которые выполняются на конкретном этапе уроков, составляет систему формирования определённого регуляторного компонента. Совокупность таких систем представляет систему формирования осознанной саморегуляции учащихся [19].

Целенаправленное формирование РУУД учащихся при обучении математике предполагает проектирование урока с преимущественной организацией учебно-познавательной деятельности в виде учебно-исследовательской деятельности, с внедрением приёмов учебных исследований на различных этапах урока [19].

**1. Целевой компонент методической системы** обусловлен необходимостью формирования полной осознанной саморегуляции у учащихся с учетом особенностей взаимодействия: «учитель математики – ученик», «ученик – ученик», «учение – ученик», при этом ожидаемые результаты заключаются [20] в формировании регулятивных универсальных учебных действий, повышении качества обучения математике. Компоненты предлагаемой методической системы: содержательный, операциональный, диагностический – подчинены целевому компоненту и обеспечивают наиболее эффективное достижение поставленных целей [19].

Целевой компонент методической системы определяет цели и ожидаемые результаты. Общепринято в науке, что цель – это предполагаемый, заранее (мысленно или вербально) планируемый результат деятельности по преобразованию какого-либо объекта. В нашем исследовании это целенаправленное формирование регулятивных универсальных учебных действий учащихся – РУУД, способствующее становлению субъектности учащегося. Становление субъектности учащегося как условия реализации активной жизненной позиции человека предполагает «сформированность структуры саморегуляции, включающей такие компоненты, как ценностно-мотивационный, смысловой, опыт рефлексии, опыт привычной активизации, операциональный опыт и опыт сотрудничества» [115].

Целевой компонент методики представлен в виде таблицы 3 (см.п.1.2) соотнесения этапов учебно-исследовательской деятельности и формируемых регулятивных универсальных учебных действий в соответствии с компонентами процесса саморегуляции по О. А. Конопкину [115].

Чем должен руководствоваться учитель математики, ставя перед собой цель: формирование у учащихся регулятивного универсального учебного действия?

- Цель должна быть сформулирована так, чтобы, о её достижении можно было судить однозначно.

- Цель должна описывать результаты процесса обучения математике конкретно, в точных терминах наблюдаемого и измеряемого поведения.

Такой подход поможет учителю математики сконцентрировать усилия на главном. Учитель выделяет, конкретизирует, упорядочивает цели, определяет задачи, устанавливает порядок деятельности, обозначает перспективы. Совместная работа учителя математики и учеников предполагает ясность и гласность. Конкретные учебные цели дают возможность сориентировать учащихся в учебной математической деятельности и обсудить её. Кроме того, обращение к четкой формулировке цели позволяет более объективно оценить результат математической деятельности.

Постановка целей основана на развитии внутренней мотивации учащихся к изучению математики, на динамике её развития, влиянии на формирование регулятивных универсальных учебных действий [23]. Мотивация окажет влияние на формирование у учащегося регулятивных универсальных учебных действий: постановка целей реальных и выполнимых; адекватная самооценка своей деятельности, осознание своих сил; рефлексия, обратная связь; ответственность за свои действия и полученный результат [23]. Влияние мотивации на формирование регулятивных универсальных учебных действий учащихся при обучении математике отражено в таблице 4 (см.п.1.2) соотнесения этапов учебно-исследовательской деятельности и формируемых регулятивных универсальных учебных

действий в соответствии с классификацией мотивов учения, предложенной А. К. Марковой [154].

2. *Содержательный компонент методической системы* представлен математической, информационной, методологической составляющими математического образования с целью формирования РУУД учащихся [23]. Это вариативные, конвергентные, исследовательские задачи; учебно-исследовательские и научно-исследовательские проекты, практические работы. Как можно видеть, предпочтение в отборе математического содержания отдается заданиям исследовательского типа, т. е. делается акцент на организации учебной деятельности в виде УИД.

Покажем процесс формирования РУУД на содержании алгебры 8 класса, рассматривая фрагмент изучения темы «Различные способы решения квадратного уравнения. Формулы корней квадратного уравнения». На этом уроке учебно-исследовательская деятельность выступает в качестве содержательно-процессуальной основы процесса формирования РУУД учащихся. Цель урока: формирование РУУД учащихся – целеполагания, планирования, прогнозирования, контроля, коррекции, оценки, волевой саморегуляции – на математическом содержании, связанном со способами решения квадратного уравнения. Метод обучения: вариативно- эвристический. На уроке ставится учебная задача: обобщить известные методы решения квадратного уравнения, освоить доказательство формулы корней квадратного трехчлена.

На этапе актуализации знаний учитель предлагает ученикам решить практическую задачу: «От квадратного листа картона отрезали полоску шириной 3 см. Площадь оставшейся части равна  $70 \text{ см}^2$ . Найдите первоначальные размеры листа картона».

На этом этапе ученики осуществляют осмысленное чтение, принятие и постановку учебной задачи. Далее учитель организует диалог, в результате которого ученики выделяют данные задачи, требование, осуществляют постановку цели решения задачи, прогнозирование результата.



На вопрос учителя: «Как можно решить задачу?» - учащиеся предлагают свой план решения задачи, коллективно обсуждают предложения, при этом в классе условно образуется три группы. Опишем возможные варианты дальнейшей работы.

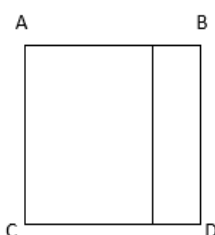
Школьники одной группы садятся рядом, учитель дает задания с целью формирования РУУД:

- составьте и запишите свой план решения задачи (планирование, целеполагание);
- какой результат вы предполагаете получить? (прогнозирование);
- выполните решение и проверьте его (контроль, оценка, коррекция);
- единственно ли решение задачи? (контроль);
- оцените свою работу (оценка);
- было ли трудным решение задачи? (самооценка);
- потребовалось ли проявлять волевые усилия? (самооценка, волевая саморегуляция);
- обсудите в группе, проверьте решение и исправьте ошибки, если они есть (оценка, коррекция).

Далее каждая из групп приступает к выполнению заданий.

*Первый способ* основан на подборе решения, при этом формируется универсальное действие прогнозирования. В то же время в рамках этого способа невозможно доказать единственность найденного подбором решения, т. е. потребуются коррекция условия задачи: если в условие задачи добавить требование, что сторона квадрата является целым числом, то единственность можно будет обосновать. Завершающие контроль и оценка выявляют достоинства и недостатки этого метода.

#### Способ №1.



Из условия: «Площадь оставшейся части равна  $70\text{см}^2$ », зная формулу площади прямоугольника, перебирают числа, которые в произведении дают 70 и отличаются на 3.

Находят решение: 1)  $7 \cdot 10 = 70$ , 2)  $10 - 7 = 3$ .  
 Делают вывод, что сторона квадрата равна 10 см.

*Второй способ* предполагает аналитическое решение получившегося квадратного уравнения методом разложения на множители. Способ группировки слагаемых не очевиден, требуется спрогнозировать, спланировать, проверить свои действия, осуществить контроль.

### Способ №2

Составляют уравнение, где  $x$  см – длина одной стороны прямоугольника,  $(x - 3)$  см – длина смежной стороны, соответственно;  
 $x \cdot (x - 3)$  см<sup>2</sup> - выражение для площади получившегося прямоугольника, равной 70 см<sup>2</sup>.

Аналитическое решение предполагает навык у учащихся доработки квадратного трехчлена до многочлена из 4 слагаемых так, чтобы можно было воспользоваться способом группировки для разложения на множители.

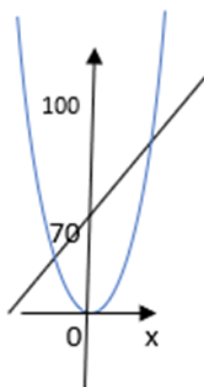
Т. е.  $x^2 - 3x - 70 = 0$ ,  $x^2 - 10x + 7x - 70 = 0$ ,  $x \cdot (x - 10) - 7(x - 10) = 0$ ,  
 $(x - 10) \cdot (x - 7) = 0$ , откуда  $x = 10$  и  $x = 7$ .

Учащиеся делают вывод о величине стороны квадрата. Ответ: 10см.

*Третий способ* – графический, этот способ требует проявления волевой саморегуляции, т. к. выбор масштаба и построение графиков линейной и квадратичной функций нетривиальны, в такой постановке ранее не встречавшиеся ученикам. Оценка, контроль завершают решение задачи.

### Способ № 3.

Составляют квадратное уравнение, решают его графически, сталкиваясь с проблемой выбора масштаба для построения параболы и прямой, что непривычно для заданий такого типа.



$$y = x^2 \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & -10 & 0 & 10 \\ \hline y & 100 & 0 & 100 \end{array}, \quad y = 30x + 70 \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 10 \\ \hline y & 70 & 100 \end{array}$$

Ответ: 10 см.

После выполнения учениками заданий учитель подводит итог и предлагает решить квадратное уравнение, получившееся в задаче, методом выделения полного квадрата двучлена, т. е. переходит к постановке новой учебной задачи: освоение доказательства формулы корней квадратного трехчлена.

Пока учащиеся выполняют работу, учитель оценивает мотивацию выбора, их работу во время обсуждения способов решения задачи, отмечает динамику изменения активности, долю самостоятельности, креативности, аргументирования выбора, проводит оценку сформированности РУУД [23].

Цель действий педагога – «формирование РУУД школьников путем: согласования всех уровней регуляции деятельности обучающихся (восприятие затем мышление); активизации способов реализации индивидуальных способностей; применения индивидуальных темпов деятельности; создания акцента на трудность (обратное); постепенного увеличения доли самостоятельности и ответственности учащихся; постепенного перехода к самоуправлению своей учебно-познавательной деятельностью у каждого учащегося» [23].

Можно представить действия учителя и учащихся (для данного фрагмента урока) в единой таблице 13.

*Таблица 13 - Взаимосвязь деятельности учителя и учащихся при формировании регулятивных учебных действий учащихся*

<b>Деятельность учителя</b>	<b>Деятельность учащихся</b>	<b>Какой операционный состав РУУД формируется</b>
Читает текст задачи вслух Организует диалог: условие задачи – вопрос задачи	Читают вместе с педагогом (про себя) Самостоятельно читают текст и вычленяют условие и вопрос задачи	- ставить учебную задачу, - определять и формулировать цель деятельности
Организует диалог: какие возможны подходы к решению задачи	Высказывают идеи; формулируют гипотезу, планируют и проектируют решение, прогнозируют результат	- планировать свои действия, учитывать правила планирования и находить контроль способа решения
Организует деятельность учащихся	Оценивают способы решения и свои возможности, знания, выбирают способ решения, планируют свою деятельность, принимают решение о помощи и степени этой помощи от учи-	- осуществлять необходимые действия по реализации плана

	теля, переводят устную речь в письменную, на математическом языке [23];	
Сопровождает самостоятельную работу учащихся [23]	Преодолевают трудности при встрече с проблемами в решении задачи: возможная вариативность перебора чисел, выбор масштаба при построении графика, разложение на множители многочлена;	- использовать внешние и внутренние ресурсы [23].
Организует диалог по результату выполнения работы	Анализируют степень трудности решения задачи выбранным способом, сопоставляют результат, делают выводы, аргументируют, выступают перед одноклассниками, оценивают свой и их результат деятельности	- учитывать правила планирования и находить контроль способа решения сравнивать полученные результаты с учебной задачей [23].
Подводит итоги выполнения работы	Принимают оценку своей деятельности от педагога, делают выводы о своих проблемных зонах и планируют действия по их устранению	- уметь соотносить результат своей деятельности с целью; - вносить необходимые коррективы в действия [23].
Объясняет способ решения полного квадратного уравнения с помощью формул корней квадратного уравнения	Внимательно слушают и воспроизводят предлагаемый алгоритм, проявляют интереса к рациональному решению, интерес к возможностям математики в решении прикладных задач	- вносить изменения в содержание задач, ставить новые учебные задачи [23].

Учитель, включая каждого учащегося в совместный поиск знаний, умело регулируя детскую инициативу, поддерживая поисковую активность учащихся, направляя их к самостоятельному открытию средств и способов решения задач, формирует у школьников умение учиться самостоятельно, т. е. формирует РУУД [23].

Учитель регулирует учебную деятельность учащихся, направляя ее не только на освоение предметных знаний, но и на освоение универсальных учебных действий, овладение самой учебной деятельностью, направленной «на себя», т. е. на личностный результат, и в частности, на РУУД. Предлагаемый подход нужно повторить неоднократно, на уроках разного типа [23].

При многократном повторении выполняемой деятельности учащийся и сам меняется, и меняет средства, используемые для выполнения деятельности. Таким образом естественно происходит и процесс научения, и связанное с этим

процессом развитие учащегося, и совершенствование его индивидуальных способностей, освоение всей системы универсальных учебных действий.

**3. *Операциональный компонент методической системы*** включает формы, методы, приемы, технологии обучения математике. Реализация целей и задач обучения математике осуществляется посредством организации обучающего взаимодействия с помощью определенных методов, приемов, технологий, организационных форм. Важнейшим условием достижения адекватных поставленным целям результатов становится соответствие им способов обучения (методов и приемов) и способов организации взаимодействия между участниками учебного процесса (форм обучения). Операциональный компонент представлен в виде таблицы 5 (см. п.1.2, гл.1) соотнесения этапов учебно-исследовательской деятельности и формируемых регулятивных универсальных учебных действий в соответствии с таксономией образовательных целей Блума (обновлённой) [20].

Операциональный компонент методической системы предполагает организацию процесса обучения математике по освоению содержания в виде учебно-исследовательской деятельности и в соответствии с уровнями самостоятельной познавательной деятельности учащихся по П. И. Пидкасистому [20]: репродуктивно-вариативному, вариативно-эвристическому, эвристическому.

При этом регулятивные универсальные учебные действия, необходимые для выполнения учебно-исследовательской деятельности, сначала формируются у учеников, а затем используются ими при освоении новой учебной информации. Основания такого подхода к организации процесса обучения школьников математике представлены в таблице 14 [20].

Таблица 14 – Соответствие уровней обучения ИД, приёмов обучения ИД, характера деятельности учащихся и планируемого результата

Уровни обучения ИД	Приёмы обучения ИД	Характер деятельности учащихся в соответствии с уровнями и приёмами обучения ИД	Предполагаемый результат
I	«Экспромт-исследование» (от лат. <i>exprom(p)tus</i> – готовый): учащимся предлагается мотивационно значимое «ситуационное» задание, в ходе выполнения которого выявляется противоречие между желанием разрешить ситуацию и отсутствием необходимых для этого знаний и умений	Первым и вторым этапами исследовательской деятельности руководит учитель, демонстрируя учащимся образцы деятельности на этих этапах. На третьем и четвёртом этапах [20] ученики вместе с учителем составляют план решения проблемы и реализуют его. Контроль и коррекцию результатов исследования (пятый этап) выполняет учитель. Подготовку к представлению результатов исследования и представление результатов (шестой этап) выполняют ученики в ходе организованной групповой работы.	В ходе проведения экспромт-исследования у учащихся, во-первых, развиваются и формируются познавательные, регулятивные и коммуникативные учебные действия. Во-вторых – происходит формирование соответствующих компонентов регуляторного процесса [20]. Важным является тот факт, что исследования этого вида выполняют все ученики, с учётом уровня обученности, а значит, формируется мотивационно-ценностный компонент самоорганизации в учебной деятельности каждого учащегося

## Продолжение таблицы 14

Уровни обучения ИД	Приёмы обучения ИД	Характер деятельности учащихся в соответствии с уровнями и приёмами обучения ИД	Предполагаемый результат
II	«Мини-исследование» предлагаются учебные задания на «знание», «понимание», «умение» и «диагностику», последовательное выполнение которых позволяет школьникам не только освоить предметно-содержательный блок, но и овладеть информационно-интеллектуальными умениями метапредметного характера [21].	Предлагается ученику в виде предварительного домашнего задания на достаточно короткий промежуток времени. Отличие исследовательской деятельности на этом уровне состоит в том, что третий, четвёртый и шестой этапы ученик выполняет самостоятельно, возможно, в сотрудничестве со сверстниками или со старшими, а результатом исследования является обязательное создание собственных образовательных продуктов. Исследования этого вида ученики могут выполнять как по желанию, так и в обязательном порядке. Этот выбор зависит от целей обучения и содержания изучаемой темы, сложности задания и др.	В ходе работы над мини-исследованием у учащихся формируются самостоятельные навыки поиска и обработки информации; анализа и обобщения найденного материала; навыки создания презентации к выступлению; навыки практического применения «новых» знаний [21]. Главное – формируется устойчивый интерес к изучаемому предмету, желание узнать больше из других источников, и как следствие - устойчивая мотивация к успешному обучению. Устанавливается уровень освоения содержательного блока темы [21].

## Продолжение таблицы 14

Уровни обучения ИД	Приёмы обучения ИД	Характер деятельности учащихся в соответствии с уровнями и приёмами обучения ИД	Предполагаемый результат
III	«Самостоятельное исследование» (макси): практико-ориентированное задание определенного уровня [21]. Исследования этого вида ученики могут выполнять только по желанию	Уровни заданий: - эвристический, предусматривает самостоятельное определение учащимися объема [21], уровня, источников информации и создание собственного варианта решения; - импровизационный, предусматривает выбор информационного материала изученной темы и формы выполнения; - информативный, где информационный материал и форма выполнения предлагаются учителем	Формируются качества конкурентоспособной личности, ответственной за поступки, стремящейся к самообразованию, саморазвитию [21], обогащается опыт активной интеллектуальной деятельности, формируются субъект-субъектные отношения, познавательные умения – всё то, что необходимо для проведения длительных исследований во внеурочной деятельности;
IV	Защита исследования, участие в детских исследовательских конференциях, конкурсах	Учащийся понимает значимость участия в различных ученических конференциях, испытывает любопытство и интерес к исследованиям других учащихся, с уважением относится к их выступлениям и работам; учится диалогу; здоровой конкуренции [21].	Формируется объективное восприятие мира, самоанализ, самооценка, социальное поведение, понимание «Я» в окружающем мире [21].



**4. Диагностический компонент методической системы** призван не только определять исходный уровень формируемого качества у обучающихся, но и обеспечивать связку элементов «цель – результат». Тем самым, как мы предполагаем, возможен мониторинг развития формируемого качества в процессе организованного взаимодействия обучающихся и преподавателя.

Для объективного мониторинга и определения диагностического обеспечения технологии формирования *регулятивных универсальных учебных действий учащихся*, необходимо получить ответы на следующие вопросы: каковы основания определения содержания диагностики? Что представляют собой диагностические методики измерения исходного уровня *регулятивных универсальных учебных действий обучающихся*? Какими диагностическими средствами возможно осуществление мониторинга в исследуемом педагогическом процессе? Гарантируется ли результативность методики выявленным содержанием диагностического компонента?

Не ставя себе задачу анализа существующих подходов к трактовке педагогического мониторинга, примем общий подход: мониторинг – процесс непрерывного научно обоснованного диагностико-прогностического слежения за состоянием, развитие педагогического процесса в целях оптимального выбора образовательных целей и средств их достижения [199]. Основанием определения содержания диагностики выступают сложившиеся в практике педагогических исследований подходы к определению критериев и показателей. В частности, критерий может быть интерпретирован как показатель, на основании которого можно судить об эффективности какого-либо процесса. При этом подходе критерий есть совокупность основных показателей, раскрывающих определённый уровень какого-либо явления. Данный подход характеризуется тем, что степень сформированности показателя определяется путем фиксации его критериев на различных уровнях [149].

Наше исследование предполагает комплексный (*социологический, педагогический и психологический*) подход к диагностике формируемых регулятивных универсальных учебных действий.

Будем придерживаться аспектов диагностики учебной деятельности, предложенной А. К. Марковой [151]:

- 1) состояние учебной задачи и ориентировочной основы;
- 2) состояние учебных действий;
- 3) состояние результата учебной деятельности;
- 4) состояние самоконтроля и самооценки.

Уровень сформированности учебной деятельности может быть установлен в процессе постановки и решения учебной задачи. Решая учебную задачу, учащийся ориентируется: 1) на выделение общего способа действия; 2) на результат выполненных действий.

*Состояние учебной деятельности* можно определять, как уровень сформированности регулятивных УУД действий: способность учащегося находить связь между изменениями содержательных и операциональных характеристик действия с изучаемым объектом. Для этого исследуются умения учащегося анализировать объект как систему связанных элементов. К ним относятся:

- I – умение преобразовывать структуру объекта по заданным требованиям;
- II – умение преобразовывать структуру объекта при изменении числа ее элементов;
- III – умение изменять преобразования структуры объекта;
- IV – умение заменять порядок действий связями элементов в системе;
- V – умение создавать схемы операциональных действий [151].

Отмечаются следующие три уровня:

- преобразование системы без поиска соответствия между новой системой и свойством взаимодействующих элементов, которое необходимо найти;
- преобразование системы с поиском соответствия между новой системой и заданным свойством взаимодействующих элементов;
- преобразование системы с поиском общей схемы действия и определением свойств взаимодействующих элементов [151].

В совокупности этих показателей заключается способность детей строить ориентировочную основу действия. А, значит, можно определить и реальный уровень сформированности регулятивных УУД.

Информация о ходе процесса обучения и его результатах должна быть объективной и всесторонней.

Представим *диагностический компонент* методической системы формирования регулятивных универсальных учебных действий учащихся, в виде таблицы 15 соотнесения этапов учебно-исследовательской деятельности и формируемых регулятивных универсальных учебных действий в соответствии с аспектами диагностики учебной деятельности по А. К. Марковой [151].

Таблица 15 – Соотнесение этапов учебно-исследовательской деятельности и формируемых регулятивных универсальных учебных действий в соответствии с аспектами диагностики учебной деятельности по А. К. Марковой

Аспекты диагностики учебной деятельности	Учебно-исследовательская деятельность	Формируемые регулятивные универсальные учебные действия
Состояние учебной задачи и ориентировочной основы	Жизненно-имитационная задача (общая проблемная ситуация), создание проблемной ситуации, обеспечивающей возникновение вопроса [20];	Понимает, принимает и сохраняет учебную задачу, понимает смысл деятельности, воспроизводит употребляемые термины, помнит конкретные формы, методы и процедуры, воспроизводит основные понятия, правила и принципы [20];
	Постановка проблемы, аргументирование её актуальности [20];	Умеет самостоятельно поставить учебные задачи, определяет и формулирует цель деятельности, позволяющую решать учебные задачи, понимает исходные данные, правила и принципы, поясняет словесный материал, создает схемы, графики, математические модели [20];
Состояние учебных действий	Планирование исследовательской работы [20];	Планирует свои действия в соответствии с поставленной целью, условиями ее реализации, учитывает правила планирования, прогнозирует результат, находит контроль способа решения
	Поиск решения проблемы	Осуществляет необходимые действия по осуществлению плана, различает способ и результат действия, осуществляет контроль, использует понятия в новых ситуациях, применяет правила в реальных ситуациях, правильно применяет методы и алгоритмы действий

## Продолжение таблицы 15

Аспекты диагностики учебной деятельности	Учебно-исследовательская деятельность	Формируемые регулятивные универсальные учебные действия
Состояние результата учебной деятельности	Подготовка к представлению результатов исследования, их представление	Проявляет инициативу действия в учебной деятельности: выбирает уровень выполнения задачи и представления результатов, находит рациональный способ решения и оптимальный (оригинальный, креативный) вариант представления результата, планирует время выполнения действий (учитывает свои силы и возможности), выделяет скрытые предложения, видит ошибки и упущения в логике рассуждения, проводит различия между фактами и следствиями, оценивает значимость данных, прогнозирует, делает умозаключения, выводы.
Состояние самоконтроля и самооценки	Контроль и коррекция результатов промежуточных и итоговых	Умеет соотносить цель и результат своей деятельности, оценивать правильность выполнения задания по заданным внешним и внутренним критериям, оценивать, находить ошибки, вносить необходимые коррективы в действие, оценивает логику построения материала в виде письменного текста [21].

Диагностический компонент образует по ходу выполнения деятельности обратную связь, определяет успешность выполнения деятельности и необходимость ее коррекции, оказывает положительное влияние на отношение обучающихся к учению, формирует у них определённую шкалу ценностей, приоритетов в учении.

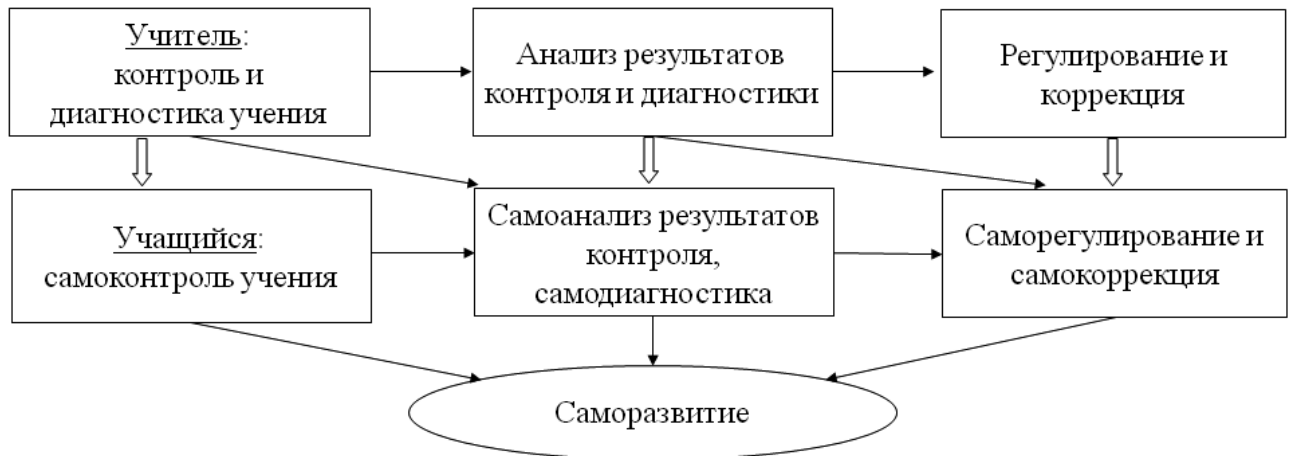
Если коррекционную информацию о результатах контроля учения направить обратно к субъекту учения, то начнется повторный коррекционный цикл учения, связанный с исправлением пробелов и недостатков в учении, достижением требуемого уровня и качества учения. Разнообразие способов организации обратной связи усиливает мотивационные и эмоциональные механизмы регуляции усвоения. Поэтому, необходимо разработать и использовать формы и методы диагностики в виде контроля, КИМ различного уровня и качества.

Психологическая концепция Л. С. Выготского позволяет интерпретировать формирование собственного внутреннего контроля (самоконтроля) на основе внешнего контроля, который определяется действиями и вопросами учителя. Задача учителя поднимать уровень внутреннего самоконтроля, для поддержания работы механизма саморазвития [20].

Формированию этих действий способствуют приемы привлечения учащихся к наблюдению деятельности своих сверстников, организации взаимоконтроля, взаимооценки и взаимоанализа результатов деятельности на основе установленных критериев. Аналогично самоконтролю происходит формирование предметной самооценки в структуре деятельности, при которой осуществляется переход самооценивания в качество, характеристику субъекта деятельности – его самооценку [20].

Осуществление контроля и диагностики учения обеспечивает оперативное реагирование на изменения в поведении обучающихся, закрепление и развитие успешности, поддержание полезных изменений и устранение негативных изменений. Внутренний самоконтроль и самокоррекция связаны обратной связью с самоуправляемым учением и образуют все вместе замкнутый цикл

внутреннего саморазвития. В этом цикле заложен мощный потенциал саморазвития, самовоспитания и, в итоге, самообразования, овладения навыками и умением учиться. Другими словами, необходима следующая цепочка на каждом этапе организации обучения (рисунок 8).



*Рисунок 8 – Цепочка осуществления контроля и диагностики на каждом этапе организации обучения*

Диагностический компонент можно представить, как набор методических приёмов, соответствующих целям этапов организации учебно-исследовательской деятельности учащихся. Приведём примеры таких методических приёмов.

#### *Методический приём «Строим дом»*

Применим его на I этапе организации учебной деятельности: «Подготовка к исследованию».

Контроль может проводиться для выявления уровня сформированности мотивации к учебно-познавательной деятельности, определённых учебных умений, общих исследовательских умений, умений целеполагания до реализации некоторой технологии.

Учащимся предлагается сделать выбор, назвав лишь цифру ответа на вопрос: что я жду сегодня от урока?

Ответы:

1. Интересно, как решать квадратные уравнения по теореме Виета.
2. Хочу исправить оценку по предмету.
3. Ничего интересного не жду.
4. Нравится слушать учителя, интересно.
5. Не получилась домашняя задача, интересно, как решается.
6. Хочу получить хорошую оценку, папа купит ...
7. Встречал при разборе занимательных задач словосочетание «теорема Виета», но не понял: как так быстро находят корни уравнения?

Ответы могут быть разными, важно каждому ответу с положительной мотивацией присвоить 1, а с отрицательной – 0.

После ответов учащихся учитель делает быстрый подсчёт в процентах положительной мотивации и отмечает на диаграмме первый кирпичик «дома».

Для определения сформированности определенных учебных умений можно предложить решить квадратное уравнение:  $x^2 - 26x + 120 = 0$ , по формуле корней квадратного уравнения, оценивая верное решение и правильный ответ 1, а решение с ошибкой (и) или неверный ответ – 0. Выраженная в процентах количественная оценка правильных решений и ответов – второй кирпич «дома».

Для выявления уровня сформированности общих исследовательских умений можно предложить следующее задание: «Составьте всевозможные варианты квадратных уравнений, коэффициентами в которых являются следующие числа: -100; 20; 35; -8; 2; 5, при условии, что число корней равно 2». Оценивание аналогичное. И это – третий кирпич «дома» и т. д.

Выполняя в системе оценивание именно этих конкретных умений на последующих этапах организации учебной деятельности и, выстраивая «этажи», можно отслеживать динамику изменения регулятивных умений учащихся, планировать и осуществлять их коррекцию, а также, управлять процессом самооценивания результатов собственной деятельности, самокоррекцией учения. Важный результат такого методического приёма, кроме целенаправлен-



ного формирования регулятивных УУД, формирование чувства ответственности за общее дело: построить красивый, добротный, неаварийный дом. Соучастие, сопереживание, общий интерес способствуют формированию самовоспитания.

*Методический приём «Я» + «МЫ»* предполагает решение контрольно-коррекционных задач в общении, организацией групповой деятельности учащихся.

Покажем его применение на примере организации 2 этапа учебной деятельности «Исследование: разработать алгоритм решения дробно-рациональных неравенств с параметром методом вариации на оси».

Учитель предлагает ребятам разделиться на группы (по 5-6 человек), называя лидеров. Учащиеся одной группы садятся вокруг одной парты. На партах заранее подготовленный раздаточный материал: файл с заданием. Каждый ученик получает задание решить методом интервалов рациональное или дробно-рациональное неравенство с одной неизвестной:

$$(x - 2)(x - 5)(x - 12) > 0; \quad \frac{15}{(4+x)(2-5x)} < 0; \quad x^2 + 49 \leq 0.$$

В разных группах разные задания, у каждого учащегося индивидуальное задание.

Правило 1: работает каждый над своим заданием, результат формирует вся группа.

Правило 2: если общий результат не складывается, то «Лови ошибку!», то есть участники группы обсуждают между собой решение каждого и находят ошибку, повлиявшую на общий результат.

Правило 3: в ходе индивидуальной работы допускаются вопросы, помощь, подсказки внутри группы.

Эти правила предполагают равноправие участников и целостность группы.

По окончании выполнения работы, лидер докладывает результат всему классу. Работа оценивается другими группами, и учитель подводит итог этапа

исследования, при этом ученики повторяют план решения рациональных и дробно-рациональных неравенств методом интервалов.

Затем учитель ставит следующую задачу: систематизировать результаты всех групп и решить методом интервалов рациональные неравенства с параметром:

$$1) (x - 1)(x - p) > 0; (x - 2p)(x - p) \leq 0; \quad x^2 - 2x + p^2 + 1 \geq 0.$$

Необходимо сформулировать общую проблему и версии её решения для этого выработать единый алгоритм для решения неравенств с параметром, т. е. необходим перенос известного метода интервалов на случай решения неравенств с параметром

**ПОДСКАЗКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ:** какие положения точка  $p$  может занимать на числовой оси?

Правило 1: активность и открытость высказывания гипотез участниками внутри группы, выбор гипотезы от группы.

Правило 2: обоснование выбора гипотезы от группы лидером вслух, для всего класса.

Правило 3: уважительное, конструктивное, позитивное отношение при обсуждении версий групп.

На следующем этапе исследования учитель предлагает одно общее задание для всех групп (на основании обсужденных версий и выработанной общей): решить методом интервалов дробно-рациональное неравенство

$$\frac{x+5}{x-a} \geq 0 \quad \frac{(x-1)(2x-a)}{x(x-1)(x+1)} \leq 0 \quad \frac{(x+a)^5(x-2)^3}{(x-2)(x^2+2x+4)x(x+7)} \geq 0$$

Правило 1: группа вырабатывает общее решение.

Правило 2: лидеры дают оценку деятельности своей группы и других групп.

Правило 3: итог этапа подводит учитель.

*Итоговая рефлексия* – завершающий этап методического приёма: формулируется алгоритм метода интервалов для решения дробно-рациональных

неравенств вариацией на оси. В начале этого этапа учитель просит восстановить и назвать все задания исследования, задаёт наводящие вопросы: «Как преобразуется известный метод интервалов? Составьте план решения, откорректируйте его. Проверьте правильность алгоритма. Оцените, всегда ли можно применять разработанный метод интервалов для решения неравенств варьированием на оси?»

Затем предлагает сначала учащимся высказать своё мнение о своей деятельности в форме *Я-высказываний*: «Я понял, что...», «Я думаю, что...», «Я почувствовал, что...», а затем лидерам групп по аналогии в форме *Мы-высказываний*: «Я понял, что мы...», «Я думаю, что мы...», «Я почувствовал, что мы...».

Такой методический приём снимает психологический барьер в общении, способствует созданию позитивных образов «Я» и «Мы», мотивирует учащихся на активность и открытость в учении, ответственность в собственной деятельности, формирует умения самоконтроля, самооценки и самокоррекции деятельности.

Контроль признаётся одним из существенных показателей эффективности обучения. «Контроль действий в учебной деятельности – это сличение действий и их результата с образцом» [152]. О качестве контроля можно говорить, принимая во внимание такие показатели, как: степень самостоятельности учебной деятельности учащегося, автоматизированность операциональных действий, нацеленность на результат, др. При этом, важны время и цель контроля.

Согласно трактовке П. Я. Гальперина, внимание – идеальная форма контроля, формируемая через овладение средствами его организации [229]. Для организации внимания необходимо использовать чередование деятельности учащихся: индивидуальной, в парах, групповой, коллективной, смешанной. В результате у учащихся формируется внутренний контроль (внимание).

В случае несоответствия выполненных действий и (или) результата необходимо внесение корректив в действия. Коррекция действий представляет собой: изменение содержания действий, порядка их выполнения, регуляция времени выполнения действий.

Контроль качества знаний учащихся (любого вида), дополненный диагностическим компонентом методики формирования универсальных учебных действий учащихся, представляет замкнутый цикл, так как последний выполняет функцию системы обратной связи в обучении.

Таким образом, методическая система формирования РУУД учащихся в составе четырех компонентов: целевого, содержательного, операционального, диагностического, – посредством использования УИД при обучении школьников математике обеспечивает постепенное формирование полной осознанной саморегуляции у учащегося, необходимой для успешной организации собственной учебно-познавательной деятельности, т. е. сформированности РУУД.

## **2.2 Реализация процесса формирования РУУД школьников при обучении математике**

Реализация процесса формирования [21] РУУД школьников при обучении математике предполагает проектирование урока математики с учетом возможности целенаправленного формирования РУУД учащихся. В связи с этим сформулируем требования к современному уроку математики:

- ✓ выявление цели формирования РУУД и вытекающей задачи деятельности учителя и обучаемых на уроке математики;

- ✓ отбор содержания учебного материала для формирования РУУД учащихся в соответствии с учетом психолого-педагогических возможностей учащихся;
- ✓ создание условий для включения в исследовательскую деятельность каждого учащегося, независимо от уровня сформированных РУУД, исследовательских умений, математической подготовки;
- ✓ использование исследовательских практико-ориентированных задач с целью развития РУУД учащихся и применения их в других областях, в повседневной жизни;
- ✓ использование приемов, методов, форм и технологий, способствующих развитию РУУД обучаемых с учетом возрастных и индивидуальных особенностей учащихся;
- ✓ осуществление обратной связи на уроке;
- ✓ создание условий для самостоятельного получения знаний и освоения УУД в процессе учебно-познавательной деятельности;
- ✓ использования в системе самоконтроля и взаимоконтроля.

В соответствии с разработанной моделью методической системы формирования РУУД учащихся в процессе обучения математике задачей учителя математики для реализации процесса формирования РУУД на уроках математики в контексте системно-деятельностного подхода является: при выборе методов, активно использовать репродуктивно-вариативный, вариативно-эвристический и эвристический методы; при выборе средств – интерактивную доску и ресурсы МЭШ (московская электронная школа); при выборе форм классно-урочную, внеурочную, уроки в музее, в технопарке, лабораториях вуза, другое; при выборе технологий – технологии с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса.

Рекомендации по изучению индивидуальных особенностей учащихся и систематизации информации для реализации процесса формирования РУУД при обучении математике подробно описаны [17] в 1 главе (п. 1.3). Кроме того, уточним: проектирование тематического планирования уроков на учебный год

не отражает детализацию выбора методов, форм, средств и технологий, поэтому в рамках исследования представим реализацию процесса формирования РУУД на уроках математики и внеурочной деятельности.

В соответствии с данной моделью сформулируем основные этапы проектирования урока математики для достижения поставленной задачи.

1. Цели урока при проектировании урока математики для осуществления задачи целенаправленного формирования РУУД учащихся: учебная, развивающая и воспитательная, важно дополнить: *формирование РУУД при обучении математике.*
2. При выборе типа урока математики: урока получения и открытия нового знания, урока закрепления знаний, урока комплексного применения знаний, урока контроля, оценки и коррекции знаний, - проектировать формирование РУУД учащихся при обучении математике.
3. При отборе содержания материала, учитывать возможность использования общих исследовательских умений учащихся для формирования их РУУД.
4. При выборе формы проведения урока математики и его этапов сочетать общеизвестные: «мозговой штурм», деловая игра, интегрированный, соревнование, другие, с *«учебным исследованием».*
5. При выборе технологии урока математики использовать рекомендуемые ФГОС: технология развивающего обучения, проблемная технология, игровые технологии, информационно-коммуникативные технологии, модульные технологии, технология уровневой дифференциации, другие, – в связке с методикой формирования РУУД учащихся при обучении математике.
6. При выборе форм обучения математике: индивидуальной, фронтальной, групповой, – учитывать возможность самостоятельного выбора учащегося, самостоятельного принятия решения о смене деятельности и доли помощи в процессе учения.

7. При выборе приемов обучения математике: проблемная ситуация, практико-ориентированная задача, задание на установление соответствия, задача на применение на практике, другое, – использовать организацию УИД учащихся.
8. При проектировании контроля и оценивания знаний учащихся продумывать возможность самоконтроля и самооценивания своей деятельности и знаний учащимися.

Представим реализацию процесса формирования РУУД школьников при обучении математике на примере конвергентного «урока получения и открытия новых знаний» на тему «Понятие движения» (9 класс).

На изучение темы «Понятие движения» в 9 классе отводится 3ч.

Виды деятельности учащихся при изучении данной темы: трактовать и давать оценку математическим понятиям отображения плоскости на себя, преобразования плоскости, движения плоскости, осевой и центральной симметрий, поворота; контролировать и обосновывать, какие из перечисленных отображений являются движениями; объяснять связь между движениями и наложениями; иллюстрировать собственными примерами основные виды отображений, а также с помощью компьютерных программ; решать задачи с использованием преобразований плоскости. Операционный состав такой деятельности через УУД будет приведен в рассмотренных далее примерах.

Конвергентный урок позволяет учащимся, стирая границы между отдельно изучаемыми в школе предметами, воспринимать мир как единое целое. Для учителя – это возможность осуществлять обучение через взаимопроникновение специфических для данных предметов РУУД учащихся, обеспечивая устойчивый интерес к учению, успешность обучения.

Назовем 1 этап реализации процесса формирования РУУД учащихся при обучении математике – «подготовительный». С учетом индивидуальных особенностей учащихся класса продумаем урок в деталях (поэтапно), отберем содержание, определим место урока в системе других уроков, определим РУУД

учащихся при обучении математике, на которые можно оказать развивающее воздействие на уроке.

Предварительный сбор информации может быть представлен в виде таблицы 6 - *Диагностика индивидуальных особенностей учащихся 9 класса (подробно в п. 1.3, гл.1)*

Цели урока на тему «Понятие движения» могут быть следующими:

1. *Учебная*: ввести понятие движения, обосновать, что отображение плоскости на себя является движением.
2. *Развивающая*: обработка информации с помощью математических знаний.
3. *Воспитательная*: создать целостную картину понятия движение в мире.
4. *Формирование РУУД учащихся*:
  - 1 группа – сравнение, анализ, оценка фигур по форме, размерам; выбор равных элементов, составление композиции от простого к сложному;
  - 2 группа – изучение текстовой информации в соответствии с самостоятельно поставленной целью, умение выполнять алгоритмизированные действия по образцу, по плану; коррекция и поиск альтернативного решения задачи;
  - 3 группа – визуальное восприятие информации, ее оценка, коррекция и переработка её в математический текст, интеллектуальная мыследеятельность по обработке информации, планирование своей деятельности и создание технологии выполнения задачи;
  - 4 группа – самооценка, взаимооценка, опора на волевую саморегуляцию.

В соответствии с содержательным компонентом модели методической системы формирования РУУД учащихся при обучении математике, а это: вариативные задачи, практические работы, конвергентные задачи, исследовательские задачи, учебно-исследовательские проекты, другое, – к отбору содержания, подготовке сообщений и организации мини-исследований можно привлечь учителей биологии, физики, химии, географии, др. Необходимо отобрать содержание, которое позволит обосновать целостную картину мира, на предметах, где изучается понятие движения. Подготавливаются специаль-



ные раздаточные «Рабочие листы» по направлениям, где на первом плане размещаются сообщения о движении в рамках предмета, т. к. восприятие информации у учащихся различное. Для мини-исследований, демонстрирующих движение в рамках предмета, нужно подготовить оборудование.

Во время организационного момента на уроке, после обсуждения вопросов по домашнему заданию, учитель математики может сделать краткое сообщение о том, что понятие движения изучается в разных областях. И ребятам предстоит убедиться, что, по сути, речь идет об одном и том же, а именно, описании мира, в котором мы живем. Таким образом учитель математики подготавливает класс к предстоящему исследованию. Для комплектования групп по интересам сообщение о понятии движения делают учитель биологии и учитель химии, возможно и физики или географии. Учащиеся выбирают направление исследования и объединяются в мини-группы.

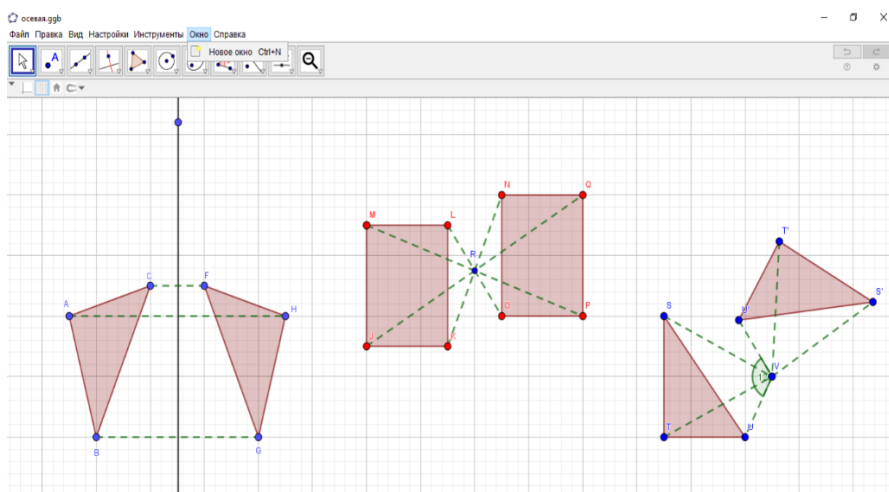
Такой подход в организации 1 этапа урока позволит оказать влияние на мотивацию изучения темы, пробудить любопытство и желание убедиться самому в значимости знаний, которые предстоит открыть на уроке, формируется принятие задачи и цели.

В соответствии с операциональным компонентом модели методической системы формирования РУУД учащихся при обучении математике организовать мини – исследование возможно используя ресурсы МЭШ (виртуальные лаборатории). Демонстрация исследования проводится на интерактивной доске. В процессе исследования, учащиеся наблюдают за действиями участников исследования, изучают правила техники безопасности при проведении исследований, осознают необходимость выполнения всех этапов исследования начиная со сбора информации, постановки вопроса (выдвижения гипотезы), актуализации знаний, далее исследование, обработка результата, вывод. Другими словами, видят эталон исследования. Для обоснования актуальности понятия «движение» в математике учитель математики на подготовительном этапе предлагает учащимся познакомиться с двумя мини-исследованиями.

По теме «Понятие движения» ученики с помощью цифровой лаборатории по физиологии человека изучают особенности движения крови и дыхательные движения в организме человека. Для иллюстрации понятия движения в химической науке с помощью цифровых датчиков учитель математики рассматривает процесс испарения кристаллического иода, который, испаряясь, поднимается в верхнюю часть пробирки и оседает на стенках сосуда с холодной водой.

Учитель обращает внимание на общие свойства движения, уже как математического понятия, организует обсуждение увиденного и корректирует ответы на вопросы. На этом этапе актуализируются общие исследовательские умения учащихся, формируется обоснование целостной картины понятия движения в мире и делается акцент на необходимость освоения РУУД при обучении математике для восприятия, сравнения, оценивания, анализа, обработки результатов исследования. Учащиеся формулируют цель урока: ввести понятие движения в математике, применить на практике новое понятие, осознать и усвоить те действия, с помощью которых регулируется проведение мини-исследований.

*Следующий этап урока* – актуализация математических знаний. Учитель с помощью интерактивной доски в программе GeoGebra восстанавливает знания учащихся из курса Геометрии 7 класса и РУУД: построение фигур симметричных данной относительно центра симметрии, оси симметрии и поворота вокруг точки на фиксированный угол.



Преобразование параллельный перенос пока не обсуждается. Это – элемент проблемы в выполнении учебных математических исследований, которые предстоит выполнить школьникам. Они должны будут самостоятельно восстановить в памяти знания о таком преобразовании плоскости, так как без него не выполнить практическую работу.

Происходит процесс актуализации РУУД: целеполагание через соотнесение свойств исходной геометрической фигуры с полученной в ходе построения, планирование действий с математическими инструментами, их оценивание. Учитель предлагает школьникам ответить на вопросы: какую цель мы ставим, выполняя действия параллельного переноса? какой план выполнения преобразования плоскости? как можно проверить правильность выполнения параллельного переноса? как можно оценить решенные задачи? нужна ли корректировка? с помощью каких действий (перечислите их) мы регулируем свою деятельность по решению рассмотренной задачи?

Следующий этап урока – изучение нового, учитель предлагает в виде математического исследования (практической работы), предварительно предоставляя учащимся видеосюжет (например, о мозаике).

Сообщая школьникам об уровнях выполнения практической работы, правилах коммуникации, учитель предлагает выбрать уровень в соответствии с самооценкой своих возможностей (внутренняя самооценка произошла в момент актуализации знаний), тем самым направляет деятельность учащихся к достижению поставленной цели, но выполняют практическую работу учащиеся самостоятельно.

Приведем пример варианта Практической работы по математике по теме «Понятие движения».

Пример. РАБОЧИЙ ЛИСТ № 5

*Без симметрии наш мир выглядел бы совсем по-другому.  
Ведь это именно на симметрии основаны многие законы сохранения,  
например: законы сохранения энергии, импульса...*

**Геометрия (планиметрия)** изучает движение фигур на плоскости. Движение в математике это - преобразование фигур, при котором сохраняется расстояние между точками. Известны

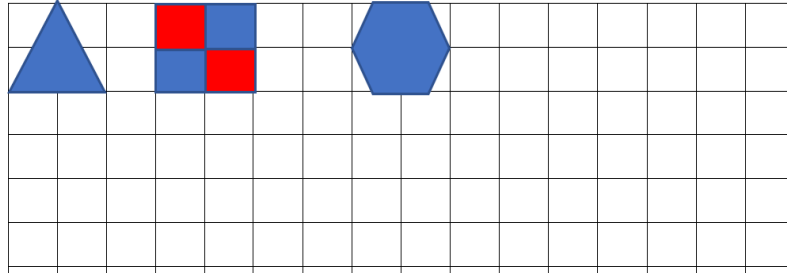
виды симметрии: центральная симметрия и осевая симметрия. Ещё к движению на плоскости относят отображение плоскости на себя: поворот, параллельный перенос.

Тема использования математической теории паркетов на практике актуальна. Мотивы паркетов используют дизайнеры при создании одежды, аксессуаров, оформлении жилищ, народные ремесленники, т.д.

Выберите одну из предложенных работ и выполните задание.

### Практическая работа №1.

Придумайте паркет из предложенных фигур, замостите плоскость в тетради такими фрагментами, назовите вид движения плоскости, который используете.



### Практическая работа №2.

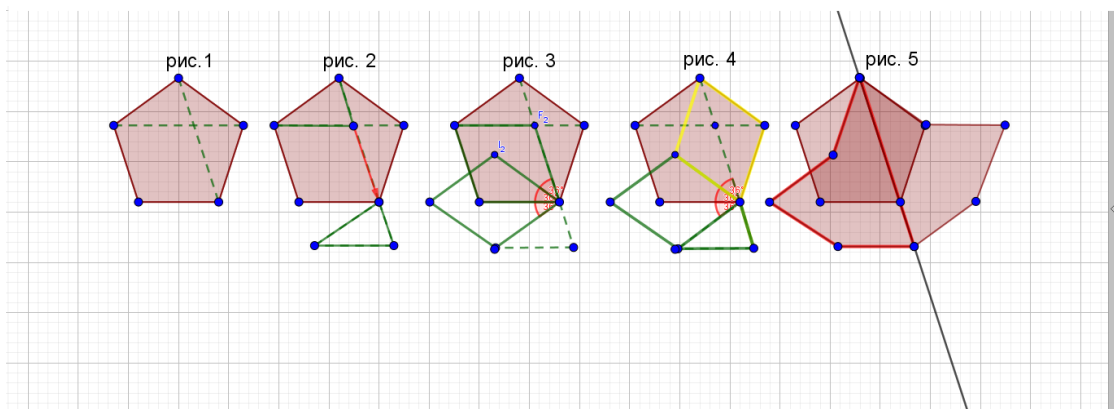
Выполните задание по инструкции и предложите свой вариант решения задачи.

рис. 1      рис. 2

- 1) Вырежьте часть квадрата по пунктирной линии (рис. 1).
- 2) Приложите фрагмент так, как показано на рис. 2.
- 3) Составьте паркет из нового фрагмента.
- 4) Придумайте свой вариант разрезания и составления фрагмента для паркета

### Практическая работа №3

- Составьте математический навигатор преобразований, которые фигуру, представленную на рис. 1, переводят в фигуру на рис. 5.
- Замостите плоскость предложенной фигурой (несколько фрагментов).



Учащиеся выбирают по желанию Практическую работу, тем самым, давая оценку своим возможностям, знаниям, заинтересованности изучаемым материалом, давая оценку значимости этих знаний для себя. Группы учащихся при этом, могут переформироваться уже не по интересам, а по уровню способностей, знаний, умений. Этот этап процесса формирования РУУД можно назвать этапом приобретения новых РУУД. Общение свободное, возможность обратиться за помощью к однокласснику или педагогу, решение принимает учащийся сам.

Практическая работа № 1 – учебное исследование I уровня: преобразование системы без поиска соответствия между новой системой и свойством взаимодействующих элементов, которое необходимо найти. Формируемые РУУД: сравнение и анализ фигур по форме, размерам; выбор равных элементов, составление композиции от простого к сложному, с учетом цветовой гаммы фрагментов, оценка возможности замостить полосу плоскости полностью.

Практическая работа № 2 – учебное исследование II уровня: преобразование системы с поиском соответствия между новой системой и заданным свойством взаимодействующих элементов. Формируемые РУУД: изучение текстовой информации, умение выполнять алгоритмизированные действия по образцу, поиск альтернативного решения задачи, реализация творческих способностей.

Практическая работа № 3 – учебное исследование III уровня: преобразование системы с поиском общей схемы действия и определением свойств взаимодействующих элементов. Формируемые РУУД: визуальное восприятие информации, переработка её в математический текст, интеллектуальную деятельность по обработке информации и создания технологии выполнения задачи, создание интересного паркета.

Учитель организует выполнение практических работ 1-3, предлагает школьникам сформулировать и записать цель практической работы, составить

план действий, оценить его правильность, повести итог, осознано контролируя свои действия.

Следующий этап реализации процесса формирования РУУД учащихся на этапе урока – первичное закрепление новых знаний – закрепление приобретенных РУУД. Так как каждый обучающийся выполнял только одну работу с максимальной долей самостоятельности, то демонстрация и обсуждение результатов выполненных работ в образовавшихся группах, интересны всем. Формируются РУУД: самооценивание своей деятельности, стремление выполнять работу на более высоком уровне, проектирование вариативности выполнения задачи, умение адекватно оценивать аргументы оценивания других ребят, обоснованно высказывать свою точку зрения, совершенствоваться в творческом подходе к выполнению заданий.

Наконец, на этапе подведения итогов и рефлексии для формирования ценности открытых знаний, принятия их значимости в мире, нужно чаще обращаться к культурным ценностям, которые созданы по математическим законам, например, в контексте такого урока можно предложить фильм или презентацию о творчестве голландского художника Мориса Эшера, мозаике Пенроуза, другое. Тем самым, реализуется формирование РУУД учащихся – самооценивание приобретенных РУУД.

Для формирования устойчивых знаний и интереса к математике и её применения в жизни в качестве домашнего задания можно предложить выполнить исследование в данном направлении, но более глубокое.

Продолжить разговор о движении, технике замощения плоскости, решении задач на разрезание можно на занятиях внеурочной деятельностью, которые можно провести в музее, планетарии, выставке, др.

Диагностика динамики изменений отдельных регуляторных компонентов у учащихся в процессе их учебно-исследовательской деятельности на уроке, позволит продолжить реализацию процесса формирования РУУД учащихся на следующем уроке математики по данной теме.

Показателями изменений являются следующие действия учащихся:

- принятие решения о переходе на более высокий уровень выполнения исследования;
- активность во время обсуждения результатов исследования;
- самостоятельность при выполнении исследования;
- внимание, интерес, проявление желания поделиться впечатлениями или знаниями, др.

Подводя итог вышесказанному, представим реализацию процесса формирования РУУД учащихся при обучении математике в виде алгоритма:

1. Подготовительный этап:

- сбор информации об индивидуальных особенностях обучающихся в классе;
- конкретизация формируемых РУУД учащихся в соответствии с типом урока, целями урока, отобранным содержанием материала, продуманным учебным исследованием.

2. Организация урока математики с предоставлением возможности демонстрации общих исследовательских умений и РУУД учащимися на всех этапах урока.

3. Актуализация РУУД учащихся.

4. Формирование запланированных РУУД учащихся.

5. Закрепление приобретенных учащимися РУУД.

6. Отслеживание динамики изменений РУУД.

7. Проектирование коррекции РУУД в соответствии с динамикой изменений.

Процесс формирования РУУД учащихся не ограничивается уроком математики. Организация занятий внеурочной деятельности – неотъемлемая часть данного процесса (обосновано в 1 главе, п. 1.3). Покажем, как организовать внеурочную деятельность для реализации процесса формирования РУУД учащихся на примере программы «Наглядная геометрия» (6 класс) (из опыта работы ГБОУ Школа № 1985 г. Москва). Актуальность программы определяется осознанием значения наглядной геометрии в повседневной

жизни человека. Программа «Наглядная геометрия» 6 класс составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования. В программе соблюдается преемственность с Федеральным государственным образовательным стандартом начального общего образования, учитываются возрастные и психологические особенности школьников, обучающихся на ступени основного общего образования, учитываются межпредметные связи [186]. В Программе, ориентированной на развитие РУУД учащихся, предложен авторский подход в части структурирования учебного материала, определения последовательности его изучения, путей формирования системы знаний, умений и способов деятельности, развития, воспитания и социализации учащихся. Рабочая программа по наглядной геометрии составлена на основе примерной программы для 5 – 6 классов В. А. Смирнова, И. М. Смирновой и И. В. Ященко [215].

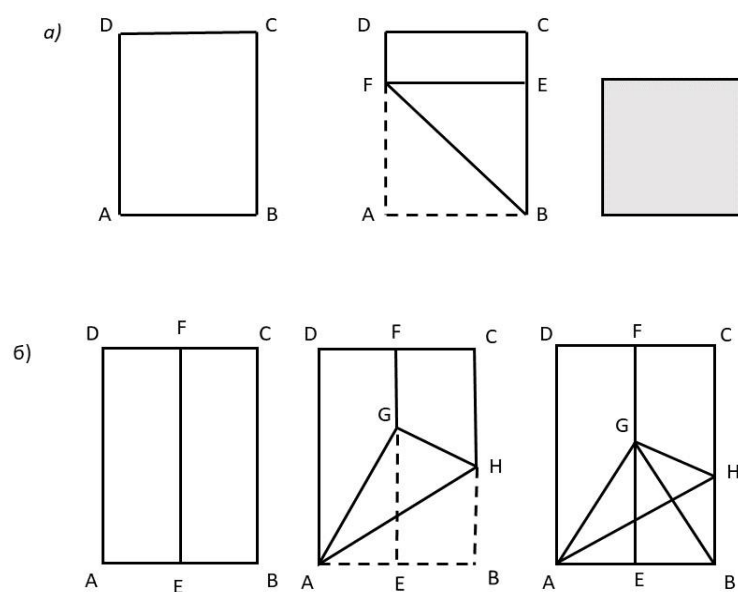
Таблица № 16 – *Программа «Наглядная геометрия», ориентированная на формирование РУУД учащихся, 6 класс, 1ч. в неделю, всего 34ч. в год*

№ п/п	Содержание материала	Кол-во часов	Характеристика деятельности учащихся и формируемые РУУД
1	Окружность и круг	2	Изображать с помощью инструментов окружности, круги, их элементы, решать задачи на нахождение приближенного значения длины окружности и площади круга ( <i>прогнозирование результата</i> )
2	Геометрические места точек	2	Изображать точки на линии окружности, внутри круга, вне круга; взаимное расположение окружностей на плоскости; изображать геометрические места точек (г.м.т.) и решать задачи на г.м.т. ( <i>планирование действий</i> )
3	Графы	2	Уметь считать вершины и ребра графов, приводить примеры и изображать графы, устанавливать их уникальность, решать задачи на графы ( <i>необходимые действия по реализации плана</i> )
4	Раскрашивание карт	2	Решать задачи на раскрашивание карт ( <i>постановка цели, промежуточный контроль действий, волевое усилие</i> )
5	Кривые		Изображать циклоиду, кардиоиду, синусоиду, астроида; решать задачи ( <i>постановка цели, планирование и осуществление плана действий, корректирование действий</i> )
6	<i>Демонстрация исследовательских работ</i>	1	Проводить самостоятельное исследование и демонстрировать результат: траектории движения точек замеча-



			тельных кривых; решение задач на замечательные кривые ( <i>понимание различия способа и результата действия</i> )
7	Центральная симметрия	2	Находить центр симметрии фигур, строить фигуру симметричную данной относительно центра ( <i>прогнозирование, планирование, корректирование</i> )
8	Осевая симметрия	2	Находить оси симметрии фигур, строить фигуру симметричную данной относительно оси симметрии ( <i>прогнозирование, планирование, корректирование</i> )
9	Поворот	2	Осуществлять поворот фигуры на указанный угол по часовой и против часовой стрелки ( <i>прогнозирование, планирование, корректирование</i> )
10	Паркеты	2	Устанавливать порядок осуществления симметрии, использовать знания симметрии в решении задач на создание фрагментов паркета из многоугольников ( <i>планирование, осуществление плана действий, контроль, волевое усилие</i> )
11	<b>Демонстрация исследовательских работ</b>	1	Проводить самостоятельное исследование: выяснять возможность создания паркетов из многоугольников, продемонстрировать результат ( <i>оценивание, самооценивание, рефлексия</i> )
12	Площадь	2	Различать равные и равновеликие фигуры, решать задачи на нахождение площади треугольника, разных видов четырехугольника, многоугольника, площадь поверхности многогранника, применяя свойства и формулы ( <i>учет правил планирования и нахождения контроля способа решения</i> )
13	Разрезания	2	Решать задачи на замощение и разрезание ( <i>постановка цели, прогнозирование, корректирование действий</i> )
14	Площадь поверхности	2	Изображать многогранники, делать развертки, решать задачи на нахождение площади поверхности многогранника, применяя свойства и формулы ( <i>итоговый и пошаговый контроль по результату</i> )
15	Объем	2	Изготавливать модели многогранников, решать задачи на нахождение объемов многогранника, применяя свойства и формулы ( <i>осуществление необходимых действий по реализации плана</i> )
16	<b>Демонстрация исследовательских работ</b>	1	Самостоятельное исследование и демонстрация знаний о правильных многогранниках ( <i>оценивание, самооценивание, рефлексия</i> )
17	Координаты	2	Изображать систему координат на плоскости и решать задачи на построение геометрических фигур по заданным координатам и нахождение их количественных характеристик: длин, углов, площади ( <i>осуществление контроля по результату и способу действия</i> )
18	<b>Демонстрация исследовательских работ</b>	1	Создание банка интересных задач на координатную плоскость ( <i>проявление инициативы действия в учебной деятельности</i> )
19	Обобщающее повторение	2	Решение нестандартных задач по курсу «Наглядная геометрия» 6 класс ( <i>вся группа РУУД</i> )
	Итого:	34	

Приведем пример деятельности учителя по развитию РУУД учащихся при изучении темы «Осевая симметрия». На этапе закрепления нового материала, т. е. после формулирования определения и отработки алгоритма построения фигуры симметричной данной относительно оси, учитель на примере обычного листа  $A_4$ , перегибая его пополам, демонстрирует учащимся ось симметрии прямоугольника. Затем показывает, как из прямоугольника можно сделать квадрат, далее равносторонний треугольник.



Математическим навигатором могут служить вопросы, на которые учащимся нужно найти ответы перед выполнением самостоятельного исследования. Например: какие точки (фигуры) называются симметричными относительно прямой? какие точки (фигуры) симметричны сами себе? какую прямую называют осью симметрии? сколько осей симметрии имеют равносторонний треугольник, квадрат? другие вопросы.

Правильный 6-угольник и правильный 8-угольник учащиеся пробуют создать сами: ставят цель, составляют план действий, прогнозируют результат, исполняют действия согласно плану, контролируют пошаговый результат, соотносят результат с целью, проявляют усилие воли, оценивают результат. Учитель сопровождает эту деятельность учащихся, регулируя степень самостоятельности выполнения задания в соответствии с их индивидуальным уровнем развития РУУД.

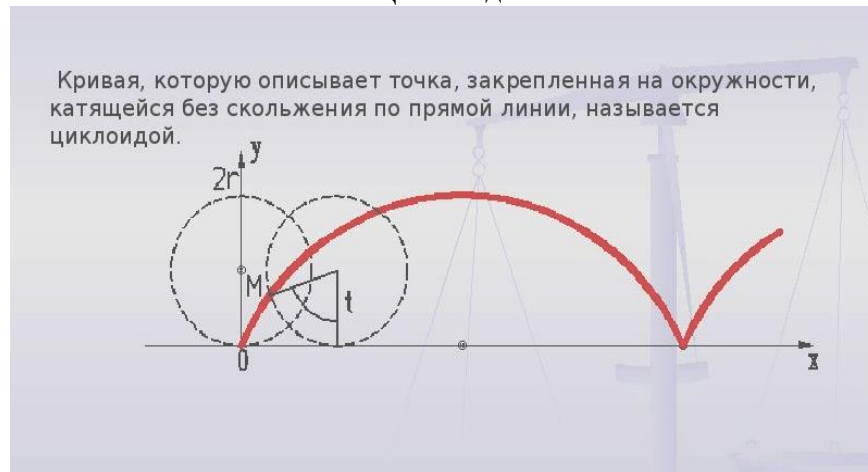
Приведем пример проведения занятия с использованием технологии «перевернутого урока» по наглядной геометрии, тема «Кривые». Покажем, как можно организовать учебно-исследовательскую деятельность школьников вариативно-эвристического уровня при изучении циклоиды с целью формирования РУУД школьников.

Ученики заранее просматривают сценарий МЭШ (ID 1244868) о замечательных кривых, зная о том, что в школе они должны будут самостоятельно построить циклоиду и ответить на вопросы. Учитель, предваряя просмотр, предлагает задания, ориентируясь на формирование РУУД (*постановка цели, планирование и осуществление плана действий, корректировка действий*):

- какова цель вашей работы?
- опишите процесс, в результате которого возникает циклоида;
- циклоида – это кривая, которая возникает как траектория какой движущейся точки?
- спланируйте, пользуясь какими средствами, аналогично сценарию в МЭШ, можно построить циклоиду самостоятельно;
- составьте и запишите план своих действий для построения циклоиды;
- как проверить правильность построений?
- можно ли измерить длину одной арки циклоиды? (можно ли найти длину траектории, пройденной замеченной точкой при одном полном обороте производящей окружности?).

В школе на внеурочном занятии ученики из плотной бумаги вырезают круг, далее, используя линейку, «прокатывают» вырезанный круг по линейке, отмечая траекторию фиксированной точки, т. е. моделируют процесс, результатом которого является циклоида.

### Циклоида



Школьники проводят построения, руководствуясь своей целью и действуя по своему плану, выполняют проверку и взаимопроверку получившегося результата; сравнивают построенные кривые.

Последний вопрос создает проблемную ситуацию: как элементарными измерениями найти длину дуги кривой? Поиск ответа на этот вопрос должен вызвать дискуссию, потому что путь, пройденный фиксированной точкой, не является прямолинейным отрезком, а длину дуги кривой ранее ученики никогда не находили. «Как же можно поступить практически? Какие будут предложения?» – задает вопросы учитель. Например, «проложить» отрезок нити вдоль одной арки циклоиды от начальной до ее конечной точки, а затем измерить длину получившегося отрезка нити; в результате мы получим величину  $L$  – искомую длину одной арки циклоиды.

Далее учитель предлагает сравнить полученный результат с диаметром производящей окружности, при этом выдвигает гипотезы:  $L = 10D$ ,  $L = 4D$ ,  $L = D$ , где  $D$  – диаметр производящей окружности. Ученикам предлагается оценить гипотезы и провести их проверку. В результате оказывается, что верна вторая гипотеза  $L = 4D$ : отрезок нити, который мы «прокладывали» вдоль одной арки циклоиды, надо сложить в 4 раза, при этом получится диаметр  $D$  производящей окружности. Строго этот результат с помощью определенного интеграла можно доказать в 11-ом классе.

В конце занятия целесообразно предоставить слово ученикам для кратких сообщений, подготовленных заранее. Темами могут стать интересные

факты о том, что результат  $L=4D$  известен математикам с XVIIв. (Кристофер Рен, 1658), а также замечательные свойства циклоиды (таутохронность циклоиды и т.п.). Завершается занятие заполнением листа самооценки, в который, с целью формирования прогнозирования, включается вопрос о возможных дальнейших исследованиях, связанных с циклоидой.

Программа курса «Наглядная геометрия» реализует принципы формирования РУУД учащихся в процессе обучения математике в развивающей образовательной среде при обучении математике (1 глава, п.1.3, Таблица 10) на основе организации обучения в форме УИД. Содержание программы через становление РУУД учащихся способствует развитию геометрических представлений учащихся, подготовке учащихся к изучению систематического курса геометрии 7 – 11 классов, повышению качества обучения геометрии.

Отдельно остановимся на использовании ресурса МЭШ (Московская электронная школа) в процессе формирования РУУД школьников при обучении математике. Мы разместили на платформе МЭШ сценарий урока «Замечательные кривые» (ID 1244868), в соответствии с разработанной моделью методической системы формирования РУУД учащихся в процессе обучения математике [281].

На примере фрагмента сценария урока математики «Замечательные кривые» (этап закрепления нового материала) познакомим с сущностью методики формирования регулятивных учебных действий учащихся при обучении математике и её возможностями.

Другими словами, ответим на вопросы:

- как на уроке можно согласовывать все уровни регуляции деятельности учащегося (последовательности действия восприятия и мышления, способы для реализации индивидуальных способностей, индивидуальные темпы деятельности, акцент на трудность (обратное), другое);
- как постепенно увеличивать долю самостоятельности и ответственности учащихся в деятельности;

- как осуществлять постепенный переход к самоуправлению своей учебно-познавательной деятельностью у каждого из учащихся.

При создании сценария «Замечательные кривые» мы конкретизировали РУУД, обеспечивающие организацию учащимися своей учебной деятельности в соответствии с возрастом, (5-6 класс):

- ставить цель при решении задач, проблем,
- прогнозировать результаты,
- составлять план действий,
- действовать по плану,
- сравнивать план с замыслом,
- оценивать и корректировать свою деятельность [24].

В качестве критериев сформированности регулятивных универсальных учебных действий перечислили способности:

- выбора средства реализации своих целей (мы бы отнесли это скорее к личностным универсальным действиям),
- планирования,
- контроля и выполнения действия по заданному образцу, правилу, с использованием норм,
- планирования результатов своей деятельности,
- предвосхищения возможных ошибок,
- начала и завершения действий в нужный момент.

Наиболее отчетливо процесс формирования РУУД учащихся на этом уроке происходит после актуализации знаний и объяснения новой темы (по сценарию) на этапе первичного закрепления знаний. Учащимся предлагается выполнить практическую работу – учебное исследование. Такой прием вызывает у учащихся интерес и любопытство, ведь это не урок физики, химии, информатики, биологии, географии. Это урок математики – царства чисел, функций, графиков, таблиц, диаграмм, теорем, формул. И привычнее постановка задачи: найдите..., решите..., докажите..., постройте график..., другое.

На планшете у учащегося появляются сразу три учебных исследования с инструкциями по выполнению: Практическая работа №1 (Построить кардиоиду), Практическая работа № 2 (Построить циклоиду) и Практическая работа № 3 (Построить синусоиду).

Пример 1. Учебное исследование: «Кардиоида».

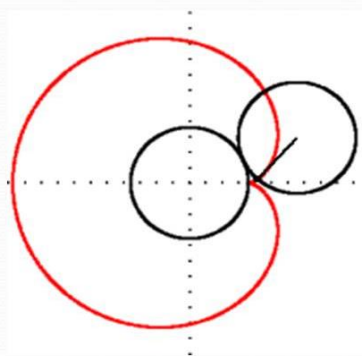
Внимательно прочитайте указание и выполните Практическую работу № 1, сформулируйте цель исследования, составьте план исследования, подведите итог, оцените свою работу.

Указание:

- 1) вырежьте два одинаковых картонных круга;
- 2) один из них закрепите неподвижно;
- 3) второй приложите к первому, отметьте на его краю точку А, наиболее удаленную от центра первого круга;
- 4) прокатите без скольжения подвижный круг по неподвижному, отмечая, как можно чаще, положение точки А;
- 5) соедините плавной линией отмеченные положения точки А (сравните с эталоном) [25].

### Кардиоида

Плоская линия, которая описывается фиксированной точкой окружности, катящейся по неподвижной окружности с таким же радиусом. Получила своё название из-за схожести своих очертаний со стилизованным изображением сердца.



Учащийся самостоятельно соотносит все, что увидел и услышал на уроке до выполнения учебного исследования, со своими возможностями, оценивает степень восприятия нового материала и делает выбор: какую кривую он будет строить. Выполняет он только одну из предложенных практических работ.

Принятие решения в результате переработки полученной новой информации – важный момент на уроке, где обозначены временные рамки для выполнения задания, 12 минут. Для принятия решения учащийся может вернуться на предыдущие этапы урока на своем планшете и просмотреть все, что происходило на уроке до учебного исследования. Решение принято, выбор сделан. Этот момент – один из центральных моментов для формирования саморегуляции учащегося.

В классе происходит условное разбиение на группы по выбору учебного исследования. Это дает возможность получить помощь одноклассника при возникновении затруднений при выполнении задания и, наоборот, оказать помощь однокласснику. Чувства ответственности и значимости, единения и желания не отставать – способствуют внутренней самоорганизации для выполнения работы.

Процесс саморегуляции продолжается: учащийся ставит перед собой задачу, в соответствии с инструкцией, осуществляет подбор необходимых инструментов, прогнозирует результат. Таким образом он проектирует свою исследовательскую деятельность по выполнению задачи, планирует регулятивные действия, прогнозирует результат. И опять принимает значимое решение: вид и степень помощи. Это может быть изучение эталона (результата, который должен получиться) на планшете, вопрос педагогу (или просьба о дополнительном разъяснении), помощь одноклассника (сверяются и обсуждаются действия), другое.

После конкретизации для себя поставленной учителем математики задачи, принятия её и осмысления порядка выполнения действий до получения результата, учащийся составляет план и приступает к конкретным действиям, контролируя и регулируя процесс своего исследования. Сценарий предполагает выполнение построения *циклоиды, кардиоиды, синусоиды* с помощью бумаги, ножниц, линейки, картона, карандаша. Следуя инструкции, учащийся выполняет работу, сравнивая свой результат с результатом соседа по парте и эталоном, оценивая и проводя коррекцию своих действий, делает выводы.



Процесс саморегуляции завершается подведением итогов, самооценкой, коррекцией, постановкой новых задач.

После выполнения учебного исследования у учащихся есть возможность посмотреть, что получилось у другой группы. Появляется желание попробовать это сделать самому. Такую возможность МЭШ предоставляет. Зная ID сценария, учащийся может дома ещё и ещё раз сам или с родителями вернуться к уроку, просмотреть, изучить, потренироваться, закрепить приобретенные знания и РУУД. Но в измененных условиях, с помощью нового набора средств, что и приведет к совершенствованию приобретенных на уроке РУУД [25].

На следующем этапе учащиеся смотрят видео, сюжет о применении замечательных кривых в жизни, что закрепляет интерес к изучаемому материалу, значимость приобретенных РУУД, желание научиться строить замечательные кривые, узнать о них из дополнительных источников информации побольше. Тем более, что домашнее задание такого урока: мини проект «Спираль Архимеда». На уроке звучит лишь экскурс в историю, легенда об этой кривой, связанная с именем знаменитого ученого. Но формат мини-проекта уже сформирован в голове учащегося – это прототип учебного исследования, но теперь уже с интересным рассказом из истории и практическим применением в жизни.

Организация учебно-исследовательской деятельности учащихся в таком формате – это пиковый момент на уроке для оказания индивидуального точечного воздействия на развитие отдельных регуляторных компонентов у учащихся: ценностно-мотивационного, смыслового, опыта рефлексии, опыта привычной активизации, операционального опыта и опыта сотрудничества [24].

Наблюдая динамику изменения РУУД учащихся на уроке, проанализировав состояние аспектов учебно-исследовательской деятельности учащихся, учитель приходит к пониманию, как конструировать следующий урок, какое учебное исследование необходимо подобрать, в какой форме организовать

учебно-исследовательскую деятельность обучаемых для реализации процесса формирования РУУД учащихся при обучении математике.

При использовании ресурсов МЭШ учитель имеет возможность наблюдать за работой учеников на каждом этапе урока, оценивать сформированность РУУД, и, имея банк данных об индивидуальных особенностях каждого учащегося, фиксировать затруднения, своевременно оказывать помощь; сопровождать и направлять деятельность учащихся, индивидуально изменять (усложнять или добавлять элементы исследования) задания с учетом уровня развития регулятивных учебных действий [25]. Для учеников использование МЭШ позволяет реализовывать собственную образовательную траекторию, работать над формированием РУУД в индивидуальном темпе.

В Приложениях 1-5 диссертации приведены сценарии уроков в МЭШ: «Квадратный трёхчлен», «Решение неравенств второй степени с одной переменной», «Построение графика квадратичной функции», «Решение квадратных неравенств с одной переменной с параметром методом вариаций на оси», «Решение дробно-рациональных неравенств с параметром». Даны методические рекомендации по формированию РУУД, каждый из уроков завершается проведением самооценки, для этой процедуры разработан лист самооценивания.

Представим алгоритм процесса формирования РУУД учащихся при обучении математике в виде следующей схемы на рисунке 9:



*Рисунок 9 – Алгоритм процесса формирования РУУД при обучении математике*

Таким образом, реализация процесса формирования РУУД учащихся при обучении математике школьников как на уроках, так и во внеурочной деятельности, осуществима при организации образовательного процесса в соответствии с моделью методической системы формирования РУУД школьников при обучении математике, системой дидактических принципов обучения математике в процессе формирования РУУД. Внедрение разработанной методики в образовательный процесс школы мы предложили осуществлять через обучение учителей, в Приложении 6 приведена Программа «Методические подходы к конструированию сценария МЭШ с целью формирования РУУД» (48ч + индивидуальные консультации).

### **2.3 Постановка и анализ результатов педагогического эксперимента**

Педагогический эксперимент по организации обучения математике с целью формирования регулятивных универсальных учебных действий школьников в основной общеобразовательной школе проводился на базе МБОУ Лицей

№ 10 (126 учащихся, 5–9 классы), МБОУ Лицей № 12 г. Химки Московской области (99 учащихся, 5 и 8 классы) и ГБОУ Школа №1985 г. Москва (169 учащихся, 5–9 классы), всех участников эксперимента – 394. Педагогический эксперимент проходил в три этапа: констатирующий, поисковый и формирующий.

*Первый этап – констатирующий этап эксперимента*, (2009 – 2010 гг.) Цель данного этапа: констатация проблемы формирования РУУД учащихся и поиск эффективного механизма развития РУУД учащихся, рассмотрение возможности организации исследовательского обучения и использования исследовательских умений учащихся как основы целенаправленного формирования регулятивных учебных действий [19] в образовательном процессе.

На этом этапе эксперимента была изучена и проанализирована научно-педагогическая, психологическая и философская литература по проблеме исследования. Были проведены беседы с педагогами на предмет их отношения к использованию учебного исследования как средства для целенаправленного формирования регуляторных компонентов у учащихся; беседы с учащимися по выявлению их отношения к включению в учебно-исследовательскую деятельность. Была разработана анкета для учащихся и педагогов, проведено анкетирование и проанализирован результат.

Анкетирование педагогов позволило выявить три группы педагогов в зависимости от их отношения к использованию учебного исследования как средства для целенаправленного формирования регуляторных компонентов у учащихся.

Первая группа – учителя, которые считали, что организовывать ученическое исследование на уроках и во внеурочной деятельности возможно и необходимо. По их мнению, такой подход в обучении активизирует учащихся, приводит к положительной динамике в развитии регулятивных учебных действий: постановка детьми вопросов, анализ имитационно-жизненной ситуации и принятие решения, наблюдение, анализ и аргументирование, выдвижение гипотезы, эксперимент, др. (20% от участников эксперимента).

Вторая группа педагогов придерживалась мнения, что урок в массовой школе должен быть в большей мере традиционным, организация исследования с целью формирования регулятивных учебных действий возможна только после уроков, в небольших группах учащихся, проявляющих интерес к исследовательской деятельности и обладающих определёнными исследовательскими умениями (60% от участников эксперимента).

Третья группа – учителя, которые не видели возможности целенаправленного формирования регулятивных учебных действий у учащихся средствами организации учебного исследования в учебном процессе и в своей работе редко использовали основные методы исследования (20% участников эксперимента).

Трудности в организации целенаправленного формирования регулятивных универсальных учебных действий в процессе обучения средствами учебного исследования все учителя связывали с возрастными особенностями подростков и своей недостаточной методической подготовкой. При этом основными путями преодоления трудностей были названы распространение педагогического опыта, обучение на курсах повышения квалификации и подготовка студентов в педагогическом вузе.

Анкетирование учащихся выявило активное желание учащихся заниматься исследованием, но при различном ценностном отношении к данной деятельности:

- учащиеся, которые легко включались в деятельность и увлекались любым исследовательским заданием, были активны и самостоятельны (6% от участников эксперимента);

- учащиеся с устойчивым интересом к деятельности (в ситуации выбора они отдадут предпочтение исследовательской деятельности), но предпочитали не брать инициативу в свои руки, часто обращались за помощью к учителю, хотя могли выполнить задание и самостоятельно (71% от участников эксперимента);

- учащиеся с неустойчивым интересом к деятельности (включаются в деятельность только по наставлению учителя, не проявляют самостоятельности и активности, повторяют действия за учителем или другими учениками, 23% от участников эксперимента).

Наблюдения за организацией учебного процесса в общеобразовательном учреждении, данные, полученные в ходе констатирующего этапа эксперимента, позволили сделать следующие *выводы*.

1. Основным видом деятельности подростка является учение (как и в младшем школьном возрасте), но в настоящее время изменяется содержание и характер учебной деятельности. Поэтому, именно в процессе обучения, необходимо создать условия, при которых ученик сможет осваивать новые виды деятельности, в том числе исследовательскую деятельность, деятельность саморегуляции, что сформирует опыт, применимый в любой сфере жизнедеятельности человека, готовность к реализации личного творческого потенциала.

2. Несмотря на усиление внимания к ученику, к его саморазвитию и самопознанию, активное обсуждение вопросов осмысления новых подходов к построению процесса обучения, методика включения учащихся в указанные ранее виды деятельности разработана недостаточно. Образовательный потенциал учебно-исследовательской деятельности (УИД) в плане формирования РУУД используется не в полной мере. Организация учебно-исследовательской деятельности осуществляется фрагментарно, как дополнение к основной учебной деятельности; ранее не рассматривался вопрос специального формирования саморегуляции у учащегося в условиях УИД при обучении математике, т. е. развития РУУД учащегося в рамках учебно-исследовательской деятельности при обучении математике.

3. Учебно-исследовательская деятельность (УИД) способствует формированию эффективной системы самоуправления учением, усилению мотивации личностного саморазвития обучающихся, т. к. весь операционный состав

учебно-исследовательской деятельности непосредственно связан с деятельностью саморегуляции. Действительно, этап постановки исследовательской проблемы выполняется через целеполагание, прогнозирование, коррекцию промежуточных целей. Следующий этап УИД – поиск решения и осуществление решения проблемы, т. е. работа с гипотезами, их выдвижение, опровержение или доказательство – это планирование, контроль, реализация планов. Завершающий этап УИД – подведение итогов, выводы, комментарии, контроль – связан с оценкой, коррекцией. Волевая саморегуляция задействована на каждом из перечисленных этапов УИД. Таким образом, УИД является содержательно-процессуальной основой для формирования РУУД учащихся.

На этом этапе была выдвинута рабочая гипотеза, конкретизированы цели и задачи исследования.

На основе результатов констатирующего этапа и теоретического анализа проблемы в 2010 – 2015 годах проведен *второй – поисковый этап эксперимента*, целью которого были разработка компонентов методики формирования РУУД учащихся, а также выявление значимости или несущественности факторов, влияющих на ее эффективность. Необходимо было ответить на вопросы, как взаимосвязаны, как влияют на формирование РУУД организация учебного процесса в виде учебно-исследовательской деятельности, характер мотивации учащихся, уровень их обучаемости, показатель успеваемости. Формирование РУУД учащихся проводилось в процессе учебно-исследовательской деятельности при обучении математике, во взаимосвязи с формированием общих исследовательских умений учащихся, во внеурочной и урочной деятельности. Кроме того, на этом этапе эксперимента в соответствии с возрастом учащихся, математическим содержанием и сформированностью свойств действия была проведена классификация РУУД по классам и предметам.

Для проверки эффективности формирования РУУД во внеурочной деятельности было создано научное общество учителей и учащихся (НОУУ) с целью:

- полного и органичного включения исследовательской деятельности учащихся в образовательный процесс и целенаправленного формирования регулятивных универсальных учебных действий у учащихся;

- изменения психологии его участников и перестановки акцентов с традиционных образовательных форм на сотрудничество и партнерство учителя и ученика, учащихся коллектива, с целью обеспечения образовательной среды, как пространства саморазвития и социального взаимодействия, способствующей в дальнейшем адаптации учащихся в социуме;

- совместного поиска новых комплексных знаний, формирования стремления учащихся к самообразованию; овладения умениями использовать эти знания при создании своего интеллектуального продукта, востребованного обществом, формирования умения планирования своей индивидуальной образовательной траектории, прогнозирования результата, самооценки собственной деятельности;

- воспитания активного, ответственного гражданина и творческого создателя.

Задачи НОУУ:

- укрепление, совершенствование и дальнейшее творческое развитие системы исследовательской деятельности в общеобразовательном учреждении, как средства для целенаправленного формирования метапредметных регулятивных универсальных учебных действий учащихся;

- вовлечение в творческое проектирование новых его членов – обучающихся, их родителей – и создание, таким образом, единого творческого коллектива единомышленников, занятых общим делом воспитания и самовоспитания современной творческой личности, способной к саморазвитию;

- совершенствование форм организации исследовательской деятельности учащихся, как на уроках, так и во внеурочной деятельности.

Для определения уровня сформированности исследовательских умений учащихся по разработанным критериям использовались следующие диагно-



стические методы: педагогическое наблюдение, анализ продуктов исследовательской деятельности учащихся, разработанные опросники для педагогов и задания для учащихся: метод экспертного опроса «Формирование исследовательских умений» М. Ступницкой [217].

Анализ результатов диагностирования «подтвердил положительную динамику изменений в уровнях сформированности исследовательских умений учащихся» [20] (таблица 17).

*Таблица 17 – Распределение школьников по уровням сформированности исследовательских умений на поисковом этапе эксперимента (метод экспертного опроса М. Ступницкой)*

Исследовательские умения	На начало работы по программе НОУУ			По окончании работы по программе НОУУ		
	Состав			Состав		
Интеллектуальные умения	60% низкий	40% средний	- высокий	20% низкий	60% средний	20% высокий
Организационные умения	40% низкий	36% средний	24% высокий	24% низкий	34% средний	42% высокий
Коммуникативные умения	30% низкий	40% средний	30% высокий	10% низкий	40% средний	50% высокий

Было сделано предположение: целенаправленная учебно-исследовательская деятельность в процессе обучения будет способствовать формированию регулятивных универсальных действий учащихся.

Для проверки этого предположения инициативная группа учителей-предметников была вовлечена в апробацию методики формирования регулятивных учебных действий в процессе урочной и во внеурочной деятельности.

Мы руководствовались мнением А. И. Савенкова, который опирается на биологически predetermined потребность ребёнка познавать окружающий мир: «Дети от природы любопытны, склонны исследовать окружающий мир, а также самостоятельно упорядочивать полученный опыт, создавая, таким образом, собственные когнитивные схемы. Поэтому то, чему научаются

дети, в большей мере зависит от их собственных интересов и отражает их индивидуальный уровень понимания» [197. С. 12]. Изучалась динамика влияния изменений развития школьника во внеурочной деятельности на формирование регулятивных учебных действий учащегося. По мнению А. И. Савенкова, естественное состояние ребенка – внутреннее стремление к исследованию способствует тому, чтобы развитие ребенка изначально разворачивалось как процесс саморазвития, включающий саморегуляцию.

В нашем исследовании мы рассматриваем этот факт как «условие для целенаправленного формирования регулятивных учебных действий учащихся в условиях учебно-исследовательской деятельности, готовности школьника к становлению его саморегуляции» [18].

Были поставлены задачи: организовать учебно-познавательную деятельность учащихся на внеурочных занятиях, которая приближала бы ее к исследовательской; спрогнозировать формирование регулятивных универсальных учебных действий в условиях учебно-исследовательской деятельности; создать условия для реализации возможностей исследовательской деятельности обучающихся с целью формирования РУУД учащихся. Наблюдения за деятельностью учащихся во внеурочной деятельности и анализ результатов выполненной ими работы учителя заносили в разработанную «Карту педагогического прогнозирования».

Отслеживался показатель успеваемости учащихся (таблица 18), который, по мнению В. П. Беспалько [31], является основной характеристикой оптимальности учебного процесса, успешности обучения, успеваемости школьника.

*Таблица 18 – Карта для педагогического прогнозирования (фрагмент)*

№ п/ п	Ф.И. учащегося	Характеристики						Прогноз успеваемо- сти (в баллах)	Реальная успевае- мость
		Р	Т	И	К	ЭФ	НУ		
1	1 уч-ся	1	0	1	0	1	0	5,0	5,0

2	2 уч-ся	1	0	1	0	0	0	4,5	4,3
3	3 уч-ся	1	1	1	0	0	0	4,2	4,0
4	4 уч-ся	1	0	1	1	1	0	4,8	5,0
...	...								
Всего в классе (%):		8	1	8	8	24	4	3,75	4,2
		6	4	6					

Условные обозначения: Р – работоспособность, Т – тревожность, И – интеллект, К – креативность, ЭФ – эмоциональный фон, НУ – неприятие учителя, (1 – Да, 0 – Нет).

Для построения процесса обучения были сделаны выводы. Школьники со сниженной работоспособностью нуждаются в особой организации режима обучения: им необходимо давать возможность работать в свойственном им режиме, состоящем из коротких периодов напряжения и небольших пауз. Не способствует успешной учебе сниженный эмоциональный фон. И, наоборот, подсознательное хорошее отношение к учителю делает ребенка открытым к общению и восприятию информации от учителя, облегчает взаимопонимание, способствует успешности в учебе. Интеллект и креативность предполагают хорошую перспективу умственной деятельности, в том числе и учебной.

Информация таблицы 18 позволила учителю для каждого из учащихся составить схему действий (в произвольной форме) для регуляции собственной учебной деятельности, т е для формирования РУУД учащихся. Было предложено составить её для себя самим учащимся:

(ЗЗ) – заучивание знаний – механическое воспроизведение содержания познавательной задачи;

(ПГ) – понимание главного – сознательное воспроизведение главной сути в постановке и решении познавательной задачи;

(П) – подражание – копирование главных действий, связанных с усвоением познавательной задачи, под воздействием определенных мотивов (внутренних или внешних);

(ПВЗ) – полное владение знаниями – не только понимание главной сути познавательной задачи, но и воспроизведение ее содержания в какой-нибудь иной структуре изложения;

(Н) – навык – использование содержания конкретной познавательной задачи на подсознательном уровне, как автоматически выполняемую операцию;

(УПЗ) – умение применять знание – способность сознательно применять приобретенные знания в нестандартных учебных ситуациях;

(У) – убеждения – неопровержимые знания, которые обучаемый сознательно приобщает в свою жизнедеятельность, в истинности которых он уверен и готов эти приобретения отстаивать, защищать (одновременно, убеждения это – способность сохранять свою свободу мысли, достаточную для того, чтобы отказаться от предыдущей гипотезы, взгляда или позиции, как только окажется, что реальные факты опровергают их). Работа по осознанию и формулировке схемы собственной учебной деятельности – начальный этап формирования РУУД школьника. Самостоятельно полученная характеристика своей готовности к восприятию новой информации при сравнении с результатами других школьников означает формирование действий саморегуляции.

Если звучали следующие комбинации:

1 ученик:  $P \leftrightarrow 33 \rightarrow$  *ошибочное знание*;

2 ученик:  $P \rightarrow$  *ошибочное знание*;

3 ученик:  $33 \rightarrow P \rightarrow$  *ошибочное знание*;

значит, нужно было стремиться к более высокому уровню, например,

1 ученик:  $P \leftrightarrow 33 \rightarrow ПГ$  или 1 ученик:  $P \rightarrow ПВЗ \rightarrow У$ ;

2 ученик:  $P \rightarrow ПГ$ ; 2 ученик:  $ПГ \rightarrow ПВЗ \rightarrow УПЗ$ ;

3 ученик:  $33 \rightarrow ПГ$ ; 3 ученик:  $33 \rightarrow ПГ \rightarrow ПВЗ \rightarrow Н$ .

Комбинации схем зависели от самых разных причин: пробелы в знаниях, высокая или низкая заинтересованность, тип характера, недостаточная математическая подготовка, низкий или высокий уровень овладения способами мышления, уровень интуиции, исследовательские умения и др. Схемы обсуждались индивидуально, с целью направить учащегося к верному планированию своей дальнейшей учебной деятельности и ее регуляции.

Было отмечено, что в условиях групповых занятий при такой организации контроля и соответствующей коррекции процесса обучения, контролирующая функция от учителя постепенно переносится в сознание обучаемого. При этом обучение переходит в состояние саморегуляционного процесса благодаря постоянному самоконтролю, самооценке, самокоррекции со стороны школьника.

Учащиеся при систематической самооценке регулируют собственную учебную деятельность. Предполагается формирование РУУД:

- «планирование: составление плана и последовательности действий;
- прогнозирование: выявление объективной учебной информации, необходимой для решения учебной задачи и предвосхищение результата;
- целеполагание: соотнесение выявленной учебной информации с собственными знаниями, умениями, требованием;
- коррекция, контроль, решение об использовании помощи и др.».

Экспериментальная работа на поисковом этапе позволила распределить регулятивные, а также и другие универсальные учебные действия с учетом возраста обучаемых по 5-9 классам, (таблица 19). (РУУД см. рис.2, Табл.2)

*Таблица 19 – Распределение регулятивных учебных действий с учетом возраста обучаемых (1,2,3,4 - четверть, где фиксируется впервые, + наличие)*

Универсальные действия (ФОС)	Вид деятельности	Классы / четверти				
		5	6	7	8	9
Регулятивные	- постановка учебной задачи	1	+	+	+	+
	- определять и формулировать цель деятельности	1	+	+	+	+
	- планировать свои действия		1	+	+	+
	- осуществлять необходимые действия по реализации плана;		1	+	+	+
	- учитывать правила планирования и находить контроль способа решения			1	+	+
	- уметь соотносить результат своей деятельности с целью			1	+	+
	- вносить необходимые коррективы				1	+

	- использовать внешние и внутренние ресурсы				1	+
	- вносить изменения в содержание задач, ставить новые учебные задачи				1	+
	- осуществлять контроль по результату и способу действия					1
	- самостоятельно оценивать правильность выполнения действий и вносить коррективы					1
	- в сотрудничестве с педагогом ставить новые учебные задачи					1

*Продолжение таблицы 19*

Универсальные действия (ФОС)	Вид деятельности	Классы / четверти				
		5	6	7	8	9
Общеучебные	- умение выделить и сформулировать познавательную цель					2
	- поиск информации: работа с учебником, другими источниками учебной информации	2	+	+	+	+
	- воспроизведение информации (устно, письменно)			2	+	+
	- различение и восприятие различных стилей текстов	2	+	+	+	+
	- умение представить текст в виде таблиц, схем, графиков		2	+	+	+
	- умение составлять план (тезисный, сложный)				2	+
	- умение готовить доклады, выступления, презентации, другое			2	+	+
Знаково-символические	- моделирование – преобразование объекта в математическую модель (графическую, аналитическую или знаково-символическую)	2	+	+	+	+
Логические	- преобразование математической модели, выявление закономерности	2	+	+	+	+
	- выделение существенного, основного	3	+	+	+	+
	- планирование	3	+	+	+	+

- сравнение данных по заданным параметрам критериев	3	+	+	+	+
- осуществление сравнения, формулирование вывода		4	+	+	+
- классификация по признакам		4	+	+	+
- доказательство (опровержение)		4	+	+	+
- определение причинно-следственных связей			3	+	+
- навыки синтеза и анализа			3	+	+

Продолжение таблицы 19

Универсальные действия (ФОС)	Вид деятельности	Классы / четверти				
		5	6	7	8	9
Коммуникативные	- уточнение через вопросы	4	+	+	+	+
	- высказывание, рассуждение	4	+	+	+	+
	- умение слушать собеседника	4	+	+	+	+
	- умение участвовать в диалоге		3	+	+	+
	- краткость выражения мысли		3	+	+	+
	- продолжение (развитие) мысли собеседника		3	+	+	+
	- объективное оценивание другого			4	+	+
	- участие в выработке общего решения			4	+	+
	- навык выступления перед аудиторией				3	+
	- аргументированное участие в поиске истины				3	+
	- принятие решения при наличии разных мнений					3

В течение года проводилась диагностика уровня обучаемости учащихся в классах, где применялась методика целенаправленного формирования регулятивных универсальных учебных действий и классах, где учителя работали, не применяя данную методику.

*Уровень обучаемости* подразумевает: уровень возможностей учащегося и уровень его самостоятельности в учении. Самостоятельность в учении предполагает сформированность саморегуляции, поэтому уровень обучаемости

школьника функционально связан с его РУУД. Ориентируясь на уровень обучаемости школьника, учитель может проектировать весь учебный процесс. Обобщенная схема выявления уровня обучаемости учащихся (5-8 класс) по методике П. И. Третьякова [233] следующая.

Учитель:

- выбирает на 7 – 8 минут новый (уровень А) учебный материал;
- прежде, чем предложить его учащимся, организует повторение пройденного, необходимого для восприятия новой информации;
- объясняет новый учебный материал;
- обосновывает значимость нового материала на примерах применения в других областях или новых условиях;
- предлагает самостоятельную работу.

*Примерные задания:*

1. *Напишите, что вы узнали нового.*
2. *Ответьте на вопрос (по содержанию нового материала).*
3. *Выполните задание по образцу [35].*
4. *Придумайте новую ситуацию и применение новых знаний.*

Ключ к определению уровня обучаемости:

Работы собираются после того, как 4 – 5 учащихся выполняют задания.

Уровни обучаемости определяются следующим образом:

- *первый репродуктивный* уровень, выполнены 3 задания;
- *средний, второй, прикладной* уровень – 4 задания;
- *третий, очень высокий, творческий* уровень – 5 заданий.

*Характеристика уровня обучаемости*

*Низкий уровень обучаемости* – ученику для усвоения нового материала (может и не в полном объёме) нужна длительная тренировочная работа. Учащийся работает несамостоятельно, со всем классом, задания выполняет по образцу, выделить основное самостоятельно не может.



*Средний* уровень обучаемости – ученику достаточно небольшого объёма тренировочной работы для усвоения нового материала. Самостоятельно выделяет основное после объяснения и тренировок. Может применить полученные знания в новых условиях.

*Высокий* уровень обучаемости – ученик быстро усваивает новый материал, анализирует, выделяет главное, способен к обобщению, переносу знания в новые условия, готов к восприятию следующей новой информации.

Анализ проверочных работ в начале и конце поискового этапа эксперимента показал:

- высокий уровень обучаемости учащихся в группах с организацией внеурочной деятельности посредством учебно-исследовательской деятельности за время эксперимента значительно увеличился: с 20% до 42%; низкий уровень обучаемости снизился с 38% до 22% учащихся;

- в группах, где не применялась предложенная технология, произошёл менее значительный рост высокого уровня обучаемости – от 18% до 30%; низкий уровень обучаемости снизился с 40% до 34%.

На рисунке 10 представлена динамика изменений уровня обучаемости учащихся в начале и конце учебного года.

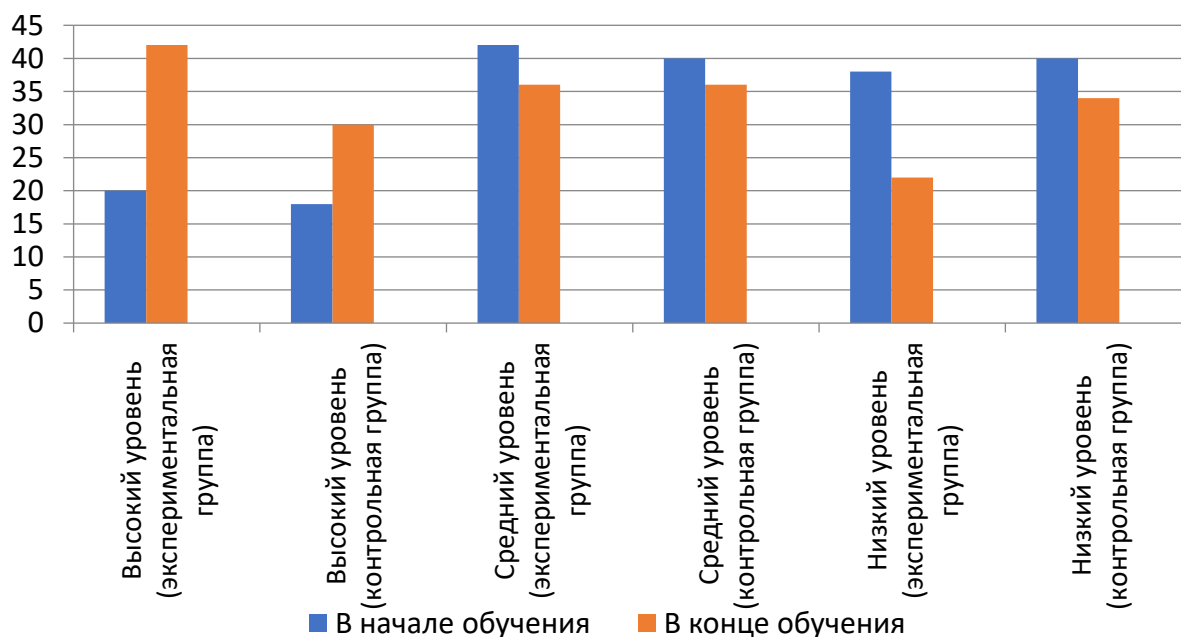


Рисунок 10 – Изменение уровня обучаемости учащихся в начале и конце учебного года

- Проведение поискового этапа эксперимента позволило предположить
- значимость учебно-исследовательской деятельности для формирования РУУД учащихся;
  - целесообразность спланированного формирования РУУД как в условиях урочной, так и внеурочной деятельности;
  - эффективность методики формирования РУУД для повышения уровня обучаемости и показателя успешности школьников.

В ходе поискового этапа эксперимента были выявлены условия для оценки сформированности РУУД учащихся:

- соответствие возрастно-психологическим нормативным требованиям;
- соответствие свойств регулятивных универсальных действий обозначенным требованиям (форма, обобщенность, развернутость и освоенность);
- сформированность учебной деятельности у учащихся, отражающей уровень развития метапредметных действий, выполняющих функцию регуляции познавательной деятельностью учащихся.

*На третьем, формирующем, этапе эксперимента (2015-2020)* осуществлялась проверка эффективности методики формирования РУУД учащихся на уроках математики. Для определения уровня сформированности РУУД учащихся были проведены проверочные работы в контрольной и экспериментальной группах, которые формировались с использованием распределения случайных чисел. Подтверждение различий в результатах контрольной и экспериментальной групп производилось по методике статистической обработки с помощью двустороннего  $\chi^2$  критерия [60]. Контрольную группу составили 85 учеников, экспериментальную – 84 ученика, (таблица 20).

Таблица 20 – Уровень сформированности РУУД (на начало и конец эксперимента)

Группы	Уровень сформированности РУУД (начало обучения)											
	Продвину- тый (+++)		Высокий (++ -)		Допусти- мый ( - ++)		Допусти- мый средний ( - + -)		Допусти- мый низкий ( - - +)		Недопусти- мый низкий ( - - -)	
	Кол- во	%	Кол- во	%	Кол- во	%	Кол- во	%	Кол- во	%	Кол- во	%
ЭГ	5	5,9	12	14,3	15	17,9	20	23,8	25	29,8	7	8,3
КГ	6	7,1	14	16,5	15	17,6	19	22,3	24	28,3	7	8,2
Уровень сформированности РУУД (конец обучения)												
ЭГ	23	27,4	30	35,7	12	14,3	8	9,5	6	7,1	5	5,9
КГ	5	5,8	12	14,1	17	20,0	26	30,6	19	22,4	6	7,1

Уровень сформированности РУУД, определялся в соответствии с качеством решения учащимся поставленной учебной задачи, с имеющимися навыками регулятивной деятельности, регистрируемыми РУУД, их свойствами и характером выполнения, (см. рисунок 2, табл. 19) : *понимать, принимать и сохранять учебную задачу; определять и формулировать цель деятельности, позволяющую решать учебные задачи; планировать свои действия в соответствии с поставленной целью, направленной на решение проблемы, и условиями её реализации; осуществлять необходимые действия по реализации плана; учитывать правила планирования и находить контроль способа решения; осуществлять итоговый и пошаговый контроль по результату; различать способ и результат действия; уметь соотносить результат своей деятельности с целью и оценивать правильность его выполнения по заданным внешним и сформированным внутренним критериям; вносить необходимые коррективы в действия после его завершения на основе его оценки и учета характера сделанных ошибок; проявлять инициативу действия в учебной деятельности; осуществлять контроль по результату и по способу действия; самостоятельно оценивать правильность выполнения действия и вносить необходимые коррективы в исполнение, как в конце действия, так и по ходу его реали-*

зации; использовать внешние и внутренние ресурсы для адекватного целеполагания, планирования и регуляции своей деятельности; в сотрудничестве с педагогом ставить новые учебные задачи.

Продвинутый (+++) – оценка «5»: видит идею рационального (вариативность) решения учебной задачи; владеет устойчивыми навыками ее выполнения; верно, осознанно, развернуто выполняет регулятивные действия, адекватно прогнозирует и оценивает результат, устойчиво демонстрирует весь состав РУУД.

Высокий (++) – оценка «5 –»: видит идею решения учебной задачи; соотносит исходные данные и верно, осознанно, развернуто выполняет регулятивные действия; не достаточно устойчиво демонстрирует весь состав РУУД.

Допустимый (-++) – оценка «4»: не сразу видит идею решения учебной задачи (нужны наводящие вопросы, помощь); развернуто, осознанно выполняет регулятивные действия; но не всегда в полной мере владеет всем набором РУУД.

Допустимый средний (-+-) – оценка «3»: не видит идею решения учебной задачи; не умеет прогнозировать конечный результат; но присутствуют отдельные навыки регулятивной деятельности.

Допустимый низкий (- - +) – оценка «3 –»: хорошо развита логика рассуждений при решении учебной задачи; может предположить конечный результат (не выполняя логических действий); нет устойчивых навыков регулятивной деятельности;

Недопустимый низкий (- - -) – оценка «2»: в силу индивидуальных особенностей не выполняет контрольную работу на удовлетворительную оценку; не решает учебную задачу; но на занятиях демонстрирует отдельные регулятивные навыки.

Для проведения статистической обработки были выдвинуты следующие гипотезы. Гипотеза  $H_0$ : вероятности распределения учащихся по уровню

РУУД в экспериментальной и контрольной группах равны. Гипотеза  $H_1$ : вероятности распределения учащихся по уровню РУУД в экспериментальной и контрольной группах не равны [35].

Вычисляли  $\chi_{\text{экс}}^2$  по формуле

$$\chi_{\text{экс}}^2 = \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \cdot \sum_{i=1}^c \frac{(n_1 \cdot O_{2i} - n_2 \cdot O_{1i})^2}{O_{1i} + O_{2i}}$$

где  $n_1$  – число учащихся в экспериментальной группе,

$n_2$  – число учащихся в контрольной группе,

$O_{1i}$  – количество учащихся в экспериментальной группе с определённым уровнем РУУД,

$O_{2i}$  – количество учащихся в контрольной группе с определённым уровнем РУУД.

В начале обучения:

$$\chi_{\text{экс}}^2 = \frac{1}{84 \cdot 85} \left( \frac{(84 \cdot 6 - 85 \cdot 5)^2}{6 + 5} + \frac{(84 \cdot 14 - 85 \cdot 12)^2}{14 + 12} + \frac{(84 \cdot 15 - 85 \cdot 15)^2}{15 + 15} + \frac{(84 \cdot 19 - 85 \cdot 20)^2}{19 + 20} + \frac{(84 \cdot 24 - 85 \cdot 25)^2}{24 + 25} + \frac{(84 \cdot 7 - 85 \cdot 7)^2}{7 + 7} \right) \approx 0,286$$

Табличное значение  $\chi_{0,05}^2 = 11,07$  для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  и для  $k = 6 - 1 = 5$  пяти степеней свободы.

На основании неравенства  $\chi_{\text{экс}}^2 = 0,286 < \chi_{0,05}^2 = 11,07$  делаем вывод: нет оснований отвергать гипотезу  $H_0$ . Вероятности распределения учащихся по уровню сформированности РУУД в контрольной и экспериментальной группах одинаковы, т. е. группы сформированы правильно.

В конце обучения:

$$\chi_{\text{экс}}^2 = \frac{1}{84 \cdot 85} \left( \frac{(84 \cdot 5 - 85 \cdot 23)^2}{5 + 23} + \frac{(84 \cdot 12 - 85 \cdot 30)^2}{12 + 30} + \frac{(84 \cdot 17 - 85 \cdot 12)^2}{17 + 12} + \frac{(84 \cdot 26 - 85 \cdot 8)^2}{26 + 8} + \right)$$

$$+ \left. \frac{(84 \cdot 19 - 85 \cdot 6)^2}{19 + 6} + \frac{(84 \cdot 6 - 85 \cdot 5)^2}{6 + 5} \right) \approx 36,515.$$

$$\chi_{\text{экс}}^2 = 36,515 > \chi_{0,05}^2 = 11,07$$

Эти данные означают, что после проведения эксперимента гипотезу  $H_0$  нужно опровергнуть и принять конкурирующую гипотезу  $H_1$ , при этом есть все основания считать, что различия в контрольной и экспериментальной группах в конце обучения обусловлены различиями в примененных методиках.

В процессе обучения математике по предлагаемой методике учащиеся выполняли различные типы исследовательских заданий, проявляли самостоятельность и активность, выполняя учебные мини-проекты, овладевали методами научного познания. Продуктом явился коллективный исследовательский проект «За страницами учебника «Геометрия»», исследовательские работы для участия в конференциях и конкурсах (школьного уровня и муниципального уровня) [20]. В процессе обучения, учащиеся учились аргументировано представлять свою позицию, осуществлять самостоятельный поиск решения проблем, проявлять настойчивость и другие личностные качества.

Универсальные регулятивные учебные действия формировались упражнениями в изменяющихся условиях, т. е. в процессе переноса способов действий в несколько измененную и новую учебную ситуацию.

В конце учебного года были проанализированы результаты изменения уровня сформированности регулятивных универсальных учебных действий и мотивации учебной деятельности в условиях применения учебно-исследовательской деятельности во внеурочной деятельности, см. рисунок 11.

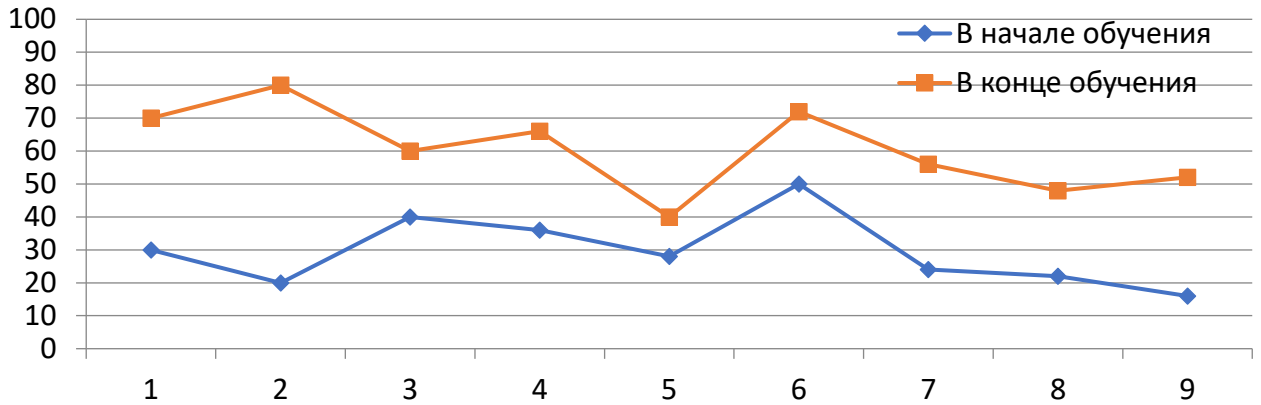


Рисунок 11 – Динамика сформированности РУУД учащихся в экспериментальной группе (5-8 классы) на начало и конец обучения в процентах

Состав РУУД в процессе обучения математике в 8-ом классе при проведении эксперимента, см. таблицу – 19, см. рисунок 2:

1 – ставить учебную задачу; 2 – определять и формулировать цель деятельности, 3 - планировать свои действия, учитывать правила планирования и находить контроль способа решения; 4 – осуществлять необходимые действия по реализации плана; 5 – учитывать правила планирования и находить контроль способа решения сравнивать полученные результаты с учебной задачей; 6 – уметь соотносить результат своей деятельности с целью; 7 – вносить необходимые коррективы в действия; 8 – использовать внешние и внутренние ресурсы; 9 – вносить изменения в содержание задач, ставить новые учебные задачи [21].

На рисунке 12 представлена динамика сформированности регулятивных универсальных учебных действий у учащихся в контрольной группе в процентах.

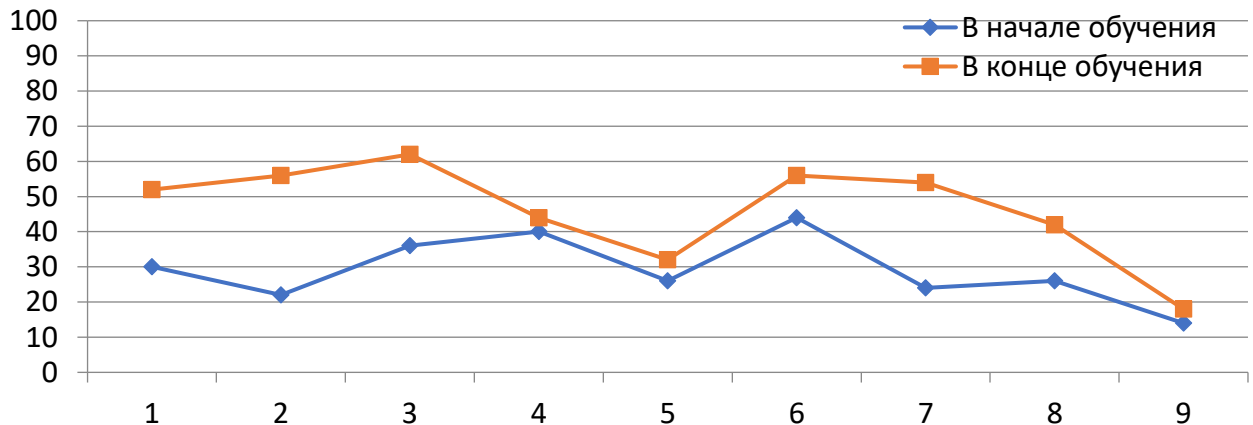


Рисунок 12 – Динамика сформированности РУУД учащихся в контрольной группе (5-8 классы) на начало и конец обучения в процентах

Был сделан вывод, что при совершенствовании универсальных регулятивных учебных действий они в целом не автоматизируются, поскольку этому процессу не подвержено центральное звено решения мыслительных задач: нахождение принципа (основной идеи) решения на основе связи известного с неизвестным. И таким образом, действия, совершающиеся с помощью универсальных регулятивных учебных действий, всегда осознаваемы.

Показателями эффективности исследовательского обучения являются: динамика включения в исследовательскую деятельность; качество усвоения программного материала по алгебре и геометрии; показатели качества обученности по итогам отчетного периода (итоговые четвертные оценки) по программе восьмого класса. Результаты отражены в таблице 21.

*Таблица 21 – Динамика личностного становления учащихся восьмых классов в условиях их включения в исследовательскую деятельность в процессе обучения (в %)*

Критерии	Группы	Уровни сформированности					
		констатирующий эксперимент			формирующий эксперимент		
		высокий	средний	низкий	высокий	средний	низкий
Отношение учащихся к исследовательской деятельности	ЭГ	6	18	76	30	16	54
	КГ	6	12	72	18	21	61
Готовность учащихся к саморегуляции в учебно-исследовательской деятельности	ЭГ	6	46	48	33	36	21
	КГ	5	45	50	24	40	36

Эксперимент позволил зафиксировать положительную динамику в развитии универсальных регулятивных учебных действий учащихся с развитыми исследовательскими умениями. Таким образом, подтвердилась взаимосвязь



этапов исследовательской деятельности с компонентами процесса саморегуляции, представленная ранее.

Был сделан вывод: результаты развития универсальных регулятивных учебных действий характерны и для исследовательской деятельности. Следовательно, опираясь на положения системного подхода, можно утверждать, что интеграция данных умений в единую систему образовательной практики быстрее приведет к достижению запланированных результатов, чем их применение и развитие как отдельных составляющих [19].

Результаты показали, что увеличилось количество учащихся с устойчивой мотивацией к исследовательской деятельности [19] (на 24%), с высоким уровнем личной активности и самостоятельности исследовательской деятельности и высокой степенью эмоциональной удовлетворенности её процессом и результатами (на 27%).

Далее, для получения статистически значимых выводов о связи формирования РУУД с уровнем освоения школьниками исследовательской деятельностью мы посчитали коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Для определения сформированности исследовательской деятельности школьников применяли методику А. И. Савенкова [196] – [198], А. С. Обухова [167]. Авторы выделяют основные показатели овладения школьниками исследовательской деятельностью: 1. Умение формулировать проблему. 2. Умение выдвигать гипотезы, строить предположения. 3. Умение формулировать и задавать вопросы. 4. Умение описывать явления, процессы, рассуждать и обобщать. 5. Умение делать выводы и умозаключения. 6. Степень самостоятельности при проведении эксперимента.

После проведения ранжирования в экспериментальной и контрольной группах на конец эксперимента и вычисления коэффициента ранговой корреляции Спирмена мы получили следующее. Значение коэффициента ранговой корреляции Спирмена в экспериментальной группе равно 0.94; это означает, что связь между одним признаком (овладение школьниками исследовательской деятельностью) и другим признаком (уровнем сформированности РУУД

школьников) сильная и прямая [21]. Таким образом, мы подтвердили значимость признака: сформированность исследовательской деятельности, - для методики целенаправленного формирования РУУД школьников. Для контрольной группы коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен 0,43, т.е. связь между признаками слабая и прямая.

Анализ данных, полученных в ходе эксперимента, подтвердил эффективность методики формирования универсальных регулятивных учебных действий учащихся средствами учебно-исследовательской деятельности в процессе обучения математике.

Приведем результаты динамики сформированности РУУД учащихся 9-х классов после проведения эксперимента. К 9-му классу в экспериментальной группе, где на протяжении 4 лет (5 -8 классы) проводилась целенаправленная работа формирования РУУД, апробировалась методика формирования РУУД на уроках и внеурочной деятельности, сформированность РУУД (1 – 9) к 9-му классу уже была выше, чем в контрольной группе, где методика не применялась. Нам предстояло проверить сформированность всей группы РУУД и, в частности, РУУД, относящихся к 9-му классу: 10 – осуществлять контроль по результату и способу действия; 11 – самостоятельно оценивать правильность выполнения действий и вносить коррективы; 12 – в сотрудничестве с педагогом ставить новые учебные задачи [19].

Результаты отражены на рисунке 13.

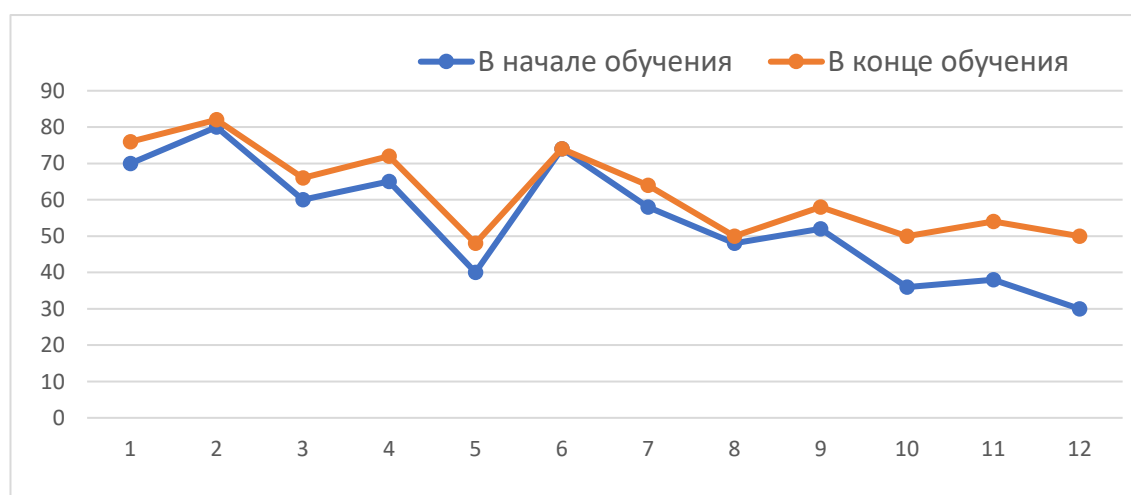
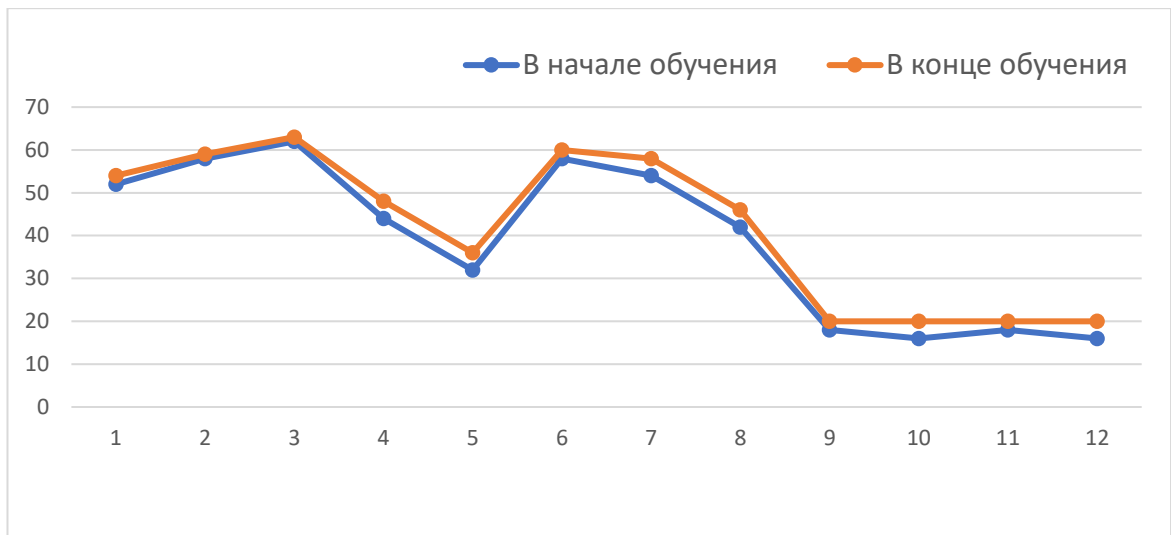


Рисунок 13. Динамика сформированности РУУД учащихся в экспериментальной группе на начало и конец обучения в 9 классе в процентах

В контрольной группе динамика развития РУУД менее выражена. Мы можем не без оснований предполагать, что недостаточная сформированность РУУД в подростковом возрасте происходит из-за того, что этот процесс в контрольной группе осуществляется без специальной, целенаправленной работы педагога.



*Рисунок 14. Динамика сформированности РУУД учащихся в контрольной группе на начало и конец обучения в 9 классе в процентах*

Оба рисунка 13, 14 демонстрируют рост сформированности РУУД, на рисунке 13 для экспериментальной группы этот рост более выражен [20].

В дополнение к приведенным результатам анализ оценок годовых проверочных работ в 9-ых классах подтвердил тот факт, что между качеством освоения математики к окончанию основной школы и сформированностью всей группы РУУД существует прямая связь, т. е. ученики с высокими результатами по годовой проверочной работе имели и более высокие показатели сформированности РУУД. Такая прямая зависимость была более выражена в экспериментальной группе по сравнению с контрольной.

## Выводы по II главе

1. Методическая система формирования РУУД школьников при обучении математике в основной общеобразовательной школе – это целостная совокупность взаимосвязанных компонентов: цель, содержание, формы, методы, средства, диагностика, – выделенная из общего образовательного процесса. Методическая система является открытой (ее элементы взаимодействуют с внешней средой) и управляемой (имеется цель, которой подчинена система). Модель методической системы содержит четыре взаимосвязанных компонента: целевой, содержательный, операциональный (формы, методы, средства) и диагностический, – при ведущей роли целевого компонента.

*Целевой компонент методической системы* обусловлен необходимостью формирования полной осознанной саморегуляции у учащихся с учетом особенностей взаимодействия: «учитель математики – ученик», «ученик – ученик», «учение – ученик», при этом ожидаемые результаты заключаются [20] в формировании регулятивных универсальных учебных действий, повышении качества обучения математике. Компоненты предлагаемой методической системы: содержательный, операциональный, диагностический – подчинены целевому компоненту и обеспечивают наиболее эффективное достижение поставленных целей.

*Содержательный компонент методической системы* представлен математической, информационной, методологической составляющими математического общего образования с целью формирования РУУД учащихся. Это вариативные, конвергентные, исследовательские задачи; учебно-исследовательские и научно-исследовательские проекты, практические работы. Предпочтение в отборе математического содержания отдается заданиям исследовательского типа, т. е. делается акцент на организации учебной деятельности в виде УИД [24].

*Операциональный компонент методической системы* обеспечивает последовательную организацию учебного процесса по освоению содержания математики в соответствии с уровнями самостоятельной познавательной деятельности учащихся [20]: репродуктивно-вариативному, вариативно-эвристическому, эвристическому. При этом регулятивные универсальные учебные действия, необходимые для выполнения учебно-исследовательской деятельности, сначала формируются у учащихся, а затем применяются ими для освоения новой учебной информации [20].

*Диагностический компонент методической системы* призван определять исходный уровень регулятивных универсальных учебных действий обучающихся, и обеспечивать связку элементов «цель – результат», что достигается посредством мониторинга развития формируемых качеств в процессе организованного взаимодействия обучающихся и преподавателя.

2. Методологической основой построенной методической системы являются системно-деятельностный подход, система общедидактических принципов, а также специальные принципы методики формирования регулятивных универсальных учебных действий учащихся при обучении математике: принцип структуризации; принцип динамичности; принцип гибкости; принцип постепенности; принцип паритетности; принцип реализации обратной связи; принцип осознанной перспективы.

3. Реализация спроектированной методической системы формирования РУУД учащихся при обучении математике определяет методику и методические рекомендации на уровне учебного предмета, содержательно-методических линий, класса, урока, внеурочного занятия.

*Глобальная цель* методической системы – формирование РУУД – реализуется через достижение *тактических и оперативных* целей при обучении математике в 5-6 классах, алгебре и геометрии в 7-9 классах (прогнозирование свойств геометрических фигур при использовании подвижных чертежей пакета GeoGebra, предвидение результатов при выполнении алгебраических преобразований и т.д.), через *этапные цели* содержательно-методических линий.

Затем этапные цели трансформируются в фазовые целевые установки уроков и внеурочных занятий. Отбор содержания и разработка форм, методов и средств обучения определяется соответствующим операционным составом регулятивной деятельности. Диагностика сформированности РУУД отражает прирост качественных характеристик РУУД, регистрирует изменения от простых форм – к сложным, от низкой обобщенности действий – к высокой, от неполной развернутости, освоенности действия – к их полноте.

4. Методика формирования РУУД школьников при обучении математике ориентирована на организацию образовательного процесса адекватно индивидуальным целям и обеспечению осознанной саморегуляции учащегося. Содержательно-процессуальной основой процесса формирования РУУД школьников при обучении математике является учебно-исследовательская деятельность (УИД), в рамках которой осуществляется эффективное формирование всей системы РУУД, становление субъектной активности учащихся, их самостоятельности, саморегуляции. Основными чертами разработанной методики формирования РУУД при обучении математике являются: направленность на развитие осознанной саморегуляции каждого ученика, ориентация на создание адекватных условий для вовлечения каждого ученика в учебно-исследовательскую деятельность, формирование ценностных установок и приоритетов развития РУУД.

5. Анализ данных педагогического эксперимента по проверке эффективности разработанной методики формирования регулятивных универсальных учебных действий в процессе учебно-исследовательского обучения математике в общеобразовательной школе свидетельствует о положительной динамике сформированности регулятивных универсальных учебных действий у учащихся экспериментального класса, что выражается в овладении следующими умениями:

– понимать, принимать и сохранять задачу, изменилось осмысление деятельности;

– самостоятельно ставить [20] учебные задачи, определять и формулировать цель деятельности, интерпретировать словесный материал, создавать схемы, графики;

– не только планировать свои действия, но и уверенно осуществлять их, контролируя и корректируя.

– осмысленно относиться к результату своей деятельности, оценивать логику построения материала в виде письменного текста.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формирование регулятивных универсальных учебных действий школьников при обучении математике представляет собой одну из обязательных составляющих современного образовательного процесса, т. к. находится в русле актуального формирования всей системы УУД школьников, отвечает сегодняшним требованиям государства и общества к результатам общего образования, решает одну из локальных задач проблемы выстраивания образовательных стратегий в основной школе.

Анализ психолого-педагогической литературы позволил заключить, что эффективное формирование РУУД школьников возможно осуществлять лишь в структуре полной осознанной саморегуляции, компоненты которой представлены ценностно-мотивационным, смысловым, операциональным блоками и различными видами опыта - рефлексии, привычной активизации, сотрудничества. Кроме того, основываясь на положениях теории деятельности, и, в том числе, учебно-исследовательской, мы выдвинули предположение о продуктивном влиянии УИД на формирование РУУД, что в дальнейшем подтвердилось в результате проведенного исследования. Указанные положения, теоретические основания системно-деятельностного подхода, дидактические принципы, а также требования действующих ФГОС ОО послужили руководством для проведенного исследования, основные результаты и выводы которого представлены ниже.

Деятельностная парадигма современного образования предусматривает развитие способности учащихся самостоятельно организовывать и регулировать собственную учебную деятельность в процессе освоения различных предметов, в частности математики с опорой на специфические возможности учебных предметов. В результате исследования был выявлен развивающий потенциал математики в плане формирования РУУД: совершенствование математического языка способствует формированию осознанной саморегуляции; применение математических методов обусловлено реализацией полной системы



РУУД; формирование различных видов мышления – логического, критического, творческого – осуществляется в процессе решения различного рода математических задач задействованием всего операционного состава регулятивной деятельности.

Процесс формирования РУУД при обучении школьников математике наиболее продуктивно осуществляется в структуре полной осознанной саморегуляции. Формирование РУУД школьников при обучении математике обеспечивает их субъектную активность, самостоятельность, обеспечивает стремление школьников к приобретению различных видов опыта (рефлексии, привычной активации, сотрудничества), к изменениям в ценностно-мотивационной и смысловой сферах личности.

Формирование РУУД школьников тесно связано с развитием учебно-исследовательской деятельности. Как показано в ходе формирующего этапа эксперимента связь между овладением школьниками УИД и уровнем сформированности их РУУД в процессе обучения математике сильная и прямая. Этот факт позволяет рассматривать УИД школьников в качестве содержательно-процессуальной основы формирования всей системы РУУД школьников. Вовлечение учащихся в учебно-исследовательскую деятельность при обучении математике способствует трансформации внешней мотивации во внутреннюю, повышает активность, самостоятельность, сознательность учащегося, его умение ориентироваться в новой ситуации. Создание развивающей образовательной среды обеспечивает организацию учебной деятельности в виде УИД на внеурочных занятиях; принципами формирования РУУД школьников в развивающей образовательной среде в процессе обучения математике являются: принципы информированности, эмоциональной насыщенности, оптимального соотношения процессов развития и саморазвития ученика, открывающей перспективы реализации субъектного опыта школьников в различных видах деятельности, направленности на формирование интегративных качеств личности.

Педагогическими условиями, обеспечивающими формирование РУУД в процессе обучения математике в общеобразовательной школе, являются: обеспечение индивидуализации освоения образовательной программы с учетом интересов и способностей учащегося; создание лично развивающей образовательной среды как пространства саморазвития и социального взаимодействия школьников; использование математического содержания для интеллектуализации учебной деятельности. Совокупность педагогических условий позволяет организовать процесс формирования регулятивных универсальных учебных действий на основе обеспечения учащимся выбора вариативного содержания образования и соответствующих его интересам и потребностям форм образования.

Методическая система формирования РУУД школьников в процессе обучения математике в общеобразовательной основной школе является открытой и управляемой. Ее модель состоит из четырех компонентов: целевого, содержательного, операционального и диагностического. Целевой компонент методической системы играет ведущую роль в функционировании системы, ему подчинены все остальные компоненты. Целевой компонент обусловлен необходимостью формирования полной осознанной саморегуляции учащихся в процессе образовательных взаимодействий. Содержательный компонент методической системы представлен различного рода задачами (исследовательскими, вариативными, конвергентными), учебно-исследовательскими проектами, практическими работами. В содержание также включаются «знания о деятельности», вся система РУУД учащихся. Операциональный компонент методической системы обеспечивает последовательную организацию учебного процесса по освоению содержания математики в соответствии с уровнями самостоятельной познавательной деятельности учащихся. При этом РУУД необходимые для выполнения учебно-исследовательской деятельности, сначала формируются у учащихся, а затем применяются ими для освоения но-

вой учебной информации. Диагностический компонент обеспечивает непрерывный диагностируемый процесс коррекции и диагностики сформированности РУУД школьников на всех этапах обучения.

Методика и методические рекомендации формирования РУУД школьников в процессе обучения математике в общеобразовательной основной школе базируются на теоретических построениях модели методической системы и специальных принципах методики формирования РУУД учащихся при обучении математике – структуризации, динамичности, гибкости, постепенности, паритетности, реализации обратной связи, осознанной перспективы. Учебно-исследовательская деятельность (УИД) выступает в качестве содержательно-процессуальной основы формирования РУУД. В процессе УИД осуществляется становление субъектной активности учащихся, их самостоятельности, саморегуляции. Достижение тактических и оперативных целей при обучении математике в 5-6 классах, алгебре и геометрии в 7-9 классах осуществляется посредством вовлечения обучающихся в учебно-исследовательскую деятельность, в рамках которой регулируется детская инициатива, поддерживается поисковая активность, стремление к самостоятельному открытию средств и способов решения задач и доказательств теорем, формируется умение учиться самостоятельно. Операционный состав регулятивной деятельности охватывает вариативные, конвергентные, исследовательские задачи; учебно-исследовательские проекты, практические работы.

Основными чертами разработанной методики формирования РУУД при обучении математике являются: направленность на развитие осознанной саморегуляции каждого ученика, ориентация на создание адекватных условий для вовлечения каждого ученика в учебно-исследовательскую деятельность, формирование ценностных установок и приоритетов развития РУУД; непрерывность и диагностируемость процесса сформированности РУУД школьников.

Результаты педагогического эксперимента подтвердили выдвинутую гипотезу и доказали эффективность разработанной методики формирования

РУУД при обучении математике в условиях учебно-исследовательской деятельности в общеобразовательной основной школе.

Продолжение исследований возможно в направлении выявления специфики РУУД учащихся старших классов общеобразовательной школы и разработки методики их развития.

## Список литературы

1. Абульханова-Славская, К. А. Психология и педагогика [Текст] / К. А. Абульханова-Славская, Н. В. Васина, В. А. Сластенин. – М.: Изд-во ин-та психотерапии, 1998. – 335 с.
2. Абульханова-Славская, К. А. Стратегия жизни [Текст] / К. А. Абульханова-Славская. – М.: Изд-во «Мысль», 1991. – 299 с.
3. Абульханова-Славская К.А. Развитие личности в процессе жизнедеятельности // Психология формирования и развития личности. М.: Наука, 1981. С. 19-45.
4. Алексеев, Н. Г. Концепция развития исследовательской деятельности учащихся [Текст] / Н. Г. Алексеев, А. В. Леонтович, А. В. Обухов [и др.] // Исследовательская работа школьников. – 2001. – №. 1. – С. 24 – 34.
5. Ананьев, Б. Г. Психологическая структура человека [Текст] / Б. Г. Ананьев // Человек и общество. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. – Вып. 2. – С. 235 – 249.
6. Анохин, П. К. Роль ориентировочно-исследовательской реакции в образовании условного рефлекса и проблема ориентировочно-исследовательской деятельности [Текст] / П. К. Анохин. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1965. – 268 с.
7. Анохин, П. К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем [Текст] / П. К. Анохин. – М.: Изд-во «Директ-Медиа», 2008. – 131 с.
8. Анфилатов, В. С. Системный анализ в управлении / В. С. Анфилатов, А. А. Емельянов, А. А. Кукушкин. – М. : ФиС, 2002. – 368 с.
9. Аронов, А. М., Знаменская, О.В. О понятии «математическая компетентность» [Текст] / А. М. Аронов, О. В. Знаменская // Вестник Московского университета. – Серия 20. Педагогическое образование. – № 4. – 2010. – С. 31-43.

10. Асмолов, А. Г. Системно-деятельностный подход к разработке стандартов нового поколения [Текст] / А. Г. Асмолов // Педагогика. – 2009. – № 4. – С. 18 – 22.
11. Асмолов, А. Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий [Текст] : пособие для учителя / А.Г. Асмолов, Г.В. Бурменская, И.А. Володарская [и др.]. – М.: Изд-во «Просвещение», 2011. – 159 с.
12. Асмолов, А. Г. Проектирование универсальных учебных действий в старшей школе [Текст] / А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская // Национальный психологический журнал. – 2011. – № 1 (5). – С. 104 – 110.
13. Бабанский, Ю. К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе [Текст] / Ю. К. Бабанский. – М.: Изд-во «Просвещение», 1985. – 208 с.
14. Бабанский, Ю. К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса [Текст] / Ю. К. Бабанский. – М.: Изд-во «Просвещение», 1982. – 192 с.
15. Бадмаева, Н. Ц. Влияние мотивационного фактора на развитие умственных способностей [Текст] / Н. Ц. Бадмаева. – Улан-Удэ, 2004. – 280 с.
16. Бандура, А. Теория социального научения [Текст] / А. Бандура. – СПб.: Изд-во «Евразия», 2000. – 320 с.
17. Баракова, Е. А. Исследовательское обучение как основа формирования регулятивных учебных действий в процессе обучения математике в общеобразовательной школе [Текст] / Е. А. Баракова // Международный научно-исследовательский журнал. – 2016. – № 09 (51). – Ч. 4. Сентябрь. – С. 53 – 56.
18. Баракова, Е. А. Обеспечение индивидуализации образовательных программ и путей их усвоения в зависимости от способностей и интересов обучающихся [Текст] / Е. А. Баракова // Проблемы функционирования современного государства: право, политика, экономика, образование : сб. научн. докладов Международной научно-практической конференции

- (г. Москва, 17 апреля 2015 г.). – М.: Изд. Дом «Научное обозрение», 2015. – С. 21 – 36.
19. Баракова, Е. А. Основные принципы и понятия технологии формирования регулятивных умений в исследовательском обучении (ИО) [Текст] / Е. А. Баракова // *European Social Science Journal*. – 2014. – № 1 (40). – Т. 1. – С. 66 – 75.
20. Баракова, Е. А. Технология формирования регулятивных умений учащихся общеобразовательной школы посредством использования исследовательского обучения [Текст] / Е. А. Баракова // *Теория и практика образования в современном мире: материалы II Междунар. науч. конф.* (г. Санкт-Петербург, ноябрь 2012 г.). – СПб.: Изд-во «Реноме», 2012. – С. 64 – 67.
21. Баракова, Е. А. Управление процессом формирования регулятивных умений учащихся в исследовательском обучении [Текст] / Е. А. Баракова // *Историческая и социально-образовательная мысль*. – 2013. – № 1. – С. 75 – 78.
22. Баракова, Е.А. Сущность методики формирования регулятивных учебных действий учащихся общеобразовательной школы (на примере обучения математики) [Текст] / Е.А. Баракова // «Педагогический журнал» (Научный рецензируемый журнал о проблемах и перспективах образования в России и зарубежом), (г. Ногинск, август 2018г.). – Т. 8, № 4А.
23. Баракова, Е.А. Учебная исследовательская деятельность – основа формирования регулятивных УУД (на примере обучения математике) [Текст] / Е.А. Баракова // «Наука и Школа», *Общероссийский научно-педагогический журнал, МПГУ - № 6, декабрь 2018. г. Москва*
24. Баракова Е.А., Реализация методики формирования регулятивных учебных действий учащихся средствами МЭШ [Текст] / Е.А. Баракова // «Ученые записки Орловского государственного университета», Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, (г. Орёл, октябрь-декабрь 2019г.). - № 4 (85), 2019.

25. Баракова Е.А., Обеспечение индивидуализации образовательных программ и путей их усвоения в зависимости от способностей и интересов обучающихся [Текст] / Е.А. Баракова // Международная научно-практическая конференция «Проблемы функционирования современного государства: право, политика, экономика, образование» (Москва, 2015). – 21с.
26. Баранова, Е. В. Методические основы использования учебных исследований при обучении геометрии в основной школе [Текст] : автореф. дисс... канд. пед. наук: 13.00.02 / Баранова Елена Валентиновна. – Саранск, 1999. – 19 с.
27. Баранова, Е. В. Как увлечь школьников исследовательской деятельностью [Текст] / Е. В. Баранова М. И. Зайкин // Математика в школе. – 2004. – № 2. – С. 7.
28. Бармина В. Я. Формирование регулятивных учебных действий учащихся в процессе проектно-дифференцированного обучения в основной школе: дисс ... канд. пед. наук: 13.00.01 / Бармина Е. В. – Самара, 2019. – 223 с.
29. Бернштейн, Н. А. Физиология движений и активность [Текст] / Н. А. Бернштейн. – М.: Изд-во «Наука», 1990. – 494 с.
30. Берцфаи, Л. В. Формирование двигательного навыка в условиях практической и учебной задач [Текст] / Л. В. Берцфаи // Вопросы психологии. – 1963. – № 4. – С. 73 – 84.
31. Беспалько, В. П. Природосообразная педагогика [Текст] / В. П. Беспалько. – М.: Изд-во «Народное образование», 2008. – 512 с.
32. Блонский, П. П. Педология [Текст] / П. П. Блонский; под ред. В. А. Сластенина. – М.: Гуманитарно-издат. центр «Владос», 1999. – 288 с.
33. Боженкова, Л. И. Методика формирования УУД при обучении геометрии [Текст] / Л. И. Боженкова. – М.: Изд-во «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2015. – 205 с.



- 34.Боженкова, Л. И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении алгебре [Электронный ресурс] / Л. И. Боженкова. – Эл. изд. – Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 243 стр.). – М.: Лаборатория знаний, 2016.
- 35.Боженкова, Л. И. Методическая система обучения геометрии, ориентированной на интеллектуальное воспитание учащихся общеобразовательной школы : дисс. ... докт. пед. наук : 13.00.02 / Боженкова Л. И. – М., 2007. – 426 с.
- 36.Божович, Л. И. Проблемы формирования личности [Текст] / Л. И. Божович. – М.: Изд-во Ин-та практич. психологии, 1996. – 400 с.
- 37.Божович, Л. И. Проблема развития мотивационной сферы ребенка [Текст] / Л. И. Божович // Хрестоматия по психологии / под ред. А. В. Петровского. – М.: Изд-во «Просвещение», 1987. – С. 408 – 412.
- 38.Болтянский, В. Г. Математическая культура и эстетика [Текст] / В. Г. Болтянский // Математика в школе. – 1982. – № 2. – С. 40 – 43.
- 39.Болтянский, В. Г. Как учить поиску решения задачи [Текст] / В. Г. Болтянский, Я. И. Грудев // Математика в школе. – 1988. – № 1. – С. 8 – 14.
- 40.Бондарь, В. И. Дидактика [Текст] / В. И. Бондарь. – К.: Изд-во «Лебедь», 2005. – 360 с.
- 41.Бунаков, Н. Ф. Избранные педагогические сочинения [Текст] / Н. Ф. Бунаков. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1953. – 412 с.
- 42.Вебер, М. Избранные произведения [Текст] / М. Вебер. – М.: Изд-во «Прогресс», 1990. – 809 с.
- 43.Веккер, Л. М. Психика и реальность. Единая теория психических процессов [Текст] / Л. М. Веккер. – М.: Изд-во «Смысл», 1998. – 685 с.
- 44.Виленкин, Н. Я. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст] / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С.Чесноков. – М.: Изд-во «Мнемозина», 2016. – 288 с.
- 45.Вилюнас, В. К. Психология эмоциональных явлений [Текст] / В. К. Вилюнас. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 143 с.

46. Владыкина, И. В. Формирование исследовательских умений студентов педвузов при изучении курса «Теория и методика обучения математике» : дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Владыкина Ирина Владимировна. – Саранск, 2005. – 151 с.
47. Волович, М. Б. Математика без перегрузок [Текст] / М. Б. Волович. – М.: Изд-во «Педагогика», 1991. – 144 с.
48. Володин, А. А. Стандартизация высшего профессионального образования как механизм обеспечения его качества [Электронный ресурс] / А. А. Володин. – Режим доступа: <http://www.emissia.org/offline/2012/1761.htm>.
49. Выготский, Л. С. Педагогическая психология [Текст] / Л. С. Выготский. – М.: Изд-во «Педагогика-Пресс», 1996. – 536 с.
50. Выготский, Л. С. Психология [Текст] / Л. С. Выготский. – М.: Изд-во «ЭКСМО-Пресс», 2000. – 1008 с.
51. Выготский, Л. С. Развитие высших психических функций. М.: Изд-во Академии педагогических наук, 1960. – 340 с.
52. Выготский, Л. С. Собрание сочинений: В 6-ти т. Т. 3 Проблемы развития психики [Текст] / Л. С. Выготский. – М.: Изд-во «Педагогика», 1983. – 368 с.
53. Высотская, С. И. Дидактические основания конструирования процесса обучения [Текст] / С. И. Высотская, В. В. Краевский // Новые исследования в педагогических науках. – 1986. – № 1 (47). – С. 36 – 40.
54. Гальперин, П. Я. Основные результаты исследований по проблеме «Формирование умственных действий и понятий» : [Текст] [Доклад, представленный на соиск. уч. степени д-ра психол. наук] / П. Я. Гальперин. – М., 1965. – 51 с.
55. Гальперин, П. Я. Введение в психологию [Текст] : учебное пособие / П. Я. Гальперин. – М.: Изд-во КДУ, 2007. – 336 с.
56. Гальперин, П. Я. Управляемое формирование психических процессов [Текст] / П. Я. Гальперин. – М.: Изд-во МГУ, 1977. – 198 с.

57. Гальперин, П. Я. Современное состояние теории поэтапного формирования умственных действий [Текст] / П. Я. Гальперин, Н. Ф. Талызина // Вестник МГУ. – Сер. 14. Психология. – 1979. – № 4. – С. 54 – 63.
58. Глейзер, Г. Д. Об ориентирах школьного математического образования [Текст] / Г. Д. Глейзер, О. С. Медведева // Ценности и смыслы. – 2010. – № 03 (6). – С. 110 – 124.
59. Гнеденко, Б. В. О математическом творчестве [Текст] / Б. В. Гнеденко // Математика в школе. – 1967. – № 6. – С. 16 – 22.
60. Грабарь, М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях [Текст] / М. И. Грабарь, К. А. Красницкая. – М.: Изд-во «Педагогика», 1977. – 130 с.
61. Груденов, Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики [Текст]: кн. для учителя / Я. И. Груденов. – М.: Изд-во «Просвещение», 1990. – 224 с.
62. Гусев, В. А. Система исследовательских умений учащихся при решении школьных геометрических задач как основа функционирования ЕГЭ [Текст] / В. А. Гусев // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тез. докл. IV Междунар. конф., посв. 90-летию со дня рождения члена-корр. РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева. – М.: Изд-во РУДН, 2013. – С. 518 – 522.
63. Гусев, В. А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы [Текст] / В. А. Гусев. – М.: Изд-во «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2014. – 457 с.
64. Давыдов, В. В. Теория развивающего обучения [Текст] / В. В. Давыдов. – М.: Изд-во ИНТОР, 1996. – 544 с.
65. Давыдов, В. В. Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования [Текст] / В. В. Давыдов. – М.: Изд-во «Педагогика», 1986. – 240 с.

66. Давыдов, В. В. Содержание и структура учебной деятельности школьников [Текст] / В. В. Давыдов; под ред. В.В. Давыдова [и др.]. – М.: Изд-во «Педагогика», 1982. – 216 с.
67. Давыдов, В. В. Младший школьник как субъект учебной деятельности [Текст] / В. В. Давыдов, В. И. Слободчиков, Г. А. Цукерман // Вопросы психологии. – 1992. – № 3 – 4. – С. 14 – 19.
68. Далингер, В. А. Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике [Текст] : учебное пособие / В. А. Далингер. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2005. – 456 с.
69. Далингер, В. А. Избранные вопросы информатизации школьного математического образования [Текст] / В. А. Далингер. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2010 – 150 с.
70. Далингер, В. А. Организация и содержание поисково-исследовательской деятельности учащихся по математике [Текст] / В. А. Далингер, Н. В. Толпекина. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2007. – 191 с.
71. Данилюк, А. Я. Концепция духовно-нравственного воспитания личности гражданина России [Текст] / А. Я. Данилюк, А. М. Кондаков, В. А. Тишков. – М.: Изд-во «Просвещение», 2010. – 24 с.
72. Диагностика доминирующей перцептивной модальности (С. Ефремцева) [Текст] // Фетискин Н. П., Козлов В. В., Мануйлов Г. М. Социально-психологическая диагностика развития личности и малых групп. – М.: Изд-во Ин-та психотерапии, 2002. – С. 237 – 238.
73. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики [Текст]/ под ред. М. Н. Скаткина. – М.: Изд-во «Просвещение», 1982. – 319
74. Дорофеев, Г. В. Профилированная школа в концепции школьного математического образования [Электронный ресурс] / Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, Е. А. Седова // Интернет-журнал «Эйдос». – 2003. – 15 апреля. – Режим доступа: <http://www.eidos.ru/journal/2003/0415-02.htm>.

75. Душина, И. В. Учителю о новых подходах к планированию урока географии в условиях введения образовательных стандартов нового поколения [Текст] / И. В. Душина, Е. А. Беловолова, Е. А. Таможняя [и др.] // География в школе. – 2012. – № 3. – С. 29 – 39.
76. Дьюи, Дж. Психология и педагогика мышления [Текст] / Дж. Дьюи. – М.: Изд-во «Совершенство», 1997. – 208 с.
77. Егупова, М. В. Достижение метапредметных результатов в практико-ориентированном обучении геометрии (7-9 классы): монография / М.В. Егупова, Ю.В. Мошура. – М.: 2019. – 152с.
78. Епишева, О. Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учеб. деятельности [Текст] : кн. для учителя / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. – М.: Изд-во «Просвещение», 1990. – 128 с/
79. Есипович, К. Б. Управление познавательной деятельностью учащихся при изучении иностранных языков в средней школе [Текст] / К. Б. Есипович. – М.: Изд-во «Просвещение», 1988. – 191с.
80. Заесенок, В. П. Логические задачи как средство формирования приемов эвристической деятельности школьников 5-6-х классов на уроках математики [Текст] : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Заесенок Вера Павловна. – М., 2004. – 166 с.
81. Зайкин, М. И. От задания к заданию – в глубину познания. Опыт приобщения к математическому творчеству [Текст] / М. И. Зайкин. – Арзамас: Изд-во АГПИ, 2009. – 148 с.
82. Занков, Л. В. Обучение и развитие (экспериментально-педагогическое исследование) [Текст] / Л. В. Занков. – М.: Изд-во «Педагогика», 1975. – 440 с.
83. Запорожец, А. В. Избранные психологические труды : в 2 т. Т 1. Психическое развитие ребенка [Текст] / А. В. Запорожец. – М.: Изд-во «Педагогика», 1986. – 323 с.
84. Захарова, А. В. Развитие контроля и оценки в процессе формирования учебной деятельности [Текст] / А. В. Захарова // Формирование учебной

- деятельности школьников / под ред. В. В. Давыдова, И. Лампшера, А. К. Марковой. – М.: Изд-во «Педагогика», 1982. – 216 с.; С. 107 – 113.
85. Захарова, А. В. Как формировать самооценку школьника [Текст] / А. В. Захарова, М. Э. Боцманова // Начальная школа. – 2011. – № 3. – С. 58 – 65.
86. Захарова, А. В. Особенности рефлексии как психического новообразования в учебной деятельности [Текст] / А. В. Захарова, М. Э. Боцманова // Формирование учебной деятельности школьников / под ред. В. В. Давыдова, И. Ломпшера, А. К. Марковой. – М.: Изд-во «Педагогика», 1982. – 216 с.
87. Зимняя, И. А. Педагогическая психология [Текст] / И. А. Зимняя. – М.: Изд-во «Логос», 2004. – 384 с.
88. Зимняя, И. А. Компетентностный подход. Каково его место в системе современных подходов к проблемам образования (теоретико-методологический аспект) [Текст] / И. А. Зимняя // Высшее образование сегодня. – 2006. – № 8. – С. 21 – 26.
89. Зимняя, И. А. Исследовательская работа как специфический вид человеческой деятельности [Текст] / И. А. Зимняя, Е. А. Шашенкова. – Ижевск – Москва: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 2001. – 103 с.
90. Зязин, А. О. Регулятивные педагогические средства: индивидуальный подход как специфическая форма организации знания об изучаемом педагогическом объекте [Текст] / А. О. Зязин. – Барнаул, 2010.
91. Ибраева, Н. И. Формирование опыта учебно-познавательной деятельности учащихся начальных классов [Текст] : автореф. дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Ибраева Нуржамал Ибраевна. Челябинск, 1984. – 25 с.
92. Иванников, В. А. Психологические механизмы волевой регуляции [Текст] / В. А. Иванников. – СПб.: Изд-во «Питер», 2006. – 208 с.
93. Иванова, Т. А. Содержание и структура профессиональной компетенции педагога в организации учебно-исследовательской деятельности учащихся (в условиях реализации ФГОС общего образования) [Текст] / Т.

- А. Иванова // Вестник РМАТ. – № 2. – Педагогические науки. – 2016. – С. 97 – 103.
94. Иванова, Т. А. Цели и содержание общего математического образования в условиях его гуманитаризации [Текст] / Т. А. Иванова // Гуманитаризация математического образования в школе и вузе. – Саранск, 2002. – Вып.1. – С. 13 – 22.
95. Иванова, Т. А. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т. А. Иванова, Е. Н. Перевощикова, Л. И. Кузнецова, Т. П. Григорьева; под ред. Т. А. Ивановой. – 2-е изд. – Н. Новгород: НГПУ, 2009. – 355 с.
96. Игропуло, И. Ф., Игропуло, В. С. Функции исследовательской деятельности в развитии личности школьников в интегрированной образовательной системе [Текст] / И. Ф. Игропуло, В. С. Игропуло. – Лондон: Изд-во «Международная академия наук и высшего образования», 2013. – 84 с.
97. Ильин, В. П. Психология воли [Текст] / В. П. Ильин. – СПб.: Изд-во «Питер», 2000. – 288 с.
98. Ильясов, И. И. Структура процесса учения [Текст] / И.И. Ильясов. – М.: Изд-во Моск. университета, 1986. – 200 с.
99. Истомина, Н. Б. Методика обучения математике в начальных классах [Текст] / Н. Н. Истомина. – М.: Изд. центр «Академия», 2001. – 288 с.
100. Кабанова-Меллер, Е. Н. Роль чертежа в применении геометрических теорем [Текст] / Е. Н. Кабанова-Меллер // Вопросы психологии обучения / отв. ред. Н. А. Менчинская // Известия АПН РСФСР. – 1950. – Вып. 28. – С. 195 – 227.
101. Калинин, В. К. Волевая регуляция деятельности [Текст] : автореф дис. ... докт. психолог. наук : 19.00.01 / Калинин Владимир Константинович. – Тбилиси, 1989. – 36 с.

102. Калинова, Г. С. Биологическое образование: состояние, проблемы, перспективы [Текст] / Г. С. Калинова // Биология в школе. – 2013. – № 5. – С. 26 – 35.
103. Камен, В. К. Анализ психологической структуры деятельности с позиций системного подхода [Текст] / В. К. Камен // Эмоционально-волевая регуляция поведения и деятельности: тезисы Всесоюзной конференции молодых ученых. – Симферополь, 1983. – С. 143 – 192.
104. Карабанова, О. А. Что такое универсальные учебные действия и зачем они нужны [Текст] / О. А. Карабанова // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. – 2010. – № 2. – С. 11 – 12.
105. Квитко, Е. С. Методика обучения математике в 5 – 6 классах, ориентированная на формирование универсальных учебных действий [Текст] : дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Квитко Елена Сергеевна. – М., 2014. – 179 с.
106. Кларин, М. В. Инновации в мировой педагогике: обучение на основе исследования, игры и дискуссии. (Анализ зарубежного опыта) [Текст] / М. В. Кларин. – Рига: НПЦ «Эксперимент», 1998. – 180 с.
107. Клещева, И. В. Учебно-исследовательская деятельность учащихся при изучении математики как средство достижения новых образовательных результатов [Текст] / И. В. Клещева // Мир науки, культуры, образования. – 2012. – № 4. – С. 27 – 37.
108. Коган, Л. Н. Цель и смысл жизни человека [Текст] / Л. Н. Коган // Личность. Культура. Общество. – Екатеринбург, 2009. – С. 200 – 273.
109. Колесина, К. Ю. Интегративные процессы как содержательно-процессуальное ядро метапроектного обучения [Электронный ресурс] / К.Ю. Колесина [и др.] // Российский психологический журнал /Russian Psychological Journal. — 2016.— №3.— С. 73-88. — Режим доступа: <https://rucont.ru/efd/549198>



110. Колмогоров, А. Н. Теория информации и теория алгоритмов [Текст] / А. Н. Колмогоров; отв. ред. акад. Ю. В. Прохоров. – М.: Изд-во «Наука», 1987. – 304 с.
111. Колягин, Ю. М. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики [Текст] / Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, Е. Л. Мокрушин [и др.]. – М.: Изд-во «Просвещение», 1977. – 480 с.
112. Колягин, Ю. М. Профильная дифференциация обучения математике [Текст] / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова // Математика в школе. – № 4. – 1990. – С. 21 – 37
113. Кон, И. С. Социология личности [Текст] / И. С. Кон. – М.: Изд-во «Политиздат», 1967. – 383 с.
114. Командина А. А. Организация исследовательской деятельности учащихся в условиях внедрения ФГОС [Текст] / А.А. Командина // Наука, образование и культура. – № 2(17). – 2017.
115. Конопкин, О. А. Психологические механизмы регуляции деятельности [Текст] / О. А. Конопкин. – М.: Изд-во «Наука», 2011. – 320 с.
116. Конопкин, О. А. Общая способность к саморегуляции как фактор субъективного развития [Текст] / О. А. Конопкин // Вопросы психологии. – 1995. – № 1. – С. 5 – 12.
117. Концепция федеральных государственных образовательных стандартов общего образования [Текст] : проект / под ред. А. М. Кондакова, А. А. Кузнецова. – М.: Изд-во «Просвещение», 2008. – 39 с.
118. Копотева, Г. Л. Проектируем урок, формирующий универсальные учебные действия [Текст] / Г. Л. Копотева, И. М. Логвинова. – Волгоград: Изд-во «Учитель», 2013. – 99 с.
119. Кочерова, Е. С. Реализация требований ФГОС нового поколения к информационно-образовательной среде образовательного учреждения на региональном уровне [Текст] / Е. С. Кочерова // ИНФО. – 2012. – № 4. – С. 29 – 30.

120. Краевский, В. В. Общие основы педагогики [Текст] / В. В. Краевский. – М.: Изд. центр «Академия», 2003. – 256 с.
121. Круглова, Н. Ф. Регуляторная составляющая учебной деятельности [Текст] / Н. Ф. Круглова. – М., 2001. – 289 с.
122. Круглова, Н. Ф. Психологическая диагностика и коррекция структуры учебной деятельности младшего школьника [Текст] / Н. Ф. Круглова. – М.: Изд-во МПСИ, 2004. – 247 с.
123. Круглова, Н. Ф. Индивидуально-типологические особенности построения регуляторной структуры учебной деятельности подростками [Текст] / Н. Ф. Круглова // Прикладная психология. – 2002. – № 6. – С. 19 – 26.
124. Круглова, Н. Ф. Регуляторно-когнитивная структура учебной деятельности и школьная неуспешность [Текст] / Н. Ф. Круглова, В. И. Панов // Прикладная психология. – 2001. – № 5. – С. 40 – 50.
125. Кудрявцев, В. Т. Проблемное обучение: истоки, сущность, перспективы [Текст] / В. Т. Кудрявцев. – М.: Изд-во «Знание», 1991. – 80 с.
126. Кузьмина, Н. В. Понятие «педагогической системы» и критерии ее оценки / Н. В. Кузьмина // Методы системного педагогического исследования ; под ред. Н. В. Кузьминой. – М. : Народное образование, 2002. – С. 11.
127. Кулюткин, Ю. Н. Рефлексивная регуляция мыслительных действий [Текст] / Ю. Н. Кулюткин // Психологические исследования интеллектуальной деятельности / под ред. О. К. Тихомирова. – М.: Изд-во Моск. унта, 1979. – С. 22 – 28.
128. Кулюткин, Ю. Н. Мотивация познавательной деятельности [Текст] / Ю. Н. Кулюткин, Г. С. Сухобская. – М.: Изд-во «Просвещение», 1972. – 116 с.
129. Лавров, П. Л. Философия и социология [Текст] / П. Л. Лавров // Избранные произведения: в 2 т. Т. 1. – М., 1965. – 752 с.

130. Ланда, Л. Н. Алгоритмы и программированное обучение. Некоторые вопросы теории и методики программирования [Текст] / Л. Н. Ланда. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1965. – 360 с.
131. Лебедев, О. Е. Компетентностный подход в образовании [Текст] / О. Е. Лебедев // Школьные технологии. – 2004. – № 5. – С. 3 – 12.
132. Леви-Стросс, К. Первобытное мышление [Текст] / К. Леви-Стросс. – М.: Изд-во «Республика», 1994. – 384 с.
133. Леонтович А. В. Концептуальные основания моделирования организации исследовательской деятельности учащихся // Школьные технологии - 2006г. – № 5 – С. 63 – 71.
134. Леонтьев, А. Н. Деятельность. Сознание. Личность [Текст] / А. Н. Леонтьев. – М.: Изд-во «Смысл»; «Академия», 2004. – 352 с.
135. Леонтьев, А. Н. Потребности, мотивы и эмоции [Текст] / А. Н. Леонтьев. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1971. – 16 с.
136. Леонтьев, Д. А. Психология смысла [Текст] / Д. А. Леонтьев. – М.: Изд-во «Смысл», 2008. – 488 с.
137. Леонтьев Д. А. Саморегуляция, ресурсы и личностный потенциал [Текст] / Д. А. Леонтьев // Сибирский психологический журнал. – 2016. – № 62. – С. 18 – 37.
138. Лернер, И. Я. Дидактические основы методов обучения [Текст] / И. Я. Лернер. – М.: Изд-во «Педагогика», 1981. – 186 с.
139. Лернер, И. Я. Процесс обучения и его закономерности [Текст] / И. Я. Лернер. – М.: Изд-во «Знание», 1980. – 96 с.
140. Лернер, И. Я. Учебный предмет, тема, урок [Текст] / И. Я. Лернер. – М.: Изд-во «Знание», 1988. – 80 с.
141. Липатникова, И. Г. Подготовка будущих учителей математики к формированию у учащихся универсальных учебных действий на основе технологии рефлексивного подхода [Текст] / И. Г. Липатникова, Е. А. Утюмова // Педагогическое образование в России. – 2014. – № 8. – С. 62 – 67.

142. Липкина, Е. К. Переходим на ФГОС: достижение образовательных результатов на личностном, метапредметном и предметном уровнях с УМК по географии «Полярная звезда» [Текст] / Е. К. Липкина // География в школе. – 2012. – № 3. – С. 52 – 54.
143. Липкина, А. И. Самооценка школьника [Текст] / А. И. Липкина. – М.: Изд-во «Знание», 1976. – 64 с.
144. Лисина, М. И. Формирование личности ребенка в общении [Текст] / М. И. Лисина. – СПб.: Изд-во «Питер», 2009. – 320 с.
145. Логинова, И. М. Акмеологический аспект апробации Федерального государственного стандарта общего образования второго поколения (начальная школа) [Текст] / И. М. Логинова, Г. Л. Копотева // Педагогика. – 2009. – № 4. – С. 76 – 82.
146. Ляудис, В. Я. Методика преподавания психологии [Текст] / В. Я. Ляудис. – М.: Изд-во УРАО, 2000. – 128 с.
147. Ляудис, В. Я. Психологические основы формирования письменной речи у младших школьников [Текст] / В. Я. Ляудис, И. П. Негуре. – Кишинев: Изд-во Штиинца, 1983. – 93 с.
148. Макаренко, А. С. Воспитание гражданина [Текст] / А. С. Макаренко; сост. Р. М. Бескина, М. Д. Виноградова. – М.: Изд-во «Просвещение», 1988. – 304 с.
149. Макарова, О. Ю. Критерии и показатели оценки эффективности функционирования воспитательной системы вуза [Текст] / О. Ю. Макарова // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 1 – 2. – С. 348 – 351.
150. Маркина, А. А. Развитие регулятивно-коммуникативных умений старшеклассников в процессе образовательного проектирования [Текст] : дис. канд. пед. наук : 13.00.01 / Маркина Анна Анатольевна. – Белгород, 2014. – 228 с.
151. Маркова, А. К. Пути исследования мотивации учебной деятельности школьников [Текст] / А. К. Маркова // Вопросы психологии. – 1980. – № 5. – С. 17 – 25.

152. Маркова, А. К. Психология обучения подростка [Текст] / А. К. Маркова. – М.: Изд-во «Знание», 1975. – 62 с.
153. Маркова, А. К. Формирование мотивации учения в школьном возрасте [Текст] / А. К. Маркова. – М.: Изд-во «Просвещение», 1983. – 96 с.
154. Маркова, А. К. Формирование мотивации учения [Текст] / А. К. Маркова, Т. А. Матис, А. Б. Орлова. – М.: Изд-во «Просвещение», 1990. – 192 с.
155. Маркушевич, А. И. Об очередных задачах преподавания математики в школе [Текст] / А. И. Маркушевич // Математика в школе. – 1962. – № 2. – С. 3 – 14.
156. Маслоу, А. Мотивация и личность [Текст] / А. Маслоу. – СПб.: Изд-во «Питер», 2012. – 352 с.
157. Матюшкин, М. И. Проблемные ситуации в мышлении и обучении [Текст] / М. И. Матюшкин. – М.: Изд-во «Педагогика», 1972. – 208 с.
158. Махмутов, М. И. Организация проблемного обучения в школе [Текст] / М. И. Махмутов. – М.: Изд-во «Просвещение», 1977. – 240 с.
159. Мегрикян, И. Г. Формирование математической компетентности обучающихся гуманитарных направлений подготовки в вузе на основе контекстно-эмпирического подхода [Текст]: дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / И. Г. Мегрикян, Елец. 2017. – 187 с.
160. Менчинская, Н. А. Проблемы учения и умственное развитие школьника [Текст] / Н. А. Менчинская. – М.: Изд-во «Просвещение», 1989. – 324 с.
161. Методы организации и осуществления учебно-познавательной деятельности // Педагогика / Под редакцией Ю. К. Бабанского. - М.: Просвещение, 1983. – 479 с.
162. Молибог, А. Г. Программированное обучение (Вопросы научной организации педагогического труда в высшей школе) [Текст] / А. Г. Молибог. – М.: Изд-во «Высшая школа», 1967. – 200 с.

163. Мордкович, А. Г. О некоторых проблемах школьного математического образования [Текст] / А. Г. Мордкович // Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты: материалы I Всероссийской научно-практической конференции. Красноярск, 14 – 15 ноября 2013 г. / отв. ред. Л. В. Шкерина. – Красноярск, 2013. – С. 706 – 722.
164. Мордкович, А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Часть 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений [Текст] / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – М.: Изд-во «Мнемозина», 2013. – 256 с.
165. Никишова, С. А. Формирование коммуникативных универсальных учебных действий младших школьников в процессе обучения диалога [Текст] : автореферат дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Никишова Светлана Алексеевна. – Елец, 2013. – 18 с.
166. Новожилова, М. М. Формирование культуры исследовательской деятельности старшеклассников в условиях профильного обучения [Текст] : дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Новожилова Марина Михайловна. – М., 2008. – 251 с.
167. Обухов, А. С. Развитие исследовательской деятельности учащихся [Текст] / А. С. Обухов. – М.: Изд-во «Национальный книжный центр», 2015. – 280 с.
168. Общая психология [Текст] / под общ. ред. проф. Л. В. Карпова. – М.: Изд-во «Гардарики», 2005. – 232 с.
169. Овсянникова Н. П. Формирование экологической компетентности старших школьников на основе исследовательской деятельности в естественно-научном образовании: дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Овсянникова Н. П. – Екатеринбург, 2011. – 176 с.
170. Омельченко, Н. А. Формирование контрольно-корректировочных действий у студентов при обучении с помощью ЭВМ [Текст] / Н. А.

- Омельченко, В. Я. Ляудис. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1982. – 119 с.
171. Орлова, Л. Э. Маленькие исследования на геометрическом материале [Текст] / Л. Э. Орлова // Математика в школе. – 1990. – № 6. – С. 29 – 31.
172. Осницкий, А. К. Регуляция деятельности и направленность личности [Текст] / А. К. Осницкий. – М.: Изд-во Моск. экономико-лингвист. ин-та, 2007. – 232 с.
173. Осницкий, А. К. Регуляторный опыт, субъектная активность и самостоятельность человека [Электронный ресурс] : в 2-х ч. / А. К. Осницкий // Психологические исследования: электрон. науч. журн. – 2009. – № 5 (7); № 6 (8) // Режим доступа: <http://psystudy.ru>.
174. Осницкий, А. К. Психологические механизмы самостоятельности [Текст] / А. К. Осницкий. – М.; Обнинск: ИГ-СОЦИН, 2010. – 232 с.
175. Остапенко, А. А. Моделирование многомерной педагогической реальности [Текст] : дисс. ... д-ра пед. наук : 13.00.01 / Остапенко Андрей Александрович. – Краснодар, 2005. – 424 с.
176. Парыгин, Б. Д. Социальная психология: проблемы методологии, истории и теории [Текст] / Б. Д. Парыгин. – СПб.: Изд-во ИГУП, 1999. – 592 с.
177. Педагогика [Текст] : учеб. пособие для студентов пединститутов / под ред. Ю. К. Бабанского. – М.: Изд-во «Просвещение», 1983. – 608 с.
178. Педагогика [Текст]: учебное пособие для студентов педагогических учебных заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, А. И. Мищенко [и др.]. – М.: Изд-во «Школа-Пресс», 2000 – 512 с.
179. Перевощикова Е.Н. Специфика формирования универсальных учебных действий при обучении математике в основной школе. // Интеграция образования. 2015. Т. 19. No 2 (79).С. 81-91.

180. Пидкасистый, П. Н. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении: теоретико-экспериментальное исследование [Текст] / П. Н. Пидкасистый. – М.: Изд-во «Педагогика», 1980. – 238 с.
181. Подаева, Н. Г. Социокультурная концепция математического образования [Текст] / Н. Г. Подаева. – Елец: Изд-во ЕГУ, 2012. – 205 с.
182. Петрихина А. С. Психологическая поддержка становления исследовательской позиции старших школьников : дисс. ... канд. психолог. наук : 19.00.07 / Петрихина А. С. – Ставрополь. – 204 с.
183. Потоцкий, М. В. О педагогических основах обучения математике [Текст] / М. В. Потоцкий. – М.: Изд-во «Учпедгиз», 1963. – 200 с.
184. Приказ Министерства образования и науки РФ от 17 декабря 2010 г. № 1897 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования»
185. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа / [сост. Е. С. Савинов]. – М.: Просвещение, 2011. – 000 с. – (Стандарты второго поколения).
186. Примерные программы внеурочной деятельности: начальное и основное образование / под ред. В. А. Горского. – М.: Просвещение, 2010. – (Стандарты второго поколения).
187. Психологическая диагностика способностей при индивидуализации обучения [Текст] / отв. ред. В. Д. Шадриков, В. Н. Дружинин, В. Н. Колесников. – М.: Изд-во МПГУ, 1995. – 90 с.
188. Пускаева, Т. Д. Об изучении специфики структуры познавательной деятельности детей с ЗПР [Текст] / Т. Д. Пускаева // Дефектология. – 2009. – № 3. – С. 21 – 22.
189. Пышкало, А. М. Методическая система обучения геометрии в начальной школе: авторский доклад по монографии «Методика обучения элементам геометрии в начальных классах», представленной на соискание ученой степени д-ра пед. наук / А. М. Пышкало. – М. : Академия пед. наук СССР, 1975. – 60 с.



190. Резапкина, Г. В. Отбор в профильные классы [Текст] / Г. В. Резапкина. – М.: Изд-во «Генезис», 2005. – 207 с.
191. Рекомендации по проектированию учебного процесса, направленного на достижение требований стандарта к результатам освоения основных образовательных программ [Текст] / авт. коллектив под рук. В. В. Фирсова, О. Б. Логиновой. – М., 2008. – 58 с.
192. Репкин, В. В. Развивающее обучение: теория и практика [Текст] / В. В. Репкин, Н. В. Репкина. – Томск: Изд-во «Пеленг», 1997. – 288 с.
193. Роджерс, К. Р. Свобода учиться [Текст] / К. Р. Роджерс, Дж. Фрейберг. – М.: Изд-во «Смысл», 2002. – 527 с.
194. Рубинштейн, С. Л. Бытие и сознание. Человек и мир [Текст] / С. Л. Рубинштейн. – СПб.: Изд-во «Питер», 2003. – 512 с.
195. Рубинштейн, С. Л. Основы общей психологии [Текст] / С. Л. Рубинштейн. – СПб.: Изд-во «Питер», 2009. – 713 с.
196. Рубцов, В. В. Социально-генетическая психология развивающего образования: деятельностный подход [Текст] / В. В. Рубцов. – М.: Изд-во МГППУ, 2008. – 416 с.
197. Савенков, А. И. Психологические основы исследовательского подхода к обучению [Текст] : учеб. пособие / А. И. Савенков. – М.: Изд-во «Ось», 2006. – 480 с.
198. Савенков, А.И. Принципы исследовательского обучения [Текст] / А. Савенков //Директор школы. – 2008. – № 9. – С. 50 – 55.
199. Савенков, А. Теория и практика применения исследовательских методов обучения в дошкольном образовании [Текст] / А. Савенков // Детский сад от А до Я. – 2004. – № 2. – С. 22 – 55.
200. Самсонова, Н. В. Конфликтологическая культура специалиста и технология ее формирования в системе вузовского образования [Текст] / Н. В. Самсонова. – Калининград: Изд-во КГУ, 2002. – 308 с.

201. Саранцев, Г. И. Современное методическое мышление как ключевая компетенция педагога [Текст] / Г. И. Саранцев // Педагогика. – 2014. – № 3. – С. 3 – 11.
202. Саранцев, Г. И. Методология методики обучения математики [Текст] / Г. И. Саранцев. – Саранск: Изд-во «Красный Октябрь», 2001. – 144 с.
203. Саранцев, Г. И. Методологические основы школьного учебника математики [Электронный ресурс] / Г. И. Саранцев. – Режим доступа: [http://portalus.ru/modules/shkola/rus\\_readme.php?subaction=showfull&id=1193142364&archive=1195596785&start\\_from=&ucat=&](http://portalus.ru/modules/shkola/rus_readme.php?subaction=showfull&id=1193142364&archive=1195596785&start_from=&ucat=&).
204. Саранцев, Г. И. Общая методика преподавания математики: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов / Г. И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Крас. Окт.», 1999. – 208 с.
205. Селиванов, В. И. Психология волевой активности [Текст] / В. И. Селиванов. – Рязань: Изд-во РГПИ, 1974. – 150 с.
206. Сенько, Ю. В. Гуманитарные основы педагогического образования [Текст] / Ю. В. Сенько. – М.: Изд. дом «Академия», 2000. – 240 с.
207. Сенько, Ю. В. Понимание в структуре профессиональной компетентности учителя [Текст] / Ю. В. Сенько, М. Н. Фроловская // Известия Алтайского гос. ун-та. – 2003. – № 4. – С. 101 – 108.
208. Сенько, Ю. В. Базовые компетенции педагогической деятельности [Электронный ресурс] / Ю. В. Сенько // IX Всероссийская конференция «Практики развития» (Красноярск, 2002). – Режим доступа: [http://conf.ippd.ru/index.php?option=com\\_content&view=article&id=2&Itemid=61](http://conf.ippd.ru/index.php?option=com_content&view=article&id=2&Itemid=61).
209. Сергеева, Т. Ф. Проектирование исследовательского обучения школьному курсу геометрии на основе использования интерактивной геометрической среды [Текст] / Т. Ф. Сергеева // Synergetics and Reflection in Mathematics Education. September 10 – 12, 2010, Vachinovo, Bulgaria, Plovdiv (Bulgaria). – С. 291 – 298.

210. Сергеева, Т. Ф. Сетевые исследовательские проекты – модель мотивирующей образовательной среды для школьников и педагогов [Текст] / Т. Ф. Сергеева // Academia. Педагогический журнал Подмосковья. – 2016. – № 2 (8). – С. 47 – 51.
211. Сергеева, Т. Ф. Основы динамической геометрии [Текст] / Т. Ф. Сергеева, М. В. Шабанова, С. И. Гроздев. – М.: Изд-во АСОУ, 2016. – 152 с.
212. Сергеева, Т. Ф. Наглядная планиметрия [Текст] : учебн. пос. для 7 кл. / Т. Ф. Сергеева, С. В. Панфёров. – М.: Изд-во «Илекса», 2016. – 77 с.
213. Сергеева, Т. Ф. Наглядная планиметрия [Текст] : учебн. пос. для 8 кл. / Т. Ф. Сергеева, С. В. Панфёров. – М.: Изд-во «Илекса», 2016. – 112 с.
214. Сеченов, И. М. Учение о несвободе воли с практической стороны [Текст] / И. М. Сеченов // Сеченов И. М. Избранные философские и психологические произведения. – М., 1947. – 647 с. – С. 309 – 327.
215. Слободчиков, В. И. Антропологический смысл кризисов перехода в развитии и образовании [Текст] / В. И. Слободчиков // Психология обучения. – 2008. – № 1. – С. 4 – 25.
216. Смирнова, В. А. Наглядная геометрия. Программа для 5 – 6 классов [Текст] / В. А. Смирнов, И. М. Смирнова, И. В. Яценко. – М.: Изд-во МЦНМО, 2013.
217. Смирнова, Е. В. Программа развития универсальных учебных действий на ступени основного общего образования [Текст] / Е. В. Смирнова // ФГОС нового поколения как система требований: тематический курс в сб. проблемных курсов «Стратегия деятельности региональной системы образования в условиях модернизации». – Оренбург: Изд-во ИПК и ППРО ОГПУ, 2012.

218. Смирнова, И. М. Преемственность – один из аспектов непрерывного математического образования // Непрерывное образование – стратегия жизни современного человека : материалы II Всерос. науч.-практ. конф. г. Владимир, 26 – 27 марта 2014 г. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. – С. 112 – 115.
219. Сорокин, П. А. Человек. Социализация. Общество [Текст] / П. А. Сорокин. – М.: Изд-во «Политиздат», 1992. – 543 с.
220. Степанский, В. И. Роль субъективных критериев успешности результатов в регуляции деятельности [Текст] / В. И. Степанский // Вопросы психологии. – 1984. – № 3. – С. 118 – 122.
221. Ступницкая, М. Диагностика уровня сформированности общеучебных умений и навыков [Текст] / М. Ступницкая // Школьный психолог. – 2006. – № 7. – С. 20 – 29.
222. Суковых, А. М. Формирование личностных универсальных учебных действий, активизирующих самообразование старшеклассников [Текст] : дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.01 / Суковых Александр Михайлович. – Ростов на/Д., 2011. – 201 с.
223. Сюсюкина, И. Г. Формирование универсальных учебных действий младших школьников в оценочной деятельности [Текст] : дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Сюсюкина Ирина Егоровна. – Магнитогорск, 2010. – 205 с.
224. Талызина, Н. Ф. Формирование познавательной деятельности учащихся [Текст] / Н. Ф. Талызина. – М.: Изд-во «Знание», 1983. – 96 с.
225. Талызина, Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний [Текст] / Н. Ф. Талызина. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 343 с.
226. Талызина, Н. Ф. Теория поэтапного формирования умственных действий [Текст] / Н. Ф. Талызина // Народное образование. – 1967. – № 7. – С. 21 – 24.
227. Талызина, Н. Ф. Педагогическая психология [Текст] / Н. Ф. Талызина. – М.: Изд. центр «Академия», 2009. – 288 с.

228. Теоретические основы содержания общего среднего образования [Текст] / под ред. В. В. Краевского, И. Я. Лернера. – М.: Изд-во «Педагогика», 1983. – 352 с.
229. Теория поэтапного формирования умственных действий и управление процессом учения [Текст] / под ред. П. Я. Гальперина. – М.: Изд-во «Просвещение», 1967. – 368 с.
230. Теплоухова, Л. А. Формирование универсальных учебных действий учащихся основной школы средствами проектной технологии [Текст] : автореферат дис. ... канд. пед. наук : 13.00.01 / Теплоухова Лариса Александровна. – Ижевск, 2012. – 26 с.
231. Тестов, В. А. О предмете теории обучения математике / В. А. Тестов // Математический вестник педвузов и университетов ВолгоВятского региона: периодический межвузовский сборник научно-методических работ. Выпуск 6. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. – С. 200–207
232. Тихомиров, О. К. Психология мышления [Текст] / О. К. Тихомиров. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 272 с.
233. Третьяков, П. И. Школа: управление по результатам: Практика педагогического менеджмента [Текст] / П. И. Третьяков. – М.: Изд-во «Новая школа», 2001. – 320 с.
234. Тюрикова, С. А. Коммуникативные универсальные учебные действия: сущность и показатели сформированности [Текст] / С. А. Тюрикова // Интернет журнал науковедения. – 2014. – № 3(22). – С. 1 – 6.
235. Ушинский, К. Д. Избранные педагогические сочинения [Текст] / К. Д. Ушинский; под ред. Е. Н. Медынского и И. Ф. Сладковского. – М.: Изд-во «Учпедгиз», 1945. – 567 с.
236. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс] (утв. приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.12.2010 № 1897). – Режим доступа: <https://classinform.ru/fgos/1.3-osnovnoe-obshchee-obrazovanie-5-9-class.html>

237. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273 – ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» [Текст]. – М.: УЦ «Перспектива», 2013. – 223с.
238. Фирсов, В. В. Дифференциация обучения на основе обязательных результатов обучения [Текст] / В. В. Фирсов. – М., 1994.
239. Фокин, Ю. Г. Теория и технология обучения [Текст] / Ю. Г. Фокин. – М.: Изд. дом «Академия», 2006. – 239 с.
240. Формирование знаний и умений на основе теории поэтапного усвоения умственных действий [Текст] / под ред. П. Л. Гальперина и Н. Ф. Талызиной. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. – 125 с.
241. Формирование учебной деятельности школьников [Текст] / под ред. В. В. Давыдова, И. Ломпшера, А. К. Марковой. – М.: Изд-во «Педагогика», 1982. – 216 с.
242. Фридман, Л. Н. Психология в современной школе [Текст] / Л. Н. Фридман. – М.: Изд-во «Сфера», 2001. – 224 с.
243. Фридман, Л. М. Теоретические основы методики обучения математике [Текст] / Л. М. Фридман. – М.: Изд-во «Флинта», 1998. – 217 с.
244. Фридман, Л. М. Педагогический опыт глазами психолога [Текст] / Л. М. Фридман. – М.: Изд-во «Просвещение», 1987. – 224 с.
245. Фридман, Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математики в школе: Учителю математики о пед. психологии [Текст] / Л. М. Фридман. – М.: Изд-во «Просвещение», 1983. – 160 с.
246. Фридман, Л. М. Проблемная организация учебного процесса [Текст] : методические разработки / Л. М. Фридман, В. И. Маху. – М., 1990. – 62 с.
247. Фундаментальное ядро содержания общего образования [Текст] / под ред. В. В. Козлова, А. М. Кондакова. – М.: Изд-во «Просвещение», 2009. – 48 с.
248. Холодная, М. А. Когнитивные стили. О природе индивидуального ума [Текст] / М. А. Холодная. – СПб.: Изд-во «Питер», 2002. – 430 с.

249. Хомякова, Д. А. Формирование универсальных учебных действий как основы метапредметных образовательных результатов учащихся основной школы в процессе решения задач по информатике [Текст] : дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Хомякова Дарья Александровна. – Киров, 2014. – 206 с.
250. Хуторской, А. В. Проектная и исследовательская деятельность как средство повышения уровня готовности школьников к социально-профессиональному самоопределению. Обсуждение темы научного исследования Верхотуровой Н. А. [Текст] / А. В. Хуторской, Ю. В. Скрипкина, Т. В. Свитова // Вестник Института образования человека. – 2012. – № 1. – Режим доступа: <http://eidos-institute.ru/journal/2012/100/>.
251. Хуторской, А. В. Современная дидактика: учебник для вузов [Текст] / А. В. Хуторской. – СПб: Изд-во «Питер», 2001. – 544 с.
252. Хуторской, А. В. Ключевые компетенции и образовательные стандарты [Электронный ресурс] / А. В. Хуторской // Интернет-журнал «Эйдос». – 2002. – Режим доступа: <http://eidos.ru/journal/htm>.
253. Хуторской А. В. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы [Текст] / А. В. Хуторской // Народное образование. – 2003. – № 2. – С. 58 – 64.
254. Хуторской, А. В. Модель системно-деятельностного обучения и самореализации учащихся [Электронный ресурс] / А. В. Хуторской // Интернет-журнал «Эйдос». – 2012. – № 2. – Режим доступа: <http://www.eidos.ru/journal/2012/0329-10.htm>.
255. Хуторской, А. В. Метапредметное содержание образования с позиций человекообразности. [Электронный ресурс] / А. В. Хуторской // Вестник Института образования человека; 02.03.2012 г. – Режим доступа: <http://eidos-institute.ru/journal/2012/0302.htm>
256. Чебыкин, А. Я. Теория и методика эмоциональной регуляции учебной деятельности [Текст] / А. Я. Чебыкин. – Одесса: Изд-во «Астро-Принт», 1999. – 158 с.

257. Шабанова, М. В. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение [Текст] / М. В. Шабанова, Р. П. Овчинникова, А. В. Ястребов [и др.]. – М.: Изд. дом «Академии Естествознания», 2016. – 300 с.
258. Шадриков, В. Д. Введение в психологию: мотивация поведения [Текст] / В. Д. Шадриков. – М.: Изд-во «Логос», 2001. – 134 с.
259. Шадриков, В. Д. Психология деятельности и способности человека [Текст] / В. Д. Шадриков. – М.: Изд-во «Логос», 1996. – 320 с.
260. Шамова, Т. Н. Активизация учения школьников [Текст] / Т. Н. Шамова. – М.: Изд-во «Педагогика», 1982. – 208 с.
261. Шацкий, С. Т. Педагогические сочинения [Текст] : в 4 т. / С. Т. Шацкий; под ред. И. А. Каирова [и др.]. – М.: Изд-во «Просвещение», 1962 – 1965. Т. 3: [Статьи, выступления за 1926 – 1930 гг.] / сост. И. А. Соловков. – 1964. – 328 с.
262. Шварцбург, С. И. Состояние и перспективы факультативных занятий по математике [Текст] / С. И. Шварцбург, В. В. Дирсов. – М.: Изд-во «Просвещение», 1977. – 48 с.
263. Шепель, В. М. Имиджология [Текст] / В. М. Шепель. – М.: Изд-во «Народное образование», 2002. – 254 с.
264. Щедровицкий, Г. П. О возможных путях исследования мышления как деятельности [Текст] / Г. П. Щедровицкий, Н. Г. Алексеев // Докл. АПН РСФСР. – 1957. – № 3; 1958. – № 1, 4; 1959. – № 1, 2, 4; 1960. – № 2, 4, 5, 6; 1961. – № 4, 5. 1962. – № 2 – 6.
265. Щербатых, С. В. Исследовательское обучение как основа формирования универсальных учебных действий у учащихся в школьном курсе математики [Текст] / С. В. Щербатых, Е. М. Натырова // Вестник Брянского государственного университета. – 2015. – № 2. – С. 104 – 106.
266. Щукина, Г. И. Формирование познавательных интересов – важный фактор совершенствования современного обучения [Текст] / Г. И. Щукина // Педагогические проблемы формирования познавательных интересов учащихся. – М.: Изд-во «Педагогика», 1998. – С. 208 – 213.



267. Щукина, Г.И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе [Текст] / Г. И. Щукина. – М.: Изд-во «Просвещение», 1979. – 160 с.
268. Эльконин, Б. Д. Действие как единица развития [Текст] / Б. Д. Эльконин // Вопросы психологии. – 2004. – № 1. – С. 35 – 49.
269. Эльконин, Б. Д. Я – экстремист деятельностного подхода! [Электронный ресурс] / Б. Д. Эльконин // Школьный психолог. – 2001. – № 14. – Режим доступа: <http://psy.1september.ru/article.php?ID=200101414>.
270. Эльконин, Д. Б. Психология обучения младшего школьника [Текст] / Б. Д. Эльконин. – М.: Изд-во «Педагогика», 1974. – 206 с.
271. Эльконин, Д. Б. Понятие компетентности с позицией развивающего обучения [Текст] / Д. Б. Эльконин // Современные подходы к компетентностно-ориентированному образованию. – Красноярск, 2002.
272. Эльконин, Д. Избранные психологические труды [Текст] / Б. Д. Эльконин. – М.: Изд-во «Педагогика», 1989. – 560 с.
273. Юдина О.Н., Вайзер Г.А. Теория учения развивающейся личности Н.А. Менчинской // Вопросы психологии. 2005. № 3. С. 122 – 132.
274. Якиманская, И. С. Развивающее обучение [Текст] / И. С. Якиманская. – М.: Изд-во «Педагогика», 1979. – 144 с.
275. Якиманская, И. С. Личностно ориентированное обучение в современной школе [Текст] / И. С. Якиманская. – М.: Изд-во «Сентябрь», 2002. – 96с
276. Якунин В.А. Педагогическая психология. - СПб.: Изд-во Михайлова В.А., 2000. - 349 с.
277. Ясвин, В. А. Образовательная среда: от моделирования к проектированию [Текст] / В. А. Ясвин. – М.: Изд-во «Смысл», 2001. – 365 с.
278. Яремко Н.Н. Теоретико-методические основания критериально-корректностной математической подготовки бакалавров физико-математических направлений: дисс. ... доктора пед. наук: 13.00.02 / Яремко Н. Н., г. Орел, 2016г. – 399 с.

279. Bloom, B. S. Taxonomy of Education Objectives. The Classification of Educational goals [Text] / B. S. Bloom. – Handbook I: Cognitive Domain. – N.Y., 1967.
280. <https://uchebnik.mos.ru> Сценарии уроков МЭШ
281. Баракова, Е.А., Шилин И. А. О формировании регулятивных умений учащихся в процессе исследовательского обучения [Текст] / Е. А. Баракова, И.А. Шилин // Вестник Московского государственного гуманитарного университета им. М. А. Шолохова. Педагогика и психология. 2013. № 2. С. – 24 – 29.

## Приложение 1

### Методическое указание учителю к уроку по теме

#### «Квадратный трёхчлен»

Цель данного урока:

- дать определение квадратного трехчлена и его корней; научить выделению полного квадрата двучлена из квадратного трехчлена и разложению квадратного трехчлена на множители;
- средствами предмета целенаправленно формировать у учащихся РУУД;
- развивать осмысленную самооценку собственных учебных действий и личностных достижений по освоению предмета.

Формируемые РУУД на данном уроке:

- *целеполагание*: постановка учебной задачи - усвоение определения квадратного трехчлена и его корней; овладение приемом выделения квадрата двучлена из квадратного трехчлена; овладение техникой разложения квадратного трехчлена на множители;
- *планирование*: выявление особенностей и оценивание структуры квадратного трехчлена, выбор подхода к выделению квадрата двучлена из квадратного трехчлена, приема разложения квадратного трехчлена на множители (способа группировки, использование формул сокращенного умножения, теоремы о разложении квадратного трехчлена на множители)
- *прогнозирование*: учет старшего коэффициента квадратного трехчлена, подбор сочетания буквенных и числовых выражений при изменении внешнего вида квадратного трехчлена для выделения полного квадрата двучлена, выбор формулы сокращенного умножения, подходящей к условию примера; оценивание вариативности выполнения задания, выбор рационального способа разложения квадратного трехчлена на множители;
- *контроль*: выбор способа контроля собственных действий (проверка выполнением обратных действий: раскрытие формулы сокращенного умножения, приведение подобных слагаемых; умножение двучлена на двучлен, приведение к стандартному виду квадратного трехчлена, сверка с эталонным решением примера на экране, собственные рассуждения и умозаключения на основе имеющихся знаний по теме, другое);
- *коррекция*: в случае расхождения с правильным результатом - поиск ошибки (логическая, арифметическая, незаконченность выполнения действий, другое), внесение дополнений и изменений в собственное решение и правка записи решения и ответа;

- *оценка*: в результате самооценивания собственной деятельности и результата, оценивания действий одноклассников (работа в парах, коллективная работа, диалог, другое) выделение и осознание уровня усвоения способов решения неравенства второй степени с одной переменной;
- *элементы волевой саморегуляции*: независимо от того, какой прием лучше усвоен, тренировка решения неравенства второй степени с одной переменной обоими способами до получения одинакового результата.

## Сценарий урока «Квадратный трёхчлен» (Алгебра 9)



### 1. Организационный момент

Тема урока. Квадратный трёхчлен

Сегодня на уроке мы:

- дадим определение квадратного трёхчлена и его корней,
- научимся выделять квадрат двучлена из квадратного трёхчлена,
- научимся разложению квадратного трёхчлена на множители.

Выполняем тестовое задание (см. следующий слайд).

### 2. Актуализация знаний

**Формируем целеполагание - постановку учебной задачи** (ставим учебную задачу усвоить определение квадратного трёхчлена и его корней, овладеть приемом выделения квадрата двучлена из квадратного трёхчлена, научиться разложению квадратного трёхчлена на множители на основе знаний о многочлене)



Тест  
Многочлены

Залустить тест

Конструктор теста

Вопрос 1. Укажите коэффициент старшего члена многочлена с одной переменной

Ответы

5	$5x^5 - 2 - x^2$	$\Rightarrow$	<input type="text" value="Переместите ответы в эту область"/>	Ответ: 5
1	$2x^3 - 4x^6 + 3x^5 - 1$	$\Rightarrow$	<input type="text" value="Переместите ответы в эту область"/>	Ответ: - 4
-4	$x^8 - 7x^2 + 3$	$\Rightarrow$	<input type="text" value="Переместите ответы в эту область"/>	Ответ: 1

Вопрос 2. Укажите степень многочлена с одной переменной

Ответы

$$6 \quad 5x^5 - 2 - x^{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Переместите ответы в эту область}} \quad \text{Ответ: 10}$$

$$8 \quad 2x^3 - 4x^6 + 3x^5 - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Переместите ответы в эту область}} \quad \text{Ответ: 6}$$

$$10 \quad x^8 - 7x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Переместите ответы в эту область}} \quad \text{Ответ: 8}$$

Вопрос 3. Укажите корни многочлена с одной переменной

Ответы

$$\{-3\} \quad x^3 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Переместите ответы в эту область}} \quad \text{Ответ: } \{0; 1\}$$

$$\{0; 1\} \quad x^3 - 8x^2 + 16x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Переместите ответы в эту область}} \quad \text{Ответ: } \{0; 4\}$$

$$\{0; 4\} \quad x^2 + 6x + 9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Переместите ответы в эту область}} \quad \text{Ответ: } \{-3\}$$

Вопрос 4. Укажите свободный член многочлена с одной переменной

Ответы

$$3 \quad 5x^5 - 2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Переместите ответы в эту область}} \quad \text{Ответ: } -2$$

$$-1 \quad 2x^3 - 4x^6 + 3x^5 - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Переместите ответы в эту область}} \quad \text{Ответ: } -1$$

$$2 \quad x^8 - 7x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Переместите ответы в эту область}} \quad \text{Ответ: } 3$$

### 3. Объяснение нового материала.

**Формируем планирование** – какова последовательность рассуждений при распознавании квадратного трехчлена по внешнему виду многочлена?

**Многочленом с одной переменной называют сумму одночленов с одной переменной.** Основные понятия: степень многочлена, старший член многочлена, свободный член многочлена,

Коэффициенты, значение многочлена – знаем из курса Алгебры 7 класса.

Сегодня мы будем работать с многочленами второй степени с одной переменной. Такой многочлен называют – квадратный трехчлен.

**О п р е д е л е н и е.** Квадратным трехчленом называется многочлен вида  $ax^2 + bx + c$ , где  $x$  – переменная,  $a, b, c$  – некоторые числа, причем  $a \neq 0$ .

Пользуясь определением, ответьте на следующий вопрос.

Является ли выражение квадратным трехчленом? Приведите аргументы.

**Примеры****Ответы**

$5x^2 + 8y - 10$

нет, так как содержит две переменные  $x, y$ 

$-4x^2 + 3x$

да, коэффициент  $c = 0, (-4x^2 + 3x + 0)$ 

$8x^4 + 7x - 1$

нет, показатель степени старшего члена равен

$0,5x^2 + 100$

да, коэффициент  $b = 0$ 

$8x - 5$

нет, коэффициент  $a = 0$ 

Вопрос. Почему появляется требование  $a \neq 0$ ? Можно ли в определении его отбросить? (Нет, так как обратится в 0 выражение, содержащее переменную во второй степени)

Значение переменной, при котором многочлен обращается в нуль, называют **корнем многочлена**.

Действия учащихся: 1. Выполняют задания на слайдах на доске.

2. Выполняют тестовые задания на экранах на планшетах.

**4. Проверка восприятия нового материала**

**Формируем контроль** – как проверить правильность выполненных действий? чем/ как обосновать правильность выбранного ответа теста?



Тест  
Квадратный трёхчлен

Запустить тест

Конструктор теста

Вопрос

Вопрос

Укажите многочлен с одной переменной, который не является квадратным трёхчленом (пользуясь определением корня многочлена)

Назовите корни трёхчлена  $2x^2 - x - 6$

Укажите правильный вариант ответа

Укажите правильный вариант ответа

$4x^2 - 5x$

$\{-1,5; 1\}$

$6x^2 - 2x + 1$

$\{-1; 1\}$

$3x^2 + 5$

$\{0; 2\}$

$x^3 + 10x^2 - 2$

$\{-1,5; 2\}$

Ответ:  $x^3 + 10x^2 - 2$

Ответ:  $\{-1,5; 2\}$

## 5. Видеоурок «Выделение полного квадрата двучлена»

**Выделение полного квадрата**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

**Формулы сокращенного умножения**

$(x \pm d)^2 = x^2 \pm 2xd + d^2$  - квадрат суммы и разности

**Пример:**

**1 ШАГ**  $3x^2 - 4x + 6 = 3(x^2 - \frac{4}{3}x + 2) =$

**2 ШАГ**  $= 3(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{3}) +$

## 6. Выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена

*Формируем оценку – правильность рассуждений, выбора способа выделения квадрата двучлена из квадратного трехчлена, уровень сложности самостоятельного задания для себя, степень самостоятельности выполнения предложенного задания, принятие решения о помощи.*

При решении задач иногда бывает удобно представить квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  в виде  $a(x - m)^2 + n$ , где  $m$  и  $n$  – некоторые числа.

Такое преобразование называется выделением квадрата двучлена из квадратного трехчлена. Рассмотрим пример (см. слайд на экране доски).

Пример. Рассмотрим выделение из квадратного трехчлена  $3x^2 - 36x + 140$  квадрат двучлена.

Решение:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 36x + 140 &= 3\left(x^2 - 12x + \frac{140}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 - 6^2 + \frac{140}{3}\right) = \\ &= 3\left((x - 6)^2 + \frac{32}{3}\right) = 3(x - 6)^2 + 32. \end{aligned}$$

Задание учащимся.

1. Выполните самостоятельно Задание 1 по образцу.

Выделите из квадратного трехчлена квадрат двучлена:

а)  $2x^2 - 4x + 10$ ;    б)  $\frac{1}{2}x^2 + x - 6$ .

2. Поменяйтесь тетрадями и выполните проверку по образцу.

В помощь:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .

**Решение Задания 1.**

$$a) 2x^2 - 4x + 10 = 2(x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) + 8 = 2(x - 1)^2 + 8;$$

$$b) \frac{1}{2}x^2 + x - 6 = \frac{1}{2}(x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) - 6\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 6\frac{1}{2}.$$

**7. Разложение квадратного трехчлена на множители**

Существуют разные подходы к выполнению разложения на множители трехчлена.

1. С приёмом «способ группировки» вы знакомы из курса Алгебры 7 класса.

На планшете вы видите Пример №1, решение которого выполнено с помощью «способа группировки». Внимательно изучите и запишите Пример № 1 и его решение в тетрадь.

Пример 1.

Разложим на множители квадратный трехчлен  $3x^2 - 21x + 30$ .

Решение.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 21x + 30 &= 3(x^2 - 7x + 10) = 3(x^2 - 2x - 5x + 10) = \\ &= 3(x(x - 2) - 5(x - 2)) = 3(x - 2)(x - 5). \end{aligned}$$

2. Это же задание можно выполнить с помощью теоремы о разложении квадратного трехчлена на множители: «Если  $x_1$  и  $x_2$  корни квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ , то  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ».

Докажем теорему. Внимание на доску.

**Теорема.**

Если  $x_1$  и  $x_2$  – корни квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ , то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

**Доказательство:**

1. Преобразуем квадратный трехчлен:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right);$$

2. Воспользуемся теоремой Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Тогда:  $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2), \quad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2.$

3. Поэтому:



$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1) = (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

**Доказано.**

**Если квадратный трехчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на множители, являющиеся многочленами первой степени.**

3. На планшете вы видите Пример № 2, решение которого выполнено с помощью доказанной теоремы.

Внимательно изучите и запишите в тетрадь Пример № 2.

Пример 2.

Разложим на множители квадратный трехчлен  $3x^2 - 21x + 30$ .

Решение.

1. Решим квадратное уравнение  $3x^2 - 21x + 30 = 0$ ,

$$D = b^2 - 4ac, \quad D = (-21)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 30 = 441 - 360 = 81, \quad \sqrt{D} = 9,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad x_{1,2} = \frac{21 \pm 9}{2 \cdot 3}, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 2.$$

2. По теореме о разложении квадратного трехчлена на множители имеем

$$3x^2 - 21x + 30 = 3(x - 2) \cdot (x - 5).$$

3. Для закрепления этих подходов к решению заданий на разложение квадратного трехчлена на множители выполните Самостоятельную работу (см. следующий слайд).

### 8. Самостоятельная работа

**Формируем волевою регуляцию** – мобилизуем имеющиеся знания, концентрируем внимание, аргументируем выбор ответа, в случае ошибки, выполняем работу над ошибками, анализируя промахи в рассуждениях.

#### Самостоятельная работа

##### Вариант 1.

1. Выполните разложение квадратного трехчлена на множители, используя «способ группировки»:

$$3x^2 - 24x + 21;$$

2. Выполните разложение квадратного трехчлена на множители, применив теорему о разложении квадратного трехчлена на множители:

$$4x^2 + 8x - 32.$$

**Вариант 2.**

1. Выполните разложение квадратного трехчлена на множители, используя «способ группировки»:

$$4x^2 + 8x - 32;$$

2. Выполните разложение квадратного трехчлена на множители, применив теорему о разложении квадратного трехчлена на множители:

$$3x^2 - 24x + 21.$$

**Решение заданий Самостоятельной работы****Вариант 1.**

1. Решение.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 24x + 21 &= 3(x^2 - 8x + 7) = 3(x^2 - 7x - x + 7) = \\ &= 3(x(x - 7) - (x - 7)) = 3(x - 7)(x - 1). \end{aligned}$$

2. Решение.

$$1) \quad 4x^2 + 8x - 32 = 0,$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36, \quad \sqrt{D} = 6,$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -4.$$

$$2) \quad 4x^2 + 8x - 32 = 4(x - 2)(x + 4).$$

**Вариант 2.**

1. Решение.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x - 32 &= 4(x^2 + 2x - 8) = 4(x^2 - 2x + 4x - 8) = \\ &= 4(x(x - 2) + 4(x - 2)) = 4(x - 2)(x + 4). \end{aligned}$$

2. Решение.

$$1) \quad 3x^2 - 24x + 21 = 0,$$

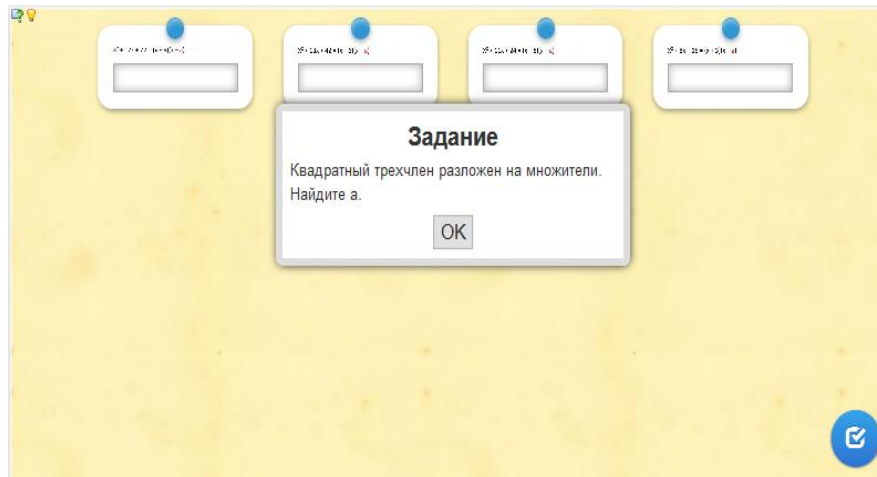
$$x^2 - 8x + 7 = 0,$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36, \quad \sqrt{D} = 6,$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{2}, \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 1.$$

$$2) \quad 3x^2 - 24x + 21 = 3(x - 7)(x - 1).$$

## 9. Решение заданий ОГЭ по математике (Приложение в learningsapps).



$$x^2 + 17x + 72 = (x + 9)(x - a) \quad \text{Ответ: } -8$$

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x - a) \quad \text{Ответ: } -5$$

$$x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x - a) \quad \text{Ответ: } -3$$

$$x^2 + 13x + 42 = (x + 6)(x - a) \quad \text{Ответ: } -7.$$

## 10. Итог занятия. Тест на самооценку. Домашнее задание

### Домашнее задание:

1. Сократите дробь:  $\frac{16-x^2}{x^2-x-12}$ .
2. Найдите значение дроби:  $\frac{36-x^2}{x^2-x-12}$  при  $x = -9$ .
3. Постройте график функции:  $y = \frac{x^2-6x+8}{x-2}$ .

*При выполнении домашнего задания используйте знания:*

- основного свойства дроби;
- формул сокращенного умножения;
- формул корней квадратного уравнения;
- области определения функции.

## Лист самооценивания своей деятельности и результата на уроке учащимся

Ф.И. учащегося \_\_\_\_\_

Класс \_\_\_\_\_

1. Тема урока \_\_\_\_\_

2. Интересна ли тема урока? Выберите ответ:

1	Расширяет возможности решения математических задач применением умений выделения полного квадрата двучлена из квадратного трехчлена и разложения на множители квадратного трехчлена	
2	Дает возможность выбора способа решения математических задач	
3	Применение приобретенных знаний и умений при изучении других предметов, в жизни	
4	Другое (добавьте свое)	

3. Достаточно ли собственных знаний и умений для освоения нового материала?

<i>Описание математических знаний</i>	<i>Да</i>	<i>Нет (в чем затруднения)</i>
- знание многочлена, его коэффициентов, степеней, стандартного вида		
- умение выполнять действия с многочленами		
- знание формул сокращенного умножения		
- умение решать квадратное уравнение		

4. Нужна ли была помощь при освоении нового материала? (Поясните ответ)

1	Помощь учителя	
2	Помощь одноклассников	
3	Образец решения	
4	Другое (добавьте свое)	

5. Уровень усвоения материала урока (поставьте оценку по 5-бальной шкале)

1	Усвоил определение квадратного трехчлена и его корней	
2	Научился выделять полный квадрат двучлена из квадратного трехчлена	
3	Научился разложению квадратного трехчлена на множители с помощью теоремы о разложении квадратного трехчлена на множители	
4	Научился решать задания ОГЭ	
5	Другое (добавьте свое)	

## Приложение 2.

### Методическое указание учителю к уроку по теме

#### «Решение неравенств второй степени с одной переменной»

Цель данного урока:

- научить решать неравенства второй степени с одной переменной способами: графическим (с помощью построения схематичной параболы), методом интервалов;
- средствами предмета целенаправленно формировать у учащихся РУУД;
- развивать осмысленную самооценку собственных учебных действий и личностных достижений по освоению предмета.

Формируемые РУУД на данном уроке:

- *целеполагание*: постановки учебной задачи – овладение двумя способами решения неравенства второй степени с одной переменной (построение схематичной параболы и метод интервалов) на основе знаний квадратичной функции, её свойств и графика, умения разложить квадратный трехчлен на множители;
- *планирование*: оценивание структуры неравенства и выбор способа выполнения задания (нахождение нулей функции по формулам корней квадратного уравнения или по теореме Виета, оценивание знака старшего коэффициента для построения направления «ветвей» параболы или составление таблицы, просчет знак функции на каждом из полученных промежутков или знание теоремы о чередовании знака при условии линейных множителей в записи функции, другое);
- *прогнозирование*: выбор правильного сочетания знака квадратного неравенства с одной переменной и знака квадратичной функции, знака квадратного неравенства с одной переменной и положения части графика квадратичной функции относительно оси  $x$  для записи результата - решения неравенства, т. е. промежутка(ов), удовлетворяющего(их) неравенству;
- *контроль*: выбор способа контроля собственных действий (проверка подстановкой в исходное неравенство числовых значений из полученных в ответе промежутков, сверка с эталонным решением примера на экране, собственные рассуждения и умозаключения на основе имеющихся знаний по теме, другое);
- *коррекция*: в случае расхождения с правильным результатом - поиск ошибки (логическая, арифметическая, незаконченность выполнения действий, другое), внесение дополнений и изменений в собственное решение и правка записи решения и ответа;

- *оценка*: в результате самооценивания собственной деятельности и результата, оценивания действий одноклассников (работа в парах, коллективная работа, диалог, другое) выделение и осознание уровня усвоения способов решения неравенства второй степени с одной переменной;

- *элементы волевой саморегуляции*: независимо от того, какой прием лучше усвоен, тренировка решения неравенства второй степени с одной переменной обоими способами до получения одинакового результата.

## Сценарий урока



### 1. Организационный момент

Тема урока: Решение неравенств второй степени с одной переменной.

Сегодня на уроке мы будем учиться решать неравенства второй степени с одной переменной.

1. Рассмотрим два способа решения таких неравенств:

- графический способ (построение схематичной параболы);
- метод интервалов.

2. Познакомимся с заданиями ОГЭ (на базовом уровне и повышенной сложности).

### 2. Актуализация знаний.

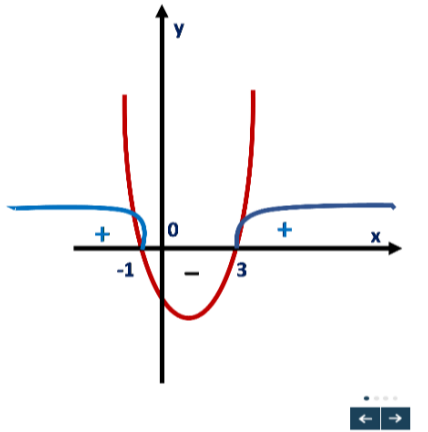
**Формируем целеполагание - постановку учебной задачи** (ставим учебную задачу овладеть способами решения неравенства второй степени с одной переменной на основе имеющихся знаний о квадратичной функции).

Для решения неравенства второй степени с одной переменной графическим способом (построением схематичной параболы), вспомним свойства графика квадратичной функции.

Ответьте на вопросы.

1. Какой числовой коэффициент указывает на направление ветвей параболы?
2. Как определить ноль функции? Где на графике эти точки?
3. Как определить на графике промежутки знакопостоянства?

1) Назовите по графику свойства функции:  $y = x^2 - 2x - 3$ .



Ответ:

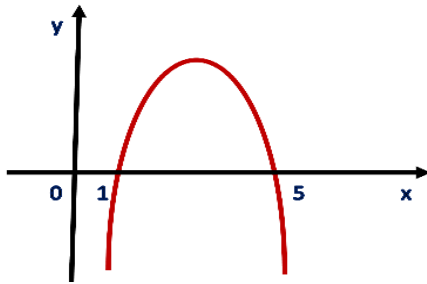
$a > 0$ , ветви параболы направлены вверх

$y = 0$  в точках  $x = -1$  и  $x = 3$ ,

$y > 0$ , если  $x < -1$  или  $x > 3$ ,

$y < 0$ , если  $-1 < x < 3$ .

2) Назовите по графику свойства функции:  $y = -x^2 + 6x - 5$



Ответ:

$$y = -x^2 + 6x - 5$$

$a < 0$ , ветви параболы  
направлены вниз

$y = 0$  в точках  $x = 1$  или  $x = 5$ ,

$y > 0$ , если  $1 < x < 5$ ,

$y < 0$ , если  $x < 1$  или  $x > 5$ .

### 3. Решение неравенств второй степени с одной переменной графическим способом.

**Формируем планирование** – какова последовательность действий решения неравенства второй степени с одной переменной графическим способом?

Неравенство вида  $ax^2 + bx + c > 0$  и  $ax^2 + bx + c < 0$ , где  $x$  – переменная,  $a$ ,  $b$  и  $c$  – некоторые числа и  $a \neq 0$ ,

называют неравенствами второй степени с одной переменной.

Решение таких неравенств можно рассматривать как нахождение промежутков, в которых функция  $y = ax^2 + bx + c$  принимает положительные и отрицательные значения. Для этого достаточно проанализировать, как расположен график функции  $y = ax^2 + bx + c$  в координатной плоскости:

- куда направлены ветви параболы – вверх или вниз;

- пересекает ли парабола ось  $x$  и если пересекает, то в каких точках;
- на каких промежутках точки параболы расположены выше оси  $x$ , на каких – ниже оси  $x$ .

Обсуждаем решение неравенства второй степени с одной переменной графическим способом (построением схематичной параболы) и способы проверки. (См. слайд).

Задание 21 № 314563 (источник: Банк заданий ФИПИ)

Решите неравенство  $(x - 3)(2x + 3) < -7$ .

Решение.

Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые

$$(x - 3)(2x + 3) < -7 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 < 0,$$

найдем нули квадратного трехчлена, отметим на координатной прямой, изобразим схематично параболу.

В ответ запишем промежуток, все точки которого расположены ниже оси  $Ox$ .

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25, \quad \sqrt{D} = 5,$$

$$x_1 = \frac{3+5}{2 \cdot 2} = 2, \quad x_2 = \frac{3-5}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$

$$x \in (-0,5; 2).$$

Ответ:  $(-0,5; 2)$ .

#### 4. Закрепление алгоритма решения неравенства второй степени с одной переменной графическим способом

*Формируем прогнозирование* – как соотносить неравенство и его решение по внешнему виду неравенства, в зависимости от знака старшего коэффициента, знака неравенства, значения корней квадратного трехчлена.

Выполните задание: решите неравенства графическим способом (построение схематичной параболы) в тетради.

Совместите на экране правильный ответ с условием, нажмите кнопку для проверки.

Работать можно в парах.



### Ответы к заданию.

- 1)  $x^2 - 3x + 2 > 0$ , ответ:  $(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$ ;
- 2)  $x^2 - 3x + 2 < 0$ , ответ:  $(-2; -1)$ ;
- 3)  $x^2 + 2x - 3 > 0$ , ответ:  $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ ;
- 4)  $x^2 + 2x - 3 < 0$ , ответ:  $(-3; 1)$ ;
- 5)  $-2x^2 - 5x + 18 > 0$ , ответ:  $(-4,5; 2)$ ;
- 6)  $-2x^2 - 5x + 18 < 0$ , ответ:  $(-\infty; -4,5) \cup (2; +\infty)$

## 5. Решение неравенств методом интервалов

**Формируем контроль** – как обосновать и проверить правильность расстановки знаков функции на координатной прямой, оценить полученный результат, соотнести с теоремой (метод интервалов)

### Решение неравенств второй степени с одной переменной методом интервалов.

Для неравенств степени  $n$ , если  $n \geq 2$ , рассуждаем:

пусть функция задана формулой  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ , где  $x$  – переменная, а  $x_1, x_2, \dots, x_n$  не равные друг другу числа. Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – являются нулями функции.

В каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции, знак функции сохраняется, а при переходе через ноль, её знак изменяется.

Это свойство используется для решения неравенств вида

$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \vee 0$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  не равные друг другу числа.

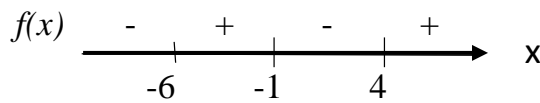
### Пример

Решим неравенство степени  $n$ , где  $n = 3$ ,

$$(x + 6)(x + 1)(x - 4) < 0,$$

### Решение

Отметим на координатной прямой нули функции  $f(x) = (x + 6)(x + 1)(x - 4)$ , т.е. точки  $-6, -1, 4$ , и укажем знаки функции на образовавшихся промежутках.



$f(x) < 0$ , на промежутках  $(-\infty; -6)$  и  $(-1; 4)$ .

Множеством решений неравенства является объединение этих промежутков.

Ответ:  $(-\infty; -6)$  и  $(-1; 4)$

Изучите решение примера (см. слайд) и выполните в тетради самостоятельно решение неравенств второй степени с одной переменной методом интервалов.

$$(x - 2)(x - 5)(x - 12) > 0;$$

$$(x - 2)(5 - x)(x - 12) > 0;$$

$$(x + 9)(x - 2)(x - 15) < 0;$$

$$(2x + 6)(x - 5)(2 + x) < 0;$$

Ответы сравните с образцом.

Ответы к заданию на самостоятельное решение.

1. Ответ:  $(2; 5) \cup (12; +\infty)$ .

3. Ответ:  $(-\infty; 2) \cup (5; 12)$ .

2. Ответ:  $(-\infty; -9) \cup (2; 15)$ .

4. Ответ:  $(-\infty; -3) \cup (-2; 5)$ .

**Ответьте на вопрос:** можно ли использовать графический способ решения?

## 6. Решение заданий повышенной сложности

**Формируем оценку** – правильность рассуждений, выбора способа решения неравенства второй степени с одной переменной, уровень сложности самостоятельного задания для себя, степень самостоятельности выполнения предложенного задания, принятие решения о помощи.

1. Задание 21 (ОГЭ) относится к заданиям повышенной сложности.

Прежде, чем применить один их приемов решения неравенства второй степени с одной переменной,

а именно, графический способ (построение схематичной параболы) или метод интервалов,

необходимо:

- проанализировать конструкцию неравенства,
- выполнить необходимые преобразования.

Рассмотрим Задание 21 (ОГЭ) из каталога заданий ОГЭ.

Решите неравенство  $\frac{-12}{(x-1)^2-2} \geq 0$ .

Решение

Так как  $-12 < 0$ , то неравенство выполняется при условии  $(x-1)^2 - 2 < 0$ .

Преобразуем левую часть неравенства к стандартному виду квадратного трехчлена:

$$(x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x + 1 - 2 = x^2 - 2x - 1,$$

найдем нули квадратного трехчлена:

$$x^2 - 2x - 1 = 0, \quad D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8, \quad \sqrt{D} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 - \sqrt{2};$$

отметим нули на координатной прямой и покажем знаки функции

$y = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$  в образовавшихся промежутках:

$$y \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline \circ \quad \circ \\ 1 - \sqrt{2} \quad 1 + \sqrt{2} \end{array} \longrightarrow x$$

Так как  $y < 0$  на промежутке  $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ ,

то и множество решений неравенства  $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ .

Ответ:  $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ .

2. Решите самостоятельно и проверьте Задание 21 (ОГЭ).  $\frac{15}{(4+x)(2-5x)} < 0$

3. Правильный ответ к самостоятельному заданию.

Ответ:  $(-\infty; -4) \cup (0,4; +\infty)$ .

## 7. Проверка усвоения нового материала

**Формируем волевую регуляцию** – мобилизуем имеющиеся знания, концентрируем внимание, аргументируем выбор ответа, в случае ошибки, выполняем тест повторно, анализируя промахи в рассуждениях



Тест

Неравенства второй степени с одной переменной

Запустить тест

Конструктор теста

Вопрос

Укажите решение неравенства

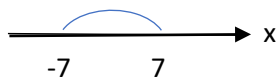
$$(x + 3)(x - 8) \geq 0$$

Укажите правильный вариант ответа

- $(-\infty; -3] \cup [8; +\infty)$
- $[-3; +\infty)$
- $[8; +\infty)$
- $[-3; 8]$

Вопрос

Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке



Укажите правильный вариант ответа

- $x^2 + 49 \leq 0$
- $x^2 - 49 \geq 0$
- $x^2 - 49 \leq 0$
- $x^2 + 49 \geq 0$

Вопрос

Укажите неравенство, которое не имеет решения

Укажите правильный ответ

- $x^2 + 6x + 51 > 0$
- $x^2 + 6x - 51 > 0$
- $x^2 + 6x + 51 < 0$
- $x^2 + 6x - 51 < 0$

## 8. Подведение итогов. Выполните тест на самооценку. Видео урок. Домашнее задание.

**Формируем осознание связи исследовательской деятельности и саморегуляции собственных действий**

Гебра 9 класс урок 19

Свойства квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$

<p><math>a &gt; 0, D &gt; 0</math></p>	<p><math>a &gt; 0, D = 0</math></p>	<p><math>a &gt; 0, D &lt; 0</math></p>
<p><math>a &lt; 0, D &gt; 0</math></p>	<p><math>a &lt; 0, D = 0</math></p>	<p><math>a &lt; 0, D &lt; 0</math></p>

$ax^2 + bx + c > 0$   
 $ax^2 + bx + c < 0$

$ax^2 + bx + c \geq 0$   
 $ax^2 + bx + c \leq 0$

00:33 02:56 Полный экран

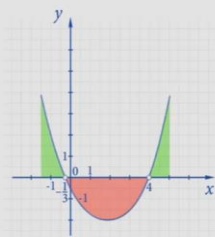
Гебра 9 класс урок 19

### Пример решения квадратичного неравенства

Дано:  $3x^2 - 11x - 4 > 0$

- Рассмотрим функцию  $y = 3x^2 - 11x - 4$ , графиком функции является парабола;
- $a = 3$  и  $3 > 0$  – ветви параболы направлены вверх;
- $3x^2 - 11x - 4 = 0$   
корни:  $x_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $x_2 = 4$ ;
- схематически строим график квадратичной функции.

**Ответ:**  $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (4; +\infty)$ .



01:26 02:56 Полный экран

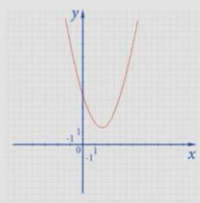
---

### Решение неравенства второй степени с одной переменной (квадратичные неравенства)

ДАНО:  $x^2 - 3x + 4 > 0$

- Рассмотрим функцию  $y = x^2 - 3x + 4$ , ветви направлены вверх
- Решим уравнение  $x^2 - 3x + 4 = 0$   
 $D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 = -7 \Rightarrow D < 0$
- Корней нет, схематически график функции выглядит так
- Интервалом решения будет  $x$  — любое число

**Ответ:**  $(+\infty; -\infty)$


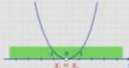



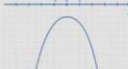


02:46 02:56 Полный экран

---

### Алгоритм решения неравенства второй степени с одной переменной (квадратичные неравенства)

Общий вид неравенства  $ax^2 + bx + c > 0$  ( $< 0, \geq 0, \leq 0$ )

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
<b>Шаг 1</b> Рассмотрим график функции $y = ax^2 + bx + c$ Ветви направлены вверх/вниз, так как $a > 0$ ( $< 0$ )			
<b>Шаг 2</b> $ax^2 + bx + c = 0$ $D > 0$ ( $D < 0, D = 0$ ) Имеет два корня (не имеет корней, имеет один корень)	$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$x$ - любое число $x_1$	$x$ - любое число
<b>Шаг 3</b> $x_1, x_2$ - корни уравнения (нет корней, $x$ - корень уравнения) строим график (схематично)			
<b>Шаг 4</b> Определяем и записываем интервалы, включаем (не включаем) точки границы интервала	$x \in (-x_1; x_2)$	Решений нет	Решений нет

02:06 02:56 Полный экран

Сегодня на уроке вы научились решать неравенства второй степени с одной переменной двумя способами: графическим способом (построением схематичной параболы); методом интервалов. Выполните домашнее задание:

- Выучите алгоритмы решения неравенства второй степени с одной переменной графическим способом (построением схематичной параболы) и методом интервалов.

2. Решите неравенство двумя способами:  $\frac{8}{x^2 - x + 2} < 0$ .

## Лист самооценивания своей деятельности и результата на уроке учащимся

Ф.И. учащегося \_\_\_\_\_

Класс \_\_\_\_\_

1. Тема урока \_\_\_\_\_

2. Интересна ли тема урока? Выберите ответ:

1	Расширяет знания о применении квадратичной функции в решении математических задач	
2	Дает возможность выбора способа решения неравенств второй степени с одной переменной	
3	Применение приобретенных знаний и умений при изучении других предметов, в жизни	
4	Другое (добавьте свое)	

3. Достаточно ли собственных знаний и умений для освоения нового материала?

<i>Описание математических знаний</i>	<i>Да</i>	<i>Нет (в чем затруднения)</i>
- знание квадратичной функции и её свойств		
- знание графика квадратичной функции		
- умение решать квадратное уравнение		
- умение работать с координатной прямой		

4. Нужна ли была помощь при освоении нового материала? (Поясните ответ)

1	Помощь учителя	
2	Помощь одноклассников	
3	Образец решения	
4	Другое (добавьте свое)	

5. Уровень усвоения материала урока (поставьте оценку по 5-бальной шкале)

1	Научился решать неравенства второй степени с одной переменной с помощью построения схематичной параболы	
2	Научился решать неравенства второй степени с одной переменной методом интервалов	
3	Научился решать задания ОГЭ	
4	Другое (добавьте свое)	

## Приложение 3

### Методическое указание учителю к уроку по теме

#### «Построение графика квадратичной функции»

Цель урока:

- научить строить график квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $x$  – независимая переменная,  $a, b, c$  – числа, причем  $a \neq 0$ , читать график, составлять формулы квадратичных функций, решать задачи на использование графика квадратичной функции и её свойств;
- средствами предмета целенаправленно формировать у учащихся РУУД;
- развивать осмысленную самооценку собственных учебных действий и личностных достижений по освоению предмета.

Формируемые РУУД на данном уроке:

- *целеполагание*: постановка учебной задачи - усвоение алгоритма построения графика квадратичной функции, умение читать график, применять свойства квадратичной функции в решении задач, умение составлять формулы квадратичных функций;
- *планирование*: распознавание квадратичной функции по графику: установление соответствия между графиками квадратичной функции и коэффициентами старших членов, между графиками функций и формулами, которые их задают; применение параболы в решении прикладных задач; использование знаний о параболе в науке, в жизни;
- *прогнозирование*: понимание и учет коэффициентов квадратичной функции, заданной формулой, при описании её свойств и построения графика (направление «ветвей» параболы вверх или вниз, расположение вершины параболы, пересечение параболы с осью  $y$ , нули функции (точки пересечения параболы с осью  $x$ ));
- *контроль*: выбор способа контроля собственных действий (проверка принадлежности точек с заданными координатами графику функции подстановкой значений  $x$  и  $y$  в формулу, с помощью которой она задана, составление таблицы - просчет координат точек, которые необходимо отметить для построения параболы, симметрия относительно прямой, проходящей через вершину параболы параллельно оси  $y$ , сверка с эталонным решением задач на график квадратичной функции на экране, собственные рассуждения и умозаключения на основе имеющихся знаний по теме, другое);

- *коррекция*: в случае расхождения с правильным результатом - поиск ошибки (логическая, арифметическая, незаконченность выполнения действий, другое), внесение дополнений и изменений в собственное решение и правка записи решения и ответа;
- *оценка*: в результате самооценивания собственной деятельности и результата, оценивания действий одноклассников (работа в парах, коллективная работа, командная работа, диалог, другое) выделение и осознание уровня усвоения алгоритма построения графика квадратичной функции, умения читать график;
- *элементы волевой саморегуляции*: тренировка построения графика квадратичной функции по алгоритму, развитие моторики, уверенное распознавание графика функции по заданным условиям задачи.

## Сценарий урока

### «Построение графика квадратичной функции» (Алгебра 9)



#### 1. Организационный момент

Тема урока: «Построение графика квадратичной функции».

Сегодня на уроке мы научимся:

- строить график квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$ ,  
где  $x$  – независимая переменная,  $a, b, c$  – числа, причём  $a \neq 0$ ;
- читать график;
- составлять формулы квадратичных функций;
- решать задачи на график квадратичной функции и её свойства.

#### 2. Актуализация знаний

**Формируем целеполагание - постановку учебной задачи** (ставим учебную задачу усвоить алгоритм построения квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $x$  – независимая переменная,  $a, b, c$  – числа, причём  $a \neq 0$ , на основе знаний графиков функций):

$$y = ax^2, y = ax^2 + n, y = a(x - t)^2, y = a(x - t)^2 + n.$$

Учитель. Мы с вами уже умеем строить графики функций:

$$y = ax^2, y = ax^2 + n, y = a(x - t)^2, y = a(x - t)^2 + n.$$

Умеем определять по формуле координаты вершины параболы для этих графиков.

Выполните тестовое задание.



**Тест**

Вопрос.

*Графиком квадратичной функции является парабола. Установите соответствие между формулой квадратичной функции и координатами вершины параболы.*

Ответы :

Переместите ответы в эту область

(0; 6)	$y = -2(x - 3)^2 - 4$	⇒	<input type="text"/>
(3; -4)	$y = 2(x - 6)^2$	⇒	<input type="text"/>
(0; 0)	$y = 3(x + 4)^2 - 3$	⇒	<input type="text"/>
(-4; -3)	$y = ax^2$	⇒	<input type="text"/>
(6; 0)	$y = 2(x - 6)^2$	⇒	<input type="text"/>

Ответьте на вопрос:

«Можем ли мы по внешнему виду квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$ , назвать координаты вершины параболы?»

(Ответ: нет).

✓ Ответить



Ответы к тестовому заданию:

$y = x^2 + 6$ ,    ответ: (0; 6).

$y = -2(x - 3)^2 - 4$ ,    ответ: (3; -4).

$y = ax^2$ ,    ответ: (0; 0).

$y = 3(x + 4)^2 - 3$ ,    ответ: (-4; -3).

$y = 2(x - 6)^2$ ,    ответ: (6; 0).

Обратимся к алгоритму построения графика квадратичной функции.

Подробнее остановимся на формулах нахождения координат вершины параболы.

### 3.Объяснение новой темы

**Формируем планирование** – какова последовательность действий при построении графика квадратичной функции?

## А л г о р и т м построения графика квадратичной функции

Чтобы построить график квадратичной функции нужно:

- 1) найти координаты вершины параболы и отметить её в координатной плоскости;
- 2) построить ещё несколько точек, принадлежащих параболе;
- 3) соединить отмеченные точки плавной линией.

Вопрос:

«Как найти координаты вершины параболы квадратичной функции?»

**Мы умеем** находить координаты вершины следующих функций:

- 1)  $y = ax^2$ ,  $(0; 0)$
- 2)  $y = ax^2 + n$ ,  $(0; n)$
- 3)  $y = a(x - m)^2$ ,  $(m; 0)$
- 4)  $y = a(x - m)^2 + n$ ,  $(m; n)$ .

Рассмотрим, как находить координаты вершины параболы функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Выделим квадрат двучлена из квадратного

$$\begin{aligned} \text{трехчлена: } y &= ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = a(x - m)^2 + n, \text{ где } m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

$(m; n)$  – координаты вершины параболы.

Значит график квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$  есть парабола, которую можно получить из графика функции  $y = ax^2$  с помощью

двух параллельных переносов – сдвига вдоль оси  $x$  и сдвига вдоль оси  $y$ .

**Пример 1.**

**Построим график функции  $y = -2x^2 + 12x - 19$ .**

Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вниз

$$(a = -2; a < 0),$$

$$1. \text{ Находим координаты вершины: } m = \frac{-b}{2a}, \quad m = \frac{-12}{2 \cdot (-2)} = 3;$$

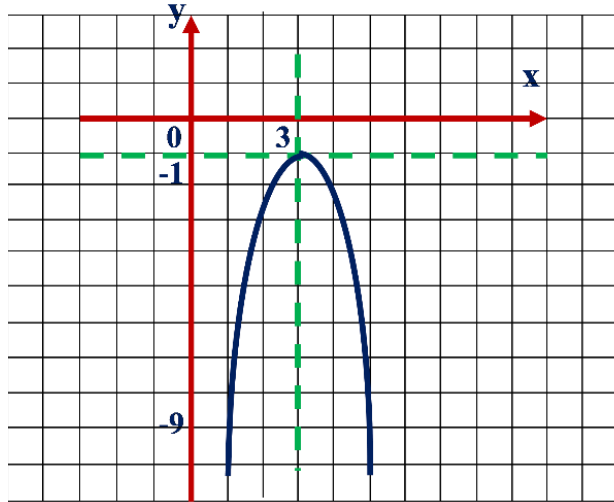
На практике  $n$  удобнее находить подстановкой найденного значения  $m$  вместо  $x$  в формулу  $y = ax^2 + bx + c$ .

$$\text{То есть, } n = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

2. Составляем таблицу:

$x$	1	2	3	4	5
$y$	-9	-3	-1	-3	-9

3. Отмечаем точки на координатной плоскости и соединяем плавной линией.



### Самостоятельная работа

#### Задание 1

Постройте график функции  $y = 0,5x^2 + 3x - 4$ ;

#### Задание 2

При каких значениях  $b$  и  $c$  вершиной параболы  $y = x^2 + bx + c$ , является точка  $(6; -12)$ ?

#### Указание

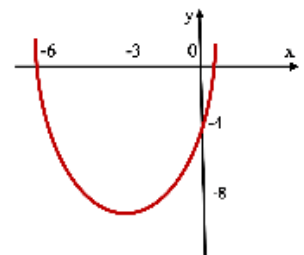
Задание выполните письменно в тетради, сверьте решение с эталоном на доске.

#### Решение Задания 1

$y = 0,5x^2 + 3x - 4$ , график параболы, ветви которой направлены вверх ( $a = 0,5 > 0$ );

$$m = \frac{-b}{2a}, \quad m = \frac{-3}{2 \cdot 0,5} = -3; \quad n = 0,5 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) - 4 = -8,5;$$

$x$	-6	-4	-3	-2	0
$y$	-4	-8	-8,5	-8	-4



#### 4. Проверка усвоения нового материала. Командная работа

**Формируем оценку** – правильность рассуждений, выбора соответствия между графиками функций и коэффициентами трёхчлена, между графиками функций и формулами, которые их задают, уровень сложности самостоятельного задания для себя, степень самостоятельности выполнения предложенного задания, принятие решения о помощи.

Учащиеся объединяются в группы по 4 человека.

Самостоятельно распределяют задания и выполняют (каждый свое задание) в тетради, осуществляют взаимопроверку и защищают работу у доски.

Приветствуется скорость выполнения работы командой.

**Проверяем:**

$$1) \text{ для } (-2; 1) \text{ имеем } x_0 = \frac{-b}{2a}, \quad -2 = \frac{-b}{2 \cdot 1}, \quad b = 4;$$

$$y_0 = x_0^2 + bx_0 + c, \quad 1 = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + c, \quad c = 5.$$

Ответ:  $b = 4, c = 5$ .

$$2) \text{ для } (2; -3) \text{ имеем } x_0 = \frac{-b}{2a}, \quad 2 = \frac{-b}{2 \cdot 1}, \quad b = -4;$$

$$y_0 = x_0^2 + bx_0 + c, \quad -3 = 2^2 - 4 \cdot 2 + c, \quad c = 1.$$

Ответ:  $b = -4, c = 1$ .

3) для  $(-3; -5)$  имеем  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ,  $-3 = \frac{-b}{2 \cdot 1}$ ,  $b = 6$ ;

$$y_0 = x_0^2 + bx_0 + c, \quad -5 = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + c, \quad c = 4.$$

Ответ:  $b = 6, c = 4$ .

4) для  $(4; -8)$  имеем  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ ,  $4 = \frac{-b}{2 \cdot 1}$ ,  $b = -8$ ;

$$y_0 = x_0^2 + bx_0 + c, \quad -8 = 4^2 - 8 \cdot 4 + c, \quad c = 8.$$

Ответ:  $b = -8, c = 8$ .

## 5. Учимся узнавать график квадратичной функции. Решение заданий ОГЭ.

**Формируем прогнозирование** – понимание и учет коэффициентов квадратичной функции, заданной формулой, при описании её свойств и построения графика (направление «ветвей» параболы вверх или вниз, расположение вершины параболы, пересечение параболы с осью  $y$ , нули функции (точки пересечения параболы с осью  $x$ )).

Учитель.

График функции  $y = ax^2 + bx + c$  есть парабола, которую можно получить из графика функции  $y = ax^2$  с помощью двух параллельных переносов – сдвига вдоль оси  $x$  и сдвига вдоль оси  $y$ .

Осью симметрии параболы служит прямая  $x = t$ , параллельная оси  $y$ .

При  $a > 0$  ветви параболы направлены вверх, при  $a < 0$  – вниз.

Следуя «Математическому навигатору», выполните Задания ОГЭ (устно).

Ответы обоснуйте.

### Математический навигатор

для графика квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$

- ❖ Коэффициент  $a$  отвечает за направление «ветвей» параболы:
  - если  $a > 0$ , «ветви» направлены вверх;
  - если  $a < 0$ , «ветви» направлены вниз;
- ❖ Коэффициенты  $a$  и  $b$  отвечают за расположение вершины параболы:
  - если  $a$  и  $b$  одного знака, то вершина расположена левее оси  $y$ ;
  - если  $a$  и  $b$  разного знака, то вершина расположена правее оси  $y$ ;
  - если  $b = 0$ , вершина расположена на оси  $y$ ;
- ❖ Коэффициент  $c$  отвечает за точку пересечения параболы оси  $y$ :
  - если  $c > 0$ , то парабола пересекает ось  $y$  выше нуля;
  - если  $c < 0$ , то парабола пересекает ось  $y$  ниже нуля;

- ❖ Дискриминант  $D$  отвечает за пересечение параболы оси  $x$ :  
если  $D > 0$ , то парабола пересекает ось  $x$  в двух точках;  
если  $D < 0$ , то парабола не пересекает ось  $x$ ;  
если  $D = 0$ , то парабола имеет с осью  $x$  одну общую точку  
(вершину параболы).

### Задание № 10, ОГЭ

На рисунке изображены графики функций вида  $y = ax^2 + bx + c$ .

Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов.

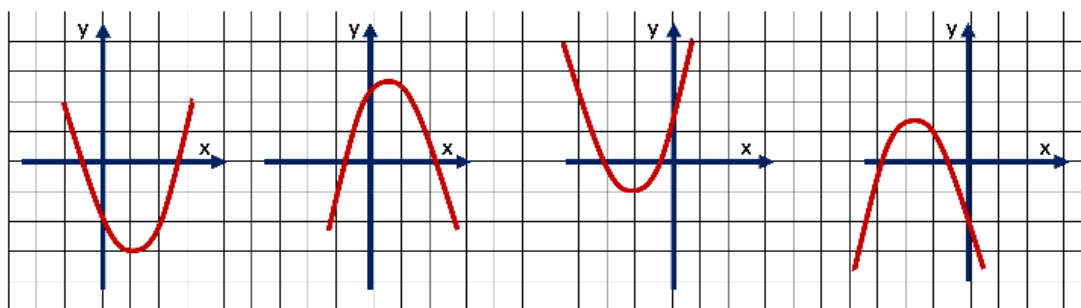
ГРАФИКИ

А)

Б)

В)

Г)



КОЭФФИЦИЕНТЫ

- 1)  $a > 0, c > 0$    2)  $a > 0, c < 0$    3)  $a < 0, c > 0$    4)  $a < 0, c < 0$

В таблице под каждой буквой установите соответствующий номер

А	Б	В	Г

### Задание № 10, ОГЭ

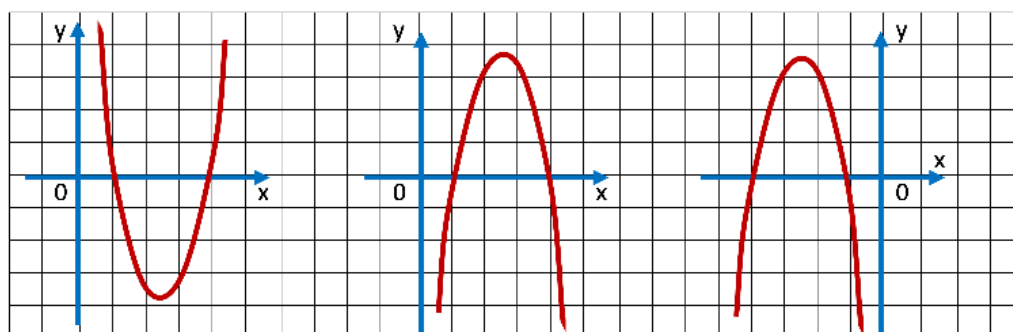
Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А)

Б)

В)



## ФОРМУЛЫ

$$1) y = 2x^2 - 10x + 8 \quad 2) y = -2x^2 + 10x - 8 \quad 3) y = -2x^2 - 10x - 8$$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер

А	Б	В

Ответы.

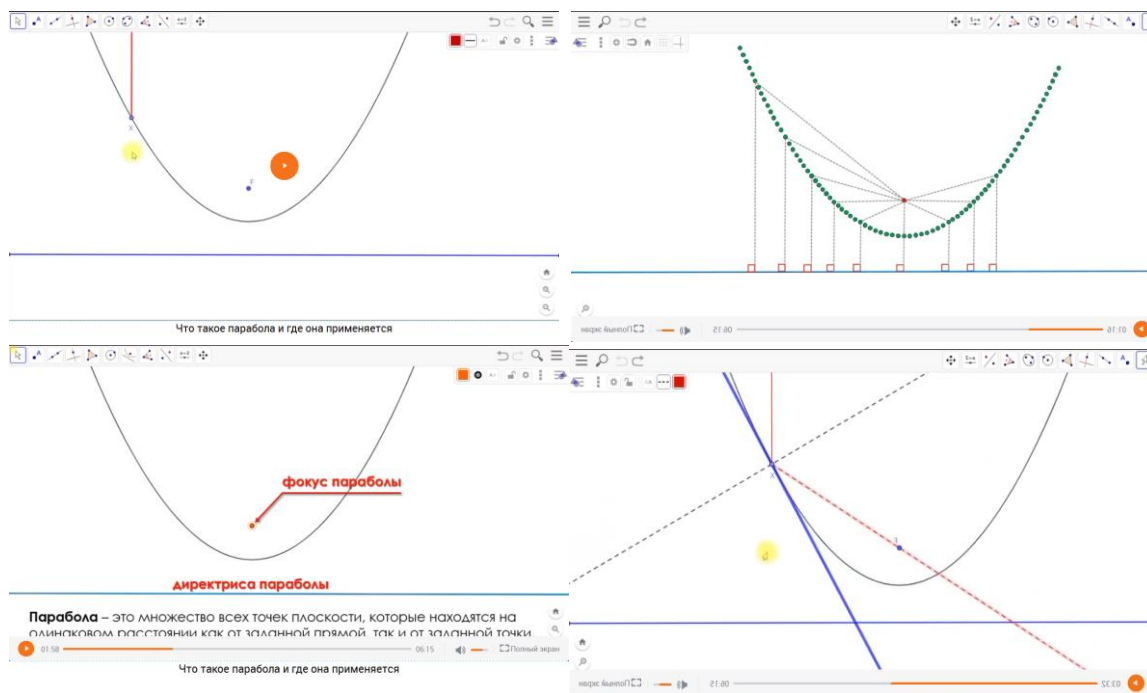
1. Установите соответствие между графиками функции и коэффициентами.

Ответы: 2413

2. Установите соответствие между графиками функции и формулами.

Ответы: 123

**6. Это интересно знать. Видео урок. Что такое парабола и где она применяется?**



Что такое парабола и где она применяется

При вращении параболы вокруг её оси получается фигура, которую называют параболоидом.

1 свойство параболоида.

Если внутреннюю поверхность параболоида сделать зеркальной и направить на неё пучок лучей, параллельных оси симметрии параболы, то отраженные лучи соберутся в одной точке, которую называют фокусом.

2 свойство параболоида.

В то же время если источник света разместить в фокусе, то отраженные от зеркальной поверхности параболоида лучи окажутся параллельными и не рассеиваются. Это свойство используется при конструировании мощных прожекторов.

Попробуйте ответить на вопрос: «Где применяется в жизни второе свойство параболоида?»

(Второе свойство параболоида применяется, например, при изготовлении прожекторов и автомобильных фар.)

## 7. Учимся составлять формулу квадратичной функции.

**Формируем контроль и волевою регуляцию** – мобилизуем имеющиеся знания, концентрируем внимание, аргументируем выбор способа решения и проверки и обоснования правильности полученного ответа, в случае ошибки, выполняем работу над ошибками, анализируя промахи в рассуждениях.

### Задача.

Функция задана формулой  $y = x^2 + px + q$ .

Найдите значение  $p$  и  $q$ , если известно:

- 1) нули функции – числа 3 и 4;
- 2) график функции пересекает оси координат в точках (0; 6) и (2; 0);
- 3) наименьшее значение, равное 24, функция принимает при  $x = 6$

### Указание.

Внимательно изучаем и обсуждаем решение задачи на доске, записываем решение в тетрадь.

### **Решение 1.**

По условию задачи  $x_1 = 3$  и  $x_2 = 4$  – корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

Тогда по теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 4 = -p \\ 3 \cdot 4 = q \end{cases}, p = -7; q = 12.$$

Таким образом, функция принимает вид:  $y = x^2 - 7x + 12$ .



**Решение 2.**

По условию задачи график функции пересекает оси координат в точках (0; 6) и (2; 0).

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 + px_1 + q \\ y_2 = x_2^2 + px_2 + q' \end{cases} \begin{cases} 6 = 0^2 + p \cdot 0 + q \\ 0 = 2^2 + p \cdot 2 + q' \end{cases} \begin{cases} q = 6 \\ 2p = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} q = 6, \\ p = -5. \end{cases}$$

Таким образом, функция принимает вид:  $y = x^2 - 5x + 6$ .

**Решение 3.**

По условию задачи координаты вершины параболы (6; 24), ветви направлены вверх.

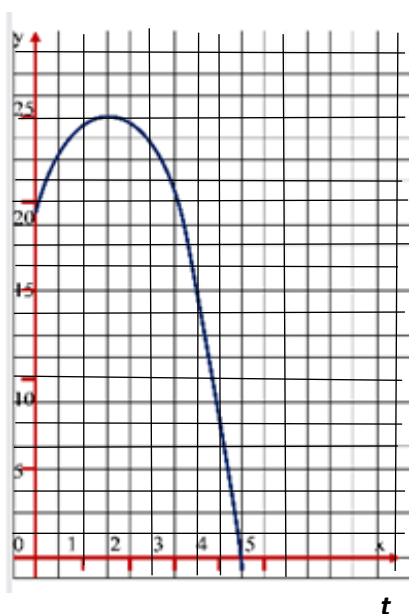
Получаем: 1.  $x_0 = \frac{-p}{2a}$ ;  $6 = \frac{-p}{2 \cdot 1}$ ;  $p = -12$ ;

$$2. y_0 = y(x_0), 24 = 6^2 - 12 \cdot 6 + q, q = 60.$$

Таким образом, функция принимает вид:  $y = x^2 - 12x + 60$ .

**8. Применение графика квадратичной функции к решению задач**

*Формируем осознание связи исследовательской деятельности и саморегуляции собственных действий.*

**Читаем график и отвечаем на вопросы****Задача**

Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0$  (м/с) с высоты  $h_0$  (м).

Высота  $h$  (м), на которой окажется тело через  $t$  (с), выражается формулой  $h = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + h_0$ , ( $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ ).

На рисунке показан график зависимости  $h$  от  $t$ , для случая, когда  $h_0 = 20 \text{ м}$ ,  $v_0 = 15 \text{ м/с}$ .

Найдите по графику

- сколько времени тело поднималось вверх;
- сколько времени оно опускалось вниз;
- какой наибольшей высоты достигло тело;
- через сколько секунд тело упало на землю.

### Памятка

При решении текстовых задач с использованием графика квадратичной функции важно:

- 1) найти цену деления по алгоритму:  $(a_2 - a_1): n =$  цена деления, где  $a_1$  и  $a_2$  последовательные показатели на оси, а  $n$  – число делений между этими показателями;
- 2) внимательно читать вопрос, анализировать поведение функции на промежутках, отвечать только на поставленный вопрос.

### Проверяем.

Ответы:

- а) 1,5с; б) 3с;  
в) 25м; г) 4,5с.

## **9. Подведение итогов. Тест на самооценку. Домашнее задание.**

Сегодня на уроке:

- мы вспомнили определение квадратичной функции;
- познакомились с алгоритмом построения графика квадратичной функции;
- научились читать график квадратичной функции;
- научились составлять формулу квадратичной функции;
- решать задачи с применением графика квадратичной функции;
- узнали, где применяют параболу и что такое параболоид.

Закрепите все эти знания, выполнив домашнее задание.

### Домашнее задание

1. Постройте график функции  $y = (x - 2)(x + 4)$ .
2. Найдите значение  $b$ , при котором прямая  $y = 6x + b$  касается параболы  $y = x^2 + 8$ .

## Лист самооценивания своей деятельности и результата на уроке учащимся

Ф.И. учащегося \_\_\_\_\_

Класс \_\_\_\_\_

1. Тема урока \_\_\_\_\_

2. Интересна ли тема урока? Выберите ответ:

1	Расширяет возможности решения математических задач применением умений построения графика квадратичной функции	
2	Дает возможность выбора способа решения математических задач	
3	Применение приобретенных знаний и умений при изучении других предметов, в жизни	
4	Другое (добавьте свое)	

3. Достаточно ли собственных знаний и умений для освоения нового материала?

<i>Описание математических знаний</i>	<i>Да</i>	<i>Нет (в чем затруднения)</i>
- знание квадратного трёхчлена, его коэффициентов, квадратичной функции её свойств		
- умение составлять таблицу для построения графика		
- знание формул дискриминанта и корней квадратного трёхчлена, теоремы Виета		
- умение читать график		

4. Нужна ли была помощь при освоении нового материала? (Поясните ответ)

1	Помощь учителя	
2	Помощь одноклассников	
3	Образец решения	
4	Другое (добавьте свое)	

5. Уровень усвоения материала урока (поставьте оценку по 5-бальной шкале)

1	Усвоил алгоритм построения графика квадратичной функции	
2	Научился строить график квадратичной функции	
3	Научился читать график квадратичной функции	
4	Научился решать задания ОГЭ	
5	Другое (добавьте свое)	

## Приложение 4.

### Методическое указание учителю к уроку по теме «Решение квадратных неравенств с одной переменной с параметром с помощью вариаций на оси»

Цель данного урока:

- научить решать квадратные неравенства с одной переменной с параметром методом интервалов (с помощью вариаций на оси).
- средствами предмета целенаправленно формировать у учащихся РУУД;
- развивать осмысленную самооценку собственных учебных действий и личностных достижений по освоению предмета.

Формируемые РУУД на данном уроке:

- *целеполагание*: постановки учебной задачи – овладение способом решения квадратного неравенства с одной переменной с параметром методом (с помощью вариации на оси) на основе знаний квадратичной функции, её свойств и графика, умения разложить квадратный трехчлен на множители; умения решать неравенства второй степени методом интервалов;
- *планирование*: оценивание структуры неравенства и рассуждения о расположении параметра относительно корней квадратного трёхчлена на оси, выбор способа нахождения нулей квадратного трёхчлена по формулам корней квадратного уравнения или по теореме Виета, просчет знака функции на каждом из полученных промежутков или знание теоремы о чередовании знака при условии линейных множителей в записи функции, другое);
- *прогнозирование*: выбор правильного сочетания знака квадратного неравенства с одной переменной и знака квадратичной функции на оси  $x$  для записи результата - решения неравенства, т. е. промежутка(ов), удовлетворяющего(их) неравенству;
- *контроль*: выбор способа контроля собственных действий (проверка подстановкой в исходное неравенство числовых значений из полученных в ответе промежутков, сверка с эталонным решением примера на экране, собственные рассуждения и умозаключения на основе имеющихся знаний по теме, другое);
- *коррекция*: в случае расхождения с правильным результатом - поиск ошибки (логическая, арифметическая, незаконченность выполнения действий, другое), внесение дополнений и изменений в собственное решение и правка записи решения и ответа;

- *оценка*: в результате самооценивания собственной деятельности и результата, оценивания действий одноклассников (работа в парах, коллективная работа, диалог, другое) выделение и осознание уровня усвоения способов решения неравенства второй степени с одной переменной;

- *элементы волевой саморегуляции*: независимо от того, какой прием лучше усвоен, тренировка решения неравенства второй степени с одной переменной обоими способами до получения одинакового результата.

## Сценарий урока

### 1. Организационный момент

**Тема: «Решение квадратных неравенств с одной переменной**



**с параметром с помощью вариаций на оси»**

**Учитель.**

Сегодня на уроке мы будем учиться решать квадратные неравенства с одной переменной с параметром.

Рассмотрим способ решения таких неравенств – метод интервалов (с помощью вариации на оси).

### 2. Актуализация знаний.

*Формируем целеполагание - постановку учебной задачи (ставим учебную задачу овладеть способом решения квадратного неравенства с одной переменной с параметром (с помощью вариации на оси) на основе имеющихся знаний о квадратичной функции и способа решения неравенств второй степени с одной переменной методом интервалов)*

**Учитель.**

Вспомним свойства квадратичной функции

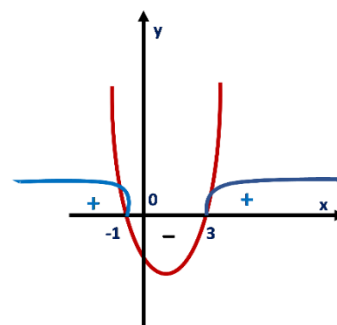
$$1) y = x^2 - 2x - 3$$

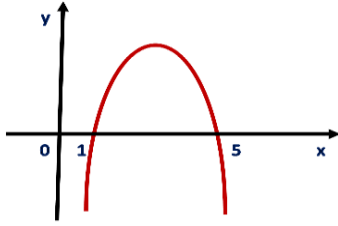
$a > 0$ , ветви параболы направлены вверх

$y = 0$  в точках  $x = -1$  и  $x = 3$ ,

$y > 0$ , если  $x < -1$  или  $x > 3$ ,

$y < 0$ , если  $-1 < x < 3$ .





$$2) y = -x^2 + 6x - 5$$

$a < 0$ , ветви параболы направлены вниз

$y = 0$  в точках  $x = 1$  или  $x = 5$ ,

$y > 0$ , если  $1 < x < 5$

$y < 0$ , если  $x < 1$  или  $x > 5$

Ответьте на вопросы.

1. Какой числовой коэффициент указывает на направление ветвей параболы?
2. Как определить ноль функции? Где на графике эти точки?
3. Как определить на графике промежутки знакопостоянства?

Выполните решение неравенств (см. экран доски и учащихся), ответьте на вопросы.

**Следуя плану, решите неравенства и ответьте на вопросы.**

**План решения неравенств вида:  $f(x) > 0$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x) < 0$ ,  $f(x) \leq 0$ .**

1. Укажите  $D(f)$ , область определения функции
2. Найдите нули функции, решите уравнение  $f(x) = 0$  ],  
отметьте точки на числовой оси.

3. Укажите знаки функции на образовавшихся промежутках.

4. Запишите ответ (по знаку неравенства).

**Вопрос:** Принадлежат ли числа:  $1$  и  $\frac{1}{2}$  множеству решений неравенств?

$$1) (2x - 1)(x + 3) > 0$$

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right),$$

$1$  принадлежит множеству решений,  
 $\frac{1}{2}$  не принадлежит множеству решений.

$$2) (3x + 7)(1 - 2x) \leq 0$$

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right),$$

$1$  и  $\frac{1}{2}$  принадлежат множеству решений.

$$3) x^2 - x - 6 < 0,$$

**Вопрос:** Сколько целых решений имеют данное неравенство?

**Ответ:**  $x \in (-3; 2),$

4 целых решения:  $\{-2; -1; 0; 1\}.$

$$4) x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

**Ответ:**  $x = 3,$

1 целое решение:  $\{3\}.$



$$5) x^2 + x + 1 < 0$$

**Ответы:** 5)  $\emptyset$ , решений нет

$$6) x^2 + 16 \geq 0$$

$$6) x \in \mathbb{R}$$

$$7) -x^2 + 4x - 4 < 0$$

$$7) x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$$



### 3. Решение квадратных неравенств с одной переменной с параметром методом интервалов вариацией на оси.

***Формируем планирование** – какова последовательность действий решения квадратного неравенства с параметром методом интервалов с помощью вариаций на оси?*

**Учитель.**

Внимательно изучите решение квадратного неравенства с одной переменной с параметром методом интервалов с помощью вариаций на оси и ответьте на дополнительный вопрос.

**Дополнительный вопрос.** При каких значениях  $p$

1) число  $x = 2$  является решением неравенства?

2) число  $x = 0$  является решением неравенства?

**Пример.**

При всех допустимых значениях параметра  $p$  решите неравенство:

$$(x - 1)(x - p) > 0.$$

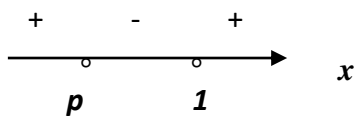
1.  $x_1 = 1, x_2 = p$

2. Имеем три случая взаимного расположения точек  $x_1 = 1$  и  $x_2 = p$  на числовой оси.

Варьируем положение точки  $x_2 = p$  на числовой оси.

I случай

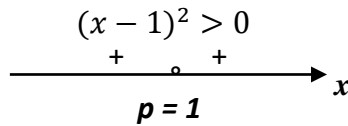
$p < 1$  ( $p$  – слева от 1)



$$x \in (-\infty; p) \cup (1; +\infty)$$

II случай

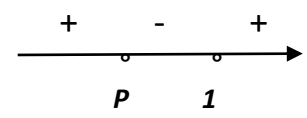
$p = 1$  ( $p$  – совпадает с 1)



$$x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

III случай

$p > 1$  ( $p$  – справа от 1)



$$x \in (-\infty; 1) \cup (p; +\infty)$$

**Ответ:**  $p < 1$ ,  $x \in (-\infty; p) \cup (1; +\infty)$ ;

$p = 1$ ,  $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ ;

$p > 1$ ,  $x \in (-\infty; 1) \cup (p; +\infty)$ .

**Ответ на дополнительный вопрос.**

1) число  $x = 2$  является решением неравенства при  $p < 2$ .

2) число  $x = 0$  является решением неравенства при  $p > 0$ .



#### 4. Закрепление алгоритма решения квадратного неравенства с одной переменной методом интервалов с помощью вариаций на оси.

*Формируем прогнозирование – как соотносить решение неравенства с расположением параметра на оси по отношению к корням квадратного трёхчлена, знаком неравенства, значениями корней квадратного трёхчлена.*

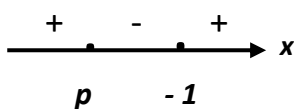
**Решите неравенство:  $x^2 - (p - 1)x - p \geq 0$ ,**

$$x_1 = p, \quad x_2 = -1,$$

$$(x - p)(x + 1) \geq 0,$$

I случай

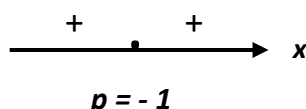
$p < -1$



$$x \in (-\infty; p] \cup [-1; +\infty)$$

II случай

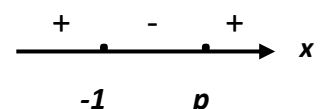
$p = -1$



$$x \in \mathbb{R}$$

III случай

$p > -1$



$$x \in (-\infty; -1] \cup [p; +\infty)$$

**Ответ:**  $p < -1$ ,  $x \in (-\infty; p] \cup [-1; +\infty)$ ;  $p = -1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $p > -1$ ,  $x \in (-\infty; -1] \cup [p; +\infty)$ .



**Дополнительный вопрос.**

При каких значениях параметра  $p$  неравенство выполняется при всех  $x$ ?

**Ответ:** при  $p = -1$ , неравенство выполняется при всех  $x$ .



### 5. Самостоятельная работа на решение квадратных неравенств с параметром методом интервалов с помощью варьирования на оси

*Формируем оценку – правильность рассуждений, выбора способа решения квадратного неравенства с одной переменной с параметром, уровень сложности самостоятельного задания для себя, степень самостоятельности выполнения предложенного задания, принятие решения о помощи.*

#### Самостоятельная работа

##### Вариант 1

Решите неравенства:

1)  $(x - 2p)(x - p) \leq 0$

2)  $(x + 1)\left(x - \frac{1}{p}\right) \geq 0$

##### Вариант 2

Решите неравенства:

1)  $\left(\frac{p}{2} - x\right)(x + 5) \leq 0$

2)  $(x - p)(x + 3p) > 0$

*Формируем контроль – как обосновать и проверить правильность расстановки знаков функции на координатной прямой, оценить полученный результат, соотнести с рассуждениями о варьировании параметра на оси.*

- 1) Выполните в тетради самостоятельно решение квадратных неравенств с одной переменной с параметром изученным методом интервалов с помощью вариаций на оси.
- 2) Выполните взаимопроверку.

*Формируем волевую регуляцию – мобилизуем имеющиеся знания, концентрируем внимание, аргументируем ответ, в случае ошибки, выполняем решение задания повторно, анализируя промахи в рассуждениях.*

Сравните свое решение с эталоном на доске, если есть ошибки, выполните работу над ошибками.

Образец решения и ответ к заданию 1) на самостоятельное решение.

1)  $(x - 2p)(x - p) \leq 0$ ,  
 $x_1 = 2p, x_2 = p$ ,

I случай	II случай	III случай
$2p > p, \Leftrightarrow p > 0,$	$2p = p, \Leftrightarrow p = 0,$	$2p < p, \Leftrightarrow p < 0,$
$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline p \quad 2p \end{array} \quad x$	$\begin{array}{c} + \quad + \\ \hline \bullet \\ \hline p = 0 \end{array} \quad x$	$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline 2p \quad p \end{array} \quad x$
$x \in [p; 2p]$	$x = 0$	$x \in [2p; p]$

Ответ:  $p > 0, x \in [p; 2p]; p = 0, x = 0; p < 0, x \in [2p; p]$ .

$$2) \left(\frac{p}{2} - x\right)(x + 5) \leq 0,$$

$$x_1 = \frac{p}{2}, \quad x_2 = -5,$$

I случай	II случай	III случай
$\frac{p}{2} < -5, \Leftrightarrow p < -10,$	$\frac{p}{2} = -5, \Leftrightarrow p = -10,$	$\frac{p}{2} > -5, \Leftrightarrow p > -10,$
$\begin{array}{c} - \quad + \quad - \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline \frac{p}{2} \quad -5 \end{array} \quad x$	$\begin{array}{c} - \quad - \\ \hline \bullet \\ \hline \frac{p}{2} = -5 \end{array} \quad x$	$\begin{array}{c} - \quad + \quad - \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline -5 \quad \frac{p}{2} \end{array} \quad x$
$x \in \left(-\infty; \frac{p}{2}\right] \cup [-5; +\infty);$	$x \in \mathbb{R};$	$x \in (-\infty; -5] \cup \left[\frac{p}{2}; +\infty\right)$

Ответ:  $p < -10, x \in \left(-\infty; \frac{p}{2}\right] \cup [-5; +\infty);$   
 $p = -10, x \in \mathbb{R};$   
 $p > -10, x \in (-\infty; -5] \cup \left[\frac{p}{2}; +\infty\right).$



## 6. Подведение итогов. Выполните тест на самооценку.

### Домашнее задание.

*Формируем осознание связи исследовательской деятельности и саморегуляции собственных действий*

Сегодня на уроке вы научились решать квадратные неравенства с одной переменной методом интервалов с помощью вариаций на оси.

Выполните домашнее задание:

1. Выучите алгоритм решения квадратного неравенства с одной переменной методом интервалов с помощью вариаций на оси.
2. Решите неравенства изученным способом при всех допустимых значениях параметра  $p$ :  
 1)  $(2x + p)(x - 1) \leq 0$ ; 2)  $x^2 - 2x + p^2 + 1 \geq 0$ ; 3)  $(2p - x)(x + 4) > 0$ .

## Лист самооценивания своей деятельности и результата на уроке учащимся

Ф.И. учащегося \_\_\_\_\_

Класс \_\_\_\_\_

3. Тема  
урока \_\_\_\_\_

4. Интересна ли тема урока? Выберите ответ:

1	Расширяет знания о применении квадратичной функции в решении математических задач	
2	Дает возможность успешно решать задания олимпиадного характера, задания повышенной сложности	
3	Применение приобретенных знаний и умений при изучении других предметов, в жизни	
4	Другое (добавьте свое)	

5. Достаточно ли собственных знаний и умений для освоения нового материала?

<i>Описание математических знаний</i>	<i>Да</i>	<i>Нет (в чем затруднения)</i>
- знание квадратичной функции и её свойств, графика		
- знание метода интервалов для решения неравенств		
- умение решать квадратное уравнение		
- умение работать с координатной прямой		

6. Нужна ли была помощь при освоении нового материала? (Поясните ответ)

1	Помощь учителя	
2	Помощь одноклассников	
3	Образец решения	
4	Другое (добавьте свое)	

7. Уровень усвоения материала урока (поставьте оценку по 5-бальной шкале)

1	Научился решать квадратные неравенства с одной переменной с параметром методом интервалов с помощью вариаций на оси	
2	Научился видеть решения неравенств на координатной прямой при варьировании параметра на оси	
3	Научился по наглядной картинке решения квадратного неравенства с параметром рассуждать и отвечать на дополнительные вопросы	
4	Другое	

## Приложение 5

### Методическое указание учителю к уроку по теме

#### «Решение дробно-рациональных неравенств с параметрами»

Цель данного урока:

- научить решать дробно-рациональные неравенства с параметром методом интервалов варьированием на оси;
- средствами предмета целенаправленно формировать у учащихся РУУД;
- развивать осмысленную самооценку собственных учебных действий и личностных достижений по освоению предмета.

Формируемые РУУД на данном уроке:

- *целеполагание*: постановка учебной задачи – усвоение алгоритма решения стандартного дробно-рационального неравенства методом интервалов; овладение способом варьирования на оси при решении дробно-рационального неравенства с параметром;
- *планирование*: выявление особенностей и оценивание структуры дробно-рационального неравенства, нахождение области определения функции, определение нулей функции, варьирование на оси параметра относительно нулей функции;
- *прогнозирование*: учет наличия параметра в структуре дробно-рационального неравенства, варьирование на оси параметра относительно нулей функции и анализ решений дробно-рационального неравенства с параметром на каждом из получившихся промежутков на оси, учет области определения функции при нахождении решения дробно-рационального неравенства с параметром, запись решения дробно-рационального неравенства с параметром;
- *контроль*: выбор способа контроля собственных действий (проверка соответствия решений дробно-рационального неравенства с параметром с областью определения функции, подстановка значений переменной из полученных решений дробно-рационального неравенства с параметром во внешний вид неравенства с целью проверки: верное (неверное) числовое неравенство получается, оценивание полноты решения (все ли промежутки оси рассмотрены), сверка с эталонным решением примера на экране, собственные рассуждения и умозаключения на основе имеющихся знаний по теме, другое);
- *коррекция*: в случае расхождения с правильным результатом - поиск ошибки (логическая, арифметическая, незаконченность выполнения действий, другое), внесение дополнений и изменений в собственное решение и правка записи решения и ответа;

- *оценка*: в результате самооценивания собственной деятельности и результата, оценивания действий одноклассников (работа в парах, коллективная работа, диалог, другое) выделение и осознание уровня усвоения способов решения неравенства второй степени с одной переменной;
- *элементы волевой саморегуляции*: независимо от того, какой прием лучше усвоен, тренировка решения неравенства второй степени с одной переменной обоими способами до получения одинакового результата.

## Сценарий урока

### «Решение дробно-рациональных неравенств с параметрами» (Алгебра 9)

#### 1. Организационный момент



**Учитель.**

Сегодня на уроке мы:

- узнаем алгоритм решения стандартных дробно-рациональных неравенств,
- научимся решать дробно-рациональные неравенства с параметром методом интервалов варьирования на оси.

Выполняем тестовое задание.

#### 2. Актуализация знаний

**Формируем целеполагание – постановку учебной задачи** (ставим учебную задачу усвоить алгоритм решения стандартного дробно-рационального неравенства методом интервалов; овладеть способом варьирования параметра на оси при решении дробно-рационального неравенства с параметром).



Тест  
Многочлены

Запустить тест

Конструктор теста

Вопрос 1. Укажите область определения функции  $f(x) = \frac{(x+2)^2(x-3)^3}{(4-x^2)(4-x)^4}$ .

Ответы:

- $x \neq 4$
- $x \neq \pm 2$
- $x \neq \pm 2; x \neq 4$

Ответ:  $x \neq \pm 2; x \neq 4$ .

Вопрос 2. Назовите нули функции  $f(x) = \frac{(x+2)^2(x-3)^3}{(4-x^2)(4-x)^4}$ .

Ответы:

- $x = 3$
- $x = -2, x = 3$
- $x = \pm 2; x = 4$

Ответ:  $x = 3$ .

Вопрос 3. Укажите решение неравенства  $\frac{(x+2)^2(x-3)^3}{(4-x^2)(4-x)^4} \leq 0$

Ответы:

- $(-2; 2) \cup [3; 4)$
- $[3; 4) \cup (4; +\infty)$
- $(-2; 2) \cup [3; 4) \cup (4; +\infty)$

Ответ:  $(-2; 2) \cup [3; 4) \cup (4; +\infty)$ .

**Алгоритм решения стандартного дробно-рационального неравенства  
методом интервалов**

$$f(x) \leq 0, f(x) < 0, f(x) \geq 0, f(x) > 0,$$

где  $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ;  $P_m(x)$ ,  $Q_n(x)$  - многочлены.

1. Область определения функции  $f(x)$ , т. е.
2. Нули функции  $f(x)$ , т. е.  $P_m(x) = 0$
3. Отметить точки из п.п.1.2 на числовой оси, получить промежутки
4. Отметить знаки функции в промежутках
5. Выбрать промежутки, соответствующие знаку неравенства, и записать ответ

**Пример 1. Решите неравенство:**  $\frac{(x+2)^2(x-3)^3}{(4-x^2)(4-x)^4} \leq 0$ .

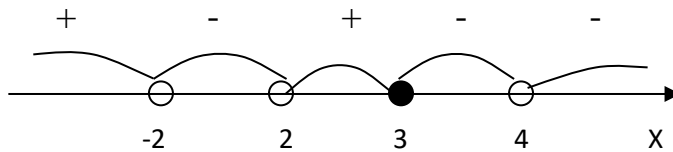
**Решение:** 
$$\frac{(x+2)^2(x-3)^3}{(2-x)(2+x)(4-x)^4} \leq 0$$

Неравенство стандартного вида, поэтому применяем алгоритм.

Область определения:  $x \neq 2; -2; 4$ .

Нули:  $x = 3$  ( $-2$  не является нулем, т. к. не входит в область определения функции).

Отметим на числовой оси полученные точки и определим знаки в получившихся промежутках.



*Ответ:*  $(-2; 2) \cup [3; 4) \cup (4; +\infty)$ .

**Решите по образцу неравенство:**

$$\frac{(x+5)^5(x-2)^3}{(x^3-8)(x^2+7x)} \geq 0.$$

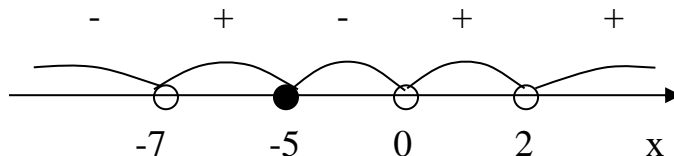
**Решение.**

Неравенство стандартного вида, поэтому применяем алгоритм.

$$\frac{(x+5)^5(x-2)^3}{(x-2)(x^2+2x+4)x(x+7)} \geq 0$$

$D(f): x \neq 2; -7; 0$ .

Нули:  $x = -5$ .



Отметим полученные точки на числовой оси и определим знаки в получившихся промежутках.

*Ответ:*  $(-7; -5] \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$ .

**Пример 2.**

**Решите неравенство:**  $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x^2-x} - \frac{10}{x^2-1} < 0$ .

**Решение.**

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x^2-x} - \frac{10}{x^2-1} < 0,$$

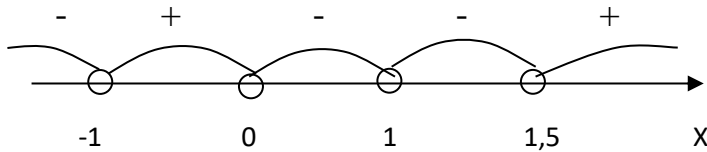
Выполним сложение дробей, приведем неравенство к стандартному виду и применим алгоритм.

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x(x-1)} - \frac{10}{(x-1)(x+1)} < 0, \quad \frac{2x(x+1) + 3(x+1) - 10x}{x(x-1)(x+1)} < 0,$$

$$\frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - 10x}{x(x-1)(x+1)} < 0, \quad \frac{2x^2 - 5x + 3}{x(x-1)(x+1)} < 0, \quad \frac{(x-1)(2x-3)}{x(x-1)(x+1)} < 0.$$

$$D(f): x \neq 0; 1; -1.$$

$$\text{Нули: } x = 1, 5.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 1, 5).$$

**Решите по образцу неравенство:**  $\frac{1-5x}{x^2-x-6} + \frac{7x+2}{x^2-2x-8} > \frac{x+1}{x^2-7x+12}$ .

**Проверяем.**

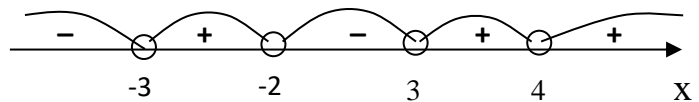
**Решение.**

$$\frac{1-5x}{x^2-x-6} + \frac{7x+2}{x^2-2x-8} - \frac{x+1}{x^2-7x+12} > 0, \quad \frac{x^2-x-12}{(x-3)(x+2)(x-4)} > 0,$$

$$\frac{(x+3)(x-4)}{(x-3)(x+2)(x-4)} > 0;$$

$$D(f): x \neq 3; -2; 4.$$

$$\text{Нули: } x = -3.$$



$$\text{Ответ: } (-3; -2) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty).$$



## Экран учителя

**Формируем планирование** – какова последовательность рассуждений при распознавании дробно-рационального неравенства и осуществления алгоритма его решения?

### Вопросы на проверку усвоения алгоритма.

- Какой вид неравенства является стандартным?
- С каким числом сравнивается функция  $f(x)$  в стандартном неравенстве?
- Как нужно поступать, если неравенство не имеет стандартный вид?
- Что такое нули функции  $f(x)$ ? как их найти?
- Что такое область определения функции  $f(x)$ ? как ее найти?
- Когда найденные числа отмечаются на числовой оси закрашенными (незакрашенными) точками? от чего это зависит?
- Как определить знаки в промежутках?
- Всегда ли знаки на числовой оси чередуются? В каких случаях нет чередования знаков?
- Что является решением неравенства?
- Как проверить, что некоторое число является решением неравенства? не является решением неравенства?
- Какие числовые множества могут быть решением дробно-рационального неравенства?
- Может ли пустое множество быть решением неравенства? Что при этом говорят о решении неравенства?
- Как проверить решение неравенства?

### **3.Объяснение нового материала.**

**Формируем прогнозирование:** учет наличия параметра в структуре дробно-рационального неравенства, варьирование на оси параметра относительно нулей функции и анализ решений дробно-рационального неравенства с параметром на каждом из получившихся промежутков на оси, учет области определения функции при нахождении решения дробно-рационального неравенства с параметром, запись решения дробно-рационального неравенства с параметром.

Решить неравенство при каждом допустимом значении параметра  $a$  методом варьирования на оси.

$$\frac{x+5}{x-a} \geq 0.$$

Решение.

Неравенство стандартное, применяем алгоритм метода интервалов.

$$D(f) : x \neq a$$

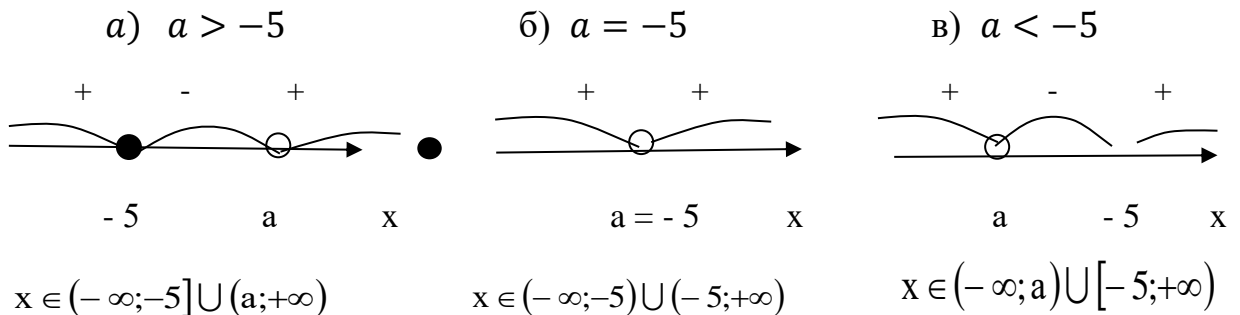
$$\text{Нули} : x = -5$$

Число  $-5$  фиксировано на оси  $Ox$ , а для положения числа  $a$  выполним варьирование, при этом возникнут три случая, которые исчерпывают все возможности:

$$a) \ a > -5; \ б) \ a = -5; \ в) \ a < -5.$$

Далее применяем алгоритм метода интервалов для каждого из случаев

а); б); в).



Ответ :

при  $a < -5, x \in (-\infty; a) \cup [-5; +\infty);$

при  $a = -5, x \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty);$

при  $a > -5, x \in (-\infty; -5] \cup (a; +\infty).$



#### 4. Проверка восприятия нового материала

**Формируем контроль** – как проверить и обосновать правильность выполненных действий?

##### Экран доски и учащихся (без решения)

При всех допустимых значениях параметра  $a$  найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x-a}{x+2}}$$



Решение. Искомую область определения задает система неравенств:

$$\begin{cases} \frac{x-a}{x+2} \geq 0, \\ x+2 \neq 0; \end{cases}$$

Решим первое неравенство, применяя метод интервалов с варьированием на оси.

$$D(f): x \neq -2.$$

$$\text{Нули: } x = a.$$

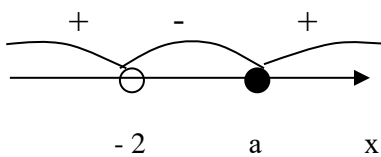
Для расположения полученных точек на оси будем иметь три случая:

$$a) -2 < a; \quad б) -2 = a; \quad в) -2 > a.$$

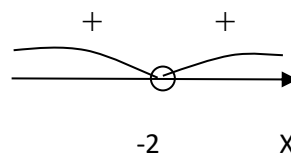
$$a) -2 < a$$

$$б) -2 = a$$

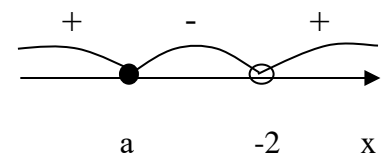
$$в) -2 > a$$



$$x \in (-\infty; -2) \cup [a; +\infty)$$



$$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$$



$$x \in (-\infty; a] \cup (-2; +\infty)$$

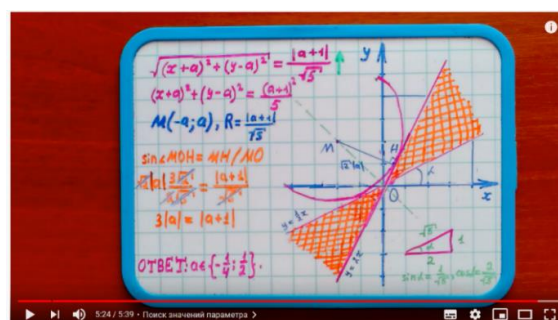
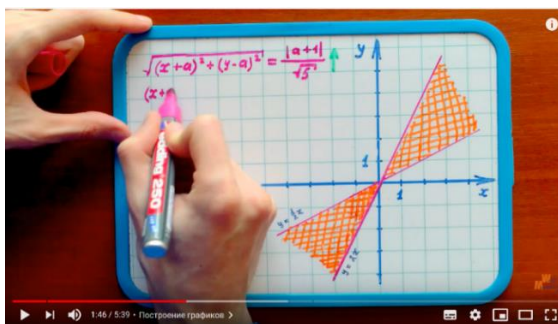
Ответ:

$$\text{при } a < -2, \quad x \in (-\infty; a] \cup (-2; +\infty);$$

$$\text{при } a = -2, \quad x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty);$$

$$\text{при } a > -2, \quad x \in (-\infty; -2) \cup [a; +\infty).$$

## 5. Видеоурок «Решение дробно-рациональных неравенств с параметром графическим методом»



Восстановите в тетради решение системы.

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых данная система имеет ровно два решения.

$$\begin{cases} (y - 2x)(2y - x) \leq 0, \\ \sqrt{(x + a)^2 + (y - a)^2} = \frac{|a + 1|}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

### 6. Решение на повторение

*Формируем оценку – правильность рассуждений, выбора способа решения неравенства с параметром, уровень сложности выбранного способа для себя, степень самостоятельности выполнения предложенного задания, принятие решения о помощи.*

**Выберите способ решения квадратных неравенств с параметром, решите самостоятельно неравенства с параметром, выполните взаимопроверку.**

$$1) (x - 3)(x + a) < 0; \quad 2) 2x^2 + (a - 6)x - 3a < 0.$$

Решение.

$$1) (x - 3)(x + a) < 0.$$

Неравенство стандартное. Применяем алгоритм.

$$D(f) = R, \text{ нули: } x_1 = 3; x_2 = -a.$$

Далее, следуя алгоритму, мы должны отметить эти найденные корни на числовой оси  $Ox$ .

Первый корень  $x_1 = 3$  занимает фиксированное положение на оси  $Ox$ , второй корень  $x_2 = -a$  меняет свое положение на оси  $Ox$  и может располагаться:

- а) справа от фиксированного корня 3, т. е. выполняется  $3 < -a$  ;
- б) совпадать с числом 3, т.е. выполняется  $-a = 3$ ;
- в) быть слева от числа 3, т. е. выполняется  $-a < 3$ .

Мы рассматриваем все возможные варианты расположения числа  $-a$  на оси, выполняем *варьирование* положения числа  $-a$  на оси.

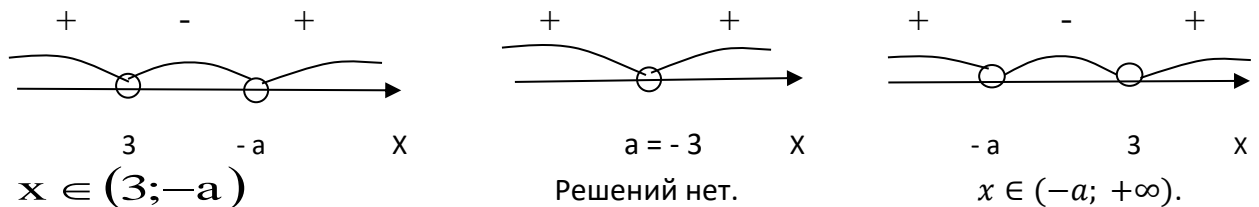
Итак, мы должны рассмотреть три возможных случая:

$$а) 3 < -a; \quad б) 3 = -a; \quad в) 3 > -a.$$

Других вариантов нет.

Теперь можно применить алгоритм метода интервалов для каждого из случаев а); б); в).

$$а) 3 < -a, \text{ т.е. } a < -3 \quad б) 3 = -a, \text{ т.е. } a = -3 \quad в) 3 > -a, \text{ т.е. } a > -3$$



Ответ:

$$\text{при } a < -3, x \in (3; -a);$$

при  $a = -3$ , решений нет;

$$\text{при } a > -3, x \in (-a; 3).$$

$$2) 2x^2 + (a-6)x - 3a < 0$$

Решение.

Неравенство стандартное, применяем алгоритм метода интервалов.

$$D(f) = R,$$

$$\text{Нули: } D = (a-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3a) = a^2 + 12a + 36 = (a+6)^2,$$

$$x_1 = \frac{-(a-6)+a+6}{4} = 3,$$

$$x_2 = \frac{-(a-6)-a-6}{4} = \frac{-2a}{4} = -\frac{a}{2}.$$

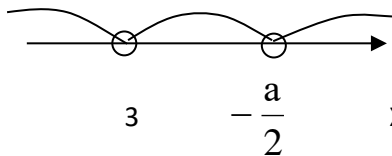
Отмечая нули на числовой оси, выполним варьирование и получим три случая их взаимного расположения:

$$a) \quad 3 < -\frac{a}{2}; \quad б) \quad 3 = -\frac{a}{2}; \quad в) \quad 3 > -\frac{a}{2}.$$

Далее работаем по алгоритму в каждом из трех случаев а); б); в).

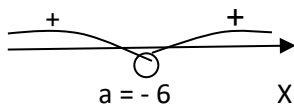
$$a) \quad 3 < -\frac{a}{2}$$

$$3 < -\frac{a}{2}, \text{ т.е. } a < -6$$



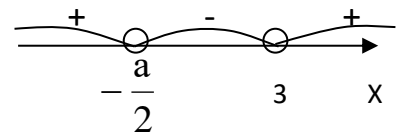
$$x \in \left(3; -\frac{a}{2}\right);$$

$$б) \quad 3 = -\frac{a}{2}, \text{ т.е. } a = -6$$



*Решений нет.*

$$в) \quad 3 > -\frac{a}{2}, \text{ т.е. } a > -6$$



$$x \in \left(-\frac{a}{2}; 3\right)$$

Ответ :

$$\text{при } a < -6, x \in \left(3; -\frac{a}{2}\right);$$

при  $a = -6$ , решений нет;

$$\text{при } a > -6, x \in \left(-\frac{a}{2}; 3\right).$$

**8. Подведение итогов. Заполните лист самооценивания.  
Выполните домашнее задание.**

**Решите неравенство с параметром двумя способами:**

$$x^2 - 5x - 5a - a^2 < 0.$$

Лист самооценивания своей деятельности и результата на уроке учащимся

Ф.И. учащегося \_\_\_\_\_

Класс \_\_\_\_\_

1. Тема урока \_\_\_\_\_

2. Интересна ли тема урока? Выберите ответ:

1	Расширяет возможности решения математических задач методом интервалов, варьированием на оси	
2	Дает возможность выбора способа решения неравенства	
3	Применение приобретенных знаний и умений при изучении других предметов, в жизни	
4	Другое (добавьте свое)	

3. Достаточно ли собственных знаний и умений для освоения нового материала?

<i>Описание математических знаний</i>	<i>Да</i>	<i>Нет (в чем затруднения)</i>
- знание дробно-рационального выражения и его области определения		
- умение выполнять преобразования дробно-рационального выражения		
- знание координатной оси		
- умение решать неравенство методом интервалов		

4. Нужна ли была помощь при освоении нового материала? (Поясните ответ)

1	Помощь учителя	
2	Помощь одноклассников	
3	Образец решения	
4	Другое (добавьте свое)	

5. Уровень усвоения материала урока (поставьте оценку по 5-бальной шкале)

1	Усвоил алгоритм решения неравенств методом интервалов	
2	Освоил метод интервалов, варьирование на оси в решении дробно-рациональных неравенств	
3	Узнал графический способ решения дробно-рациональных неравенств	
4	Научился решать задания ОГЭ (№23)	

## **Приложение 6.**

### **Программа:**

**«Методические подходы к конструированию сценария МЭШ с целью формирования РУУД учащихся»**

**(48ч + индивидуальные консультации)**

### **Пояснительная записка.**

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС к результатам общего образования, идей Концепции формирования РУУД учащихся, с учетом возможностей платформы МЭШ.

Сознательное овладение педагогами методикой формирования РУУД учащихся в процессе обучения в школе, применение этих знаний при конструировании сценариев МЭШ, позволит создавать качественный интеллектуальный продукт для совершенствования образовательного процесса в школе.

Практическая значимость данного курса обусловлена тем, что его объектом является процесс обучения в современной школе. Формирование у педагогов правильных представлений о сущности формирования РУУД учащихся при обучении, роли сформированности РУУД школьников для самореализации, умения создавать сценарии МЭШ согласно методике формирования РУУД, необходимы для реализации требований современного стандарта образования к результатам общего образования.

Программа предназначена для учителей общеобразовательных школ и актуальна для них.

### **Цель программы:**

повышение качества создания сценариев МЭШ.

### **Основные задачи:**

- реализация требований ФГОС к результатам общего образования;
- внедрение методики формирования РУУД учащихся;



- формирование и развитие умения учителей создавать конкурентоспособный интеллектуальный продукт - сценарий МЭШ.

### **Форма проведения занятий:**

- конференции (45 мин.(теория) + 45 мин.(практика)) в Zoom, 1 раз в неделю (четверг 14.30 – 16.00ч);
- консультации индивидуальные (по договоренности)

### **Принципы проведения занятий:**

- наглядность, использование реальных сценариев МЭШ;
- систематичность и методическая последовательность обучения;
- сознательность и активность обучения;
- сочетание различных форм обучения;
- доступность обучения.

### **Общая характеристика курса.**

В содержании курса можно выделить следующие основные содержательные линии: Требования ФГОС к результатам общего образования, Концепция формирования РУУД учащихся, методическая Модель формирования РУУД учащихся, конструирование современного урока, конструирование сценария МЭШ.

Содержание линии «Требования ФГОС к результатам общего образования» способствует осмыслению ролей: педагог – ученик; их взаимодействия в процессе обучения.

Содержание линии «Концепция формирования РУУД учащихся» направлено на осознание понимания необходимости построения процесса обучения на уроке в единстве функций обучения и воспитания, познавательного и личностного развития учащихся, на основе формирования общих учебных умений, обобщенных способов действия.

Содержание линии «Методическая Модель формирования РУУД учащихся» способствует овладению педагогами методикой формирования РУУД школьников при обучении, организации учебной исследовательской деятельности, развития у учащихся способности регуляции собственной учебной деятельности.

Содержание линии «Конструирование современного урока» служит базой для создания сценариев уроков, соответствующих современным требованиям ФГОС к результатам общего образования.

Содержание линии «Конструирование сценариев уроков МЭШ» способствует созданию качественного, конкурентоспособного интеллектуального продукта.

### **Требования к результатам обучения и освоению содержания курса.**

Программа обеспечивает достижение следующих результатов:

- сформированность осмысленного отношения к требованиям ФГОС к результатам общего образования и понимания изменения в организации взаимодействия на уроке учитель-ученик;
- осознание необходимости и развитие умения организации учебного процесса в единстве функций обучения и воспитания учащихся, формирования УУД школьников при обучении;
- овладение методикой целенаправленного формирования РУУД учащихся в процессе обучения;
- создание сценариев МЭШ, соответствующих требованиям ФГОС к современному уроку.

### **Ожидаемые результаты.**

1. Внедрение методики формирования РУУД школьников при обучении.
2. Приобретение учителями навыков создания сценариев МЭШ.

### Содержание и тематическое планирование

№ п/п	Содержание Материала	Кол-во часов	Характеристика деятельности учителя
	<i>Требования ФГОС к результатам образования</i>	<b>8</b>	
1	Требования ФГОС. Предметные, метапредметные, личностные результаты в образовании	<b>2</b>	ранжировать УУД: предметные, метапредметные, личностные; различать составляющие предметных результатов: систему предметных знаний и систему предметных действий учащихся; различать метапредметные УУД: познавательные, регулятивные, коммуникативные; соотносить общие учебные умения и специфические (соответствующие данному предмету); прогнозировать предметные, метапредметные и личностные результаты в соответствии с целью обучения и воспитания
2	Сущность системно-деятельностного подхода в обучении	<b>2</b>	рассматривать процесс обучения и структуру учебной деятельности учащихся с позиции учета общих возрастных психологических особенностей развития подростков; создавать ситуацию совместной продуктивной творческой деятельности
3	Система УУД в реализации системно-деятельностного подхода	<b>2</b>	решать задачу формирования у учащихся умения осуществлять деятельность
4	Анализ реального сценария МЭШ. Планирование работы над сценарием МЭШ	<b>2</b>	выделять в сценариях МЭШ задания и способы их выполнения, способствующие развитию УУД
	<i>Концепция формирования РУУД</i>	<b>8</b>	
5	РУУД в системе УУД. Идея концепции формирования РУУД учащихся	<b>2</b>	рассматривать систему РУУД как базу учебной деятельности школьников при обучении

6	Сравнительный анализ возможности целенаправленного формирования РУУД учащихся при различных подходах в обучении в общеобразовательной школе (на примере обучения математике)	2	учитывать плюсы и минусы возможности формирования РУУД школьников различных подходов в обучении
7	Операционный состав РУУД учащихся	2	осуществлять формирование РУУД с учетом степени сложности в зависимости от возраста ученического коллектива
8	Анализ реального сценария МЭШ на предмет развития РУУД учащихся. Планирование формирования РУУД при создании сценария МЭШ	2	планировать формирование РУУД на реальных учебных заданиях, размещенных в действующих школьных учебниках
	<b>Методическая модель формирования РУУД учащихся</b>	<b>8</b>	
9	Методическая модель формирования РУУД учащихся. Методика формирования РУУД школьников	2	внедрять методику формирования РУУД школьников в повседневную деятельность
10	Учебное исследование как структурная единица методики формирования РУУД школьников	2	организовывать учебную исследовательскую деятельность учащихся на уроках в системе
11	Особенности формирования регулятивных универсальных учебных действий школьников	2	учитывать индивидуальные особенности учащихся при формировании РУУД учащихся
12	Учебное исследование - основа сценария МЭШ. Примеры учебного исследования, реализованных сценариев МЭШ	2	продумывать учебное исследование в структуре сценария МЭШ
	<b>Структура современного урока по ФГОС</b>	<b>8</b>	

13	Типы и основные этапы современного урока. Результаты урока	2	проектировать урок в соответствии с методологией ФГОС, включать следующие элементы, актуализирующие РУУД: - создание проблемной ситуации, формулировка учебной проблемы; - актуализация необходимых опорных знаний; - составление плана решения проблемы; выдвижение гипотез; - поиск путей решения проблемы, открытие нового знания; - формулировка решения проблемы; - применение новых знаний на практике; - подведение итогов
14	Составляющие сценария МЭШ современного урока	2	использовать возможности МЭШ для обогащения сценария интерактивными атомиками
15	Подбор заданий по предмету для организации учебного исследования на уроке	2	адаптировать задания учебника (дополнительных источников информации) к формату учебного исследования
16	Создание Приложений, тестовых заданий, тестов в МЭШ	2	создавать Приложения в learningapps, тесты и тестовые задания в МЭШ
	<b><i>Создание сценария МЭШ</i></b>	<b>8</b>	
17	Требования модераторов к сценариям МЭШ. Критерии и оценивание сценария МЭШ	2	знать и учитывать при создании сценариев МЭШ требования к сценариям и критерии оценивания
18	Оценивание шансов востребованности сценария. Самооценивание собственных сценариев в соответствии с требованиями модераторов	2	осуществлять самооценку собственного интеллектуального продукта
19	Этапы работы над сценарием МЭШ	2	осуществлять все этапы работы над сценарием
20	Создание сценария МЭШ	2	разрабатывать сценарий и размещать его на платформе МЭШ
	<b><i>Обобщающие занятия</i></b>	<b>8</b>	
21	Зачет в формате теста	2	демонстрировать знания, соответствующие квалификации

22	Круглый стол. Презентации выполненных сценариев МЭШ	2	презентовать готовый продукт, принимать участие в диалоге
23	Круглый стол. Обсуждение представленных работ. Обмен опытом работы над сценарием	2	владеть навыками обмена опытом работы
24	Круглый стол. Подведение итогов	2	рефлексировать
<b><i>Всего</i></b>		<b>48ч</b>	