

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ –
УЧЕБНО-НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ КОМПЛЕКС»

На правах рукописи

УДК 624.04

АКТУГАНОВ АЛЕКСАНДР АНВАРОВИЧ

**РАЗВИТИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИНТЕРПОЛЯЦИИ
ПО КОЭФФИЦИЕНТУ ФОРМЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА ПЛАСТИНОК
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор **В.И. Коробко**

Орел – 2015

СОДЕРЖАНИЕ:

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ОБЗОР РАБОТ, ПОСВЯЩЕННЫХ РАЗВИТИЮ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ПЛАСТИНОК.....	11
1.1. Некоторые общие сведения.....	11
1.2. Прямые методы.....	12
1.3. Вариационные методы.....	13
1.4. Численные методы.....	16
1.5. Геометрические методы.....	20
1.6. Основные выводы по главе 1.....	25
2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МИКФ.....	27
2.1 Коэффициент формы как интегральная характеристика выпуклой области. Общие сведения и основные свойства коэффициента формы.....	27
2.1.1 Параллелограммы.....	28
2.1.2 Треугольники.....	30
2.1.3 Трапеции	32
2.2 Представление основных зависимостей технической теории пластинок в изопериметрическом виде.....	34
2.3 Теоретические основы метода интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ).....	36
2.3.1 Сущность МИКФ.....	38
2.4 Основные выводы по главе 2.....	47
3 ПРИМЕНЕНИЕ МИКФ К РАСЧЕТУ ПЛАСТИНОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ.....	49
3.1 Вывод основных соотношений.....	49
3.2 Определение максимального прогиба пластинок на упругом винклеровском основании, являющихся «опорными» решениями МИКФ.....	54
3.2.1 Прямоугольные пластинки.....	54

3.2.2 Ромбические пластинки.....	62
3.2.3 Пластинки в форме равнобедренных треугольников.....	68
3.3 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму параллелограмма.....	75
3.4 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму произвольного треугольника.....	89
3.5 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму равнобедренной трапеции.....	101
4 ПРИМЕНЕНИЕ МИКФ К РАСЧЕТУ ПЛАСТИНОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ П.Л. ПАСТЕРНАКА.....	113
4.1 Вывод основных соотношений	113
4.2 Определение максимального прогиба пластинок на упругом двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, являющихся «опорными» решениями МИКФ.....	117
4.2.1 Прямоугольные пластинки	117
4.2.2 Ромбические пластинки.....	122
4.2.3 Треугольные пластинки.....	125
4.3 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму параллелограмма.....	130
4.4 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму произвольного треугольника.....	144
4.5 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму равнобедренной трапеции.....	157
ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ПО ДИССЕРТАЦИИ	170
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	172
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	188

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Пластинки являются одними из наиболее распространенных конструктивных элементов в строительстве, машиностроении, судостроении и авиации. Основным их преимуществом является возможность сочетания легкости и рациональности форм с высокой несущей способностью, высокой технологичностью и экономичностью.

Исследование работы пластинок, лежащих на упругом основании, имеет важное практическое значение, так как за последние 50 лет подобные конструкции стали широко использоваться в различных отраслях промышленности, а особенно в строительстве [17, 22, 32, 33, 48, 56, 96, 116, 122, 138]. В связи с этим совершенствование методов их расчета является на сегодняшний день актуальной проблемой.

Основными задачами, решаемыми при расчете пластинок на упругом основании, являются:

- выбор расчетной модели основания, наиболее точно характеризующей работу грунта под нагрузкой;
- рациональный подбор поверхности прогибов, отвечающей реальному процессу деформирования;
- определение экстремального значения интегральных физических характеристик (ИФХ) пластинки (максимальный прогиб, основная частота колебаний);
- запись на основании полученных результатов уравнений для определения внутренних силовых факторов (изгибающих моментов и перерезывающих сил).

Наиболее сложной проблемой остается определение максимального прогиба пластинок, так как именно от него зависят значения напряжений в пластинке и её жесткость.

В настоящее время существуют точные аналитические решения лишь для ряда частных случаев (прямоугольных, круглых пластинок с

однородными граничными условиями). Расчет пластинок сложного вида с различными комбинациями граничных условий является весьма трудной задачей, которая решается в основном с помощью метода конечных элементов (МКЭ) [5, 7, 21]. Тем не менее, в строительной механике по-прежнему остается актуальной проблема развития аналитических методов расчета данного типа конструкций, позволяющих с помощью достаточно простых функциональных зависимостей проводить анализ напряженно-деформированного состояния пластинок на упругом основании. К подобным методам относится и метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ), предложенный А.В. Коробко [35, 36]. Основой данного метода является аналогия между интегральными физико-механическими характеристиками пластинки (максимальный прогиб, основная частота колебаний, критическая сила) и интегральной характеристикой формы области пластинки (коэффициент формы). К преимуществам МИКФ относятся:

- сведение решения сложных физических задач, описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа, к решению более простых геометрических задач;
- двусторонняя оценка результатов решения этих задач;
- аналитическая форма результатов расчета;
- представление решений в виде наглядных графических зависимостей интегральных физических характеристик пластинок от коэффициента формы $F - K_f$ (F – искомая ФМХ, K_f – коэффициент формы).

Используя МИКФ, были решены задачи поперечного изгиба и свободных колебаний изотропных пластинок сложного очертания для различных комбинаций граничных условий. В ходе сопоставления полученных решений краевых задач с известными точными и приближенными решениями, было выявлено, что точность МИКФ является удовлетворительной для инженерных расчетов. Тем не менее, расчет пластинок на упругом основании при поперечном изгибе с использованием МИКФ до настоящего времени не производился. В связи с этим выбранная

для диссертационного исследования тема «Развитие и применение МИКФ к решению задач поперечного изгиба пластинок на упругом основании» представляется актуальной.

Объект исследования. Конструкции в виде пластинок являются одними из ключевых составляющих зданий и сооружений. В современном строительстве они все чаще используются в качестве фундаментов. Зачастую в процессе проектирования конструктивных элементов данного типа приходится сталкиваться с проблемами выбора формы фундамента, зависящей от архитектурного решения здания, граничных условий, зависящих от конструктивных решений, а также расчетной модели основания, зависящей от физических свойств грунта. Эти факторы оказывают существенное влияние на процесс деформирования пластинок. Поэтому в качестве объекта исследования в работе приняты тонкие ($h/a \leq 1/5$, где h – толщина пластинки, a – наименьший размер пластинки в плане) упругие изотропные пластинки с малыми (не более $h/5$) прогибами (треугольные, прямоугольные, ромбические, параллелограммные, трапециевидные и др.) с комбинированными граничными условиями, лежащие на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, нагруженные равномерно распределенной по всей площади нагрузкой.

Методы исследования. При проведении теоретических исследований поперечного изгиба пластинок на упругом основании использовался общенаучный метод аналогии, применялся метод конечных элементов и геометрические методы строительной механики (изопериметрический метод, МИКФ). Геометрическое моделирование форм областей пластинок осуществлялось с помощью метода аффинного подобия.

Достоверность научных результатов подтверждается использованием классических методов теории пластинок, корректной постановкой задачи в рамках технической теории пластинок, решением большого числа тестовых примеров и сопоставлением полученных результатов с решениями,

полученными с помощью МКЭ.

Научная новизна определяется следующими результатами:

1) используя интегро-дифференциальные соотношения строительной механики пластинок, записанные в изопериметрическом виде, была доказана аналитическая связь максимального прогиба пластинки w_0 , лежащей на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, с коэффициентом формы пластинки, имеющей выпуклый опорный контур;

2) построены кривые $B_w^q - K_f$, $C_w^q - K_f$ и $E_w^q - K_f$, ограничивающие все множество значений максимального прогиба четырех- и треугольных пластинок произвольного вида с комбинированными граничными условиями, лежащими на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, которые являются решениями соответствующих задач для пластинок в виде прямоугольников, ромбов и равнобедренных треугольников;

3) разработаны математический аппарат и методика применения МИКФ для определения максимального прогиба пластинок с комбинированными граничными условиями, лежащих на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, позволяющие без решения сложных дифференциальных уравнений эллиптического типа четвертого порядка определять их максимальный прогиб;

4) получены новые решения целого ряда задач для пластинок в виде параллелограмма, произвольного треугольника и трапеции, которые протестированы с помощью МКЭ.

Практическая ценность работы заключается в возможности определения жесткости четырех- и треугольных пластинок с комбинированными граничными условиями, лежащих на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, под действием равномерно распределенной нагрузки, без

решения соответствующих дифференциальных уравнений. Использование МИКФ позволяет представить искомые результаты в наглядном виде и оценить их место среди всего множества возможных решений для четырех- и треугольных пластинок.

Результаты работы использованы при проведении исследований по НИР, выполняемых в рамках:

– государственного задания Министерства образования и науки РФ на оказание услуг (выполнения работ) по теме «Разработка и развитие инженерных методов решения задач технической теории пластинок на основе принципов симметрии и геометрического моделирования их формы» (2012 – 2014 гг.), регистрационный номер 7.587.2011.

Результаты исследований внедрены в учебный процесс ФГБОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК» в рамках дисциплин: «Строительная механика», «Основы теории упругости и пластичности».

На защиту выносятся следующие положения и результаты:

1) Аналитические зависимости, связывающие максимальный прогиб четырехугольных пластинок, лежащих на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, нагруженных равномерно распределенной по всей площади нагрузкой, с коэффициентом формы пластинок.

2) Аналитические и графические зависимости $B_w^q - K_f$, $C_w^q - K_f$ и $E_w^q - K_f$, ограничивающие все множество значений максимального прогиба пластинок в форме равнобедренных треугольников, прямоугольников и ромбов с комбинированными граничными условиями, лежащих на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака.

3) Данные сравнительного анализа результатов расчета пластинок на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, полученных с использованием МИКФ и МКЭ.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научно-технических конференциях профессорско-преподавательского состава ФГБОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК» (Орел, 2012...2014); на 3-ей Всероссийской конференции «Проблемы оптимального проектирования сооружений» (Новосибирск, 2014); Международных академических чтениях РААСН «Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения» (Курск, 2011, 2014).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 9 научных работ, в том числе 5 статей в журналах, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки России, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора технических наук.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 188 страницах, включая 171 страницу основного текста, и состоит из введения, 4 глав, основных результатов и выводов, списка литературы, включающего 143 наименования. В диссертации 49 рисунков и 15 таблиц.

Во введении обосновывается актуальность диссертационного исследования, обозначается объект изучения и методы его исследования, приводятся основные характеристики работы, а также положения, выносимые автором на защиту.

В первой главе производится обзор методов решения задач технической теории пластинок, на его основании делается вывод о необходимости развития МИКФ к решению задачи поперечного изгиба пластинок на упругом основании, формулируются задачи и цели исследования.

Во второй главе представляются сведения о коэффициенте формы, рассматривается сущность метода интерполяции по коэффициенту формы в задачах поперечного изгиба упругих изотропных пластинок. Устанавливается связь между значениями максимальных прогибов упругих

изотропных пластинок и их коэффициентом формы.

В третьей главе доказывается связь максимального прогиба и коэффициента формы упругих изотропных пластинок на упругом винклеровском основании, нагруженных равномерно распределенной по всей площади нагрузкой. Строятся аналитические и графические зависимости $B_w^q(K_f)$, $C_w^q(K_f)$, ограничивающие все множество значений максимального прогиба пластинок в форме равнобедренных треугольников, прямоугольников и ромбов с комбинированными граничными условиями на упругом винклеровском основании. Приводятся примеры использования функций $B_w^q - K_f$, $C_w^q - K_f$ при решении задач поперечного изгиба пластинок с помощью МИКФ. Представлены результаты решения тестовых задач, демонстрирующих удовлетворительную точность расчета максимального прогиба пластинок в форме параллелограммов, равнобедренных трапеций и произвольных треугольников.

В четвертой главе устанавливается взаимосвязь максимального прогиба и коэффициента формы упругих изотропных пластинок на упругом двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака, нагруженных равномерно распределенной по всей площади нагрузкой. Строятся аналитические и графические зависимости $E_w^q - K_f$, ограничивающие все множество значений максимального прогиба пластинок в форме равнобедренных треугольников, прямоугольников и ромбов с комбинированными граничными условиями на упругом двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака. Приводятся примеры использования полученных зависимостей при решении задач поперечного изгиба пластинок с помощью МИКФ. Описаны результаты решения тестовых задач, демонстрирующих удовлетворительную точность расчета максимального прогиба пластинок в форме параллелограммов, равнобедренных трапеций и произвольных треугольников.

1 ОБЗОР РАБОТ, ПОСВЯЩЕННЫХ РАЗВИТИЮ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ ПЛАСТИНОК

1.1 Некоторые общие сведения

Теория упругих пластинок начала разрабатываться еще в 19 веке. Её активное развитие в 20 веке привело к тому, что на данный момент теория расчета пластинок считается завершённой.

Фундаментальные основы технической теории пластинок были заложены известными российскими учеными: С.П. Тимошенко [119], И.Г. Бубновым [10], П.Ф. Папковичем [95], Ю.Н. Работновым, Б.Г. Галеркиным [19], Н.И. Мусхелишвили [92]. Значительный вклад внесли также В.З. Власов, А.А. Ильюшин, М.И. Горбунов-Посадов, А.Р. Ржаницын, Трещёв А.А. [120], Зубчанинов В.Г., Г. Маркус, Б.Н. Жемочкин, П.М. Варвак, В.В. Болотин, В. Ритц, В. Прагер, Д. Гильберт, Л. Релей, В. Ольшак, Э. Митчелл, Л.М. Роотс, П. Л. Пастернак, Г. Полия, Г. Сеге, В.И. Коробко, А.В. Коробко, Е. Треффц, Л.В. Канторович, Р.Ф. Габбасов.

Техническая теория пластинок построена на двух гипотезах, значительно упрощающих расчет (гипотезы Кирхгофа): 1) прямые линии, нормальные к срединной плоскости пластинки до деформации, остаются прямыми и нормальными к её срединной плоскости после деформации. 2) нормальные и касательные напряжения в поперечном направлении к срединной плоскости равны нулю. Данные гипотезы отражают действительную работу конструкции лишь в тех случаях, когда толщина пластинки не превышает величины $a/5$ (где a – наименьший размер пластинки в плане), а прогибы имеют малые по сравнению с толщиной h прогибы (не более $h/5$).

Ключевой задачей технической теории пластинок является определение напряжений и перемещений в любой точке конструкции. При

этом необходимо, чтобы полученные результаты удовлетворяли дифференциальному уравнению поперечного изгиба и граничным условиям. Это может достигаться различными способами.

В связи с этим всю совокупность различных способов расчета пластин можно разделить на прямые и приближенные методы, а последние, в свою очередь, на вариационные, численные и геометрические.

1.2 Прямые методы

Если удастся подобрать функцию прогибов, отвечающую вышеперечисленным критериям, то задача будет иметь точное решение. Такой метод определения искомых величин называется прямым.

Точные решения были получены лишь для ряда частных случаев. К ним относятся: цилиндрический изгиб прямоугольной пластины, изгиб жестко защемленной и свободно опертой по контуру эллиптической пластинки, изгиб шарнирно опертой пластинки в форме правильного треугольника, изгиб круглой и кольцевой шарнирно опертой и жестко защемленной по контуру пластинки, нагруженной осесимметричной нагрузкой, изгиб бесконечно длинной прямоугольной пластинки, свободно опертой по краям.

Ряд точных решений был получен с использованием метода отображения, когда искомая пластинка дополняется несколькими фиктивными пластинками тех же размеров, нагруженных аналогичной, но меняющей знак нагрузкой. Рассматривая такую пластинку как часть бесконечно длинной, можно найти максимальный прогиб искомой пластинки путем суммирования прогибов бесконечно длинной пластинки от действия реальной и фиктивной нагрузок [76]. Методом отображения были решены задачи изгиба прямоугольной и треугольной жестко защемленной пластинок.

Навье была решена задача изгиба свободно опертой прямоугольной пластинки, нагруженной симметричной распределенной нагрузкой.

Особенностью его подхода было разложение функции в двойной тригонометрический ряд.

М. Леви использовал разложение функции прогибов в одинарный тригонометрический ряд для расчета пластинок, свободно опертых по двум противоположным сторонам, и произвольно опертым по двум другим, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой [76].

Прямые методы также нашли применение в задачах собственных колебаний круглых, кольцевых и прямоугольных пластинок, а также устойчивости прямоугольных пластин.

Точных решений для пластинок на упругом основании получено крайне мало. Известны решения для круглых плит на упругом винклеровском основании, полученные Динником и Шлейхером. Герцем была решена задача изгиба плиты неограниченных размеров, нагруженных сосредоточенной силой.

Известно точное решение для круглой плиты на упругом полупространстве, нагруженной сосредоточенной силой и осесимметричной распределенной нагрузкой [6].

Предложенная Пастернаком в [96] двухпараметрическая модель упругого основания была использована при решении прямым методом задачи об изгибе прямоугольной шарнирно опертой пластины (решение было получено в двойных тригонометрических рядах), а также прямоугольной пластины, шарнирно опертой по двум противоположным сторонам (расчет проводился в одинарных тригонометрических рядах).

Обобщая вышесказанное, следует отметить, что, несмотря на высокую точность получаемых результатов, сложность при подборе функции прогибов значительно ограничивает круг задач, решаемых прямыми методами.

1.3 Вариационные методы

Сложность при подборе аналитической функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению изгиба и граничным условиям, привела к разработке большого числа приближенных методов расчета, позволяющих достаточно точно определять интегральные физико-механические характеристики пластинок, имеющих различное очертание, граничные условия и способы нагружения. К данной группе относятся вариационные методы.

Сущность их заключается в получении приближенной аналитической зависимости, удовлетворяющей либо дифференциальному уравнению, либо граничным условиям, а также обеспечивающую наименьшую погрешность результатов на рассматриваемом интервале. Вариационные методы нашли свое применение в работах Д.В. Вайнберга [13], В.В. Петрова [97], В. Прагера [100], Я.А. Пратусевича [101].

В основе вариационных методов лежат вариационные принципы, базирующиеся на принципе возможных перемещений и являющиеся критериями истинности подбираемой приближенной зависимости. Наибольшее распространение получил принцип Лагранжа.

Первым вариационные принципы к задачам технической теории пластинок применил В. Ритц. Исследуя вопросы прочности и колебания пластинок, он представил искомую функцию прогибов в виде ряда, члены которого удовлетворяют граничным условиям задачи, а неизвестные параметры определяются из условия минимума интеграла полной потенциальной энергии системы путем дифференцирования её по каждому из параметров.

Существует также модифицированный метод Л. Релея – В. Ритца. Его особенность состоит в ограничении выбора функций, минимизирующих интеграл полной потенциальной энергии систем. Этот ограниченный подкласс функций линейно зависит от конечного числа параметров, что делает проблему отыскания функции прогибов более простой [76].

Метод Ритца получил развитие в работе Тимошенко, в которой

интеграл полной потенциальной энергии разбивается на две составляющие: энергию внутренних и внешних сил. Являясь частным случаем метода Ритца, данный способ решения подразумевает удовлетворение лишь граничным условиям. Оба метода дают приближение искомой функции сверху.

Галеркин при отыскании аналитической зависимости предложил определять неизвестные параметры, используя дифференциальное уравнение изгиба пластинки. Общий вид приближенной функции так же, как и в методе Ритца, представляет собой ряд, члены которого удовлетворяют граничным условиям задачи.

Перспективность подобного подхода было отмечена еще в 1913 до Галеркина И.Г. Бубновым, поэтому данный способ решения задач технической теории пластинок носит имя обоих ученых (метод Бубнова-Галеркина).

В 1926 году Треффцем было предложено подбирать приближенные функции так, чтобы они являлись частными решениями искомого дифференциального уравнения. Неизвестные параметры определяются, исходя из условия минимума интеграла от квадрата градиента ошибки n -го приближения [76]. Метод дает приближение искомой функции снизу. Он получил развитие в трудах П.Ф. Папковича, М.Ш. Бирмана, С.Г. Михлина, Л.С. Лейбензона.

Несмотря на простую и надежную оценку точности получаемых решений, метод Треффца не получил широкого распространения из-за трудностей, возникающих при подборе базисных функций. Эта проблема была решена в 1973 году Ясницким [132, 133]. Предложенная им геометрическая интерпретация метода Треффца и способ подбора базисных функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям и обеспечивающих сходимость решения, получил название метода фиктивных канонических областей. Данная методика нашла свое развитие в работах А.Ю. Большакова, В.А. Елтышева, С.Л. Гладкого [20] и С.Я. Гусмана.

Л.В. Канторович рассматривал разрешающую функцию в виде

произведения функций одного аргумента, одна из которых определяется, исходя из геометрических граничных условий, а вторая – из характера конкретной задачи [76]. Интегрирование полной потенциальной энергии системы по одному из параметров приводит к представлению её в виде функции одной переменной. В связи с этим данный способ решения краевых задач носит название метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Занимая промежуточное положение между точным решением и приближенными методами Ритца и Галеркина, метод Л.В. Канторовича наиболее эффективен при расчете прямоугольных, секториальных пластинок, а также любых других, стороны которых ограничены координатными линиями.

В.З. Власовым был предложен более общий способ решения краевых задач: искомая функция прогибов представляется в виде ряда из произведений однопараметрических функций Канторовича. В результате задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Данный метод нашел применение в [117] при расчете косых и трапециевидных пластинок.

В.Л. Рвачев в [102, 103, 104] при решении задач изгиба, собственных колебаний и устойчивости пластинок впервые применил R-функции. К преимуществам данной расчетной методики можно отнести наличие конструктивно простых средств для построения систем координатных функций, удовлетворяющих различным типам граничных условий, даже при произвольной геометрии областей, а также возможность использования в качестве аппроксимационного аппарата различные виды функций (как полиномы, так и сплайны, а также атомарные функции).

1.4 Численные методы

В технической теории пластинок широкое распространение получили

численные методы расчета, такие как метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ) и т.д.

Суть МКР (или метода сеток) заключается в том, что перемещения и напряжения определяются не во всей конструкции, а лишь в её отдельных точках, называемых узловыми. Их число зависит от степени разбиения континуума.

Заменяя непрерывную область дискретной, а производные в определяющих соотношениях на приближенные выражения в виде конечных разностей, можно свести решение дифференциальных уравнений к решению системы линейных алгебраических уравнений. Точность результатов, получаемых по данной методике, напрямую зависит от шага сетки. Поэтому с появлением мощных ЭВМ МКР стал широко использоваться в расчетной практике.

К недостаткам МКР можно отнести искусственное удовлетворение граничным условиям, приводящее в ряде случаев (например, для угловых точек или точек, лежащих на границе сопряжения областей различной жесткости) к противоречивым результатам.

Основоположником МКР считается И.М. Рабинович, в 1921 году впервые применивший его к расчету неразрезных балок.

К числу ученых, активно развивавших данную методику, относятся Г. Маркус [85], Л.П. Варвак [15, 16], Д.В. Вайнберг [13, 14], Н.П. Абовский [1, 2], Р.Ф. Габбасов [18], К.К. Керопян, А.П. Сеницын, В.И. Соломин и др.

Для решения ряда задач технической теории пластинок широко применяются коллокационные методы. Суть их заключается в представлении искомой функции прогибов в виде ряда с коэффициентами, точно и приближенно удовлетворяющими дифференциальному уравнению изгиба.

К примеру, расчет пластинок с круговыми вырезами методами коллокаций ведет к увеличению точности и снижению трудоемкости вычислений, так как уравнение равновесия и граничные условия на контуре выреза выполняются точно, а константы решения определяются из

граничных условий на внешнем контуре пластинок, удовлетворяемых дискретно (в точках коллокации).

В зависимости от способа определения коэффициентов (выбора точек коллокации, в которых уравнение равновесия выполнялось) различают методы граничной коллокации (МГК), переопределенной граничной коллокации (МПК), внутренней коллокации (МВК), переопределенной внутренней коллокации (МПК), ортогональной коллокации (МОК), смешанной коллокации (МСК), метод сплайн-коллокации.

Основоположником данной группы методов является Канторович, в 1934 году впервые изложивший их сущность и методику применения для решения краевых задач. В дальнейшем эти методы развивались во второй половине XX века В.В. Рогалевичем [107], О.В. Машкиным [86, 87], В.В. Букшей [11, 12], М.С. Корнишиным [34], Э.Б. Карпиловской [30], Ю.П. Ярцевым [131], Н.Д. Conway [136, 137], N.J. Robinson [141]. Метод сплайн-коллокации, отличительной особенностью которого является сведение двумерной задачи к одномерной и её дальнейшее численное решение, нашел применение при расчете параллелограммных и прямоугольных пластинок в работах [23, 93].

МКЭ является на данный момент наиболее распространенным способом решения задач технической теории пластинок. Его основоположником считается Дж. Аргирис, в 1955 году впервые применивший его для расчета авиационных конструкций. Развитие МКЭ получил в трудах М. Тернера, О. Зенкевича, Р. Галлагера, А.В. Александрова, Дж. Одена, Б.М. Державина, А.М. Масленникова, Л.А. Розина, В.А. Постнова, Н.Н. Шапошникова, и др. Основы МКЭ приводятся в работах [25, 28, 94, 108, 109, 110, 118, 143].

Суть метода конечных элементов (МКЭ) применительно к решению задач теории пластинок, заключается в разбиении пластинки на отдельные простые элементы конечных размеров (конечные элементы), доступные для исследования их напряженно-деформированного состояния под действием

внешних нагрузок, сил взаимодействия между соседними элементами и соответствующих им перемещений. Расчет таких элементов может производиться методом сил, методом перемещений или смешанным методом [27, 105].

В зависимости от формы конструкции и характера её деформации наиболее распространенными конечными элементами при расчете пластинок являются элементы в форме треугольника и прямоугольника.

Разбивка конструкции на треугольные конечные элементы более универсальна, она дает возможность точнее описывать напряженно-деформированное состояние пластинок с ломаным и криволинейным контуром. Тем не менее, в ряде случаев возникает необходимость вводить дополнительный узел в середине скошенной кромки. Это делается для повышения точности получаемых результатов, так как дополнительный узел позволяет учесть поворот в плоскости, перпендикулярной скошенной кромке. Особенно часто это применяется для конструкций с жестким защемлением по контуру.

Дробление пластинки на прямоугольные конечные элементы дает более точное решение при одинаковом количестве неизвестных.

Существенным недостатком МКЭ является сложность сопоставления результатов для пластинок различного типа, а также высокая погрешность при расчете пластин с острыми углами.

МКЭ в настоящее время используется в многочисленных расчетных комплексах, таких как SCAD Office, ANSYS [140], LIRA, Stark ES и многих других.

Метод граничных элементов (МГЭ), наряду с МКР и МКЭ, имеет широкое распространение при решении задач технической теории пластинок. Сущность его состоит в дискретизации не всей области пластинки, а лишь её границы. В основе результатов расчета лежат функции влияния – аналитические решения, полученные для бесконечной плоскости от действия на ней единичных нагрузок (сосредоточенной силы, момента). Граничные

условия пластинки учитывают путем решения системы уравнений либо относительно нагрузок, приложенных на границе рассматриваемой пластинки (метод компенсирующих нагрузок) [26, 124], либо относительно смещений (метод разрывных смещений).

МГЭ был разработан на основе МКЭ в Саутгемптонском университете и получил развитие в трудах Р. Баттерфилда, П.К. Бенерджи, К. Бреббиа, Л. Вроубела, Ф.Ж. Риццо, А. Старфилда, С. Крауча, В.Д. Купрадзе [], С.Г. Михлина, Н.И. Мусхелишвили, В.А. Гришина, П.И. Перлина, А.Г. Угодчикова, С. Уокера, Н.М. Хуторянского, А.И. Цейтлина и др. Теоретическая основа МГЭ изложена в работах [4, 8, 9, 24, 77, 134, 135].

Метод взвешенных невязок (МВН) представляет собой совокупность различных способов расчета, отличительной особенностью которых является введение системы базисных функций и определение параметров аппроксимации путем приравнивания нулю интеграла от невязки исходных функций, взятых с определенной системой весовых функций. Комбинируя различные варианты базисных и весовых функций а также различные способы построения уравнений невязок, можно получить различные схемы МВН.

Базисные функции подбирают, исходя из условия выполнения ими части граничных условий, а их параметры определяют из уравнений невязки оставшихся невыполненными условий. В случае, если удастся удовлетворить все граничные условия, то для нахождения параметров базисных функций используют равенство нулю интеграла по области от произведения невязки основного дифференциального оператора рассматриваемой краевой задачи и выбранной системы весовых функций.

Примеры решения задач поперечного изгиба пластинок с использованием МВН приводятся в работе [29].

1.5 Геометрические методы

К данной группе методов относятся изопериметрический метод (ИЗПМ), метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) и другие. Их отличительной особенностью является сведение сложной аналитической задачи к более простой геометрической, решаемой известными и достаточно простыми методами

Первые шаги в развитии ИЗПМ были сделаны еще в 19 веке в работах Сен-Венана [115] и Релея [139], однако закономерности, обнаруженные ими, не имели строгого математического подтверждения.

Системный подход к применению изопериметрического метода начался в середине 20 века с трудов Г. Полия и Г. Сеге [99]. В них авторами был рассмотрен ряд задач математической физики и технической теории пластинок и получены соотношения, связывающие интегральные физико-механические (основная частота колебаний мембран) и геометрические (площадь, периметр) характеристики.

Также Г. Полия и Г. Сеге была введена величина, являющаяся интегральной характеристикой формы выпуклой области, названная впоследствии коэффициентом формы. Данная величина была в дальнейшем использована для доказательства ряда важных изопериметрических теорем.

Значительный вклад в развитие ИЗПМ внес В.И. Коробко. В процессе анализа основных интегро-дифференциальных соотношений в задачах поперечного изгиба, свободных колебаний и устойчивости пластинок, автор смог выделить в них в явном виде коэффициент формы, что значительно расширило диапазон задач, решаемых с помощью ИЗПМ, а также сформулировал основную изопериметрическую теорему технической теории пластинок. Результаты этих исследований приведены в работах [49, 50, 54, 59, 60, 68-72].

В дальнейшем были опубликованы труды [44, 58, 74], в которых полученные ранее зависимости впервые стали применяться для областей с относительно произвольной формой, получаемой не путем использования традиционной для изопериметрического метода симметризации Штейнера, а

ряда других геометрических преобразований (расширение, сужение области, перераспределение части площади, аффинные преобразования)

Несколько работ в области рассматриваемого геометрического метода решения задач строительной механики были опубликованы Г.А. Мануйловым [79-84]. В частности, в [80] впервые были получены двусторонние оценки ФМХ пластинок (основной частоты колебаний для параллелограммных пластинок). В этой же статье рассматривалась возможность использования альтернативной характеристики формы области – усредненного коэффициента формы, равного среднему арифметическому значений этого параметра для заданного контура и для круга. В ряде случаев расчет с использованием этой величины дает меньшую погрешность по сравнению с традиционной методикой.

Такой подход объясняется тем, что в деформированном состоянии линии уровня изменяют свою форму: у граней конструкции она близка к контуру, а в центре становится подобным кругу.

С развитием ИЗПМ стало возможным представлять графически законы изменения ФМХ (в общем случае обозначаемой F) в зависимости от коэффициента формы K_f [43, 45-47, 55]. В ходе исследований были выявлены верхние и нижние пределы изменения этих характеристик для всех классов фигур с выпуклым контуром.

В процессе анализа результатов был сделан вывод, что полученные границы оказались одинаковыми для различных типов задач строительной механики пластинок, а графики $F-K_f$ образуют достаточно узкое пространство на координатной плоскости.

Исследованиями вопроса устойчивости пластинок с точки зрения изопериметрического метода занимался А. Хусточкин. В работе [123] автором были решены основные уравнения устойчивости пластинок в изопериметрическом виде без использования вариационного исчисления. На основании их доказан ряд теорем.

Широкое распространение ИЗПМ получил при расчете пластинок с

использованием метода предельного равновесия, разработанного А.Р. Ржаницыным [106]. Первые шаги в этом направлении были сделаны в [42]. Работы [52, 53] расширили спектр задач, решаемых данным методом: авторы применили его для решения вопроса предельного равновесия пластин переменной жесткости, а также оптимального проектирования пластинок.

Успешное развитие этого направления обусловлено тем, что с введением в неравенства коэффициента формы оценка несущей способности значительно упростилась, так как отпала необходимость в выборе кинематического механизма разрушения [51].

В процессе разработки и совершенствования геометрических методик расчета пластинок, наряду с изопериметрическим, возник новый способ расчета, названный метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ).

Предпосылки к его созданию были заложены в статьях [39-41], где была продемонстрирована возможность получения изопериметрических зависимостей для определенного ограниченного множества областей, которые отвечают какому-либо непрерывному геометрическому преобразованию.

Обобщив закономерности математических и физико-механических аналогий задач строительной механики, описываемых дифференциальными уравнениями эллиптического типа, а также геометрического подобия исследуемых областей, появилась возможность получать аналитические зависимости для элементов различного очертания при ограниченном количестве известных решений.

МИКФ представляет собой эффективный, но в тоже время достаточно простой прием аппроксимации действительных значений ФМХ внутри определенного интервала изменения коэффициента формы по двум (или более) известным решениям, называемым опорными. Его теоретические основы изложены в монографии А.В. Коробко [37]. В этой же работе впервые было теоретически доказано, что в задачах технической теории пластинок (а именно поперечного изгиба, свободных колебаний и равномерного обжатия

по конутуру) коэффициент формы является основным аргументом.

Новая методика нашла применение при решении задач, связанных с определением ФМХ ортотропных пластинок. Данное направление активно развивается С.Ю. Савиным [111-114].

Полученные им зависимости позволяют определять максимальный прогиб, а также основную частоту свободных колебаний ортотропных пластинок различной формы (в виде прямоугольников, треугольников, правильных многоугольников) с комбинированными граничными условиями.

В работах С. Ю. Савина геометрические методы расчета были впервые применены к конструкциям, выполненным из материалов, обладающих разными физическими свойствами в различных направлениях. Ввиду значительной сложности и трудоемкости расчетов таких пластинок, развитие данного направления является очень перспективным.

МИКФ, так же, как и изопериметрический метод, был использован при расчете конструкций по методу предельного равновесия. Этой проблеме посвящены кандидатские диссертации Ю.В. Киржаева [31] и С.А. Морозова.

В диссертации С.А. Морозова были обобщены работы [88-91], в которых производится оценка несущей способности пластинок произвольной формы, нагруженных как равномерно распределенной, так и сосредоточенной нагрузкой. В результате были построены графики зависимости разрушающей нагрузки от коэффициента формы, определены границы её изменения для пластинок различного очертания в плане.

Несмотря на эффективность МИКФ, при определении ФМХ областей сложного очертания погрешность получаемых результатов в ряде случаев оказывается достаточно высокой. Одним из путей её повышения является использование при составлении аналитических выражений аргументов, аналогичных коэффициенту формы, но позволяющих получать более точные результаты.

Данной проблеме посвящены научные работы А.А. Черняева [63, 125-130]. В них автором получены определяющие соотношения технической

теории пластинок, записанные с использованием соотношения внутреннего и внешнего конформных радиусов, являющейся, как и коэффициент формы, безразмерной характеристикой плоской области.

В результате исследований стало возможным значительно уменьшить диапазон изменения ФМХ пластинок различного очертания, что, помимо увеличения точности расчета по МИКФ, повысило практическую ценность ИЗПМ, так как двусторонние оценки, получаемые с его помощью, в некоторых случаях имели погрешность менее 5%.

Являясь, по сути, следующим этапом развития ИЗПМ, МИКФ расширил диапазон проблем строительной механики, решаемых геометрическими методами.

1.6 Основные выводы по главе 1

Обобщая приведенный обзор методик расчета пластин, можно сделать следующие выводы:

1. Теоретические основы технической теории пластинок на сегодняшний день проработаны достаточно хорошо, однако актуальной остается проблема решения практических задач, в частности, задач расчета пластинок на упругом основании различного типа.

2. Прямые методы расчета имеют ограниченный диапазон использования, так как точные решения на данный момент получены лишь для ряда частных случаев.

3. Приближенные методы, среди которых наибольшее распространение получили численные методы, несмотря на описанные выше преимущества, обладают существенным недостатком – они не дают возможности качественно оценить точность получаемых результатов, а также получить

решение в аналитической форме. Вариационные методы позволяют получать аналитические решения, однако дают приближение либо сверху, либо снизу, а также мало распространены при расчете пластин сложной формы.

4. Геометрические методы, в частности МИКФ, не имеет недостатков вышеописанных способов расчета, и дают удовлетворительные ФМХ пластинок различной формы, однако для расчета пластинок, лежащих на упругом основании, он до настоящего времени не применялся.

В связи с этим **целью диссертационной работы** является развитие и применение метода интерполяции по коэффициенту формы к решению задач поперечного изгиба пластинок на упругом основании.

Для достижения указанной цели требуется решить следующие **задачи**:

1. Выявить зависимость максимального прогиба при поперечном изгибе пластинок на упругом основании и их коэффициентом формы.

2. Используя метод конечных элементов, определить значения максимальных прогибов упругих пластинок при 2 различных моделях упругого основания (модель Фаусса-Винклера и модель Пастернака) при различных вариантах граничных условий и различных формах (треугольные, прямоугольные, ромбические).

3. Построить по полученным данным аппроксимирующие функции, необходимые для решения задач поперечного изгиба пластинок на упругом основании.

4. Решить ряд тестовых задач определения максимального прогиба пластинок в форме параллелограммов, произвольных треугольников и равнобедренных трапеций, лежащих на упругом винклеровском основании и двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака.

2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МИКФ

2.1 Коэффициент формы как интегральная характеристика выпуклой области. Общие сведения и основные свойства коэффициента формы

Рассмотрим произвольную выпуклую область (рисунок 2.1), выберем внутри неё точку «а» и опустим из этой точки перпендикуляр h на касательную, проведенную к переменной точке контура области. Интеграл по контуру заданной фигуры

$$K_{fa} = \oint_L \frac{ds}{h}, \quad (2.1)$$

где ds – линейный элемент контура области, является безразмерной количественной характеристикой формы области и называется коэффициентом формы. Впервые данная характеристика была использована для сравнения форм различных областей учеными Г. Полия и Г. Сеге в [99].

Для областей с полигональным контуром (рисунок 2.2) из выражения (2.1) получим:

$$K_{fa} = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{h_i} = \sum_{i=1}^n (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_i) = \sum_{i=1}^n (\operatorname{ctg} \alpha_i + \operatorname{ctg} \beta_{i-1}), \quad (2.2)$$

где n – количество сторон многоугольника, а остальные принятые обозначения понятны из рисунка.

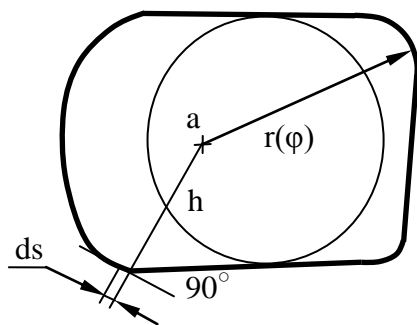


Рисунок 2.1

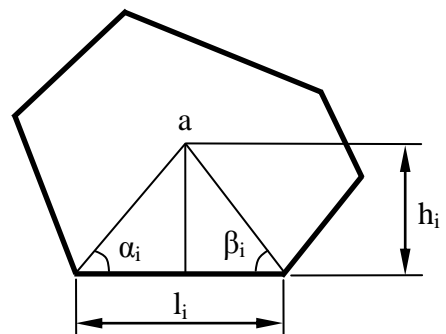


Рисунок 2.2

Для областей с криволинейным контуром выражение (2.1) будет иметь вид:

$$K_{fa} = \oint_L \frac{ds}{h} = \int_0^{2\pi} \frac{d^2s}{r^2 d\varphi} = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2}\right) d\varphi, \quad (2.3)$$

где $r = r(\varphi)$ – полярное уравнение контура области с полюсом в точке «а»;

При использовании коэффициента формы в исследовании дифференциальных зависимостей строительной механики также используют другой вид выражения (2.1) для криволинейного контура:

$$K_{fa} = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{2r'^2}{r^2} - \frac{r''}{r}\right) d\varphi. \quad (2.4)$$

В монографии [51] было доказано, что для любой выпуклой области значение данной характеристики имеет экстремум (минимум) лишь в одной точке «а», то есть

$$K_{fa} = \min K_f \quad (2.5)$$

Из выражений (2.2) и (2.3) следует, что минимально возможное значение коэффициента формы будет достигаться в том случае, если второй член подынтегрального выражения в (2.3) будет равен нулю:

$$\min K_f = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \quad (2.7)$$

что соответствует области в форме круга.

Подробный анализ коэффициента формы выполнен в работе [57]. Здесь приведем наиболее значимые для данного исследования результаты, в частности, свойства данной характеристики для областей в форме параллелограммов, треугольников и трапеций.

2.1.1 Параллелограммы

Рассмотрим параллелограмм (рисунок 2.5). С учетом принятых на нем обозначений, а также (2.2), получим формулу для определения коэффициента

формы любого параллелограмма:

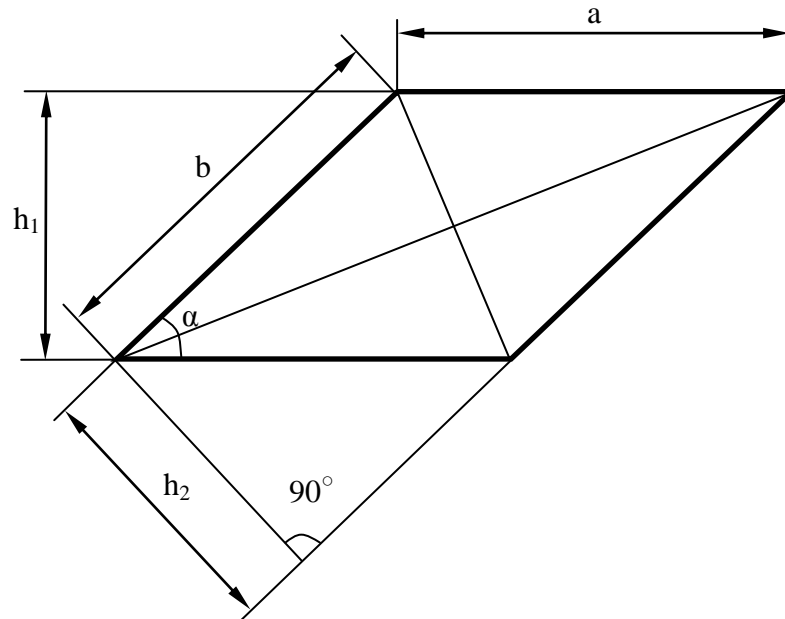


Рисунок 2.3

$$K_f = 4 \left(\frac{a}{h_1} + \frac{b}{h_2} \right) = 4 \frac{a/b + b/a}{\sin \alpha} = 4 \left(\frac{a}{h_1} + \frac{h_1}{a} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right). \quad (2.8)$$

Данное выражение в некоторых частных случаях будет иметь более простой вид: для ромба ($a = b$) –

$$K_f = \frac{8}{\sin \alpha}; \quad (2.9)$$

для прямоугольника ($\alpha = 90^\circ$) –

$$K_f = 4 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right); \quad (2.10)$$

для квадрата ($a = b, \alpha = 90^\circ$) –

$$K_f = 8. \quad (2.11)$$

На рисунке 2.4 представлены графики $1/K_f = k_1$, где $k_1 = a/h_1$ для параллелограммов с различными значениями α .

В [51] был доказан ряд изопериметрических теорем для параллелограммов:

– из всех параллелограммов (в том числе и прямоугольников) наименьшее значение K_f имеет квадрат;

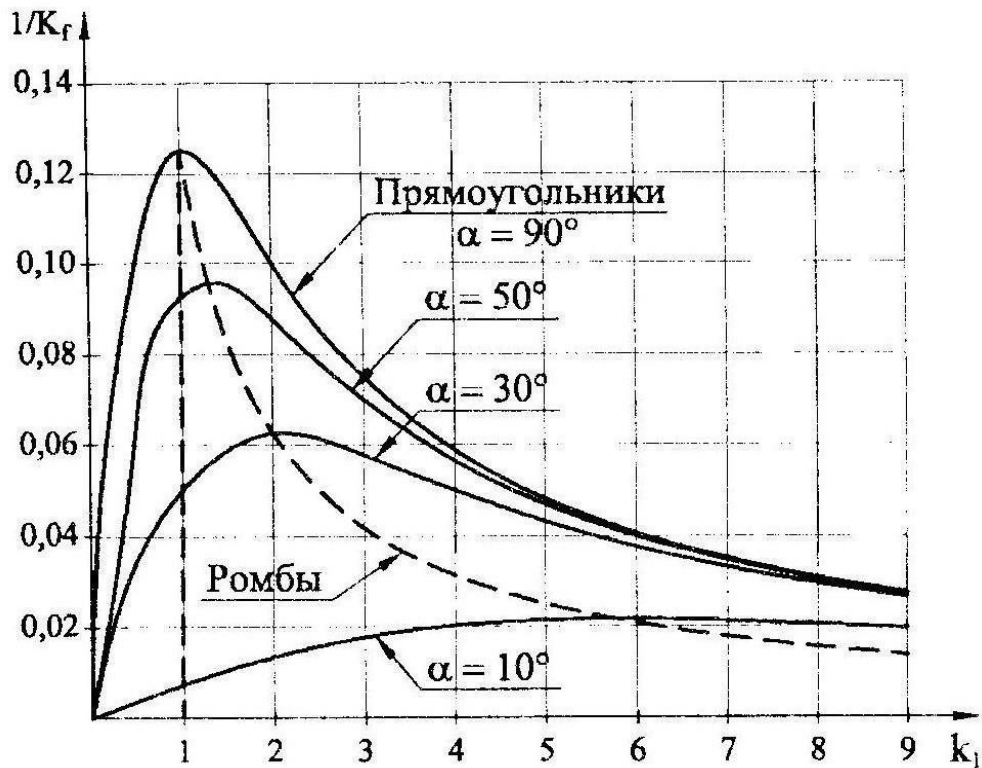


Рисунок 2.4

– из всех параллелограммов равной высоты при $k = a/b \geq 1$ наименьшее значение K_f имеет прямоугольник, а наибольшее – ромб;

– все параллелограммы при заданном значении величины K_f заключены между ромбом и прямоугольником, и, следовательно, все множество значений K_f для параллелограммов ограничено значениями K_f для ромбов и прямоугольников.

2.1.2 Треугольники

Использование формулы (2.2) в ряде случаев вызывает затруднение, поэтому для треугольников предпочтительнее выразить K_f через углы при его вершинах (обозначения приведены согласно рисунку 2.5):

$$K_f = 2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\beta}{2} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} \right). \quad (2.12)$$

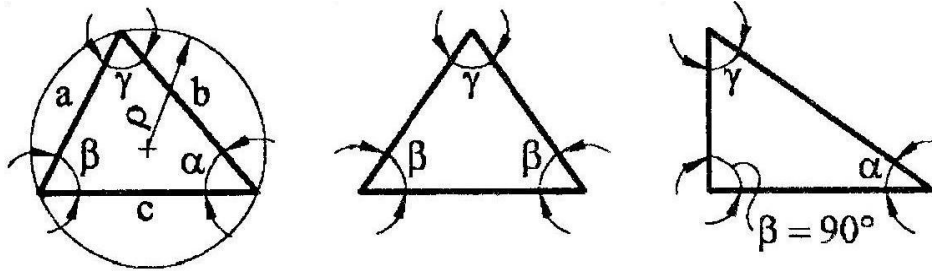


Рисунок 2.5

Из (2.12) можно получить выражения для характерных форм треугольников:

– для равнобедренных треугольников ($\alpha = \beta$):

$$K_f = 2 \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}. \quad (2.13)$$

– для равнобедренных треугольников ($\beta = 90^\circ$):

$$K_f = 2 \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) = 2 \frac{1 + \operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right)}. \quad (2.14)$$

На рисунке 2.6 приведены графики $1/K_f - \alpha$ для треугольников различных классов. Кривые 1 и 5 соответствуют равнобедренным тупоугольным треугольникам, кривая 2 – равнобедренным остроугольным треугольникам, кривая 3 – прямоугольным треугольникам, прямая 4 – прямоугольным треугольникам в случае, если $\alpha = 90^\circ$.

Для треугольников были доказаны следующие изопериметрические теоремы:

- из всех треугольников наименьшее значение коэффициента формы имеет равносторонний треугольник;
- из всех треугольников с заданными одним углом наименьшее

значение коэффициента формы имеет равнобедренный треугольник, равные стороны которого заключают этот угол;

– из всех прямоугольных треугольников наименьшее значение коэффициента формы имеет равнобедренный прямоугольный треугольник.

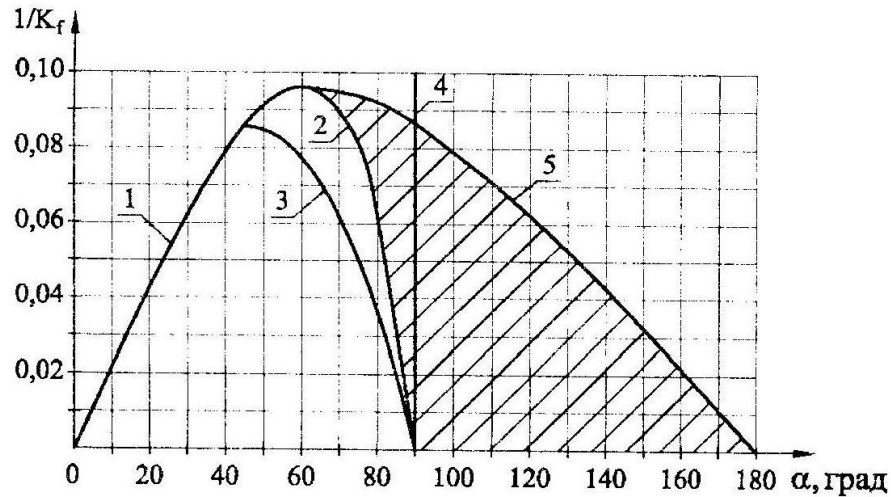


Рисунок 2.6

2.1.3 Трапеции

Для вывода формулы коэффициента формы трапеций необходимо обратиться к рисунку 2.7. С учетом принятых на нем обозначений, формула (2.2) представляется следующим образом:

$$K_{fa} = \frac{a_1}{h_1} + \frac{a_2}{H - h_1} + \frac{H(1/\sin \alpha_1 + 1/\sin \alpha_2)^2}{a_1 - h_1(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2)}. \quad (2.15)$$

Из данной формулы следует:

– для равнобедренных трапеций –

$$K_{fa} = \frac{k_1}{K} + \frac{k_1 - 2\operatorname{ctg} \alpha}{1 - K} + \frac{4}{(k_1 - 2K\operatorname{ctg} \alpha)\sin^2 \alpha}; \quad (2.16)$$

– для прямоугольных трапеций –

$$K_{fa} = \frac{k_1}{K} + \frac{k_1 - 2\operatorname{ctg} \alpha}{1 - K} + \frac{(1 + 1/\sin \alpha)^2}{(k_1 - K\operatorname{ctg} \alpha)\sin^2 \alpha}, \quad (2.17)$$

где $k_1 = a_1/H$, $K = h_1/H$.

На рисунке 2.8 построены графики изменения функции $1/\min K_f$ для ряда фиксированных значений k_1 (пунктирные линии). Кривая I соответствует ромбам (или равнобедренным трапециям, все стороны которых касаются вписанной окружности); кривая II соответствует равнобедренным треугольникам, прямая соответствует прямоугольникам.

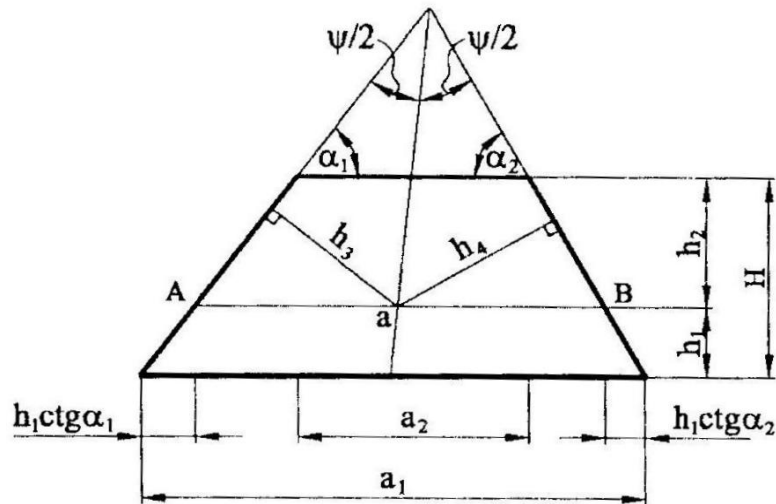


Рисунок 2.7

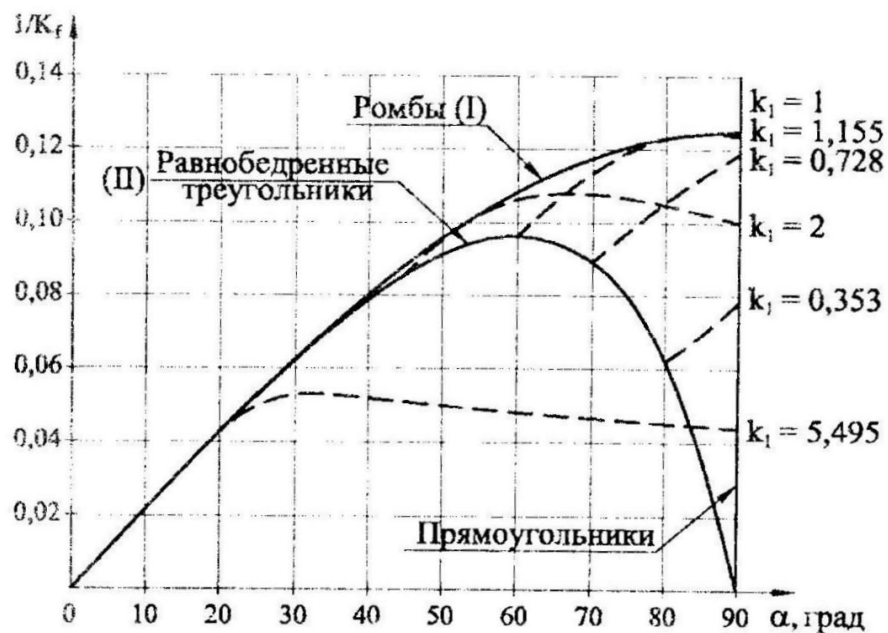


Рисунок 2.8

На основании результатов исследований, полученных в работе [57], были сформулированы следующие изопериметрические теоремы для трапеций:

- в любой трапеции независимо от соотношения углов α_1 и α_2 положение точки «а», обеспечивающей $\min K_f$, определяется из условия $h_3 = h_4$, что соответствует её положению на биссектрисе угла, образованного боковыми сторонами трапеции;
- из всех трапеций одинаковой высоты и заданным соотношением a_1/a_2 наименьшее значение K_f имеет равнобедренная трапеция;
- из всех равнобедренных трапеций с заданным углом α наименьшее значение имеет трапеция, все стороны которой касаются вписанной окружности;
- все множество значений коэффициента формы для трапеций произвольного вида ограничено сверху значениями K_f для равнобедренных треугольников, а снизу – значениями K_f для прямоугольников.

2.2 Представление основных зависимостей технической теории пластинок в изопериметрическом виде

Задача поперечного изгиба пластинок, лежащих на упругом основании, в общем случае сводится к решению дифференциального уравнения изгиба с учетом граничных условий:

$$D\nabla^2\nabla^2 w - q = 0. \quad (2.18)$$

Данное уравнение может быть решено с использованием вариационных методов, общий смысл которых был изложен в главе 1.

Для представления уравнения (2.18) в изопериметрическом виде будем использовать модификацию известных методов Релея и Ритца: ограничим выбор функций, минимизирующих интеграл полной потенциальной энергии системы. Искомую функцию прогибов представим в виде $w = w_0 f(x; y)$, где w_0 – максимальный прогиб, $f(x; y)$ – безразмерная функция, удовлетворяющая

условию $0 \leq f(x;y) \leq 1$.

Данная функция в самом грубом приближении может быть представлена как однопараметрическая. Это достигается, если $f(x;y)$ предварительно задаются как линии уровня деформированной поверхности пластинки. Следовательно, прогиб выражается следующим образом:

$$w = w_0 f(x;y) = w_0 g\left(\frac{t}{r(\varphi)}\right) = w_0 g(\rho), \quad (2.19)$$

где t, φ – полярные координаты; $r(\varphi)$ – полярное уравнение контура замкнутой выпуклой области, $\rho = t/r(\varphi)$ – безразмерная полярная координата.

В дальнейшем при выводе изопериметрических соотношений будем использовать обозначения, принятые в данном параграфе.

Проинтегрировав уравнение (2.18) с учетом (2.19), получим формулу для определения максимального прогиба пластинок от действия равномерно распределенной по всей её площади нагрузки:

$$w = w_0 f(x;y) = w_0 g\left(\frac{t}{r(\varphi)}\right) = w_0 g(\rho),$$

$$Dw_0 \iint_A \nabla^2 \nabla^2 f dA - \iint_A q dA = 0;$$

$$w_0 = \frac{q}{D} \frac{A}{\iint_A \nabla^2 \nabla^2 f dA};$$

$$w_0 = \frac{q}{D} \frac{A}{\int_0^{2\pi} \int_0^r \nabla^2 \nabla^2 g(\rho) t dt d\varphi}. \quad (2.20)$$

Несмотря на то, что данное упрощение приводит к грубой односторонней оценке ИФХ пластинок, оно позволяет представлять задачи теории пластинок в изопериметрическом виде, а также доказать ряд важных изопериметрических теорем. Точность данной приближенной методики напрямую зависит от грамотного выбора поверхности прогибов, то есть чем более «похожей» она будет на истинную, тем точнее конечный результат.

Используем модифицированный метод Релея-Ритца для преобразования интегралов, входящих в состав основных уравнений технической теории пластинок. В результате получим:

– интеграл $\iint f(x;y)dA$:

$$\iint_A f(x,y)dA = 2A \int_0^1 g^2(\rho)\rho d\rho; \quad (2.21)$$

– интеграл от оператора Лапласа:

$$\iint_A \nabla^2 f(x,y)dA = K_f \int_0^1 (g''\rho + g')d\rho; \quad (2.22)$$

– интеграл от квадрата оператора Лапласа:

$$\iint_A [\nabla^2 f(x,y)]^2 dA \approx \frac{K_f^2}{2A} \Phi_g, \quad (2.23)$$

где $\Phi_g = \int_0^1 (g''^2\rho + 2g''g' + g'^2\rho^{-1})d\rho$;

– интеграл от бигармонического оператора Лапласа:

$$\iint_A \nabla^2 \nabla^2 f(x,y)dA \approx \frac{K_f^2 \Phi_{g1} + K_f \Phi_{g2}}{A}, \quad (2.24)$$

где $\Phi_{g1} = \frac{1}{2} \int_0^1 (g^{IV}\rho + 2g^{III} - g''\rho^{-1} + g'\rho^{-2})d\rho$, $\Phi_{g2} = \pi \int_0^1 (2g''\rho^{-1} - g'\rho^{-2})d\rho$.

Коэффициенты в выражениях (2.21-2.24), являются постоянными величинами, зависящими лишь от выбора функции $g(\rho)$, следовательно, основные формулы технической теории пластинок, представленные в изопериметрическом виде, будут иметь наименьшее собственное значение, зависящее лишь от коэффициента формы.

2.3 Теоретические основы метода интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ)

Различные физические явления и процессы на языке математики могут

быть описаны аналогичными дифференциальными уравнениями, в частности, дифференциальными уравнениями в частных производных эллиптического типа второго порядка (уравнениями Пуассона). В связи с этим появляется возможность использовать одну и ту же математическую модель при исследовании абсолютно не похожих друг на друга процессов и явлений. Данное свойство становится особенно ценным, если решение общих уравнений аналитически становится очень сложным. Поэтому, если при исследовании нового физического явления устанавливается модель, аналогичная полученной ранее для другого процесса, то на него могут быть перенесены автоматически все результаты изученного явления.

Одной из разновидностей физико-механического подобия является подобие геометрическое. Оно получило широкое распространение в экспериментальной механике машин и конструкций как основа моделирования различных процессов. Суть геометрического подобия заключается в следующем: два геометрических объекта (например, плоские фигуры) являются подобными, если один из них может быть расположен внутри другого так, чтобы в ходе деформации одного из них они полностью совпали. Если данное условие соблюдается, искомые объекты называются геометрически подобными и сходственно расположенными. Тогда, зная линейный (или объемный) масштаб и геометрические характеристики одного из них, можно определить параметры другого объекта.

Суть физико-механического подобия такова: два физических явления считаются подобными, если по численным значениям характеристик одного из них можно получать значения сходственных характеристик простым пересчетом. Подобный пересчет может быть выполнен на основании инвариантности ряда безразмерных соотношений, в основе которых лежат параметры исследуемых подобных явлений. Условия инвариантности соотношений называются критериями подобия.

На основании физико-механического и геометрического подобий можно также исследовать явления и процессы с точки зрения ИФХ.

Традиционно при анализе тех или иных объектов ключевыми параметрами служили их геометрические размеры, площади, объемы, моменты инерции и т.п. И лишь недавно в качестве критерия подобия стал использоваться коэффициент формы. Областью его применения пока остаются классы геометрических фигур, образованных с помощью одного непрерывного преобразования.

2.3.1 Сущность МИКФ

С учетом выражений, полученных в п.2.2, формула (2.20) может быть записана следующим образом:

$$w_0 \approx \frac{q}{D} \frac{A^2}{K_f^2 \Phi_{g1} + K_f \Phi_{g2}}. \quad (2.25)$$

Учитывая, что интегралы Φ_{g1} и Φ_{g2} являются постоянными числами, (2.25) будет иметь следующий вид:

$$w_0 \approx K_w \frac{qA^2}{D}, \quad (2.26)$$

где $K_w = \frac{1}{K_f^2 \Phi_{g1} + K_f \Phi_{g2}}.$

При исследовании задач поперечного изгиба пластинок без упругого основания с помощью МИКФ было доказано, что все множество значений максимального прогиба пластинок ограничено с двух сторон (рисунок 2.9). На этом рисунке кривые 0-4 соответствуют прямоугольным пластинкам; 3-4-5-6-2 – правильным многоугольникам; 0-3 – равнобедренным треугольникам, 0-2 – пластинкам в виде эллипсов; штрихпунктирная кривая соответствует ромбическим пластинкам.

Аналогичные графики получаются и при шарнирном опирании пластинок, и в случае использования комбинированных граничных условий.

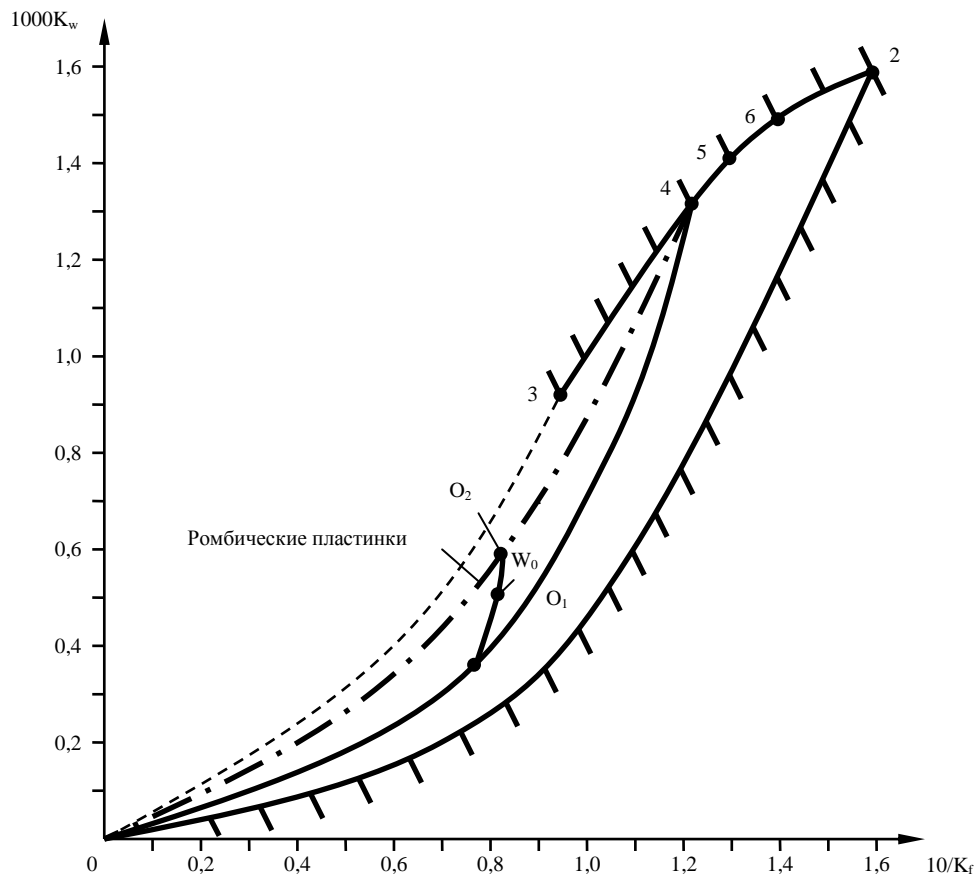


Рисунок 2.9 – Границы значений w_0
для жестко защемленных по контуру пластинок

Анализ графиков на рисунке 2.9 показывает, что значения максимального прогиба для параллелограммных пластинок ограничены соответствующими значениями для прямоугольных и ромбических пластинок; значения максимального прогиба для трапециевидных пластинок ограничены соответствующими значениями прямоугольных и треугольных пластинок.

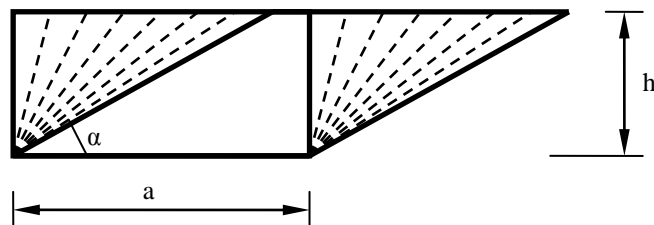


Рисунок 2.10 – Аффинный сдвиг прямоугольника

Суть метода интерполяции по коэффициенту формы заключается в

следующем. Пусть необходимо найти максимальный прогиб параллелограммной жестко заземленной пластинки (точка W_0 на рисунке 2.9). Эту пластинку можно получить из прямоугольной с помощью её аффинного сдвига вдоль основания (рисунок 2.10). При таком преобразовании нужно построить аппроксимирующую кривую, объединяющую все решения для выбранного геометрического преобразования (кривая O_1-O_2 на рисунке 2.9). Если «опорные» (решения, лежащие на граничных кривых) известны, то такую кривую можно легко построить путем интерполяции опорных решений по коэффициенту формы.

В обобщенном виде при исследовании проблем строительной механики с использованием изопериметрических методов определяющие соотношения обычно записывают двумя способами:

$$\begin{cases} F = KQ(K_f / A)^n, \\ F = KQ[(K_f / A)^m + B(K_f / A)^{m+1}]. \end{cases} \quad (2.27)$$

где F – обобщенная интегральная физико-механическая характеристика в задачах теории упругости; K и B – коэффициенты пропорциональности, различные для каждого ограниченного подмножества фигур, зависящие от граничных условий; m – показатель степени, принимающий фиксированные значения ($\pm(0,5; 1; 2)$), n – показатель степени, принимающий различные значения в зависимости от выбранного типа геометрического преобразования.

Если требуется записать решения для множества фигур, полученных путем непрерывного геометрического преобразования, и при этом известно хотя два решения F_1 и F_2 из данного множества, то они могут быть записаны, к примеру, в виде первой формулы из (2.27):

$$F_1 = KQ(K_{f1} / A_1)^n; \quad F_2 = KQ(K_{f2} / A_2)^n;$$

Разделим второе выражение на первое, при этом:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{(K_{f2} / A_2)^n}{(K_{f1} / A_1)^n} = \left(\frac{K_{f2}}{K_{f1}} \times \frac{A_1}{A_2} \right)^n;$$

$$n = \frac{\ln(F_2 / F_1)}{\ln(K_{f2} / K_{f1} \times A_1 / A_2)}. \quad (2.28)$$

В случае если геометрическое преобразование происходит без изменения площади ($A_1 = A_2 = \text{const}$), то:

$$n = \frac{\ln(F_2 / F_1)}{\ln(K_{f2} / K_{f1})}. \quad (2.29)$$

Запишем выражения для определения ИФХ для одной из опорных фигур и произвольной фигуры, входящей в рассматриваемое множество:

$$F_1 = KQ(K_{f1} / A_1)^n; \quad F = KQ(K_f / A)^n.$$

Разделив второе выражение на первое, получи уравнение относительно F:

$$F = F_1(K_f / K_{f1} \times A_1 / A)^n. \quad (2.30)$$

Если $A = \text{const}$, (2.74) примет вид:

$$F = F_1(K_f / K_{f1})^n. \quad (2.31)$$

Рассмотренная аппроксимация графически представлена на рисунке 2.27. Кривая 1 соответствует действительным значениям F, кривая 2 – приближенным решениям, полученным по формуле (2.77).

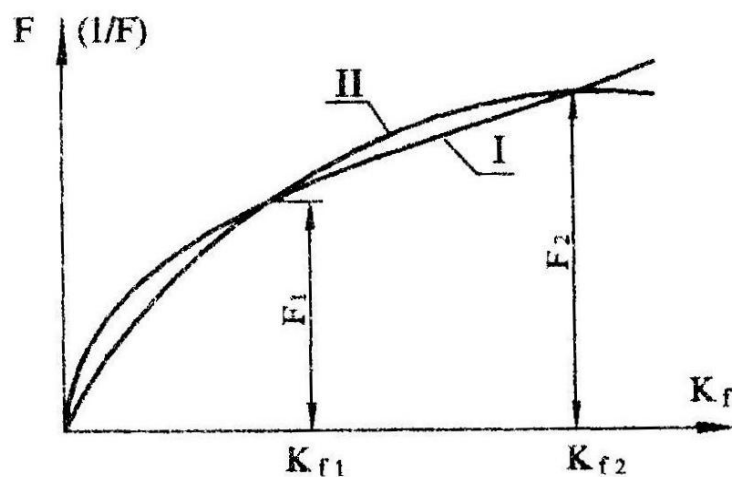


Рисунок 2.11

Получение простых аналитических зависимостей, возможность

проведения контрольных проверок решений для фигур, полученных другими приближенными методами, являются важнейшими преимуществами МИКФ.

Точность данной методики напрямую зависит от того, как далеко друг от друга находятся опорные решения, так как с увеличением расстояния между ними точность получаемых результатов существенно снижается.

2.3.2 Виды аппроксимирующих функций

МИКФ позволяет получать приближенные формулы для определения ФМХ пластинок, основываясь на «опорных» решениях и непрерывных геометрических преобразованиях. В зависимости от способа преобразования и числа известных решений существует несколько разновидностей аппроксимирующих функций, а, следовательно, различные виды интерполяции.

Степенная интерполяция по двум решениям. Данный способ был рассмотрен в предыдущем параграфе, он наиболее простой и в то же время естественный, так как получаемая в результате функция по своей структуре очень похожа на искомые соотношения теории упругости, записанные в изопериметрическом виде (рисунок 2.11).

Степенная интерполяция позволяет получать хорошие результаты при относительно близком расположении «опорных» фигур друг относительно друга, однако если они находятся далеко друг от друга, то решения с использованием данной методики в ряде случаев может иметь большую погрешность.

Линейная интерполяция по двум решениям. Отличительной чертой данной разновидности МИКФ является использование линейной функции при аппроксимации решений:

$$F = F_0 + B(K_f)^m. \quad (2.32)$$

где m – показатель степени, соответствующий исследуемой проблеме теории упругости, F_0 – параметр, соответствующий значению $K_f = 0$, B –

коэффициент пропорциональности (тангенс угла наклона, образуемого аппроксимирующей прямой и осью абсцисс).

Неизвестные параметры легко находятся по двум опорным решениям F_1 и F_2 следующим образом:

$$\begin{cases} B = (F_2 - F_1) / (K_{f2}^m - K_{f1}^m), \\ F_0 = F_1 - K_{f1}^m (F_2 - F_1) / (K_{f2}^m - K_{f1}^m). \end{cases} \quad (2.33)$$

Графики исходной и аппроксимирующей функций показаны на рисунке 2.12.

Данный способ интерполяции очень прост, он дает удовлетворительные результаты, если опорные фигуры находятся недалеко друг от друга. Однако качественное отличие структуры исходных и аппроксимирующих выражений значительно ограничивает диапазон исследуемых функций, делая возможным применение данного способа лишь в случае малой кривизны исходного графика ($\rho_{кр} \rightarrow \infty$).

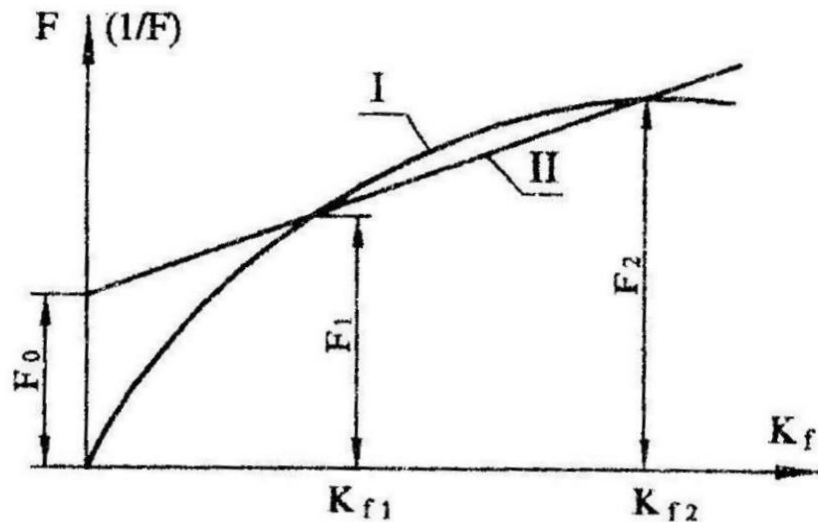


Рисунок 2.12

Линейно-степенная (комбинированная) интерполяция по двум решениям. Такой подход к построению аппроксимирующих функций сочетает в себе преимущества двух предыдущих методик: сохраняя естественность, такой способ дает более точное приближение к реальности, а

точность остается удовлетворительной, даже если опорные решения отстоят друг от друга на большом расстоянии. Рисунок 2.13 наглядно иллюстрирует эти утверждения. Общий вид функции будет таким:

$$F = F_0 + (K_f)^n, \quad (2.34)$$

где n – показатель степени, величина которого может значительно отличаться от $m = 0,5; 1; 2$.

Параметры F_0 и n находятся в следующей последовательности:

$$\begin{cases} F_1 = F_0 + K_{f1}^n, \\ F_2 = F_0 + K_{f2}^n. \end{cases}$$

$$F_2 - F_1 = K_{f2}^n - K_{f1}^n. \quad (2.35)$$

Решив (2.39), можно определить параметр n , а затем F_0 :

$$F_0 = F_1 - K_{f1}^n. \quad (2.36)$$

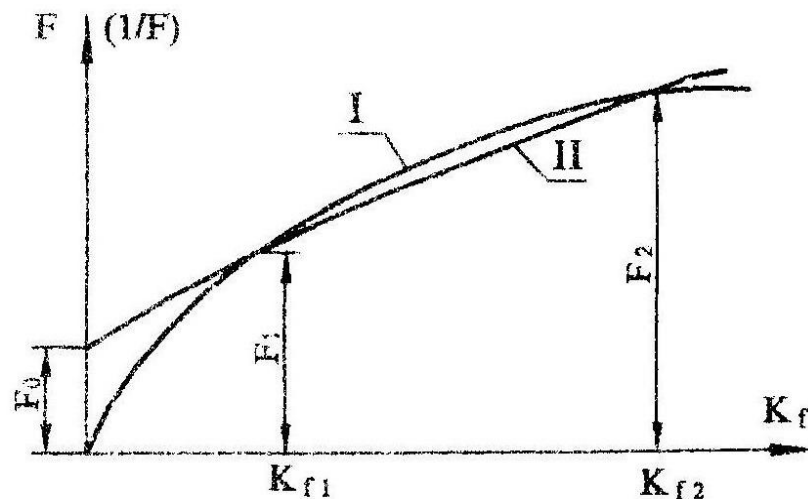


Рисунок 2.13

Недостатком данной способа является сложность в определении неизвестного параметра n , который может быть найден с помощью приближенных методик.

Степенная интерполяция по трем решениям. Для данного вида интерполяции характерны две разновидности аппроксимирующей функции.

В первом случае показатель степени представляется в виде линейной функции:

$$F = BK_f^{mK_f+n}. \quad (2.37)$$

Определение неизвестных параметров B , m и n не представляет большой сложности, их легко можно найти элементарными методами. Представляет интерес другая форма записи (2.37) с использованием аргумента K_f/K_{f1} :

$$F = F_1 (K_f / K_{f1})^{mK_f+n}. \quad (2.38)$$

Здесь параметр B автоматически удовлетворяется первому опорному решению, а параметры m и n находятся по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \frac{\ln(F_3 / F_1) / \ln(K_{f3} / K_{f1}) - \ln(F_2 / F_1) / \ln(K_{f2} / K_{f1})}{K_{f3} - K_{f2}}; \\ n = \ln(F_2 / F_1) / \ln(K_{f2} / K_{f1}) - mK_{f2}, \quad \text{или} \\ n = \ln(F_3 / F_2) / \ln(K_{f3} / K_{f2}) - mK_{f3}. \end{array} \right. \quad (2.39)$$

На рисунке 2.13 представлен график, иллюстрирующий степенную интерполяцию по трем решениям. Помимо естественности аппроксимирующей функции, отличительной особенностью является то, что на участках между опорными решениями полученная кривая приближается к искомой сначала сверху (или снизу), а затем снизу (или сверху).

Во втором случае показатель степени будет представлять собой степенную функцию следующего вида:

$$F = B(K_f)^{m(K_f)^n}, \quad (2.40)$$

или, выражая через аргумент K_f/K_{f1} :

$$F = F_1 (K_f / K_{f1})^{m(K_f/K_{f1})^n}. \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} n = \ln \left[\frac{\ln(F_3 / F_1) \ln(K_{f2} / K_{f1})}{\ln(K_{f3} / K_{f1}) \ln(F_2 / F_1)} \right] / (K_{f3} - K_{f2}); \\ m = \ln(F_3 / F_1) / \ln(K_{f3} / K_{f1}) / (K_{f3} / K_{f1})^n, \text{ или} \\ m = \ln(F_2 / F_1) / \ln(K_{f2} / K_{f1}) / (K_{f2} / K_{f1})^n. \end{cases} \quad (2.42)$$

Найдя m и n , определяем B . Графически (2.42) выражается аналогично (2.39) (см. рисунок 2.14)

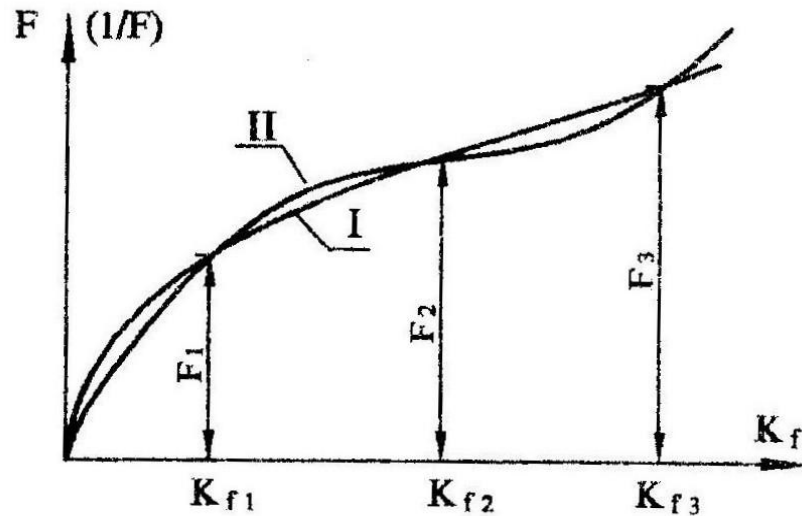


Рисунок 2.14

Линейно-степенная интерполяция по трем решениям. Общий вид аппроксимирующей функции будет аналогичен (2.34):

$$F = F_0 + B(K_f)^n, \quad (2.43)$$

а неизвестные параметры F_0 , B , n будут находиться по следующим формулам:

$$\begin{cases} F_1 = F_0 + K_{f1}^n; \\ F_2 = F_0 + K_{f2}^n; \\ F_3 = F_0 + K_{f3}^n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta F_{31} = F_3 - F_1 = B(K_{f3}^n - K_{f1}^n) = B\Delta(K_f)_{31}; \\ \Delta F_{21} = F_2 - F_1 = B(K_{f2}^n - K_{f1}^n) = B\Delta(K_f)_{21}; \end{cases}$$

$$\frac{\Delta F_{31}}{\Delta(K_f)_{21}} = \frac{\Delta(K_f)_{31}}{\Delta(K_f)_{21}} = f(n). \quad (2.44)$$

Решая данное уравнение, находим параметр n , а затем определяем F_0 и B по формулам

$$B = \frac{\Delta F_{31}}{\Delta(K_f)_{21}}, \quad F_0 = F_1 - BK_{f1}^n. \quad (2.45)$$

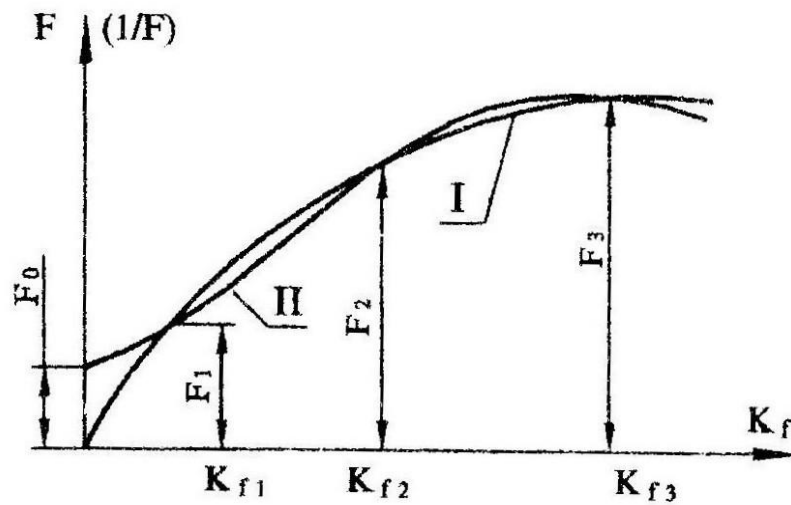


Рисунок 2.15

Недостатком линейно-степенной интерполяции по трем решениям, как и её более простого аналога, является то, что ключевое уравнение (2.44) может быть решено только приближенными методами.

Графическая иллюстрация данной методики приведена на рисунке 2.15.

Также можно получить аппроксимирующие функции при наличии четырех и более опорных решений. В этом случае их удобно представлять в виде степенного полинома от аргумента K_f .

2.4 Основные выводы по главе 2

1 Дано определение коэффициента формы, изложены основные свойства данной характеристики, а также наиболее важные для данного

исследования изопериметрические теоремы для выпуклых областей различных классов (параллелограммы, треугольники, трапеции).

2. Рассмотрен модифицированный метод Релея-Ритца, а также приведены формы записи основных математических операторов технической теории пластинок в изопериметрическом виде, доказывающих взаимосвязь интегральных физических характеристик пластинок с коэффициентом формы.

3. Детально изложена сущность МИКФ, а также проанализированы основные способы решения задач технической теории пластинок с использованием данного метода.

4. Задача определения максимального прогиба пластинок, лежащих на упругом винклеровском основании, представлена в изопериметрическом виде, позволяющем решать такие задачи с помощью МИКФ.

3 ПРИМЕНЕНИЕ МИКФ К РАСЧЕТУ ПЛАСТИНОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ

3.1 Вывод основных соотношений

Рассмотрим уравнение полной потенциальной энергии при поперечном изгибе пластинок, лежащих на упругом основании:

$$\mathfrak{E} = U + T, \quad (3.1)$$

где U – потенциальная энергия внутренних сил, T – потенциальная энергия внешних сил. В общем случае потенциальная энергия внутренних сил определяется по формуле [76]:

$$U = \frac{D}{2} \iint \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA, \quad (3.2)$$

где $w = w(x,y)$ – функция прогибов, D – цилиндрическая жесткость пластинки. Если ограничиться исследованием пластинок с полностью жестко защемленным или шарнирно опертым полигональным контуром, то потенциальная энергия внутренних сил будет определяться по формуле

$$U = \frac{D}{2} \iint_A (\nabla^2 w)^2 dA. \quad (3.3)$$

Потенциальная энергия внешних сил определяется из выражения

$$T = - \iint_A q w dA, \quad (3.4)$$

где q – интенсивность равномерно распределенной нагрузки.

Так как в качестве модели упругого основания используется модель Винклера, то в формуле (3.4) необходимо ввести интенсивность реакции основания $r(w)$, которая прямо пропорциональна прогибам пластинки w :

$$r(w) = k w, \quad (3.5)$$

где k – коэффициент пропорциональности (коэффициент постели, кН/м^3). С учётом интенсивности реакции упругого основания выражение (3.4) примет следующий вид:

$$T = -\iint_A w(q - kw) dA. \quad (3.6)$$

Учитывая (3.5) и (3.6), выражение (3.1) можно записать следующим образом:

$$\mathfrak{E} = \iint_A \left[\frac{D}{2} (\nabla^2 w)^2 - w(q - kw) \right] dA. \quad (3.7)$$

Представим поверхность прогибов пластинки в виде линий уровня, подобных их контуру и подобно расположенных:

$$w(x, y) = w_0 g[t/r(\varphi)] = w_0 g(\rho), \quad (3.8)$$

где w_0 – максимальный прогиб пластинки; t и φ – координаты полярной системы координат; g – однопараметрическая функция безразмерной координаты ρ этой системы. Подставим функцию (3.8) в (3.3) и (3.6). Выполним ряд преобразований, используя формулы (2.21)...(2.23). В результате выражение (3.3) будет иметь следующий вид:

$$U = \iint_A \left(\frac{D}{2} (\nabla^2 w)^2 \right) dA \approx \frac{D}{2} \frac{w_0^2}{2A} \cdot K_f^2 \int_0^1 (g''^2 \rho + 2g''g' + g'^2 \rho^{-1}) d\rho;$$

$$U \approx \frac{Dw_0^2}{4A} K_f^2 \Phi_g; \quad (3.9)$$

$$\text{где } \Phi_g = \int_0^1 (g''^2 \rho + 2g''g' + g'^2 \rho^{-1}) d\rho.$$

Для жестко заземленных по контуру пластинок знак приближенного равенства в (3.9) можно заменить на строгое неравенство

$$I_1 \geq \frac{Dw_0^2 K_f^2}{4A} \Phi_g.$$

Аналогичные преобразования произведем с функцией (3.3):

$$T = -\iint_A wr(w) dA = -\iint_A w(q - kw) dA;$$

$$T = -qw_0 \int_0^{2\pi} \int_0^r g(\rho) t dt d\varphi + kw_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r g^2(\rho) t dt d\varphi$$

$$T = -2Aqw_0 \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho + 2Akw_0^2 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho. \quad (3.10)$$

Подставим (3.9) и (3.10) в (3.7), в результате выражение для определения полной энергии при поперечном изгибе пластинок на упругом винклеровском основании примет следующий вид:

$$\Theta = \frac{Dw_0^2}{4A} K_f^2 \Phi_g - 2Aqw_0 \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho + 2Ak w_0^2 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho; \quad (3.11)$$

Найдем экстремум этого функционала, продифференцировав полную энергию системы по параметру w_0 :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial w_0} = \frac{Dw_0}{2A} K_f^2 \Phi_g - 2Aq \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho + 4Ak w_0 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho = 0.$$

Из этого выражения получим:

$$w_0 \left[\frac{D}{2A} K_f^2 \Phi_g + 4Ak \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho \right] = 2Aq \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho. \quad (3.13)$$

Найдем величину, обратную максимальному прогибу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_0} &= \frac{1}{2Aq} \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho \left[\frac{D}{2A} K_f^2 \Phi_g + 4Ak \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho \right]; \\ \frac{1}{w_0} &= \frac{1}{q} K_f^2 \Phi_g / 4 \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho \left[\frac{D}{A^2} + k \frac{1}{K_f^2} 8 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho / \Phi_g \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Поскольку определенные интегралы, входящие в (3.14), являются выражениями, зависящими от выбора функции $g(\rho)$, то их можно ввести в коэффициенты пропорциональности вместе с коэффициентом формы. В этом случае формула (3.14) примет следующий вид:

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{q} B_w^q \left[\frac{D}{A^2} + k C_w^q \right]. \quad (3.15)$$

При этом:

$$B_w^q = K_f^2 \cdot \Phi_g / 4 \int_0^1 g(\rho) \cdot \rho d\rho; \quad C_w^q = \frac{1}{K_f^2} \cdot 8 \int_0^1 g^2(\rho) \cdot \rho d\rho / \Phi_g.$$

Значения коэффициентов пропорциональности B_w^q и C_w^q можно найти, зная максимальный прогиб пластинки при двух значениях коэффициента постели, причём один из них должен быть равен нулю, то есть

соответствовать решению для пластинки без упругого основания, а другой – иметь произвольное отличное от нуля значение.

$$\frac{1}{w_{0(k=0)}} = \frac{D}{qA^2} B_w^q \Rightarrow B_w^q = \frac{1}{w_{0(k=0)}} \frac{qA^2}{D}; \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{w_{0(k \neq 0)}} = \frac{D}{qA^2} B_w^q + \frac{k}{q} C_w^q = \frac{1}{w_{0(k=0)}} + \frac{k}{q} C_w^q,$$

$$\frac{1}{w_{0(k \neq 0)}} - \frac{1}{w_{0(k=0)}} = \frac{k}{q} C_w^q \Rightarrow C_w^q = \frac{q}{k} \left(\frac{1}{w_{0(k \neq 0)}} - \frac{1}{w_{0(k=0)}} \right). \quad (3.17)$$

Значения параметров B_w^q и C_w^q не зависят от площади пластинки, коэффициента постели, цилиндрической жесткости и интенсивности равномерно распределенной нагрузки. Они зависят лишь от коэффициента формы искомой пластинки, а также от типа граничных условий.

Ввиду того, что выбранная поверхность прогибов представляет собой совокупность линий уровня, полученная формула будет справедлива только в случае, если в процессе изгиба прогибы пластинки будут монотонно возрастать, а кривизна в точке с максимальным прогибом будет неотрицательна, то есть:

$$\chi_x^{w_0} = \frac{1}{\rho_x^{w_0}} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \geq 0, \quad \chi_y^{w_0} = \frac{1}{\rho_y^{w_0}} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \geq 0, \quad \chi^{w_0} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \geq 0.$$

Для соблюдения этих неравенств моменты, возникающие в конструкции в точке с максимальным прогибом, также должны быть больше или равны нулю:

$$M_x^{w_0} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \geq 0, \quad M_y^{w_0} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \geq 0,$$

$$M_{xy}^{w_0} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \geq 0.$$

Данное условие соблюдается, если эпюры изгибающих и крутящих моментов в точке с $w = w_0$ имеют кривизну, меньшую или равную нулю, то есть:

$$\frac{\partial^2 M_x^{w_0}}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 M_{xy}^{w_0}}{\partial y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 M_{xy}^{w_0}}{\partial x \partial y} \leq 0. \quad (3.18)$$

Учитывая дифференциальное уравнение изгиба пластинки на упругом основании для точки с $w = w_0$

$$D \left(\frac{\partial^2 M_x^{w_0}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{w_0}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{w_0}}{\partial y^2} \right) = r(w_0) \leq 0,$$

получим неравенство:

$$r(w_0) = -q + kw_0 \leq 0.$$

Преобразуем его к следующему виду:

$$\frac{1}{w_0} \geq \frac{k}{q}.$$

Подставив вместо w_0 правую часть из выражения (3.15), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_0} &= \frac{1}{q} B_w^q \left[\frac{D}{A^2} + kC_w^q \right] \geq \frac{k}{q}; \\ B_w^q \left[\frac{D}{A^2} + kC_w^q \right] &\geq k; \\ B_w^q \left[\frac{D}{A^2 k} + C_w^q \right] &\geq 1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Физический смысл неравенств (3.19) заключается в том, что в случае их соблюдения моменты не только будут иметь положительный знак, но и монотонно возрастать, что не является обязательным условием. Это несколько сужает область применения рассматриваемой методики, так как, возможно, существуют такие пластинки, в которых моменты не изменяют своего знака, но и не возрастают монотонно. Тем не менее, данный подход рационален, так как позволяет получить простое условие для проверки соответствия исследуемой конструкции принятым в данной работе гипотезам.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. Значения максимального прогиба пластинок с однородными граничными условиями, лежащих на упругом винклеровском основании,

зависят от:

- выбора однопараметрической функции прогибов $g(\rho)$ (чем более «похожей» она будет на действительную поверхность прогибов, тем точнее будет оценён параметр w_0);

- от коэффициента формы пластинки K_f (чем «правильнее» форма пластинки (то есть чем меньше K_f), тем больше w_0).

2. На основании свойства коэффициента формы о двусторонней его ограниченности следует, что всё множество значений максимального прогиба пластинок с однородными граничными условиями, лежащих на упругом основании, будет также ограничено с двух сторон:

- верхнюю границу w_0 для всего множества жестко защемленных и шарнирно опертых пластинок образуют пластинки в виде правильных фигур и равнобедренных треугольников, а нижнюю – эллиптические пластинки;

- нижнюю границу w_0 для всего множества четырехугольных и треугольных пластинок с жестко защемленным или шарнирно опертым контуром образуют прямоугольные пластинки.

С учетом этой закономерности к расчёту пластинок, лежащих на упругом основании, при оценке их максимального прогиба можно применить как изопериметрический метод [51], так и метод интерполяции по коэффициенту формы [37]. Для этого необходимо построить указанные граничные кривые, используя для их построения численные методы, например МКЭ; эти кривые в дальнейшем будут использоваться для выбора «опорных» решений в методе интерполяции по коэффициенту формы.

3.2 Определение максимального прогиба пластинок на упругом винклеровском основании, являющихся «опорными» решениями МИКФ

3.2.1 Прямоугольные пластинки

Пластинки в форме прямоугольников образуют границы изменения коэффициента формы для фигур в форме равнобедренных трапеций и параллелограммов. Для определения максимального прогиба пластинок на упругом винклеровском основании необходимо построить графики изменения параметров B_w^q и C_w^q относительно K_f для данных пластинок при различных комбинациях граничных условий (рисунок 3.1).

Согласно формулам (3.16) и (3.17), для нахождения значений B_w^q и C_w^q необходимо знать максимальный прогиб пластинки при отсутствии упругого основания $w_{0(k=0)}$ и при произвольном (не равном нулю) значении коэффициента постели $w_{0(k \neq 0)}$. Эти величины могут быть найдены с помощью приближенных методов строительной механики.

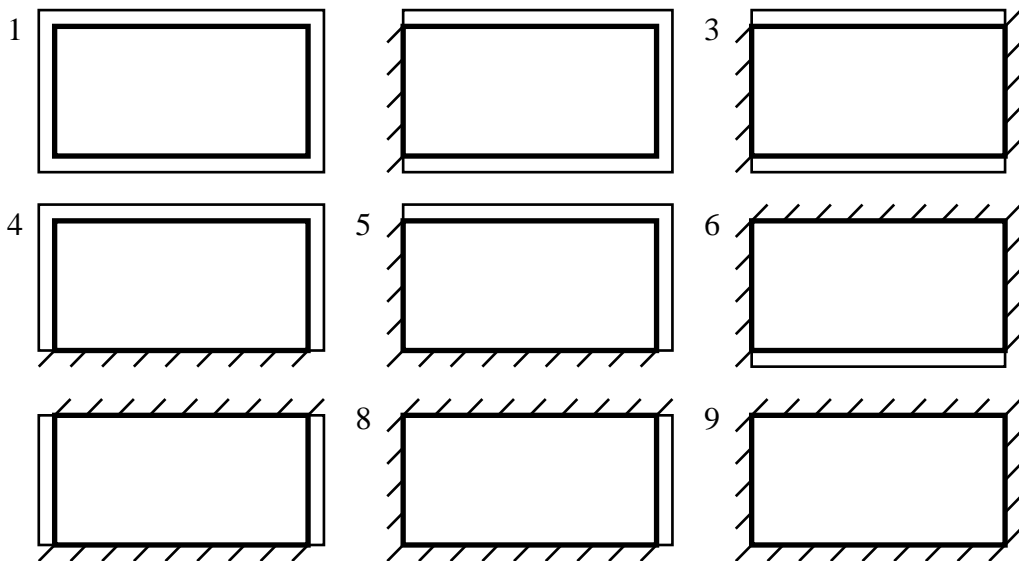


Рисунок 3.1 – Комбинации граничных условий для прямоугольной пластинки: «жесткое защемление – шарнирное опирание»

Определим с использованием МКЭ в программном комплексе «SCAD» значения $w_{0(k=0)}$ и $w_{0(k \neq 0)}$, подсчитаем по формулам (3.16) и (3.17) значения параметров B_w^q и C_w^q , и сведем результаты в таблицу 3.1. Расчет будем вести при следующих параметрах: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, толщина $h = 0,03$ м, $A = 1$ м², интенсивность равномерно

распределенной нагрузки $q = 40 \text{ кН/м}^2$, число конечных элементов 900, тип конечного элемента – четырехугольный конечный элемент плиты. Значение величины $w_{0(k \neq 0)}$ определялось при коэффициенте постели $k = 5 \text{ кН/м}^3$.

Таблица 3.1 – Сопоставление значений параметров V_w^q и C_w^q , полученных с помощью МКЭ и аппроксимирующих функций (3.20)...(3.37)

a/b		1	1,1	1,2	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	3,0	4,0	5,0
K_f		8	8,04	8,13	8,67	9,42	10,00	10,62	11,60	13,33	17,00	20,80
Значения параметра V_w^q												
«1»	МКЭ	246	249	255	292	349	396	450	544	736	1255	1937
	(3.20)	248	250	256	291	347	394	448	544	739	1257	1937
	$\Delta, \%$	0,58	0,53	0,42	0,27	0,60	0,57	0,43	0,03	0,41	0,12	0,03
«2»	МКЭ	350	337	331	345	388	429	479	566	751	1262	1939
	(3.22)	345	341	334	342	391	430	476	565	754	1258	1945
	$\Delta, \%$	1,57	1,29	0,92	0,81	0,85	0,26	0,52	0,17	0,45	0,32	0,30
«3»	МКЭ	522	479	451	424	444	475	517	596	771	1270	1943
	(3.24)	508	488	451	422	444	473	516	598	770	1270	1945
	$\Delta, \%$	2,72	1,77	0,14	0,49	0,07	0,47	0,12	0,29	0,14	0,04	0,13
«4»	МКЭ	350	372	400	513	668	793	934	1181	1674	2962	4626
	(3.26)	341	355	386	504	662	789	931	1176	1675	2958	4634
	$\Delta, \%$	2,87	4,91	3,45	1,88	0,99	0,49	0,41	0,40	0,05	0,11	0,17
«5»	МКЭ	455	460	475	564	704	822	957	1196	1681	2962	4626
	(3.28)	454	460	476	566	707	825	961	1198	1683	2975	4667
	$\Delta, \%$	0,12	0,08	0,01	0,30	0,35	0,34	0,33	0,17	0,08	0,42	0,87
«6»	МКЭ	625	601	594	641	757	863	990	1219	1692	2964	4626
	(3.30)	609	600	588	636	755	860	989	1219	1693	2962	4633
	$\Delta, \%$	2,65	0,22	1,12	0,89	0,33	0,34	0,14	0,06	0,03	0,08	0,16
«7»	МКЭ	522	580	648	912	1260	1538	1852	2381	3440	6176	9646
	(3.32)	511	550	632	896	1259	1539	1843	2373	3450	6160	9672
	$\Delta, \%$	2,25	5,5	2,56	1,81	0,12	0,07	0,48	0,34	0,29	0,25	0,27
«8»	МКЭ	625	666	721	958	1288	1556	1863	2384	3438	6176	9646
	(3.36)	640	671	735	960	1300	1566	1859	2380	3450	6160	9674
	$\Delta, \%$	2,45	0,71	1,95	0,25	0,92	0,61	0,20	0,16	0,37	0,26	0,29
«9»	МКЭ	792	804	836	1029	1331	1586	1882	2393	3438	6183	9657
	(3.38)	792	804	838	1031	1335	1590	1885	2402	3450	6207	9757
	$\Delta, \%$	0,03	0,08	0,19	0,23	0,28	0,24	0,17	0,37	0,35	0,38	1,03
Значения параметра $C_w^q \cdot 10^3$												
«1»	МКЭ	2,625	2,602	2,544	2,252	1,919	1,714	1,529	1,292	0,988	0,611	0,406
	(3.21)	2,627	2,604	2,544	2,252	1,920	1,715	1,530	1,293	0,988	0,610	0,404
	$\Delta, \%$	0,09	0,06	0,03	0,02	0,06	0,08	0,10	0,08	0,01	0,10	0,47
«2»	МКЭ	1,840	1,911	1,946	1,888	1,704	1,561	1,420	1,225	0,956	0,604	0,402
	(3.23)	1,870	1,901	1,951	1,897	1,707	1,568	1,423	1,221	0,959	0,604	0,403
	$\Delta, \%$	1,63	0,54	0,29	0,45	0,18	0,44	0,23	0,30	0,36	0,09	0,36
«3»	МКЭ	1,238	1,341	1,421	1,522	1,470	1,391	1,296	1,147	0,919	0,595	0,400
	(3.25)	1,292	1,345	1,443	1,542	1,480	1,404	1,303	1,145	0,924	0,595	0,402

	Δ, %	4,22	0,28	1,54	1,33	0,68	0,94	0,52	0,19	0,56	0,06	0,45
--	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Продолжение таблицы 3.1

a/b		1	1,1	1,2	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	3,0	4,0	5,0
K_f		8	8,04	8,13	8,67	9,42	10,00	10,62	11,60	13,33	17,00	20,80
«4»	МКЭ	1,840	1,739	1,629	1,300	1,030	0,886	0,766	0,624	0,454	0,262	0,168
	(3.27)	1,802	1,742	1,616	1,287	1,023	0,876	0,762	0,626	0,449	0,264	0,167
	Δ, %	2,10	0,16	0,79	1,01	0,64	1,11	0,48	0,33	0,97	0,71	1,01
«5»	МКЭ	1,411	1,396	1,356	1,166	0,961	0,842	0,737	0,609	0,447	0,262	0,168
	(3.29)	1,411	1,396	1,356	1,167	0,961	0,841	0,737	0,608	0,449	0,261	0,170
	Δ, %	0,02	0,02	0,00	0,07	0,00	0,12	0,05	0,13	0,42	0,41	1,26
«6»	МКЭ	1,026	1,064	1,077	1,013	0,881	0,789	0,701	0,587	0,439	0,262	0,168
	(3.31)	1,036	1,051	1,073	1,013	0,880	0,790	0,701	0,584	0,440	0,261	0,170
	Δ, %	0,89	1,23	0,34	0,06	0,09	0,16	0,05	0,48	0,38	0,25	0,75
«7»	МКЭ	1,237	1,124	1,017	0,754	0,569	0,477	0,403	0,319	0,224	0,128	0,075
	(3.33)	1,235	1,132	1,009	0,758	0,571	0,476	0,400	0,315	0,221	0,125	0,081
	Δ, %	0,19	0,69	0,79	0,63	0,46	0,19	0,60	1,44	1,29	2,60	6,81
«8»	МКЭ	1,026	0,968	0,903	0,706	0,546	0,464	0,395	0,316	0,223	0,128	0,075
	(3.35)	1,038	0,987	0,902	0,701	0,547	0,464	0,396	0,315	0,223	0,126	0,080
	Δ, %	1,15	1,92	0,05	0,63	0,26	0,02	0,08	0,43	0,18	1,92	6,25
«9»	МКЭ	0,806	0,796	0,769	0,646	0,521	0,446	0,387	0,311	0,223	0,120	0,075
	(3.37)	0,806	0,796	0,769	0,646	0,520	0,447	0,386	0,311	0,223	0,126	0,79
	Δ, %	0,01	0,06	0,00	0,04	0,16	0,24	0,37	0,03	0,25	4,24	5,35

Примечания:

1. В таблице для сокращения объема приведена лишь часть исследуемых данных.
2. Данные в таблице представлены с округлением.
3. Величины a и b – большая и меньшая стороны прямоугольника соответственно.

Используя программный комплекс TableCurve 2D, построим по табличным данным следующие аппроксимирующие функции:

при 1-й комбинации граничных условий (рисунок 1):

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4, \quad (3.20)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4]^{-1}; \quad (3.21)$$

при 2-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9}; \quad (3.22)$$

$$C_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \quad (3.23)$$

при 3-й комбинации граничных условий:

$$\begin{aligned} B_w^q &= a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ &+ g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} C_w^q &= a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ &+ g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \end{aligned} \quad (3.25)$$

при 4-й комбинации граничных условий:

$$\begin{aligned} B_w^q &= a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ &+ g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} C_w^q &= a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ &+ g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \end{aligned} \quad (3.27)$$

при 5-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5 + gK_f^6, \quad (3.28)$$

$$C_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5 + gK_f^6 + hK_f^7 + kK_f^8 + lK_f^9, \quad (3.29)$$

при 6-й комбинации граничных условий:

$$\begin{aligned} B_w^q &= a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ &+ g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} C_w^q &= a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ &+ g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \end{aligned} \quad (3.31)$$

при 7-й комбинации граничных условий:

$$\begin{aligned} B_w^q &= a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ &+ g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9}; \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2] / [1 + dK_f + eK_f^2 + fK_f^3]; \quad (3.33)$$

при 8-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} +$$

$$+g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9}; \quad (3.34)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2]^2 / [1 + dK_f + eK_f^2]^2; \quad (3.35)$$

при 9-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5 + gK_f^6; \quad (3.36)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5]^{-1}. \quad (3.37)$$

Точность результатов, полученных с помощью функций (3.20)...(3.37), является достаточной для инженерных расчетов. Расчетные значения параметров B_w^q и C_w^q , а также погрешности полученных результатов приведены в таблице 3.1. Значения коэффициентов $a...m$ приведены в таблице 3.2.

Сложный вид аппроксимирующих функций и большое количество знаков после запятой у коэффициентов пропорциональности были приняты с целью обеспечения высокой точности решений, получаемых с помощью этих функций, так как они в дальнейшем будут использованы для разработки программного комплекса.

На основании табличных данных на рисунках 3.2 и 3.3 построены кривые $B_w^q - K_f$ и $C_w^q - K_f$.

Наличие точек экстремума при некоторых комбинациях граничных условий объясняется тем, что этих случаях в пластинке происходит смещение ненагруженных изгибаемым моментом сечений. В результате этого её линии уровня имеют форму, отличную от формы самой пластинки, иногда более правильную. Это приводит к тому, что экстремальное значение максимального прогиба будет не у квадратной, наиболее правильной по форме пластинки, а у прямоугольной.

Таким образом, зная коэффициент формы заданной прямоугольной пластинки, можно, используя аппроксимирующие функции $B_w^q - K_f$ и $C_w^q - K_f$, соответствующие заданным граничным условиям, найти значения

параметров B_w^q и C_w^q , и, воспользовавшись формулой (3.15), определить её максимальный прогиб.

Таблица 3.2 – Значения коэффициентов а...т аппроксимирующих функций (3.20)...(3.37)

Формула	Коэффициенты										
	a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m
(3.20)	$1,727 \cdot 10^2$	$-4,607 \cdot 10^1$	7,443	$-0,692 \cdot 10^{-1}$	$0,671 \cdot 10^{-3}$	–	–	–	–	–	–
(3.21)	$-1,748 \cdot 10^2$	$-5,929 \cdot 10^1$	-0,519	0,249	$-0,321 \cdot 10^{-2}$	–	–	–	–	–	–
(3.22)	$9,3110771 \cdot 10^4$	$-9,808331 \cdot 10^6$	$4,9258838 \cdot 10^8$	$-1,4729409 \cdot 10^{10}$	$2,829422 \cdot 10^{11}$	$-3,58500411 \cdot 10^{12}$	$2,9816432 \cdot 10^{13}$	$-1,5660066 \cdot 10^{14}$	$4,7083686 \cdot 10^{14}$	$-6,1724184 \cdot 10^{14}$	–
(3.23)	$-0,18189564 \cdot 10^{-1}$	3,4709798	$-2,8615198 \cdot 10^2$	$1,3461738 \cdot 10^4$	$-4,001110 \cdot 10^5$	$7,8688111 \cdot 10^6$	$-1,0388047 \cdot 10^8$	$9,1064291 \cdot 10^8$	$-5,0828628 \cdot 10^9$	$1,6343644 \cdot 10^{10}$	$-2,3033986 \cdot 10^{10}$
(3.24)	$-1,2343233 \cdot 10^3$	$-1,5325631 \cdot 10^7$	$9,2705689 \cdot 10^8$	$-3,4241348 \cdot 10^{10}$	$8,3708968 \cdot 10^{11}$	$-1,4002332 \cdot 10^{13}$	$1,6135721 \cdot 10^{14}$	$-1,2606 \cdot 10^{15}$	$6,3774776 \cdot 10^{15}$	$-1,8846625 \cdot 10^{16}$	$2,469374 \cdot 10^{16}$
(3.25)	$-0,2422748 \cdot 10^{-1}$	4,6025892	$-3,7803408 \cdot 10^2$	$1,7719178 \cdot 10^4$	$-5,2489555 \cdot 10^5$	$1,0289718 \cdot 10^7$	$-1,3542151 \cdot 10^8$	$1,1836615 \cdot 10^9$	$-6,5885052 \cdot 10^9$	$2,1130066 \cdot 10^{10}$	$-2,9707436 \cdot 10^{10}$
(3.26)	$2,444801 \cdot 10^5$	$-2,7157327 \cdot 10^7$	$1,4550018 \cdot 10^9$	$-4,7136674 \cdot 10^{10}$	$1,0011481 \cdot 10^{12}$	$-1,4416811 \cdot 10^{13}$	$1,4174892 \cdot 10^{14}$	$-9,3639151 \cdot 10^{14}$	$-3,9675857 \cdot 10^{15}$	$-9,7147575 \cdot 10^{15}$	$1,041129 \cdot 10^{16}$
(3.27)	$0,14964785 \cdot 10^{-1}$	$-2,9935272$	$2,5770638 \cdot 10^2$	$-1,2557305 \cdot 10^4$	$3,8431129 \cdot 10^5$	$-7,7339001 \cdot 10^6$	$1,0392263 \cdot 10^8$	$-9,2331405 \cdot 10^8$	$5,2054316 \cdot 10^9$	$-1,6860944 \cdot 10^{10}$	$2,3887803 \cdot 10^{10}$
(3.28)	$-4,658 \cdot 10^2$	$1,509 \cdot 10^2$	$-1,932 \cdot 10$	2,551	-0,102	$0,197 \cdot 10^{-2}$	$-1,459 \cdot 10^{-5}$	–	–	–	–
(3.29)	$0,32966617 \cdot 10^{-1}$	$-0,13133175 \cdot 10^{-1}$	$0,24128649 \cdot 10^{-2}$	$-0,25901955 \cdot 10^{-3}$	$1,7646701 \cdot 10^{-5}$	$-7,8600955 \cdot 10^{-7}$	$2,2819922 \cdot 10^{-8}$	$4,1596333 \cdot 10^{-10}$	$4,3197538 \cdot 10^{-12}$	$-1,9485454 \cdot 10^{-14}$	–
(3.30)	$2,5791024 \cdot 10^5$	$-2,9664219 \cdot 10^7$	$1,6577512 \cdot 10^9$	$-5,649937810 \cdot 10^{10}$	$1,2748658 \cdot 10^{12}$	$-1,9718217 \cdot 10^{13}$	$2,1075332 \cdot 10^{14}$	$-1,5334539 \cdot 10^{15}$	$7,2601449 \cdot 10^{15}$	$-2,0183836 \cdot 10^{16}$	$2,5012849 \cdot 10^{16}$
(3.31)	$-0,1916881 \cdot 10^{-1}$	3,5012136	$-2,7630495 \cdot 10^2$	$1,2444691 \cdot 10^4$	$-3,5489271 \cdot 10^5$	$6,7136071 \cdot 10^6$	$-8,5505836 \cdot 10^7$	$7,2544169 \cdot 10^8$	$-3,9312633 \cdot 10^9$	$1,2309922 \cdot 10^{10}$	$-1,694226 \cdot 10^{10}$
(3.32)	$4,8539166 \cdot 10^5$	$-5,2322203 \cdot 10^7$	$2,6916482 \cdot 10^9$	$-8,257499 \cdot 10^{10}$	$1,6310726 \cdot 10^{12}$	$-2,1311304 \cdot 10^{13}$	$1,8335706 \cdot 10^{14}$	$-9,9959463 \cdot 10^{14}$	$3,1306095 \cdot 10^{15}$	$-4,291036 \cdot 10^{15}$	–
(3.33)	$-0,1822432 \cdot 10^{-2}$	$0,21767088 \cdot 10^{-3}$	$1,6023523 \cdot 10^{-5}$	0,84918631	$-0,99089842 \cdot 10^{-1}$	$0,91402335 \cdot 10^{-2}$	–	–	–	–	–
(3.34)	$4,829771 \cdot 10^5$	$-5,1920254 \cdot 10^7$	$2,6631576 \cdot 10^9$	$-8,1445271 \cdot 10^{10}$	$1,6034019 \cdot 10^{12}$	$-2,0875997 \cdot 10^{13}$	$1,7894559 \cdot 10^{14}$	$-9,7174338 \cdot 10^{15}$	$3,0309553 \cdot 10^{15}$	$-4,1367159 \cdot 10^{15}$	–
(3.35)	$-0,61964745 \cdot 10^{-1}$	$0,77860261 \cdot 10^{-2}$	$1,6516908 \cdot 10^{-5}$	-0,52394868	$0,50537973 \cdot 10^{-1}$	–	–	–	–	–	–
(3.36)	$-3,928 \cdot 10^2$	$4,834 \cdot 10^1$	-5,559	3,26	-0,149	$0,309 \cdot 10^{-2}$	$-2,381 \cdot 10^{-5}$	–	–	–	–
(3.37)	$-2,426 \cdot 10^3$	$7,379 \cdot 10^2$	$-7,809 \cdot 10^1$	$0,674 \cdot 10^1$	-0,183	$0,181 \cdot 10^{-2}$	–	–	–	–	–

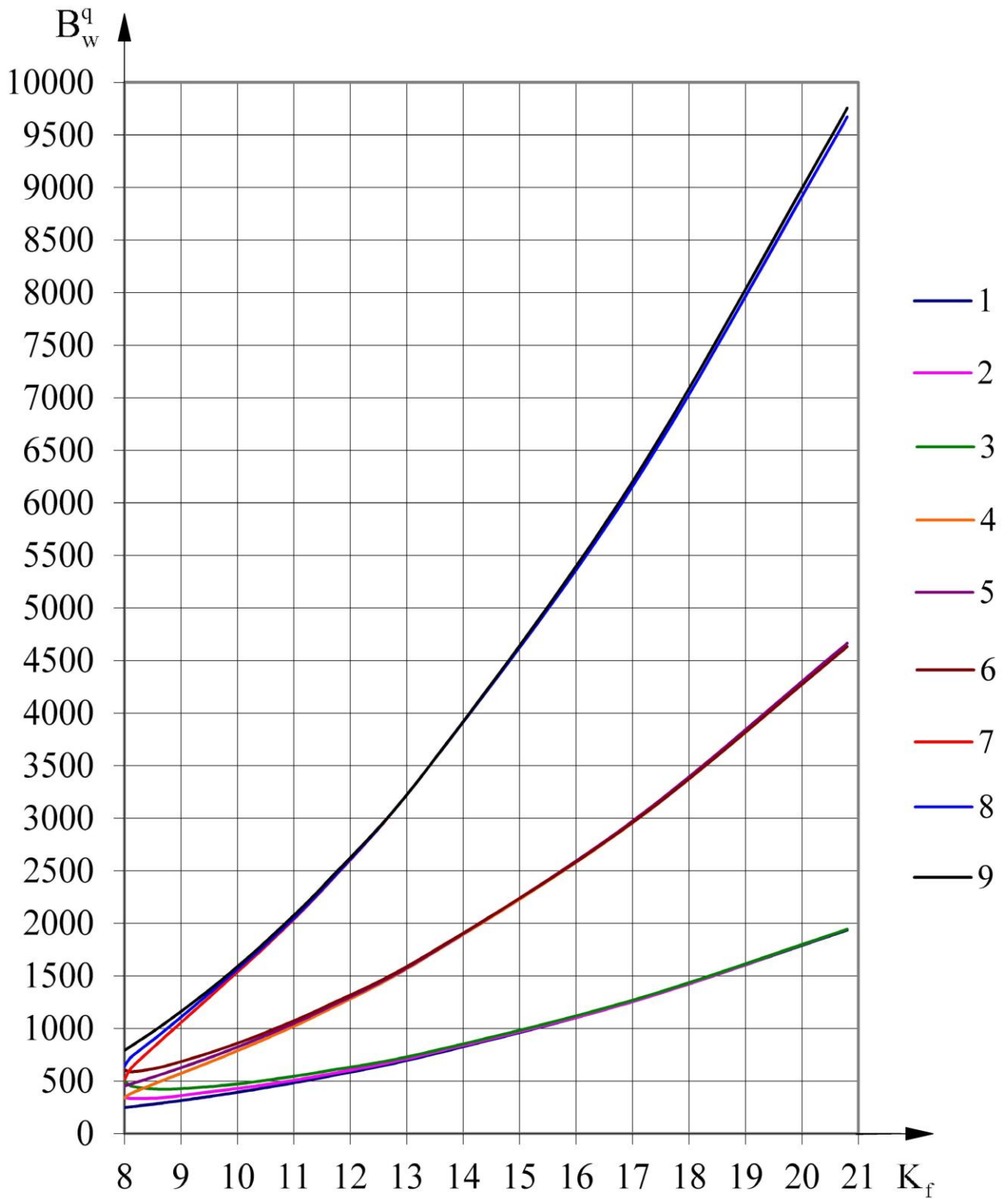


Рисунок 3.2 – Кривые $B_w^q - K_f$ для прямоугольных пластинок на упругом основании с комбинациями граничных условий по рисунку 3.1

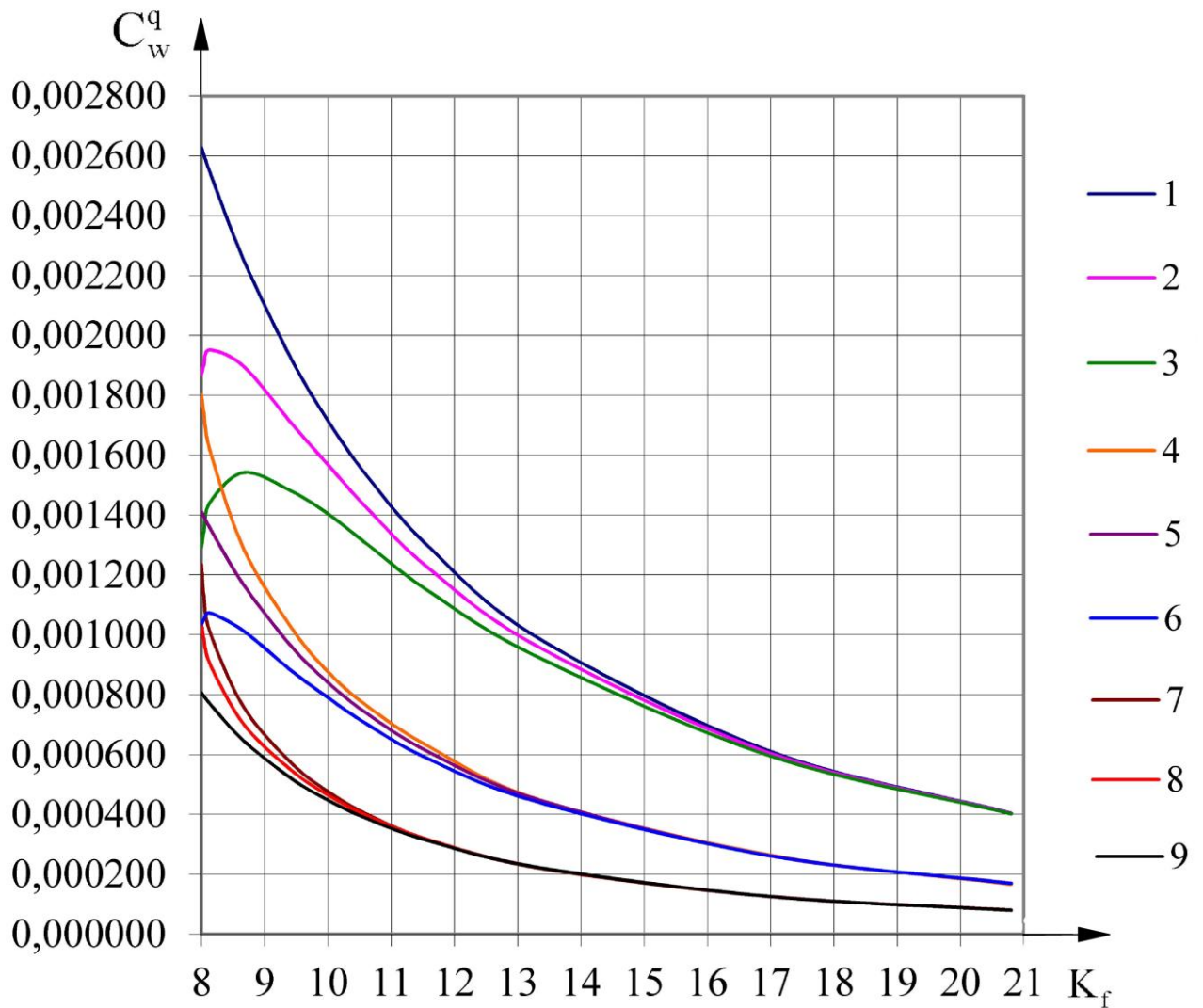


Рисунок 3.3 – Кривые $C_w^q - K_f$ для прямоугольных пластинок на упругом основании с комбинациями граничных условий по рисунку 3.1

3.2.2 Ромбические пластинки

Пластинки в форме ромбов образуют границу изменения коэффициента формы для фигур в форме параллелограммов. По аналогии с п. 3.2.1, построим графики изменения K_f для ромбических пластинок при различных комбинациях граничных условий (рисунок 3.4).

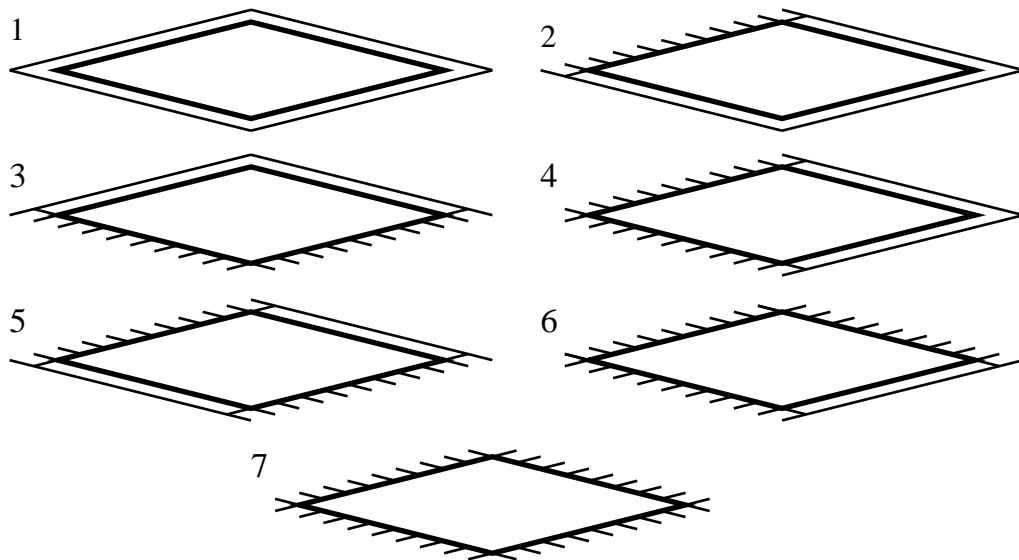


Рисунок 3.4 – Комбинации граничных условий для ромбической пластинки:
«жесткое защемление – шарнирное опирание»

С использованием МКЭ в программном комплексе «SCAD» определим значения $w_{0(k=0)}$ и $w_{0(k \neq 0)}$, по формулам (3.16) и (3.17) подсчитаем значения параметров B_w^q и C_w^q . Результаты сведем в таблицу 3.3.

Расчет производим при следующих параметрах: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, толщина $h = 0,03$ м, $A = 1$ м², интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 40$ кН/м², число конечных элементов 924, типы конечных элементов – четырехугольный конечный элемент плиты, треугольный конечный элемент плиты (с дополнительным узлом в середине каждой стороны элемента). Значение величины $w_{0(k \neq 0)}$ определялось при коэффициенте постели $k = 5$ кН/м³.

Таблица 3.3 – Сопоставление значений параметров B_w^q и C_w^q , полученных с помощью МКЭ и аппроксимирующих функций (3.38)...(3.51)

α , град.	90	80	70	65	60	55	50	45	40	30	20	
K_f	8	8,12	8,52	8,83	9,24	9,77	10,44	11,32	12,45	16,01	23,40	
Значения параметра B_w^q												
«1»	МКЭ	243	247	261	274	289	310	337	374	424	598	1052
	(3.38)	242	247	262	274	290	311	339	375	425	596	1057
	Δ , %	0,48	0,24	0,13	0,14	0,31	0,41	0,43	0,38	0,21	0,33	0,47

Продолжение таблицы 3.3

α , град.		90	80	70	65	60	55	50	45	40	30	20
	K_f	8	8,12	8,52	8,83	9,24	9,77	10,44	11,32	12,45	16,01	23,40
«2»	МКЭ	345	351	372	390	413	444	485	539	613	872	1546
	(3.40)	343	350	373	391	415	447	488	542	615	870	1559
	Δ , %	0,51	0,29	0,12	0,25	0,46	0,59	0,60	0,55	0,36	0,27	0,80
«3»	МКЭ	446	453	479	501	529	567	616	682	772	1080	1858
	(3.42)	443	452	479	501	531	569	619	684	773	1076	1864
	Δ , %	0,59	0,27	0,06	0,19	0,33	0,40	0,38	0,30	0,11	0,39	0,34
«4»	МКЭ	446	456	485	510	542	584	641	717	822	1194	2185
	(3.44)	448	456	485	508	540	583	640	717	824	1195	2187
	Δ , %	0,38	0,16	0,07	0,25	0,27	0,23	0,14	0,05	0,23	0,10	0,10
«5»	МКЭ	510	521	555	583	620	670	737	826	951	1399	2621
	(3.46)	512	522	554	582	619	669	736	827	954	1403	2636
	Δ , %	0,27	0,19	0,04	0,17	0,20	0,19	0,10	0,10	0,30	0,29	0,56
«6»	МКЭ	611	623	663	697	741	800	879	985	1132	1654	3030
	(3.48)	612	624	663	695	739	799	878	986	1135	1657	3043
	Δ , %	0,28	0,19	0,05	0,18	0,21	0,20	0,12	0,07	0,27	0,21	0,43
«7»	МКЭ	772	788	841	884	943	1021	1126	1268	1465	2174	4095
	(3.50)	774	789	840	882	940	1018	1124	1268	1468	2176	4095
	Δ , %	0,27	0,17	0,10	0,24	0,29	0,28	0,19	0,00	0,20	0,08	0,00
Значения параметра $C_w^q \cdot 10^3$												
«1»	МКЭ	2,662	2,617	2,476	2,367	2,241	2,093	1,926	1,741	1,541	1,102	0,636
	(3.39)	2,665	2,617	2,473	2,368	2,241	2,093	1,926	1,742	1,541	1,102	0,633
	Δ , %	0,10	0,02	0,12	0,01	0,01	0,01	0,03	0,02	0,03	0,00	0,40
«2»	МКЭ	1,872	1,838	1,737	1,660	1,569	1,463	1,346	1,215	1,074	0,763	0,439
	(3.41)	1,873	1,839	1,737	1,661	1,571	1,465	1,346	1,215	1,073	0,765	0,439
	Δ , %	0,06	0,01	0,01	0,09	0,09	0,12	0,00	0,01	0,00	0,08	0,56
«3»	МКЭ	1,440	1,419	1,344	1,288	1,221	1,142	1,053	0,955	0,848	0,612	0,363
	(3.43)	1,443	1,418	1,343	1,287	1,220	1,142	1,054	0,955	0,848	0,612	0,361
	Δ , %	0,20	0,05	0,10	0,05	0,04	0,03	0,08	0,01	0,00	0,08	0,56
«4»	МКЭ	1,440	1,410	1,326	1,264	1,191	1,107	1,013	0,909	0,797	0,556	0,310
	(3.45)	1,439	1,410	1,326	1,265	1,191	1,106	1,012	0,908	0,797	0,557	0,308
	Δ , %	0,10	0,04	0,02	0,03	0,03	0,05	0,08	0,11	0,01	0,14	0,60
«5»	МКЭ	1,267	1,243	1,170	1,116	1,052	0,977	0,893	0,801	0,702	0,487	0,269
	(3.47)	1,267	1,242	1,170	1,116	1,052	0,977	0,893	0,801	0,701	0,487	0,267
	Δ , %	0,01	0,02	0,01	0,03	0,01	0,03	0,06	0,01	0,09	0,02	0,73
«6»	МКЭ	1,050	1,030	0,970	0,926	0,873	0,811	0,741	0,665	0,583	0,407	0,228
	(3.49)	1,050	1,030	0,970	0,926	0,873	0,811	0,741	0,665	0,583	0,408	0,228
	Δ , %	0,04	0,02	0,00	0,06	0,03	0,01	0,05	0,04	0,07	0,22	0,39
«7»	МКЭ	0,827	0,811	0,763	0,727	0,683	0,635	0,577	0,514	0,449	0,308	0,165
	(3.51)	0,828	0,811	0,763	0,727	0,684	0,634	0,578	0,516	0,449	0,307	0,166
	Δ , %	0,02	0,04	0,02	0,01	0,05	0,11	0,05	0,34	0,19	0,30	0,38
Примечания:												
1. В таблице для сокращения объема приведена лишь часть исследуемых данных.												
2. Данные в таблице представлены с округлением.												
3. Величина α – острый угол ромба												

Используя программу TableCurve 2D, по табличным данным были

построены следующие аппроксимирующие функции:

при 1-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4; \quad (3.38)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4]^{-1}; \quad (3.39)$$

при 2-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4; \quad (3.40)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5]^{-1}; \quad (3.41)$$

при 3-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4; \quad (3.42)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4]^{-1}; \quad (3.43)$$

при 4-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5; \quad (3.44)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4]^{-1}; \quad (3.45)$$

при 5-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5; \quad (3.46)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4]^{-1}; \quad (3.47)$$

при 6-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5; \quad (3.48)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5]^{-1}; \quad (3.49)$$

при 7-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5; \quad (3.50)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5]^{-1}. \quad (3.51)$$

Погрешность результатов, полученных с помощью функций (3.38)...(3.51), не превышает 1 %, что является удовлетворительной величиной для инженерных расчетов. Значения параметров B_w^q и C_w^q ,

полученные с помощью аппроксимирующих функций, а также погрешности полученных результатов приведены в таблице 3.3. Значения коэффициентов $a \dots f$ приведены в таблице 3.4.

На основании табличных данных на рисунках 3.5 и 3.6 построены кривые $B_w^q - K_f$ и $C_w^q - K_f$.

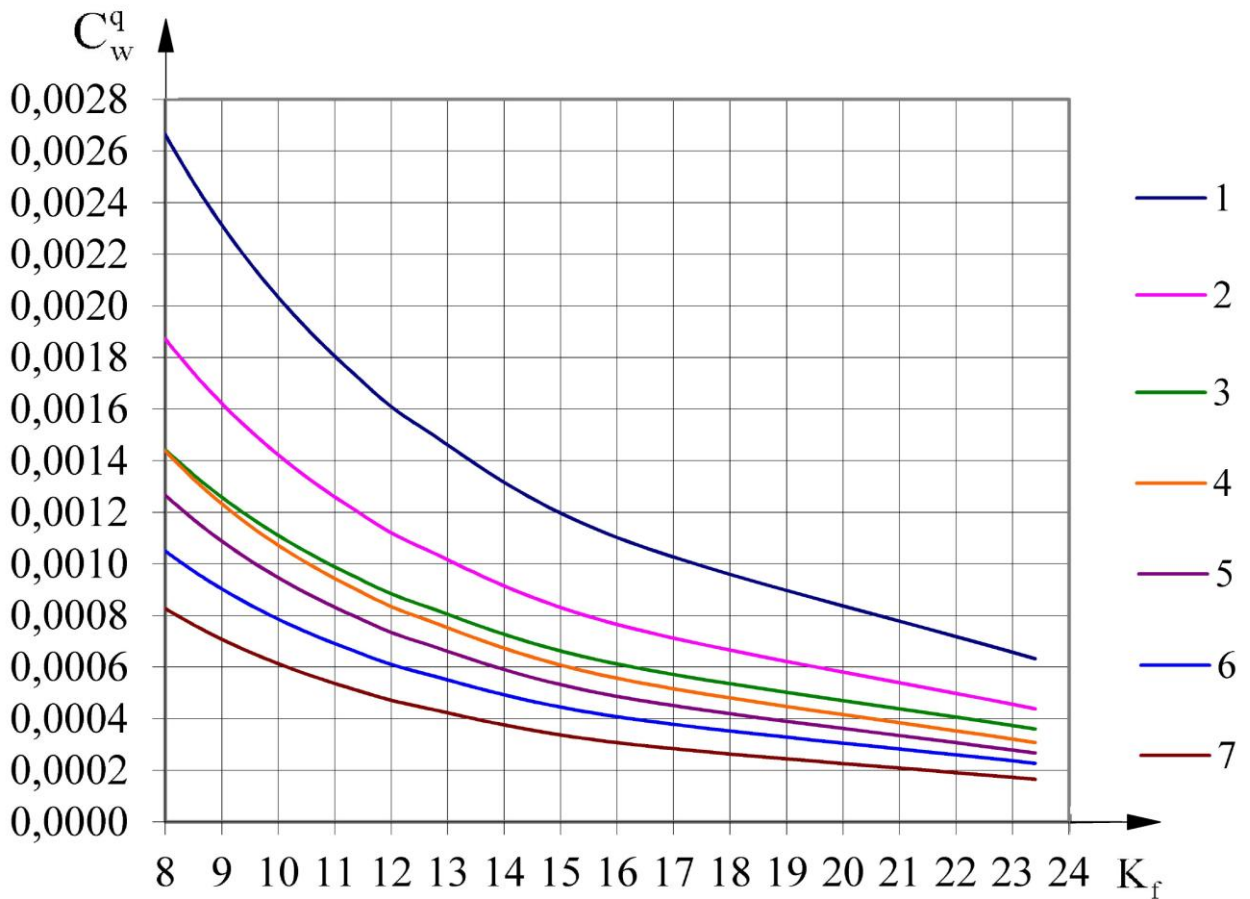


Рисунок 3.5 – Кривые $C_w^q - K_f$ для ромбических пластинок на упругом основании с различными комбинациями граничных условий по рисунку 3.4

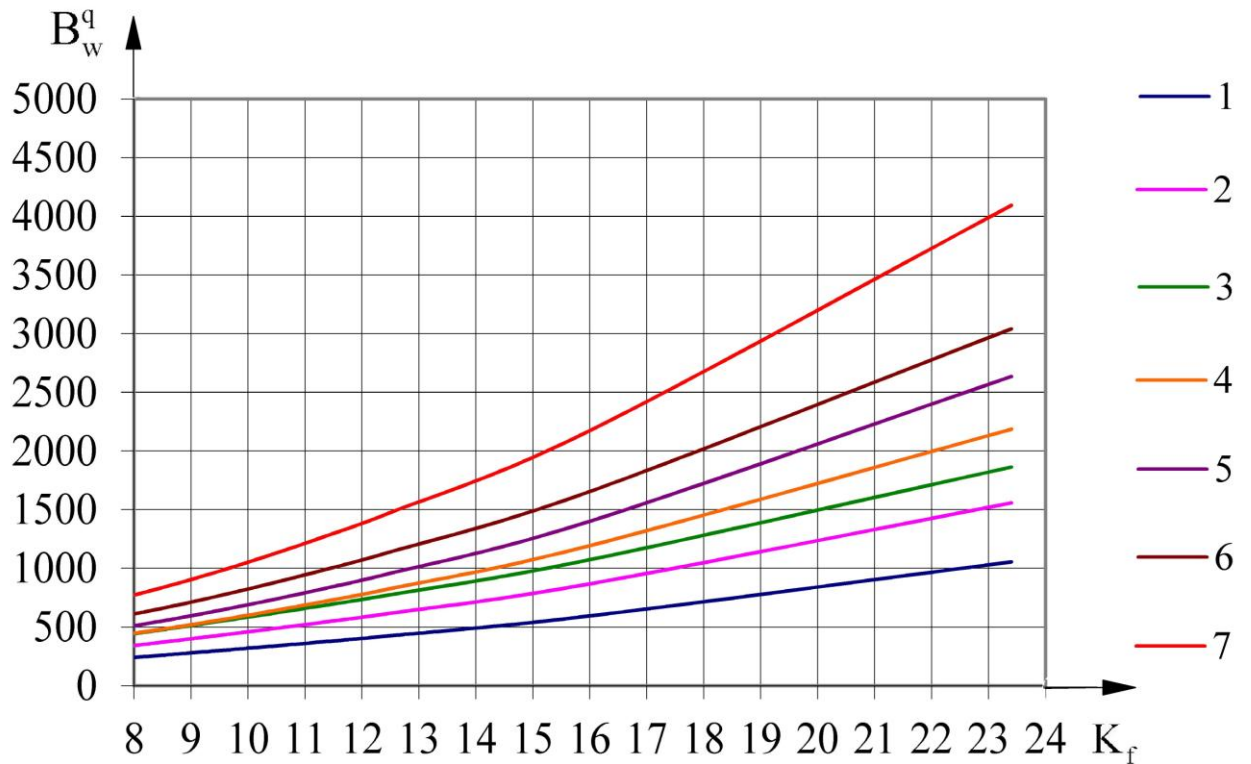


Рисунок 3.6 – Кривые $V_w^q - K_f$ для ромбических пластинок на упругом основании с различными комбинациями граничных условий по рисунку 3.4

Таблица 3.4 – Значения коэффициентов $a...f$ аппроксимирующих функций (3.38)...(3.51)

Формула	Коэффициенты					
	a	b	c	d	e	f
(3.38)	$-6,041 \cdot 10^1$	$4,045 \cdot 10^1$	-0,777	0,06	$-0,577 \cdot 10^{-3}$	–
(3.39)	-6,857	$4,113 \cdot 10^1$	0,641	$0,246 \cdot 10^{-1}$	$-0,141 \cdot 10^{-3}$	–
(3.40)	$-1,227 \cdot 10^2$	$6,484 \cdot 10^1$	-1,613	0,107	$-0,108 \cdot 10^{-2}$	–
(3.41)	$8,89 \cdot 10$	$2,196 \cdot 10^1$	5,742	-0,245	$0,722 \cdot 10^{-2}$	$-7,026 \cdot 10^{-5}$
(3.42)	$-1,008 \cdot 10^2$	$7,144 \cdot 10^1$	-1,104	$0,919 \cdot 10^{-1}$	$-0,933 \cdot 10^{-3}$	–
(3.43)	$4,376 \cdot 10^1$	$6,321 \cdot 10^1$	2,237	$-4,588 \cdot 10^{-5}$	$7,934 \cdot 10^{-5}$	–
(3.44)	$3,215 \cdot 10^2$	$-6,763 \cdot 10^1$	1,515	-0,735	$0,195 \cdot 10^{-1}$	$-0,182 \cdot 10^{-3}$
(3.45)	$-1,097 \cdot 10^2$	$9,471 \cdot 10^1$	-0,237	0,133	$-0,145 \cdot 10^{-2}$	–
(3.46)	$4,028 \cdot 10^2$	$-8,743 \cdot 10^1$	$1,848 \cdot 10^1$	-0,864	0,023	$-0,214 \cdot 10^{-3}$
(3.47)	$0,382 \cdot 10^2$	$0,623 \cdot 10^2$	4,027	$-0,164 \cdot 10^{-1}$	$0,827 \cdot 10^{-3}$	–
(3.48)	$5,095 \cdot 10^2$	$-1,141 \cdot 10^2$	$2,297 \cdot 10^1$	-1,099	$0,285 \cdot 10^{-1}$	$-0,262 \cdot 10^{-3}$
(3.49)	$2,924 \cdot 10^2$	$-1,357 \cdot 10^1$	$1,681 \cdot 10^1$	-0,756	0,021	$-0,199 \cdot 10^{-3}$
(3.50)	$7,336 \cdot 10^2$	$-1,771 \cdot 10^2$	$3,291 \cdot 10^1$	-1,572	0,041	$-0,38 \cdot 10^{-3}$
(3.51)	$2,567 \cdot 10^1$	$1,112 \cdot 10^2$	2,57	0,331	$-0,113 \cdot 10^{-1}$	$0,164 \cdot 10^{-3}$

Следовательно, зная коэффициент формы заданной ромбической

пластинки, можно, используя аппроксимирующие функции $B_w^q - K_f$ и $C_w^q - K_f$ соответствующие заданным граничным условиям, найти значения параметров B_w^q и C_w^q , и по формуле (3.15) определить её максимальный прогиб.

3.2.3 Пластинки в форме равнобедренных треугольников

Пластинки в форме равнобедренных треугольников образуют границы изменения коэффициента формы для фигур в форме равнобедренных трапеций и произвольных треугольников. Аналогично с пп. 3.2.1...3.2.2 построим кривые $B_w^q - K_f$ и $C_w^q - K_f$ для треугольных пластинок при различных комбинациях граничных условий (рисунок 3.7).

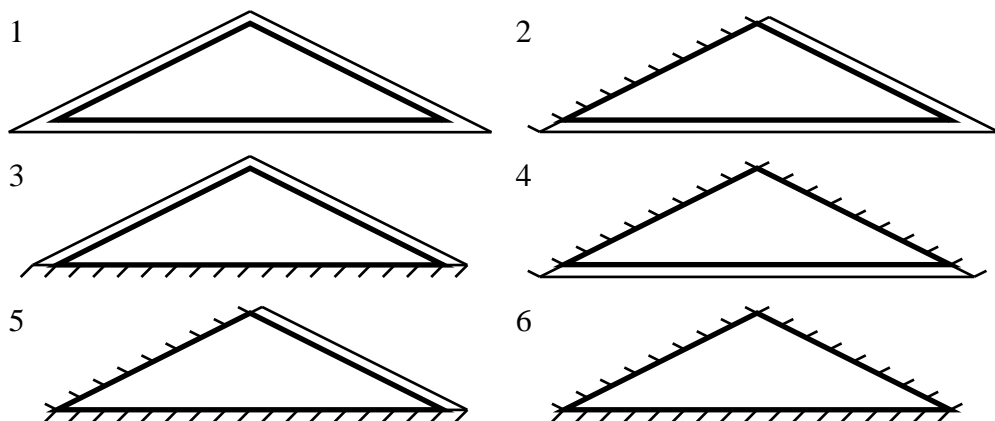


Рисунок 3.7 – Комбинации граничных условий для треугольной пластинки: «жесткое защемление – шарнирное опирание»

Используя МКЭ в программном комплексе «SCAD» вычислим значения $w_{0(k=0)}$ и $w_{0(k \neq 0)}$, по формулам рассчитаем (3.16) и (3.17) значения параметров B_w^q и C_w^q . Результаты сведем в таблицу 3.5.

Расчет производим при следующих параметрах: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, толщина $h = 0,03$ м, $A = 1$ м², интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 40$ кН/м², число

конечных элементов 930, типы конечных элементов – четырехугольный конечный элемент плиты, треугольный конечный элемент плиты (с дополнительным узлом в середине каждой стороны элемента). Значение величины $w_{0(k \neq 0)}$ определялось при коэффициенте постели $k = 5 \text{ кН/м}^3$.

Таблица 3.5 – Сопоставление значений параметров B_w^q и C_w^q , полученных с помощью МКЭ и аппроксимирующих функций

α		85	80	70	60	55	50	45	30	20
K_f		27,03	16,07	11,20	10,39	10,54	10,96	11,66	16,09	23,42
Значения параметра B_w^q										
«1»	МКЭ	1531	624	361	323	329	347	378	600	1068
	(3.52,3.64)	1531	625	360	323	329	348	378	600	1067
	$\Delta, \%$	0,01	0,15	0,23	0,05	0,01	0,09	0,06	0,01	0,06
«2»	МКЭ	3007	1126	589	500	501	522	562	871	1523
	(3.54,3.66)	3007	1126	589	496	503	525	564	871	1525
	$\Delta, \%$	0,00	0,00	0,09	0,88	0,38	0,63	0,32	0,07	0,17
α		85	80	70	60	55	50	45	30	20
K_f		27,03	16,07	11,20	10,39	10,54	10,96	11,66	16,09	23,42
«3»	МКЭ	1891	785	510	505	538	590	666	1169	2216
	(3.56,3.68)	1891	785	508	506	537	591	666	1170	2216
	$\Delta, \%$	0,00	0,01	0,45	0,06	0,14	0,24	0,03	0,09	0,00
«4»	МКЭ	5605	1892	914	748	738	762	814	1259	2252
	(3.58,3.70)	5605	1892	919	744	744	768	812	1257	2250
	$\Delta, \%$	0,00	0,01	0,51	0,51	0,84	0,32	0,15	0,16	0,10
«5»	МКЭ	3636	1391	808	756	789	851	947	1614	2996
	(3.60,3.72)	3636	1391	806	764	785	845	945	1616	2998
	$\Delta, \%$	0,00	0,00	0,13	1,09	0,45	0,61	0,29	0,12	0,06
«6»	МКЭ	6648	2293	1228	1094	1124	1201	1324	2238	4218
	(3.62,3.74)	6651	2293	1229	1098	1124	1198	1324	2239	4218
	$\Delta, \%$	0,06	0,04	0,03	0,33	0,03	0,23	0,04	0,07	0,00
Значения параметра $C_w^q \cdot 10^3$										
«1»	МКЭ	0,445	1,059	1,792	1,990	1,954	1,856	1,710	1,097	0,631
	(3.53,3.65)	0,447	1,056	1,795	1,991	1,954	1,855	1,709	1,096	0,631
	$\Delta, \%$	0,43	0,33	0,13	0,04	0,01	0,05	0,05	0,01	0,02
«2»	МКЭ	0,227	0,591	1,097	1,282	1,281	1,235	1,150	0,757	0,444
	(3.55,3.67)	0,227	0,590	1,094	1,299	1,286	1,243	1,163	0,761	0,450
	$\Delta, \%$	0,00	0,02	0,35	1,32	0,35	0,62	1,08	0,61	1,32
«3»	МКЭ	0,362	0,841	1,262	1,269	1,195	1,093	0,972	0,567	0,309
	(3.57,3.69)	0,363	0,836	1,257	1,260	1,207	1,092	0,967	0,566	0,312
	$\Delta, \%$	0,17	0,59	0,38	0,68	0,98	0,05	0,54	0,23	0,93
«4»	МКЭ	0,124	0,352	0,707	0,858	0,868	0,845	0,794	0,525	0,302
	(3.59,3.71)	0,124	0,352	0,702	0,861	0,863	0,847	0,794	0,527	0,303
	$\Delta, \%$	0,01	0,05	0,66	0,36	0,59	0,25	0,12	0,25	0,37

Продолжение таблицы 3.5

«5»	МКЭ	0,189	0,477	0,798	0,850	0,816	0,758	0,684	0,412	0,230
	(3.61,3.73)	0,188	0,471	0,782	0,848	0,819	0,757	0,683	0,412	0,230
	$\Delta, \%$	0,71	1,32	2,08	0,24	0,42	0,18	0,15	0,02	0,04
«6»	МКЭ	0,104	0,289	0,527	0,587	0,573	0,539	0,490	0,297	0,164
	(3.63,3.75)	0,104	0,288	0,527	0,586	0,573	0,540	0,491	0,297	0,163
	$\Delta, \%$	0,76	0,42	0,05	0,18	0,03	0,19	0,09	0,16	0,88
Примечания:										
1. В таблице для сокращения объема приведена лишь часть исследуемых данных.										
2. Данные в таблице представлены с округлением.										
3. Величина α – угол при основании равнобедренного треугольника										

Используя программу TableCurve 2D, по данным численного расчёта, построены аппроксимирующие функции $B_w^q - K_f$ и $C_w^q - K_f$.

Пластинки в виде равнобедренных треугольников с углом при основании $\alpha \leq 60^\circ$:

при 1-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2; \quad (3.52)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2]^{-1}; \quad (3.53)$$

при 2-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5; \quad (3.54)$$

$$C_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5}; \quad (3.55)$$

при 3-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \quad (3.56)$$

$$C_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + g[K_f]^{-6}; \quad (3.57)$$

при 4-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7}; \quad (3.58)$$

$$C_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} +$$

$$+g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7}; \quad (3.59)$$

при 5-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5; \quad (3.60)$$

$$C_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ +g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7}; \quad (3.61)$$

при 6-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4; \quad (3.62)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5]^{-1}. \quad (3.63)$$

Пластинки в виде равнобедренных треугольников с углом при основании $\alpha \geq 60^\circ$:

при 1-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + bK_f + cK_f^2; \quad (3.64)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2]^{-1}; \quad (3.65)$$

при 2-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5}; \quad (3.66)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4]^{-1}; \quad (3.67)$$

при 3-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4}; \quad (3.68)$$

$$C_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3}; \quad (3.69)$$

при 4-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4}; \quad (3.70)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4]^{-1}; \quad (3.71)$$

при 5-й комбинации граничных условий:

$$B_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4}; \quad (3.72)$$

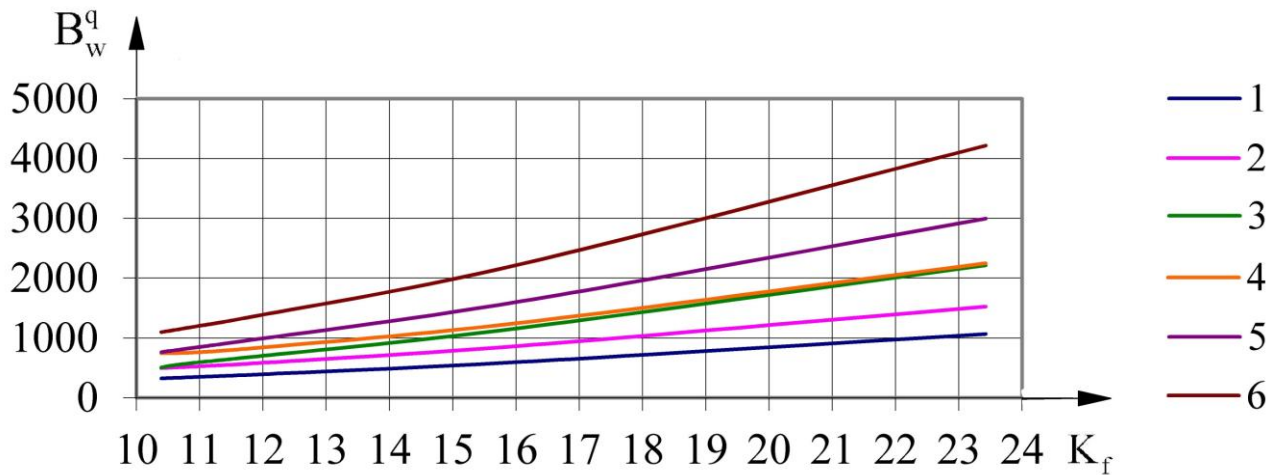
$$C_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4}; \quad (3.73)$$

при 6-й комбинации граничных условий:

$$V_w^q = a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3; \quad (3.74)$$

$$C_w^q = [a + bK_f + cK_f^2]^{-1}. \quad (3.75)$$

Погрешность результатов, полученных с помощью функций (3.52)...(3.75), не превышает 1,5 %, что является достаточным для инженерных расчетов.



а) пластинки с углом при основании $\alpha \leq 60^\circ$; б) то же, при $\alpha \geq 60^\circ$

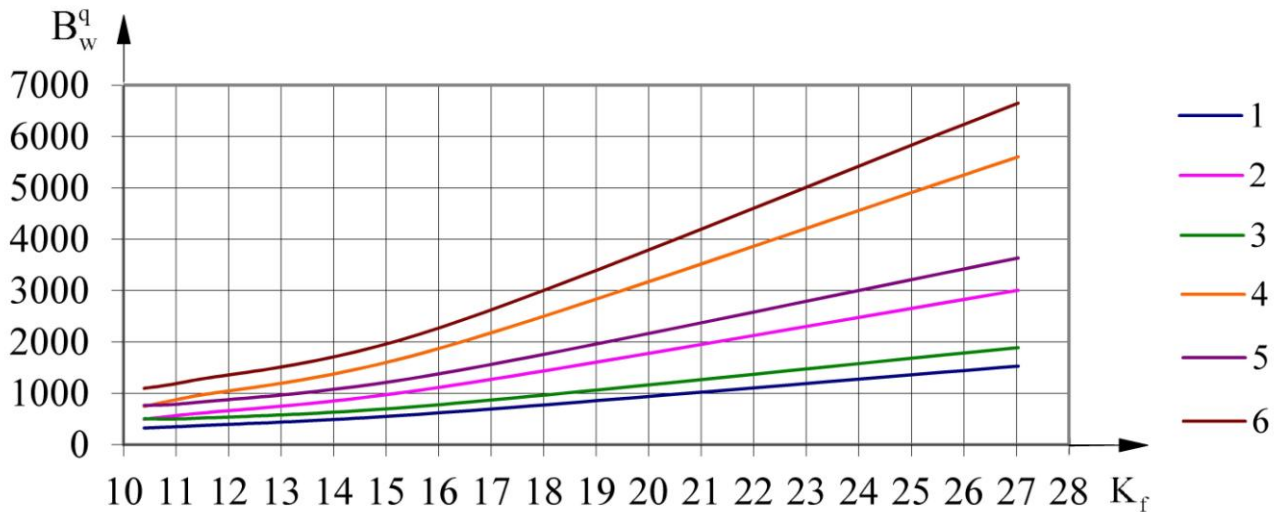
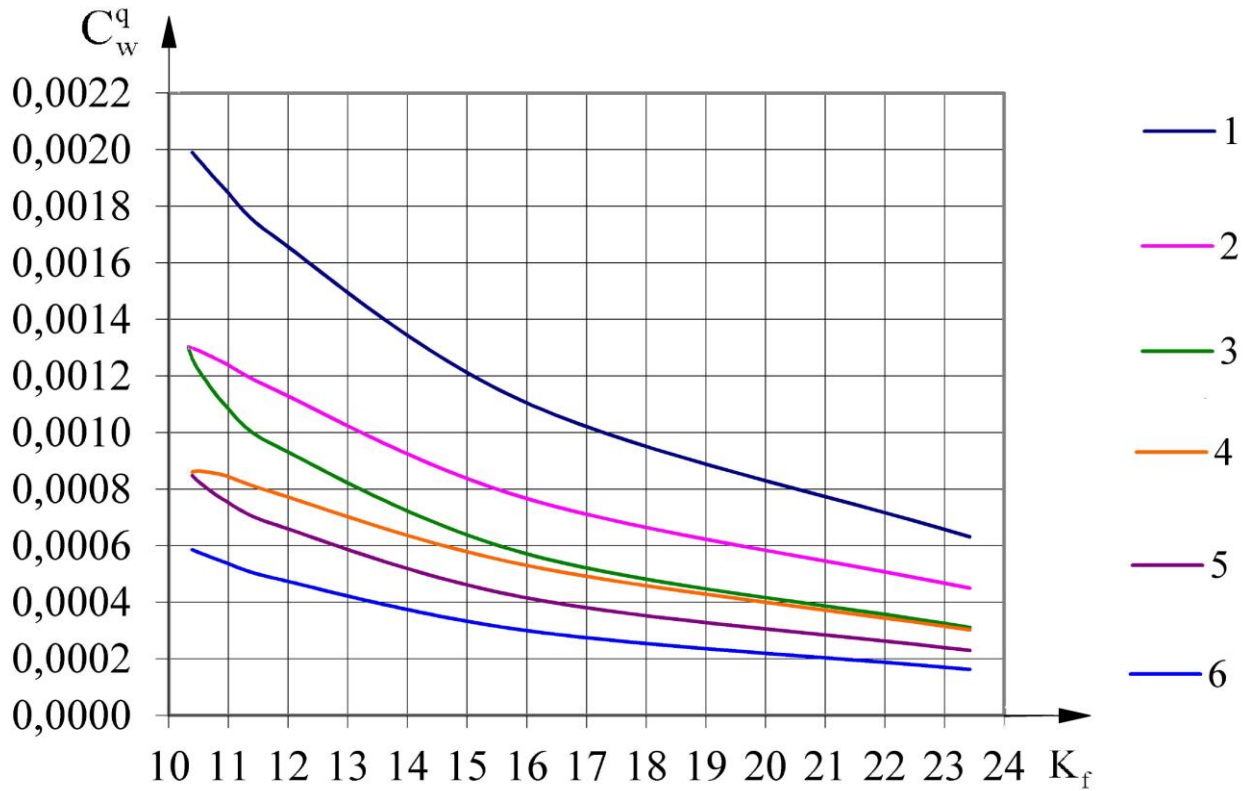


Рисунок 3.8 – Кривые $V_w^q - K_f$ для пластинок в форме равнобедренных треугольников на упругом основании с различными комбинациями граничных условий по рисунку 3.7



а) пластинки с углом при основании $\alpha \leq 60^\circ$; б) то же, при $\alpha \geq 60^\circ$

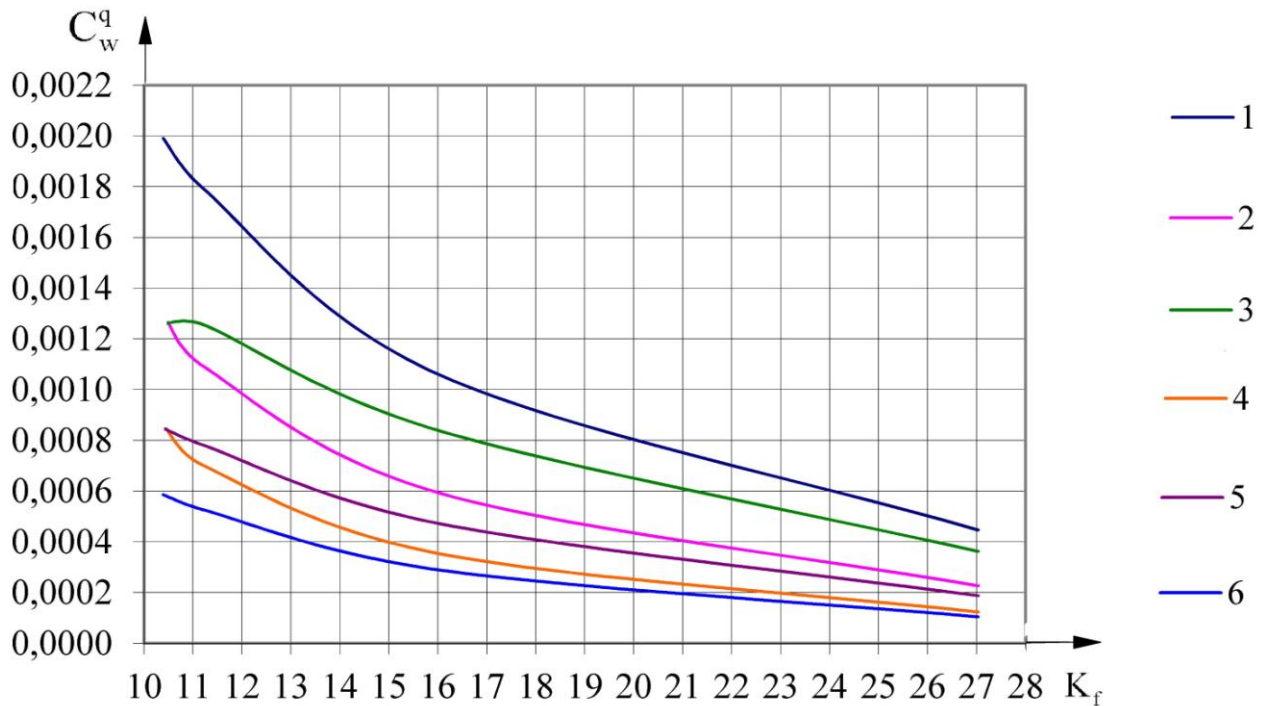


Рисунок 3.9 – Кривые $C_w^q - K_f$ для пластинок в форме равнобедренных треугольников на упругом основании с различными комбинациями граничных условий по рисунку 3.7

Значения параметров V_w^q и C_w^q , полученные с помощью аппроксимирующих функций, а также погрешности полученных результатов приведены в таблице 3.5. Значения коэффициентов $a...m$ приведены в таблице 3.6.

На основании табличных данных на рисунках 3.8 и 3.9 построены кривые $V_w^q - K_f$ и $C_w^q - K_f$ в зависимости от коэффициента формы K_f .

Таким образом, зная коэффициент формы заданной треугольной пластинки, можно, используя аппроксимирующие функции $V_w^q - K_f$ и $C_w^q - K_f$, соответствующие заданным граничным условиям, найти значения параметров V_w^q и C_w^q , и, воспользовавшись формулой (3.15), определить её максимальной прогиб.

Построенные кривые (3.52)...(3.75) образуют нижний предел изменения максимального прогиба для всего множества четырехугольных пластинок с выпуклым контуром и комбинированными граничными условиями. Верхний предел для таких пластинок образуют решения, соответствующие прямоугольным пластинкам. Используя обе эти границы, а также границу, построенную для ромбических пластинок, можно определять прогиб любой четырехугольной пластинки, применяя методику МИКФ.

3.3 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму параллелограмма

Параллелограммные пластинки, как уже говорилось ранее, могут быть образованы путем непрерывного геометрического преобразования прямоугольника в ромб. Следовательно, данные фигуры и их ИФХ будут являться границами изменения искомой величины для ИФХ параллелограммных пластинок.

Методика реализации МИКФ при решении конкретных задач, в частности расчета параллелограммных пластинок на упругом винклеровском основании заключается в следующем.

Максимальный прогиб искомой пластинки определяется по формуле (3.15). В этой формуле неизвестными являются величины коэффициентов B_w^q и C_w^q . Каждый из них находится независимо друг от друга путем построения аппроксимирующих кривых, соответствующих выбранному непрерывному геометрическому преобразованию. Данная операция возможна, если известны значения параметров и для «опорных» решений. Таким образом, проведя интерполяцию «опорных» решений и по коэффициенту формы, находятся значения параметров B_w^q и C_w^q для искомой пластинки. Подставляя их в (3.15), определяется максимальный прогиб заданной пластинки.

Анализируя выводы, сформулированные в пп. 2.1.1 и 3.1.1, можно говорить о том, что нижней границей изменения коэффициента формы для фигур в форме параллелограммов будет являться прямоугольник, а верхней границей – ромб. В то же время, верхней границей изменения величины максимального прогиба для пластинок в форме параллелограммов будут являться прямоугольные пластинки, а нижней границей – ромбические.

В качестве непрерывного геометрического преобразования наиболее рациональным в данном случае представляется использование операции аффинного сдвига прямоугольника относительно основания (рисунок 3.10).

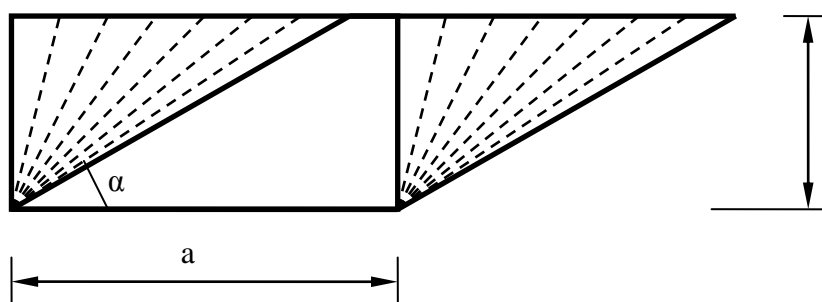


Рисунок 3.10 – Аффинный сдвиг прямоугольника

В процессе преобразования аффинного сдвига остается неизменным отношение основания параллелограмма к его высоте (a/h) и его площадь, а изменяется лишь угол при основании параллелограмма α . Следовательно, коэффициенты формы фигур, являющихся опорными решениями, можно записать через геометрические параметры искомой пластинки:

для ромба ($b = a$):

$$K_f = \frac{8}{\sin \alpha} = \frac{8a}{h}; \quad (3.76)$$

для прямоугольника ($b = h$):

$$K_f = 4 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 4 \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \right). \quad (3.77)$$

Таким образом, при использовании МИКФ для определения максимального прогиба пластинок, имеющих форму параллелограмма, прямоугольные и ромбические пластинки могут служить «опорными» решениями. Учитывая, что функциональная зависимость максимального прогиба пластинок на упругом основании довольно сложна, для упрощения расчета будет производиться интерполяция по параметрам B_w^q и C_w^q , в которых функциональная зависимость от коэффициента формы описывается достаточно просто.

Значения B_w^q и C_w^q будем находить, используя следующие типы интерполяции:

1) линейная интерполяция по двум решениям, для которой аппроксимирующие функции имеют следующий вид:

$$\begin{cases} B_w^q = A_1 + A_2 K_f; \\ C_w^q = A_3 + A_4 K_f; \end{cases} \quad (3.78)$$

где $A_1 \dots A_4$ – коэффициенты пропорциональности, определяемые по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (B_{w1}^q - B_{w2}^q) / (K_{f1} - K_{f2}); \\ A_1 = B_{w1}^q - (B_{w1}^q - B_{w2}^q) / (K_{f1} - K_{f2}) K_{f1}; \\ A_4 = (C_{w1}^q - C_{w2}^q) / (K_{f1} - K_{f2}); \\ A_3 = C_{w1}^q - (C_{w1}^q - C_{w2}^q) / (K_{f1} - K_{f2}) K_{f1}; \end{array} \right. \quad (3.79)$$

2) степенная интерполяция по двум решениям, для которой аппроксимирующие функции будут выглядеть следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = A_1 K_f^{A_2}; \\ C_w^q = A_3 K_f^{A_4}; \end{array} \right. \quad (3.80)$$

где $A_1 \dots A_4$ – коэффициенты пропорциональности, определяемые по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (\ln(B_{w1}^q / B_{w2}^q)) / (\ln(K_{f1} / K_{f2})); \\ A_1 = B_{w1}^q / K_{f1}^{\ln(B_{w1}^q / B_{w2}^q) / \ln(K_{f1} / K_{f2})}; \\ A_4 = \ln(C_{w1}^q / C_{w2}^q) / \ln(K_{f1} / K_{f2}); \\ A_3 = C_{w1}^q / K_{f1}^{\ln(C_{w1}^q / C_{w2}^q) / \ln(K_{f1} / K_{f2})}; \end{array} \right. \quad (3.81)$$

3) линейно-степенная интерполяция по двум решениям, для которой аппроксимирующие функции имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = A_1 + A_2 K_f^2; \\ C_w^q = A_3 + A_4 K_f^2; \end{array} \right. \quad (3.82)$$

где $A_1 \dots A_4$ – коэффициенты пропорциональности, определяемые по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (B_{w1}^q - B_{w2}^q) / (K_{f1}^2 - K_{f2}^2); \\ A_1 = B_{w1}^q - (B_{w1}^q - B_{w2}^q) / (K_{f1}^2 - K_{f2}^2) K_{f1}^2; \\ A_4 = (C_{w1}^q - C_{w2}^q) / (K_{f1}^2 - K_{f2}^2); \\ A_3 = C_{w1}^q - (C_{w1}^q - C_{w2}^q) / (K_{f1}^2 - K_{f2}^2) K_{f1}^2; \end{array} \right. \quad (3.83)$$

В случае комбинированных граничных условий (шарнирное или жестко заземленное) для искомой пластинки существует десять различных

видов опирания (рисунок 3.11). Все они могут быть получены из прямоугольных и ромбических пластинок с соответствующими граничными условиями.

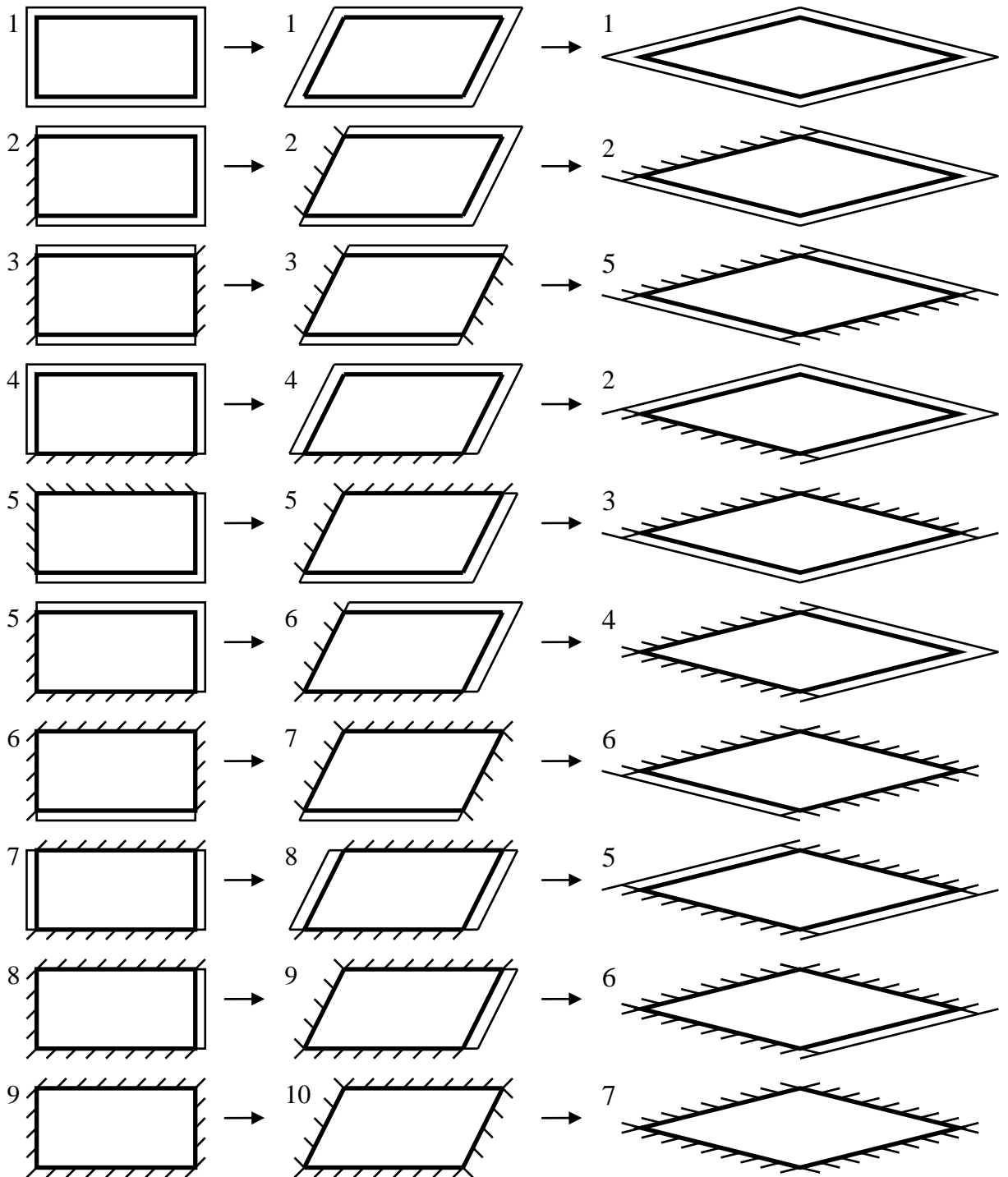


Рисунок 3.11 – Граничные условия параллелограммных пластинок

Для доказательства возможности применения МИКФ к расчету

параллелограммных пластинок, лежащих на упругом основании, рассмотрим ряд примеров.

Пример 3.3.1. Определить прогиб w_0 пластинки в виде параллелограмма, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

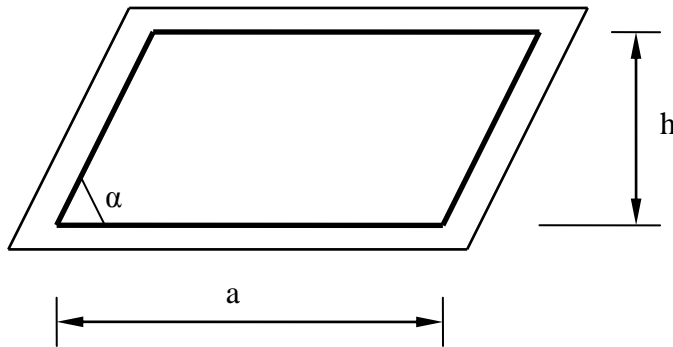


Рисунок 3.12

Характеристики материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа,
 $\nu = 0,3$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 5$ кН/м², коэффициент постели $k = 4000$

кН/м³.

Длина

основания $a = 1,0954$ м, высота $h = 0,9123$ м, угол при основании 60° ($K_f = 9,247$), площадь $A = 1$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и граничные условия опирания приведены на рисунке 3.12.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– прямоугольная пластинка размером $1,0954 \times 0,9123$ м:

$$K_{f1} = 4 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 4 \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \right) = 4 \left(\frac{1,0954}{0,9123} + \frac{0,9123}{1,0954} \right) = 8,133;$$

– ромбическая пластинка с длиной стороны $1,0954$ м и углом при основании $56,44^\circ$:

$$K_{f2} = \frac{8a}{h} = \frac{8 \cdot 1,0954}{0,9123} = 9,6.$$

Используя формулы (3.20), (3.21) и (3.38), (3.39), определяем значения B_w^q и C_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$B_{w_1}^q = 1,727 \cdot 10^2 - 4,607 \cdot 10^1 \cdot K_f + 7,443 \cdot K_f^2 - 0,692 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^3 + \\ + 0,671 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^4 = 256,1;$$

$$C_{w_1}^q = \left[-1,748 \cdot 10^2 + 5,929 \cdot 10^1 \cdot K_f - 0,519 \cdot K_f^2 + 0,249 \cdot K_f^3 - \right. \\ \left. - 0,321 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^4 \right]^{-1} = 2,544 \cdot 10^{-3};$$

– для ромбической пластинки:

$$B_{w_2}^q = -6,041 \cdot 10^1 + 4,045 \cdot 10^1 \cdot K_f - 0,777 \cdot K_f^2 + 0,06 \cdot K_f^3 - \\ - 0,577 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^4 = 304,5;$$

$$C_{w_2}^q = \left[-6,857 + 4,113 \cdot 10^1 \cdot K_f + 0,641 \cdot K_f^2 + 0,246 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^3 - \right. \\ \left. - 0,141 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^4 \right]^{-1} = 2,138 \cdot 10^{-3}.$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (256,1 - 304,5) / (8,133 - 9,6) = 33; \\ A_1 = 256,1 - (256,1 - 304,5) / (8,133 - 9,6) 8,133 = -12,289; \\ A_4 = (2,544 \cdot 10^{-3} - 2,138 \cdot 10^{-3}) / (8,133 - 9,6) = -0,277 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 2,544 \cdot 10^{-3} - (2,544 \cdot 10^{-3} - 2,138 \cdot 10^{-3}) / (8,133 - 9,6) 8,133 = 4,797 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = -12,289 + 33 \cdot 9,247 = 292,9; \\ C_w^q = 4,797 \cdot 10^{-3} - 0,277 \cdot 10^{-3} \cdot 9,247 = 2,236 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 292,9 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 2,236 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,1049 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,1066$ мм), на 1,59%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(256,1/304,5)/\ln(8,133/9,6) = 1,044; \\ A_1 = 256,1/8,133^{\ln(256,1/304,5)/\ln(8,133/9,6)} = 28,71; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(2,544 \cdot 10^{-3}/2,138 \cdot 10^{-3})/\ln(8,133/9,6) = -1,048; \\ A_3 = 2,544 \cdot 10^{-3}/8,133^{\ln(2,544 \cdot 10^{-3}/2,138 \cdot 10^{-3})/\ln(8,133/9,6)} = 21,68 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 28,71 \cdot 9,247^{1,044} = 292,8; \\ C_w^q = 21,68 \cdot 10^{-3} \cdot 9,247^{-1,048} = 2,107 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 292,8 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 2,107 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,1052 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,1066$ мм), на 1,31%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (256,1 - 304,5)/(8,133^2 - 9,6^2) = 1,861; \\ A_1 = 256,1 - (256,1 - 304,5)/(8,133^2 - 9,6^2) 8,133^2 = 133; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (2,544 \cdot 10^{-3} - 2,138 \cdot 10^{-3})/(8,133^2 - 9,6^2) = 3,612 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 2,544 \cdot 10^{-3} - \frac{2,544 \cdot 10^{-3} - 2,138 \cdot 10^{-3}}{8,133^2 - 9,6^2} 8,133^2 = -1,599 \cdot 10^{-5}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 133 + 1,861 \cdot 9,247^2 = 292,1; \\ C_w^q = -1,599 \cdot 10^{-5} + 3,612 \cdot 10^{-3} \cdot 9,247^2 = 2,244 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 292,1 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 2,236 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,1052 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,1066$ мм), на 1,31%.

Пример 3.3.2. Определить прогиб w_0 параллелограммной пластинки, лежащей на упругом основании, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности. Характеристики материала пластинки: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина пластинки 250 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 5$ кН/м²,

коэффициент постели $k = 4000 \text{ кН/м}^3$.

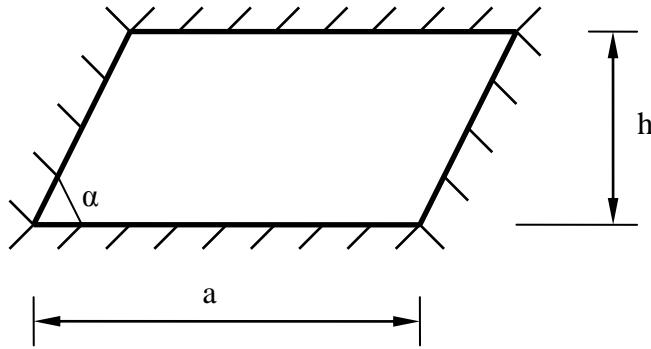


Рисунок 3.13

Длина основания пластинки $a = 6,1237 \text{ м}$, высота $h = 4,0825 \text{ м}$, угол при основании 70° ($K_f = 9,021$), площадь $A = 25 \text{ м}^2$. Общий вид рассматриваемой пластинки и условия опирания приведены

на рисунке 3.13.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– прямоугольная пластинка размером $6,1237 \times 4,0825 \text{ м}$:

$$K_{f1} = 4 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 4 \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \right) = 4 \left(\frac{6,1237}{4,0825} + \frac{4,0825}{6,1237} \right) = 8,667;$$

– ромбическая пластинка с длиной стороны $6,1237 \text{ м}$ и углом при основании $41,81^\circ$:

$$K_{f2} = \frac{8a}{h} = \frac{8 \cdot 6,1237}{4,0825} = 12.$$

Используя формулы (3.36), (3.37) и (3.50), (3.51), определяем значения B_w^q и C_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$B_{w1}^q = -3,928 \cdot 10^2 + 4,834 \cdot 10^1 \cdot K_f - 5,559 \cdot K_f^2 + 3,26 \cdot K_f^3 - 0,149 \cdot K_f^4 + 0,309 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^5 - 2,381 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^6 = 1031;$$

$$C_{w1}^q = \left[-2,426 \cdot 10^3 + 7,379 \cdot 10^2 \cdot K_f - 7,809 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 + 0,674 \cdot 10^1 \cdot K_f^3 - 0,183 \cdot K_f^4 + 0,181 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^5 \right]^{-1} = 0,646 \cdot 10^{-3};$$

– для ромбической пластинки:

$$B_{w2}^q = 7,336 \cdot 10^2 - 1,771 \cdot 10^2 \cdot K_f + 3,291 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 - 1,572 \cdot K_f^3 + 0,041 \cdot K_f^4 - 0,38 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 = 1387;$$

$$C_{w_2}^q = \left[2,567 \cdot 10^1 + 1,112 \cdot 10^2 \cdot K_f + 2,57 \cdot K_f^2 + 0,331 \cdot K_f^3 - \right. \\ \left. - 0,113 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^4 + 0,164 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 \right]^{-1} = 0,474 \cdot 10^{-3}.$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (1031 - 1387) / (8,667 - 12) = 106,8; \\ A_1 = 1031 - (1031 - 1387) / (8,667 - 12) \cdot 8,667 = 105,3; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (0,646 \cdot 10^{-3} - 0,474 \cdot 10^{-3}) / (8,667 - 12) = -0,052 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 0,646 \cdot 10^{-3} - \frac{0,646 \cdot 10^{-3} - 0,474 \cdot 10^{-3}}{8,667 - 12} \cdot 8,667 = 1,097 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 105,3 + 106,8 \cdot 9,021 = 1069; \\ C_w^q = 1,097 \cdot 10^{-3} - 0,052 \cdot 10^{-3} \cdot 9,021 = 0,628 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 1069 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 0,628 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,069 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,07$ мм), на 1,43%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(1031/1387) / \ln(8,667/12) = 0,912; \\ A_1 = 1031 / 8,667^{\ln(1031/1387)/\ln(8,667/12)} = 143,98; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(0,646 \cdot 10^{-3} / 0,474 \cdot 10^{-3}) / \ln(8,667/12) = -0,951; \\ A_3 = 0,646 \cdot 10^{-3} / 8,667^{\ln(0,646 \cdot 10^{-3} / 0,474 \cdot 10^{-3}) / \ln(8,667/12)} = 5,042 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 143,98 \cdot 9,247^{0,912} = 1095; \\ C_w^q = 5,042 \cdot 10^{-3} \cdot 9,247^{-0,951} = 0,608 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 1095 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 0,608 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0676 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,07$ мм), на 3,43%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (1031 - 1387) / (8,667^2 - 12^2) = 5,168; \\ A_1 = 1031 - (1031 - 1387) / (8,667^2 - 12^2) \cdot 8,667^2 = 642,8; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (0,646 \cdot 10^{-3} - 0,474 \cdot 10^{-3}) / (8,667^2 - 12^2) = 5,943 \cdot 10^{-5}; \\ A_3 = 0,646 \cdot 10^{-3} - \frac{0,646 \cdot 10^{-3} - 0,474 \cdot 10^{-3}}{8,667^2 - 12^2} \cdot 8,667^2 = -3,812 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 642,8 + 5,168 \cdot 9,247^2 = 1063; \\ C_w^q = -3,812 \cdot 10^{-3} + 5,943 \cdot 10^{-5} \cdot 9,247^2 = 1,018 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 1063 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 1,018 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,068 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,07$ мм), на 2,86%.

Пример 3.3.3. Определить прогиб w_0 пластинки в виде параллелограмма, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности. Характеристики материала пластинки: Характеристики материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu = 0,3$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 5$ кН/м², коэффициент постели $k = 4000$ кН/м³.

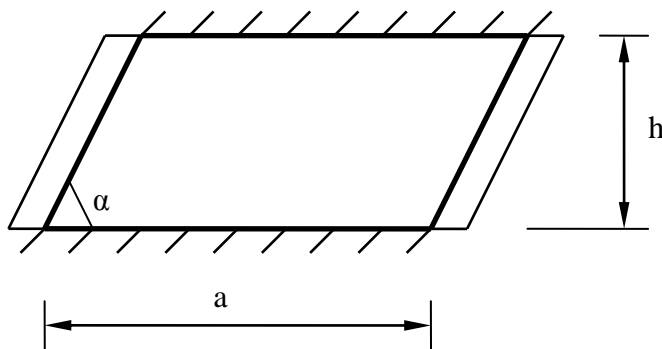


Рисунок 3.14

Длина основания пластинки $a = 1,4142$ м, высота $h = 0,7071$ м, угол при основании 80° ($K_f = 10,063$), площадь $A = 1$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и условия опирания приведены на рисунке 3.14.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– прямоугольная пластинка размером $1,4142 \times 0,7071$ м:

$$K_{f1} = 4 \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \right) = 4 \left(\frac{1,4142}{0,7071} + \frac{0,7071}{1,4142} \right) = 10;$$

– ромбическая пластинка с длиной стороны 1,4142 м и углом при основании 29,99°:

$$K_{f2} = \frac{8a}{h} = \frac{8 \cdot 1,4142}{0,7071} = 16.$$

Используя формулы (3.32), (3.33) и (3.46), (3.47), определяем значения B_w^q и C_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$\begin{aligned} B_{w1}^q &= 4,8539166 \cdot 10^5 - 5,2322203 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-1} + 2,6916482 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-2} - \\ &- 8,257499 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-3} + 1,6310726 \cdot 10^{12} \cdot [K_f]^{-4} - 2,1311304 \cdot 10^{13} \cdot [K_f]^{-5} + \\ &+ 1,8335706 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-6} - 9,9959463 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-7} + 3,1306095 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-8} - \\ &- 4,291036 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-9} = 1539; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{w1}^q &= \left[-0,1822432 \cdot 10^{-2} + 0,21767088 \cdot 10^{-3} \cdot K_f + 1,6023523 \cdot 10^{-6} \cdot K_f^2 \right] / \\ &/ \left[1 + 0,84918631 \cdot K_f - 0,99089842 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^2 + 0,91402335 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^3 \right] = \\ &= 0,476 \cdot 10^{-3}; \end{aligned}$$

– для ромбической пластинки:

$$\begin{aligned} B_{w2}^q &= 4,028 \cdot 10^2 - 8,743 \cdot 10^1 \cdot K_f + 1,818 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 - 0,864 \cdot K_f^3 + 0,023 \cdot K_f^4 - \\ &- 0,214 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 = 1402; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{w2}^q &= \left[0,382 \cdot 10^2 + 0,623 \cdot 10^2 \cdot K_f + 4,027 \cdot K_f^2 - 0,164 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^3 + \right. \\ &\left. + 0,827 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^4 \right]^{-1} = 0,487 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (1539 - 1402) / (10 - 16) = -22,83; \\ A_1 = 1539 - (1539 - 1402) / (10 - 16) 10 = 1767; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (0,476 \cdot 10^{-3} - 0,787 \cdot 10^{-3}) / (10 - 16) = 0,00183 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 0,476 \cdot 10^{-3} - (0,476 \cdot 10^{-3} - 0,787 \cdot 10^{-3}) / (10 - 16) 10 = 0,458 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} B_w^q = 1767 - 22,83 \cdot 10,063 = 1538; \\ C_w^q = 0,458 \cdot 10^{-3} + 0,00183 \cdot 10^{-3} \cdot 10,063 = 0,476 \cdot 10^{-3}; \end{cases}$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 1538 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 0,476 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0209 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0213$ мм), на 1,88%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} A_2 &= \ln(1539/1402) / \ln(10/16) = -0,198; \\ A_1 &= 1539 / 10^{\ln(1539/1402)/\ln(10/16)} = 2430; \end{aligned} \right. \\ \left[\begin{aligned} A_4 &= \ln(0,476 \cdot 10^{-3} / 0,487 \cdot 10^{-3}) / \ln(10/16) = 0,0486; \\ A_3 &= 0,476 \cdot 10^{-3} / 10^{\ln(0,476 \cdot 10^{-3} / 0,487 \cdot 10^{-3}) / \ln(10/16)} = 0,00043 \cdot 10^{-3}; \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_w^q = 2430 \cdot 10,063^{-0,198} = 1537; \\ C_w^q = 0,426 \cdot 10^{-3} \cdot 10,063^{0,0486} = 0,476 \cdot 10^{-3}; \end{cases}$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 1537 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 0,476 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0209 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0213$ мм), на 1,88%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} A_2 &= (1539 - 1402) / (10^2 - 16^2) = -0,878; \\ A_1 &= 1539 - (1539 - 1402) / (10^2 - 16^2) 10 = 1627; \end{aligned} \right. \\ \left[\begin{aligned} A_4 &= (0,476 \cdot 10^{-3} - 0,487 \cdot 10^{-3}) / (10^2 - 16^2) = 7,051 \cdot 10^{-8}; \\ A_3 &= 0,476 \cdot 10^{-3} - (0,476 \cdot 10^{-3} - 0,487 \cdot 10^{-3}) / (10^2 - 16^2) 10 = 0,469 \cdot 10^{-3}; \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_w^q = 1627 - 0,878 \cdot 10,063^2 = 1538; \\ C_w^q = 0,469 \cdot 10^{-3} + 7,051 \cdot 10^{-8} \cdot 10,063^2 = 0,476 \cdot 10^{-3}; \end{cases}$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 1538 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 0,476 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0209 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0213$ мм), на 1,88%.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что для расчета параллелограммных пластинок с использованием МИКФ лучше всего использовать линейную интерполяцию по двум решениям.

В таблице 3.7 представлены результаты решения тестовых задач расчета параллелограммных пластинок на упругом основании при различных комбинациях граничных условий. Характеристики материала пластинок: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина пластинки 250 мм, площадь $A = 25$ м², интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 5$ кН/м², коэффициент постели $k = 4000$ кН/м³

Погрешность полученных результатов не превышает 5%, что является достаточным для инженерных расчетов. Анализ результатов решения показал, что все 3 рассмотренные типа интерполяции дают удовлетворительную для инженерных расчетов точность.

Таблица 3.7 – Сопоставление значений максимального прогиба w_0 пластинок в форме параллелограммов на упругом винклеровском основании, полученного с помощью МКЭ и МИКФ при различных комбинациях граничных условий

a	5,4772	5,4772	5,4772	6,1237	6,1237	6,1237	7,0711	7,0711	7,0711	
h	4,5644	4,5644	4,5644	4,0825	4,0825	4,0825	3,5355	3,5355	3,5355	
α	80	70	60	80	70	60	80	70	60	
K_f	8,237	8,577	9,247	8,750	9,021	9,558	10,063	10,266	10,668	
Значения w_0 , мм										
«1»	МКЭ	0,256	0,247	0,230	0,229	0,223	0,212	0,175	0,173	0,167
	МИКФ	0,257	0,248	0,230	0,230	0,225	0,215	0,175	0,173	0,170
	Δ , %	0,42	0,46	0,09	0,06	0,63	1,40	0,17	0,42	1,44
«2»	МКЭ	0,201	0,190	0,170	0,198	0,189	0,173	0,161	0,157	0,149
	МИКФ	0,203	0,191	0,170	0,197	0,190	0,176	0,163	0,160	0,154
	Δ , %	0,93	0,80	0,22	0,42	0,40	1,47	0,75	1,66	3,24
«3»	МКЭ	0,152	0,140	0,120	0,163	0,153	0,135	0,147	0,141	0,130
	МИКФ	0,152	0,140	0,117	0,163	0,154	0,137	0,148	0,144	0,135
	Δ , %	0,09	0,50	2,19	0,02	0,82	1,63	0,21	1,65	4,05
«4»	МКЭ	0,179	0,174	0,165	0,141	0,139	0,136	0,092	0,092	0,091
	МИКФ	0,173	0,170	0,163	0,138	0,137	0,134	0,092	0,092	0,091
	Δ , %	3,31	2,57	1,52	1,83	1,62	1,27	0,40	0,43	0,49

«5»	МКЭ	0,147	0,142	0,133	0,126	0,123	0,118	0,088	0,087	0,086
	МИКФ	0,147	0,141	0,129	0,126	0,123	0,117	0,089	0,088	0,086
	$\Delta, \%$	0,37	1,12	3,2	0,11	0,02	0,38	0,46	0,54	0,63
«6»	МКЭ	0,147	0,141	0,131	0,125	0,122	0,115	0,88	0,87	0,84
	МИКФ	0,148	0,142	0,132	0,126	0,124	0,119	0,089	0,088	0,087
	$\Delta, \%$	0,36	0,81	0,63	0,73	1,78	3,27	0,78	1,57	3,09
«7»	МКЭ	0,120	0,112	0,099	0,112	0,106	0,097	0,084	0,082	0,077
	МИКФ	0,119	0,111	0,097	0,111	0,107	0,099	0,085	0,083	0,081
	$\Delta, \%$	0,93	0,66	1,90	0,33	1,16	2,91	0,28	1,84	4,43
«8»	МКЭ	0,114	0,113	0,112	0,082	0,082	0,082	0,048	0,049	0,049
	МИКФ	0,111	0,110	0,108	0,081	0,080	0,080	0,049	0,049	0,049
	$\Delta, \%$	2,70	2,88	3,27	1,56	1,83	2,30	0,33	0,02	0,67

Продолжение таблицы 3.7

«9»	МКЭ	0,099	0,097	0,095	0,076	0,076	0,074	0,048	0,048	0,048
	МИКФ	0,100	0,098	0,093	0,077	0,076	0,075	0,048	0,048	0,048
	$\Delta, \%$	1,63	0,59	1,86	0,42	0,38	0,18	0,97	0,91	0,82
«10»	МКЭ	0,086	0,083	0,077	0,071	0,069	0,066	0,047	0,046	0,045
	МИКФ	0,086	0,083	0,075	0,072	0,070	0,067	0,047	0,047	0,046
	$\Delta, \%$	0,10	0,38	2,41	0,71	1,25	1,74	0,79	1,41	2,47

3.4 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму произвольного треугольника

Пластинки в форме произвольных треугольников образуются в результате преобразования одного равнобедренного треугольника (с углом при основании более 60°) в другой (с углом при основании менее 60°). Из этого можно сделать вывод, что максимальные прогибы этих пластинок будут являться опорными решениями для пластинок в форме произвольных треугольников.

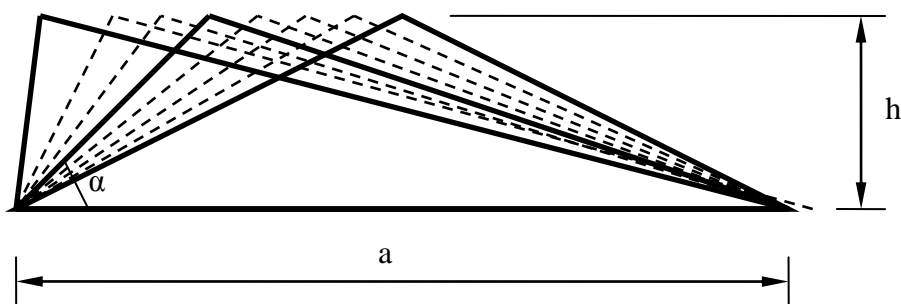


Рисунок 3.15

В качестве геометрического преобразования в рамках данной работы рассмотрим сдвиг вершины, противоположной наибольшей из сторон треугольника, параллельно этой стороне (рисунок 3.15).

Коэффициенты формы фигур, являющихся опорными решениями, можно записать через геометрические параметры искомой пластинки:

– для равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° :

$$K_f = \frac{4h}{a \cdot \operatorname{tg}^2(0,5 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2h/a))} \quad (3.84)$$

– для равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° :

$$K_f = 2 \frac{\operatorname{tg}(\pi/2 - 0,5 \operatorname{arcsin}(h/a))}{\operatorname{tg}^2(\pi/4 - 0,25 \operatorname{arcsin}(h/a))} \quad (3.85)$$

Коэффициент формы искомого треугольника будем определять по формуле (3.86):

$$K_f = 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \left(0,5 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{h}{a - h \operatorname{ctg} \alpha} \right) \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + 0,5 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{h}{a - h \operatorname{ctg} \alpha} \right) \right). \quad (3.86)$$

Величину параметров V_w^q и C_w^q найдем, используя следующие типы интерполяции:

- 1) линейная интерполяция по двум решениям (формулы (3.78),(3.79));
- 2) степенная интерполяция по двум решениям (формулы (3.80),(3.81));
- 3) линейно-степенная интерполяция по двум решениям (формулы (3.82),(3.83)).

В случае комбинированных граничных условий (шарнирное или жестко защемленное) для искомой пластинки существует восемь различных способов опирания (рисунок 3.16). Все они могут быть получены из прямоугольных и ромбических пластинок с соответствующими граничными условиями.

На рисунке 3.16 рассматриваемый произвольный треугольник

(посередине) получается путем преобразования равнобедренного с углом при основании более 60° (вверху, повернут боковой стороной вниз) в равнобедренный треугольник с углом при основании менее 60° (внизу, повернут основанием вниз).

Для доказательства возможности применения МИКФ к расчету пластинок в форме произвольных треугольников, лежащих на упругом основании, рассмотрим ряд примеров.

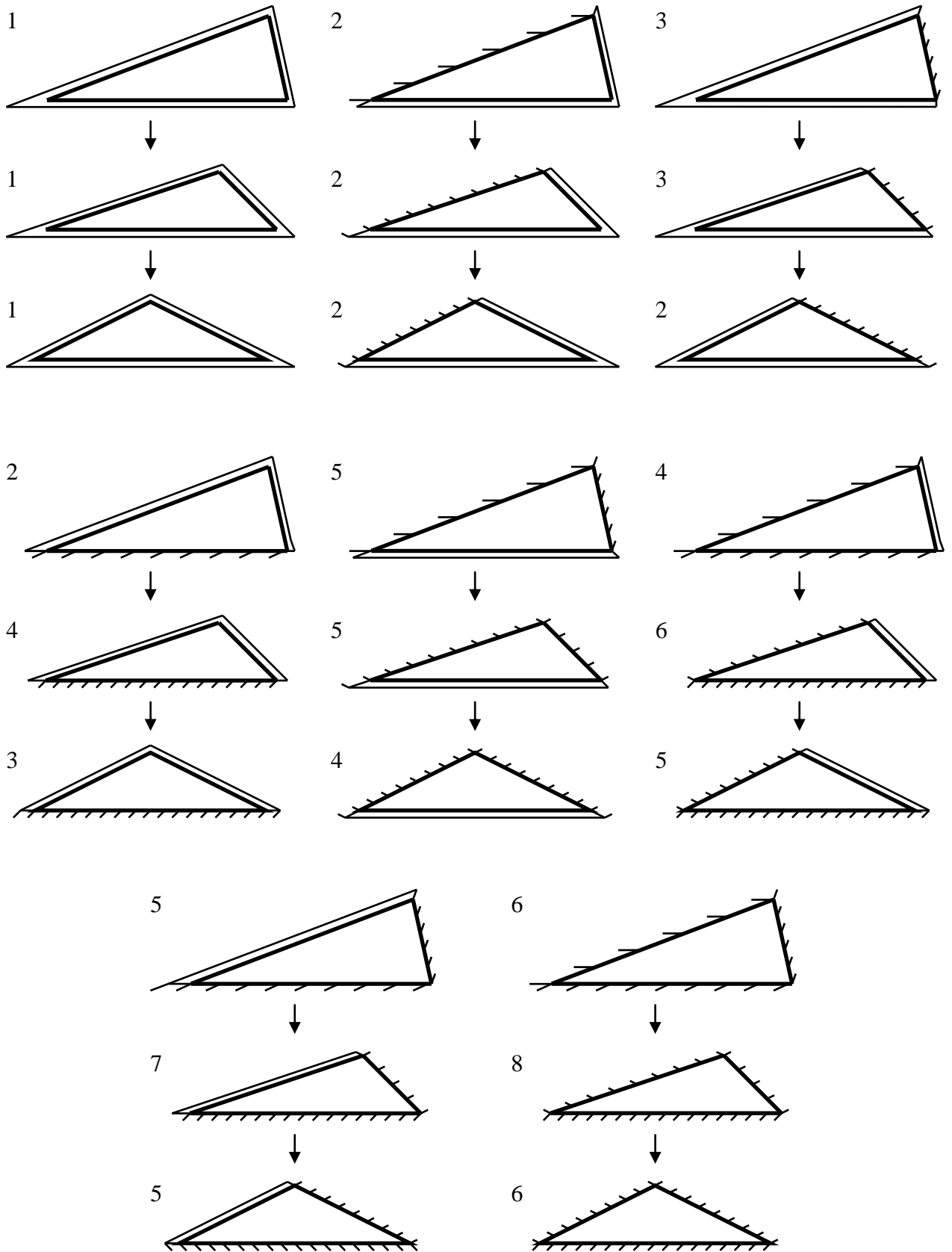


Рисунок 3.16 Граничные условия пластинок в форме произвольных треугольников

Пример 3.4.1. Определить прогиб w_0 пластинки в форме

произвольного треугольника, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

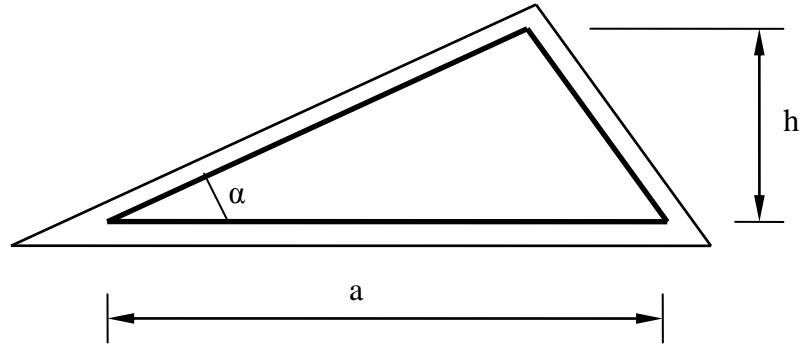


Рисунок 3.17

Характеристики материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu = 0,3$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 8$ кН/м², коэффициент постели $k = 4000$ кН/м³.

Длина основания пластинки $a = 2$ м, высота $h = 1$ м, угол при основании 60° ($K_f = 11,973$), площадь $A = 1$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и граничные условия опирания приведены на рисунке 3.17.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° :

$$K_{f1} = 12,698;$$

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° :

$$K_{f2} = 11,657.$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q :

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° :

$$B_{w1}^q = 6,988 \cdot 10^1 + 5,958 \cdot 10^1 \cdot K_f + 1,779 \cdot K_f^2 = 432;$$

$$C_{w_1}^q = \left[8,512 \cdot 10^1 + 1,561 \cdot 10^1 \cdot K_f + 2,369 \cdot K_f^2 \right]^{-1} = 1,503 \cdot 10^{-3};$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° :

$$B_{w_2}^q = 1,057 \cdot 10^1 + 1,808 \cdot 10^1 \cdot K_f + 1,154 \cdot K_f^2 = 378;$$

$$C_{w_2}^q = \left[7,414 + 3,193 \cdot 10^1 \cdot K_f + 1,51 \cdot K_f^2 \right]^{-1} = 1,710 \cdot 10^{-3}.$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (432 - 378) / (12,698 - 11,657) = 51,87; \\ A_1 = 432 - (432 - 378) / (12,698 - 11,657) 12,698 = 226,7; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (1,503 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}) / (12,698 - 11,657) = -0,199 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 1,503 \cdot 10^{-3} - (1,503 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}) / (12,698 - 11,657) 12,698 = 4,028; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 226,7 + 51,87 K_f = 394,4; \\ C_w^q = 4,028 - 0,199 \cdot 10^{-3} \cdot K_f = 1,647 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 394,4 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,647 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,1264 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,1277$ мм), на 1,02%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(432 / 378) / \ln(12,698 / 11,657) = 1,561; \\ A_1 = B_{w_1}^q / 12,698^{\ln(432/378)/\ln(12,698/11,657)} = 8,174; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(1,503 \cdot 10^{-3} / 1,71 \cdot 10^{-3}) / \ln(12,698 / 11,657) = -1,508; \\ A_3 = 1,503 \cdot 10^{-3} / 12,698^{\ln(1,503 \cdot 10^{-3} / 1,71 \cdot 10^{-3}) / \ln(12,698 / 11,657)} = 0,0695; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 8,174 K_f^{1,561} = 394,1; \\ C_w^q = 0,0695 K_f^{-1,508} = 1,642 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 394,1 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,642 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,1265 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Полученный результат отличается от результата, полученного с

использованием МКЭ ($w_0 = 0,1277$ мм), на 0,94%

3) с использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (432 - 378) / (12,698^2 - 11,657^2) = 2,129; \\ A_1 = 432 - (432 - 378) / (12,698^2 - 11,657^2) 12,698^2 = 88,58; \\ A_4 = (1,503 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}) / (12,698^2 - 11,657^2) = -8,165 \cdot 10^{-6}; \\ A_3 = 1,503 \cdot 10^{-3} - \frac{1,503 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}}{12,698^2 - 11,657^2} 12,698^2 = 2,819 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 88,58 + 2,129 K_f^2 = 393,9; \\ C_w^q = 2,819 \cdot 10^{-3} - 8,165 \cdot 10^{-6} \cdot K_f^2 = 1,649 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 393,9 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,649 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,1266 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,1277$ мм), на 0,86%

Пример 3.4.2. Определить прогиб w_0 пластинки в форме произвольного треугольника, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности. Характеристики материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu = 0,3$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки

$q = 8$ кН/м², коэффициент постели $k = 4000$ кН/м³.

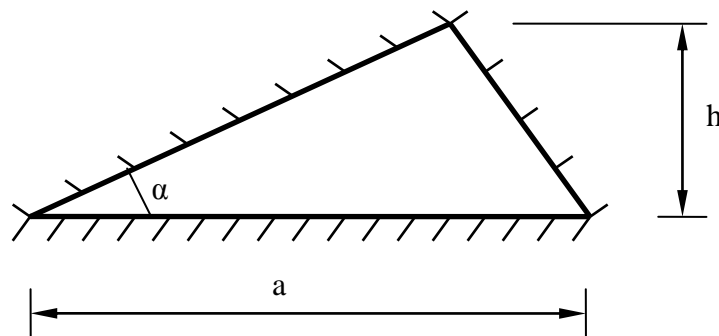


Рисунок 3.18

Длина основания пластинки $a = 2,6458$ м, высота $h = 0,7559$ м, угол при основании 50° ($K_f = 16,711$), площадь $A = 1$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и граничные условия опирания приведены на рисунке 3.18.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° :

$$K_{f1} = 18,364;$$

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° :

$$K_{f2} = 16,205.$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q :

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° :

$$B_{w1}^q = 1,499 \cdot 10^2 + 3,516 \cdot 10^1 \cdot K_f + 3,947 \cdot K_f^2 + 0,135 \cdot K_f^3 = 2963;$$

$$C_{w1}^q = [0,927 \cdot 10^3 - 7,862 \cdot 10^1 \cdot K_f + 1,475 \cdot 10^1 \cdot K_f^2]^{-1} = 0,224 \cdot 10^{-3};$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° :

$$B_{w2}^q = -2,235 \cdot 10^2 + 8,744 \cdot 10^1 \cdot K_f + 3,262 \cdot K_f^2 + 0,592 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^3 - 0,523 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^4 = 2266;$$

$$C_{w2}^q = [1,277 \cdot 10^3 - 3,402 \cdot 10^2 \cdot K_f + 6,003 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 - 2,96 \cdot K_f^3 + 0,765 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^4 - 0,723 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5]^{-1} = 0,294 \cdot 10^{-3};$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (2963 - 2266) / (18,364 - 16,205) = 322,8; \\ A_1 = 2963 - (2963 - 2266) / (18,364 - 16,205) 18,364 = -2966; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (0,224 \cdot 10^{-3} - 0,294 \cdot 10^{-3}) / (18,364 - 16,205) = 0,0324 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 0,224 \cdot 10^{-3} - \frac{0,224 \cdot 10^{-3} - 0,294 \cdot 10^{-3}}{18,364 - 16,205} 18,364 = 0,819 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = -2966 + 322,8K_f = 2429; \\ C_w^q = 0,819 \cdot 10^{-3} + 0,0324 \cdot 10^{-3} \cdot K_f = 0,278 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 2429 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 0,278 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0213 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,021$ мм), на 1,43%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(2963 / 2266) / \ln(18,364 / 16,205) = 2,144; \\ A_1 = 2963 / 18,364^{\ln(2963/2266)/\ln(18,364/16,205)} = 5,774; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(0,224 \cdot 10^{-3} / 0,294 \cdot 10^{-3}) / \ln(18,364 / 16,205) = -2,174; \\ A_3 = 0,224 \cdot 10^{-3} / 18,364^{\ln(0,224 \cdot 10^{-3}/0,294 \cdot 10^{-3})/\ln(18,364/16,205)} = 0,125; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 5,774K_f^{2,144} = 2420; \\ C_w^q = 0,125K_f^{-2,174} = 0,275 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 2420 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 0,275 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0213 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,021$ мм), на 1,43%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (2963 - 2266) / (18,364^2 - 16,205^2) = 9,339; \\ A_1 = 2963 - (2963 - 2266) / (18,364^2 - 16,205^2) 18,364^2 = -186,4; \\ A_4 = (0,224 \cdot 10^{-3} - 0,294 \cdot 10^{-3}) / (18,364^2 - 16,205^2) = -9,379 \cdot 10^{-7}; \\ A_3 = 0,224 \cdot 10^{-3} - \frac{0,224 \cdot 10^{-3} - 0,294 \cdot 10^{-3}}{18,364^2 - 16,205^2} 18,364^2 = 0,54 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = -186,4 + 9,339 K_f^2 = 2422; \\ C_w^q = 0,54 \cdot 10^{-3} - 9,379 \cdot 10^{-7} K_f^2 = 0,278 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 2422 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 0,278 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0213 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,021$ мм), на 1,43%.

Пример 3.4.3. Определить прогиб w_0 пластинки в форме произвольного треугольника, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности. Характеристики материала пластинки: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина пластинки 250 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки

$q = 8$ кН/м², коэффициент постели $k = 4000$ кН/м³.

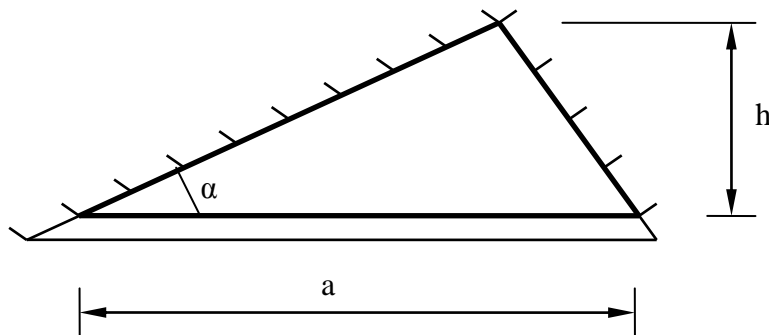


Рисунок 3.19

Длина основания пластинки $a = 15,811$ м, высота $h = 3,1623$ м, угол при основании 80° ($K_f = 23,941$), площадь $A = 25$ м². Общий вид рассматриваемой

пластинки и граничные условия опирания приведены на рисунке 3.19.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° :

$$K_{f1} = 24,261;$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° :

$$K_{f2} = 21,570.$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q :

– для ромбической пластинки:

$$B_{w1}^q = 1,9362278 \cdot 10^4 - 7,9793436 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-1} + 1,3606073 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-2} - \\ - 1,0740727 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-3} + 3,2527594 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-4} = 3006;$$

$$C_{w1}^q = -0,15409808 \cdot 10^{-2} + 0,10166714 \cdot [K_f]^{-1} - 2,2407202 \cdot [K_f]^{-2} + \\ + 2,3862482 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-3} - 9,2172419 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-4} = 0,246 \cdot 10^{-3};$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° :

$$B_{w2}^q = 4,6940249 \cdot 10^4 - 4,0989134 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-1} + 1,6780778 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-2} - \\ - 3,9164704 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-3} + 5,4985755 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-4} - 4,5926087 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-5} + \\ + 2,1001463 \cdot 10^{12} \cdot [K_f]^{-6} - 4,0400574 \cdot 10^{12} \cdot [K_f]^{-7} = 1976;$$

$$C_{w2}^q = 0,15379412 \cdot 10^{-2} - 0,24496214 \cdot [K_f]^{-1} + 1,6075544 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-2} - \\ - 5,4218034 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-3} + 1,0568703 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-4} - 1,1910187 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-5} + \\ + 7,2041904 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-6} - 1,8106927 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-7} = 0,342 \cdot 10^{-3};$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (3006 - 1976) / (24,261 - 21,57) = 382,8; \\ A_1 = 3006 - (3006 - 1976) / (24,261 - 21,57) \cdot 24,261 = -6280; \\ A_4 = (0,246 \cdot 10^{-3} - 0,342 \cdot 10^{-3}) / (24,261 - 21,57) = 0,0357 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 0,246 \cdot 10^{-3} - \frac{0,246 \cdot 10^{-3} - 0,342 \cdot 10^{-3}}{24,261 - 21,57} \cdot 24,261 = 1,111 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} B_w^q = -6280 + 382,8K_f = 2884; \\ C_w^q = 1,111 \cdot 10^{-3} + 0,0357 \cdot 10^{-3} \cdot K_f = 0,257 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \\ w_0 = \left[\frac{1}{8000} 2884 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 0,257 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0419 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \end{array} \right.$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0439$ мм), на 4,56%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(3006 / 1976) / \ln(24,261 / 21,57) = 3,568; \\ A_1 = 3006 / 24,261^{\ln(3006/1976)/\ln(24,261/21,57)} = 0,0344; \\ A_4 = \ln(0,246 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} / 0,342 \cdot 10^{-3}) / \ln(24,261 / 21,57) = -2,802; \\ A_3 = 0,246 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} / 24,261^{\ln(0,246 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} / 0,342 \cdot 10^{-3}) / \ln(24,261 / 21,57)} = 1,871; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 0,0344K_f^{3,568} = 2867; \\ C_w^q = 1,871K_f^{-2,802} = 0,255 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 2867 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 0,255 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0422 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0439$ мм), на 3,87%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (3006 - 1976) / (24,261^2 - 21,57^2) = 8,351; \\ A_1 = 3006 - (3006 - 1976) / (24,261^2 - 21,57^2) \cdot 24,261^2 = -1910; \\ A_4 = (0,246 \cdot 10^{-3} - 0,342 \cdot 10^{-3}) / (24,261^2 - 21,57^2) = -7,784 \cdot 10^{-7}; \\ A_3 = 0,246 \cdot 10^{-3} - \frac{0,246 \cdot 10^{-3} - 0,342 \cdot 10^{-3}}{24,261^2 - 21,57^2} \cdot 24,261^2 = 0,704 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$B_w^q = -1910 + 8,351 K_f^2 = 2877;$$

$$C_w^q = 0,704 \cdot 10^{-3} - 7,784 \cdot 10^{-7} \cdot K_f^2 = 0,258 \cdot 10^{-3};$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 2877 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 0,258 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,042 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0439$ мм), на 4,32%.

В таблице 3.8 представлены результаты расчета пластинок в форме произвольных треугольников на упругом основании при различных комбинациях граничных условий. Характеристики материала пластинок: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина пластинки 300 мм, площадь $A = 25 \text{ м}^2$, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 10 \text{ кН/м}^2$, коэффициент постели $k = 5000 \text{ кН/м}^3$

Таблица 3.8 – Сопоставление значений максимального прогиба w_0 пластинок в форме произвольных треугольников на упругом винклеровском основании, полученного с помощью МКЭ и МИКФ при различных комбинациях граничных условий

a	7,746	8,66	10	11,18	12,247	13,229	14,142	15	15,811	
h	6,455	7,7735	5,	4,4721	4,0825	3,7796	3,5355	3,3333	3,1623	
α	60	63	60	40	45	50	60	70	80	
K_f	10,4	10,825	11,973	13,007	14,741	16,711	19,01	21,425	23,941	
Значения w_0 , мм										
«1»	МКЭ	0,338	0,322	0,283	0,255	0,215	0,178	0,145	0,118	0,097
	МИКФ	0,337	0,320	0,280	0,253	0,212	0,176	0,143	0,119	0,099
	Δ , %	0,42	0,65	0,77	1,00	1,36	1,56	1,14	0,90	2,39
«2»	МКЭ	0,229	0,212	0,181	0,178	0,141	0,110	0,084	0,065	0,052
	МИКФ	0,224	0,207	0,178	0,174	0,135	0,106	0,081	0,064	0,052
	Δ , %	2,25	2,45	1,81	2,45	4,25	3,91	3,30	2,93	0,73
«3»	МКЭ	0,229	0,224	0,203	0,179	0,154	0,133	0,114	0,097	0,080

	МИКФ	0,226	0,226	0,208	0,177	0,160	0,140	0,119	0,100	0,084
	Δ, %	1,52	0,84	2,24	0,84	3,57	4,75	3,88	2,90	4,25
«4»	МКЭ	0,225	0,203	0,169	0,144	0,118	0,096	0,078	0,064	0,052
	МИКФ	0,222	0,201	0,167	0,142	0,115	0,093	0,075	0,061	0,051
	Δ, %	1,09	0,93	1,25	1,05	2,10	3,43	4,15	4,07	1,31
«5»	МКЭ	0,157	0,152	0,137	0,126	0,105	0,086	0,067	0,053	0,042
	МИКФ	0,153	0,149	0,133	0,123	0,103	0,084	0,067	0,054	0,044
	Δ, %	2,45	2,31	2,75	2,29	2,51	1,89	0,25	2,26	4,48
«6»	МКЭ	0,153	0,139	0,113	0,104	0,081	0,061	0,045	0,034	0,027
	МИКФ	0,151	0,134	0,109	0,101	0,077	0,059	0,045	0,035	0,028
	Δ, %	1,11	3,74	3,70	2,58	4,43	2,31	1,18	3,17	4,18
«7»	МКЭ	0,153	0,146	0,125	0,104	0,087	0,073	0,061	0,051	0,042
	МИКФ	0,152	0,145	0,126	0,103	0,090	0,076	0,063	0,052	0,043
	Δ, %	0,53	0,71	0,91	0,90	3,10	4,09	3,62	2,90	4,11
«8»	МКЭ	0,108	0,102	0,086	0,076	0,062	0,050	0,039	0,031	0,024
	МИКФ	0,105	0,099	0,084	0,074	0,060	0,048	0,038	0,030	0,024
	Δ, %	2,31	3,06	3,20	2,78	2,86	2,94	2,37	1,71	1,37

Анализируя приведенные результаты расчета, можно сделать вывод о том, что погрешность МИКФ не превышает 5%. Анализ результатов решения показал, что наибольшую точность при расчете пластинок данного класса дает степенная интерполяция по 2 решениям. Из этого следует, что МИКФ может успешно использоваться при решении задач поперечного изгиба пластинок в форме произвольных треугольников на упругом винклеровском основании, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой.

3.5 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму равнобедренной трапеции

Равнобедренные трапециевидальные пластинки образуются в результате преобразования прямоугольника в равнобедренный треугольник. Из этого можно сделать вывод, что эти фигуры и их ИФХ будут являться границами изменения искомой величины для ИФХ пластинок в форме равнобедренных трапеций.

В качестве геометрического преобразования в рамках данной работы будем использовать синхронный поворот боковых сторон прямоугольника

относительно точек пересечения его средней линии с боковыми сторонами (рисунок 3.20).

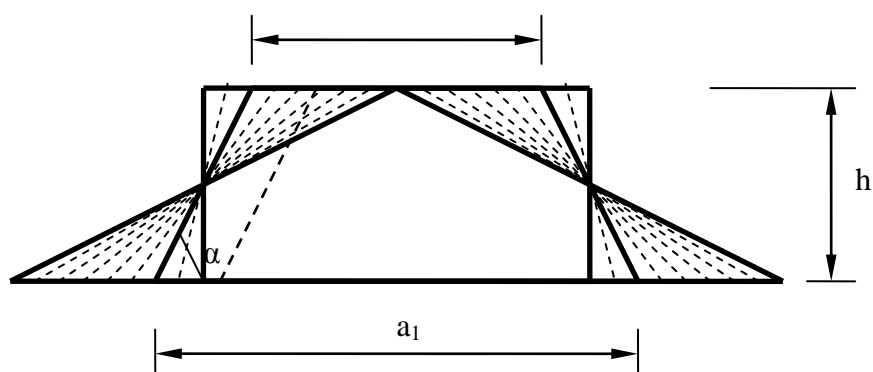


Рисунок 3.20

В предыдущих параграфах были сформулированы выводы, анализируя которые, можно говорить о том, что нижней границей изменения коэффициента формы для фигур в форме равнобедренных трапеций будет являться прямоугольник, а верхней границей – равнобедренный треугольник.

При синхронном повороте боковых сторон прямоугольника относительно точек пересечения его средней линии с боковыми сторонами остается неизменным отношение полусуммы оснований трапеции к высоте и её площадь, а изменяется угол при основании трапеции α (α , следовательно, и сторона, параллельная основанию).

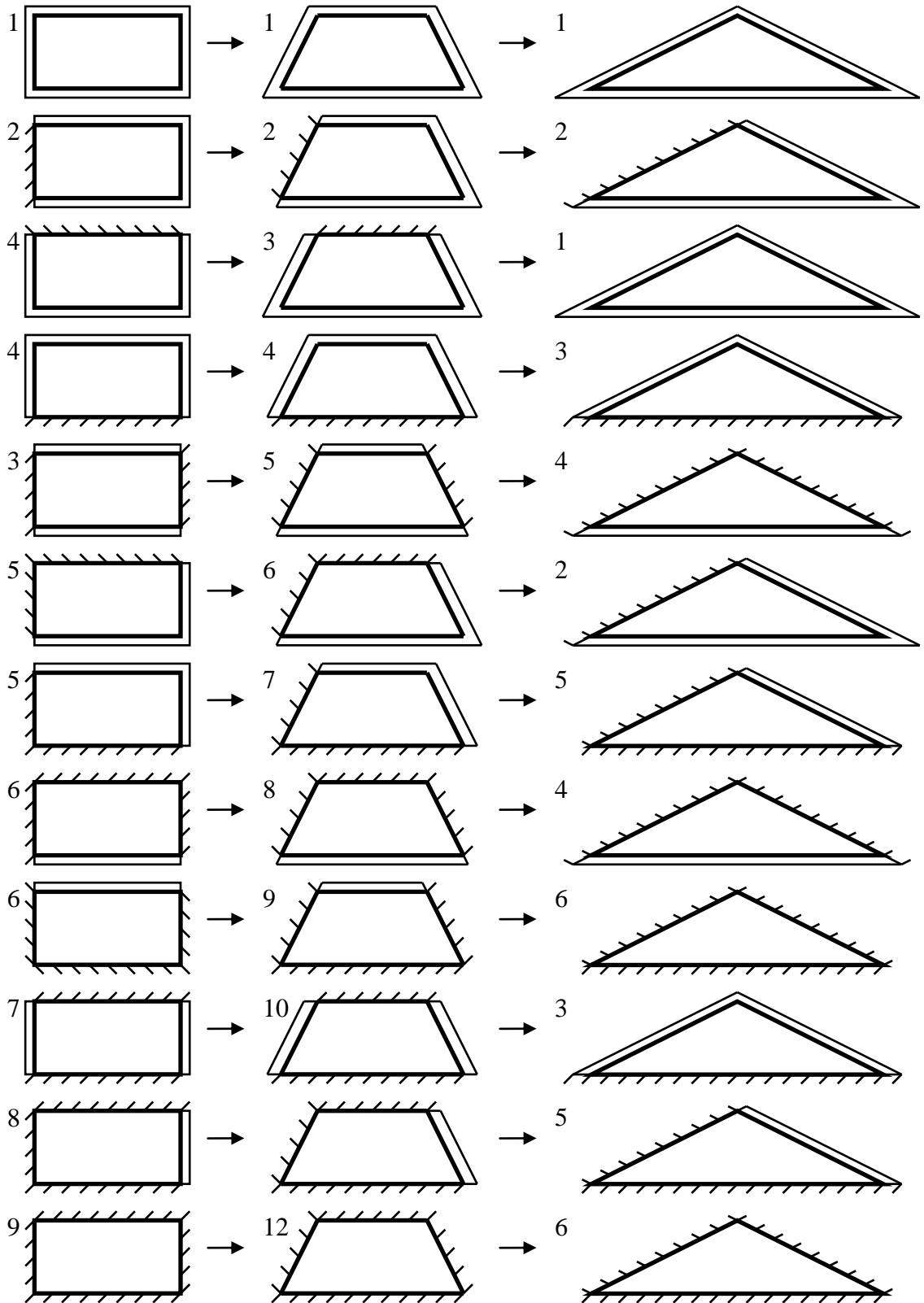


Рисунок 3.21 Граничные условия пластинок в форме
равнобедренных трапеций

Тогда коэффициенты формы фигур, являющихся опорными решениями, можно записать через геометрические параметры искомой пластинки:

– для равнобедренного треугольника:

$$K_f = 4h / \left[(a_1 + a_2) \operatorname{tg}^2 \left(0,5 \arctg \left(\frac{2h}{a_1 + a_2} \right) \right) \right] \quad (3.87)$$

– для прямоугольника ($b = h$):

$$K_f = 4 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 4 \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a} \right). \quad (3.88)$$

Коэффициент формы искомой равнобедренной трапеции будем определять по формуле (2.16). Неизвестный параметр $K = h_1/H$ находим приближенным методом с использованием специально разработанного программного комплекса.

Обобщая все вышесказанное, можно сделать вывод, что применение МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму равнобедренной трапеции, прямоугольные и треугольные пластинки могут служить «опорными» решениями.

Величину параметров B_w^q и C_w^q найдем, используя следующие типы интерполяции:

- 1) линейная интерполяция по двум решениям (формулы (3.78),(3.79));
- 2) степенная интерполяция по двум решениям (формулы (3.80),(3.81));
- 3) линейно-степенная интерполяция по двум решениям (формулы (3.82),(3.83)).

В случае комбинированных граничных условий (шарнирное опирание или жестко защемленное) для искомой пластинки существует двенадцать различных способов опирания (рисунок 3.21). Все они могут быть получены из прямоугольных и ромбических пластинок с соответствующими граничными условиями.

Пример 3.5.1. Определить прогиб w_0 пластинки в форме равнобедренной трапеции, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности. Характеристики материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu =$

0,3, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 10 \text{ кН/м}^2$, коэффициент постели $k = 5000 \text{ кН/м}^3$. Длина основания пластинки $a_1 = 1,5781 \text{ м}$, высота $h = 1 \text{ м}$, угол при основании 60° ($K_f = 9,307$), площадь $A = 1 \text{ м}^2$. Общий вид рассматриваемой пластинки и граничные условия опирания приведены на рисунке 3.21.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

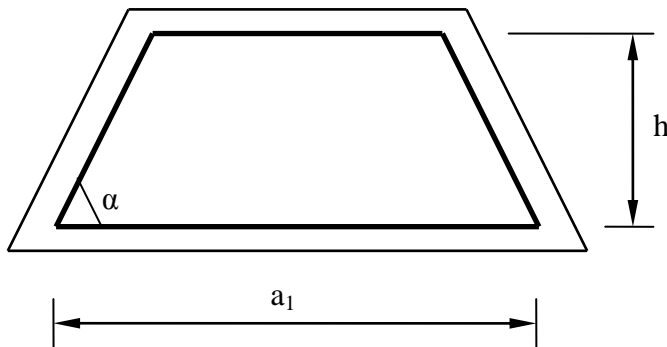


Рисунок 3.21

– прямоугольная
пластинка размером $1 \times 1 \text{ м}$:

$$K_{f1} = 4 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 4 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) = 8;$$

– пластинка в форме
равнобедренного треугольника
с длиной основания 2 м и
высотой, опущенной на
основание

1 м:

$$K_{f2} = \frac{4 \cdot 1}{(1,5781 + 0,4219) \operatorname{tg}^2 \left(0,5 \arctg \left(\frac{2 \cdot 1}{1,5781 + 0,4219} \right) \right)} = 11,657.$$

Определяем значения V_w^q и C_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$V_{w1}^q = 1,727 \cdot 10^2 - 4,607 \cdot 10^1 \cdot K_f + 7,443 \cdot K_f^2 - 0,692 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^3 + 0,671 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^4 = 248;$$

$$C_{w1}^q = \left[-1,748 \cdot 10^2 + 5,929 \cdot 10^1 \cdot K_f - 0,519 \cdot K_f^2 + 0,249 \cdot K_f^3 - 0,321 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^4 \right]^{-1} = 2,627 \cdot 10^{-3};$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника:

$$V_{w2}^q = 1,057 \cdot 10^1 + 1,808 \cdot 10^1 \cdot K_f + 1,154 \cdot K_f^2 = 378;$$

$$C_{w2}^q = \left[7,414 + 3,193 \cdot 10^1 \cdot K_f + 1,51 \cdot K_f^2 \right]^{-1} = 1,71 \cdot 10^{-3}.$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (248 - 378) / (8 - 11,657) = 35,55; \\ A_1 = 248 - (248 - 378) / (8 - 11,657) 8 = -36,39; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (2,267 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}) / (8 - 11,657) = -0,152 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 2,267 \cdot 10^{-3} - (2,267 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}) / (8 - 11,657) 8 = 3,485 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} B_w^q = -36,39 + 35,55 K_f = 294,5; \\ C_w^q = 3,485 \cdot 10^{-3} - 0,152 \cdot 10^{-3} K_f = 2,068 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 294,5 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 2,068 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,207 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,2103$ мм), на 1,57%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(248 / 378) / \ln(8 / 11,657) = 1,12; \\ A_1 = 248 / 8^{\ln(248/378)/\ln(8/11,657)} = 24,18; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(2,267 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} / 1,71 \cdot 10^{-3}) / \ln(8 / 11,657) = -0,749; \\ A_3 = 2,267 \cdot 10^{-3} / 8^{\ln(2,267 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} / 1,71 \cdot 10^{-3}) / \ln(8/11,657)} = 0,0108; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 24,18 K_f^{1,12} = 293,8; \\ C_w^q = 0,0108 K_f^{-0,749} = 2,024 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 293,8 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 2,068 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,207 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,2103$ мм), на 1,57%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (248 - 378) / (8^2 - 11,657^2) = 1,808; \\ A_1 = 248 - (248 - 378) / (8^2 - 11,657^2) 8^2 = 132,3; \\ A_4 = (2,267 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}) / (8^2 - 11,657^2) = -7,748 \cdot 10^{-6}; \\ A_3 = 2,267 \cdot 10^{-3} - (2,267 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}) / (8^2 - 11,657^2) 8^2 = 2,763 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 132,3 + 1,808 K_f^2 = 288,9; \\ C_w^q = -7,748 \cdot 10^{-6} + 2,763 \cdot 10^{-3} K_f^2 = 2,092 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \\ w_0 = \left[\frac{1}{10000} 288,9 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 2,092 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,211 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \end{array} \right.$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,2103$ мм), на 0,33%.

Пример 3.5.2. Определить прогиб w_0 пластинки в форме равнобедренной трапеции, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

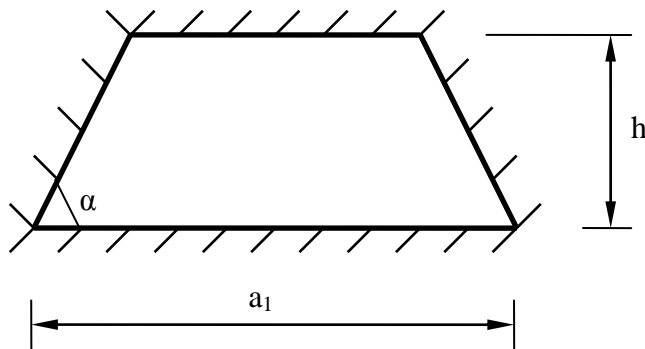


Рисунок 3.22

Характеристики материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа,
 $\nu = 0,3$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 10$ кН/м², коэффициент постели $k = 5000$ кН/м³. Длина основания

пластинки $a_1 = 1,9105$ м, высота $h = 0,8165$ м, угол при основании 50° ($K_f = 10,522$), площадь $A = 1$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и условия опирания приведены на рисунке 3.22.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– прямоугольная пластинка размером $1,2247 \times 0,8165$ м:

$$K_{f1} = 4 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 4 \left(\frac{1,2247}{0,8165} + \frac{0,8165}{1,2247} \right) = 8,667;$$

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с длиной основания 2,4495 м и высотой, опущенной на основание 0,8165 м:

$$K_{f2} = \frac{4 \cdot 0,8165}{(1,9105 + 0,539) \operatorname{tg}^2 \left(0,5 \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cdot 0,8165}{1,9105 + 0,539} \right) \right)} = 14,544.$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$B_{w1}^q = -3,928 \cdot 10^2 + 4,834 \cdot 10^1 \cdot K_f - 5,559 \cdot K_f^2 + 3,26 \cdot K_f^3 - 0,149 \cdot K_f^4 + 0,309 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^5 - 2,381 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^6 = 1031;$$

$$C_{w1}^q = \left[-2,426 \cdot 10^3 + 7,379 \cdot 10^2 \cdot K_f - 7,809 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 + 0,674 \cdot 10^1 \cdot K_f^3 - 0,183 \cdot K_f^4 + 0,181 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^5 \right]^{-1} = 0,646 \cdot 10^{-3};$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника:

$$B_{w2}^q = -2,235 \cdot 10^2 + 8,744 \cdot 10^1 \cdot K_f + 3,262 \cdot K_f^2 + 0,592 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^3 - 0,523 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^4 = 1897;$$

$$C_{w2}^q = \left[1,277 \cdot 10^3 - 3,402 \cdot 10^2 \cdot K_f + 6,003 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 - 2,96 \cdot K_f^3 + 0,765 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^4 - 0,723 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 \right]^{-1} = 0,348 \cdot 10^{-3}.$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (1031 - 1897) / (8,667 - 14,544) = 147,4; \\ A_1 = 1031 - (1031 - 1897) / (8,667 - 14,544) 8,667 = -246,1; \\ A_4 = (0,646 \cdot 10^{-3} - 0,348 \cdot 10^{-3}) / (8,667 - 14,544) = -5,071 \cdot 10^{-5}; \\ A_3 = 0,646 \cdot 10^{-3} - \frac{0,646 \cdot 10^{-3} - 0,348 \cdot 10^{-3}}{8,667 - 14,544} 8,667 = 1,085 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = -246,1 + 147,4 K_f = 1304; \\ C_w^q = 1,085 \cdot 10^{-3} - 5,071 \cdot 10^{-5} \cdot K_f = 0,552 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 1304 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 0,552 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,049 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0532$ мм), на 7,89%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(1031/1897) / \ln(8,667/14,544) = 1,178; \\ A_1 = 1031 / 8,667^{\ln(1031/1897)/\ln(8,667/14,544)} = 81,01; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(0,646 \cdot 10^{-3} / 0,348 \cdot 10^{-3}) / \ln(8,667/14,544) = -1,195; \\ A_3 = 0,646 \cdot 10^{-3} / 8,667^{\ln(0,646 \cdot 10^{-3}/0,348 \cdot 10^{-3})/\ln(8,667/14,544)} = 8,531 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 81,01 K_f^{1,178} = 1296; \\ C_w^q = 8,531 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^{-1,195} = 0,512 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 1296 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 0,512 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0493 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0532$ мм), на 7,33%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (1031 - 1897) / (8,667^2 - 14,544^2) = 6,348; \\ A_1 = 1031 - (1031 - 1897) / (8,667^2 - 14,544^2) 8,667^2 = 554; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (0,646 \cdot 10^{-3} - 0,348 \cdot 10^{-3}) / (8,667^2 - 14,544^2) = -2,185 \cdot 10^{-5}; \\ A_3 = 0,646 \cdot 10^{-3} - \frac{0,646 \cdot 10^{-3} - 0,348 \cdot 10^{-3}}{8,667^2 - 14,544^2} 8,667^2 = 0,81 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 554 + 6,348 K_f^2 = 1257; \\ C_w^q = 0,81 \cdot 10^{-3} - 2,185 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^2 = 0,568 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 1257 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 0,568 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0508 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0532$ мм), на 4,51%.

Пример 3.5.3. Определить прогиб w_0 пластинки в форме равнобедренной трапеции, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

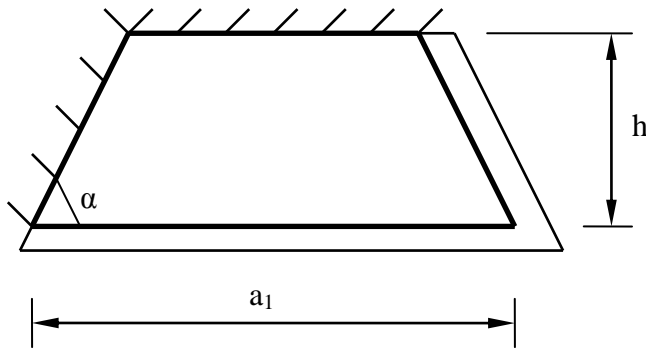


Рисунок 3.23

Характеристики материала пластинки: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина пластинки 300 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 10$ кН/м², коэффициент постели $k = 5000$ кН/м³.

Длина основания пластинки $a_1 = 10,04$ м, высота $h = 3,5355$ м, угол при основании 50° ($K_f = 11,299$), площадь $A = 25$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и условия опирания приведены на рисунке 3.23.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– прямоугольная пластинка размером $7,071 \times 3,5355$ м:

$$K_{f1} = 4 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 4 \left(\frac{7,071}{3,5355} + \frac{3,5355}{7,071} \right) = 10;$$

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с длиной основания 2,8284 м и высотой, опущенной на основание 3,5355 м:

$$K_{f2} = \frac{4 \cdot 3,5355}{(10,04 + 4,102) \operatorname{tg}^2 \left(0,5 \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cdot 3,5355}{10,04 + 4,102} \right) \right)} = 17,944.$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$B_{w1}^q = -4,658 \cdot 10^2 + 1,509 \cdot 10^2 \cdot K_f - 1,932 \cdot 10 \cdot K_f^2 + 2,551 \cdot K_f^3 - 0,102 \cdot K_f^4 + 0,197 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^5 - 1,459 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^6 = 825;$$

$$C_{w_1}^q = 0,32966617 \cdot 10^{-1} - 0,13133175 \cdot 10^{-1} \cdot K_f + 0,24128649 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^2 - \\ - 0,25901955 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^3 + 1,7646701 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^4 - 7,8600955 \cdot 10^{-7} \cdot K_f^5 + \\ + 2,2819922 \cdot 10^{-8} \cdot K_f^6 + 4,1596333 \cdot 10^{-10} \cdot K_f^7 + 4,3197538 \cdot 10^{-12} \cdot K_f^8 - \\ - 1,9485454 \cdot 10^{-14} \cdot K_f^9 = 0,841 \cdot 10^{-3};$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника:

$$B_{w_2}^q = 0,78699598 \cdot 10^3 - 1,5090581 \cdot 10^2 \cdot K_f + 1,7527055 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 - \\ - 0,68053186 \cdot K_f^3 + 0,13773982 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^4 - 0,10598466 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 = 1022;$$

$$C_{w_2}^q = 0,19144713 \cdot 10^{-3} - 0,21812676 \cdot 10^{-1} \cdot [K_f]^{-1} + 1,3806279 \cdot [K_f]^{-2} - \\ - 2,5763995 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-3} + 2,4012847 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-4} - 0,87522286 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-5} = \\ = 0,656 \cdot 10^{-3}.$$

Определяем значения B_w^q и C_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (825 - 1022) / (10 - 17,944) = 24,8; \\ A_1 = 825 - (825 - 1022) / (10 - 17,944)10 = 577; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (0,841 \cdot 10^{-3} - 0,656 \cdot 10^{-3}) / (10 - 17,944) = -2,329 \cdot 10^{-5}; \\ A_3 = 0,841 \cdot 10^{-3} - (0,841 \cdot 10^{-3} - 0,656 \cdot 10^{-3}) / (10 - 17,944)10 = 1,074 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 577 + 24,8K_f = 857,2; \\ C_w^q = 1,074 \cdot 10^{-3} - 2,329 \cdot 10^{-5} \cdot K_f = 0,811 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 857,2 \left(\frac{70356094}{25^2} + 5000000 \cdot 0,811 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,1036$ мм), на 3,47%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(825 / 1022) / \ln(10 / 17,944) = 0,366; \\ A_1 = 825 / 10^{\ln(825/1022)/\ln(10/17,944)} = 355; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(0,841 \cdot 10^{-3} / 0,656 \cdot 10^{-3}) / \ln(10 / 17,944) = -0,425; \\ A_3 = 0,841 \cdot 10^{-3} / 10^{\ln(0,841 \cdot 10^{-3} / 0,656 \cdot 10^{-3}) / \ln(10/17,944)} = 2,237; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} B_w^q = 355K_f^{0,366} = 862,7; \\ C_w^q = 2,237K_f^{-0,425} = 0,798 \cdot 10^{-3}; \end{cases}$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 862,7 \left(\frac{70356094}{25^2} + 5000000 \cdot 0,798 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,0944 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,1036$ мм), на 8,88%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (825 - 1022) / (10^2 - 17,944^2) = 0,887; \\ A_1 = 825 - (825 - 1022) / (10^2 - 17,944^2) 10^2 = 736; \\ A_4 = (0,841 \cdot 10^{-3} - 0,656 \cdot 10^{-3}) / (10^2 - 17,944^2) = -8,334 \cdot 10^{-7}; \\ A_3 = 0,841 \cdot 10^{-3} - (0,841 \cdot 10^{-3} - 0,656 \cdot 10^{-3}) / (10^2 - 17,944^2) 10^2 = 0,924 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 736 + 0,887K_f^2 = 849,6; \\ C_w^q = 0,924 \cdot 10^{-3} - 8,334 \cdot 10^{-7} \cdot K_f^2 = 0,818 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 849,6 \left(\frac{70356094}{25^2} + 5000000 \cdot 0,818 \cdot 10^{-3} \right) \right]^{-1} = 0,1009 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,1036$ мм), на 2,61%.

В таблице 3.9 представлены результаты расчета пластинок в форме равнобедренных трапеций на упругом основании при различных комбинациях граничных условий.

Характеристики материала пластинок: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина пластинки 300 мм, площадь $A = 25$ м², интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 10$ кН/м², коэффициент постели $k = 5000$ кН/м³.

Анализ результатов решения показал, что наибольшую точность при расчете пластинок данного класса дает линейно-степенная интерполяция по 2 решениям. Наибольшая погрешность получаемых результатов 5,41 %. Данное отклонение вызвано тем, что для ряда фигур опорные решения

представляют собой пластинки с острыми углами (менее 30), для которых решение с помощью МИКФ имеет достаточно большую погрешность. Тем не менее, полученные результаты являются удовлетворительными, а, следовательно, МИКФ может быть успешно использован при расчете пластинок на упругом основании.

Таблица 3.9 – Сопоставление значений максимального прогиба w_0 пластинок в форме равнобедренных трапеций на упругом винклеровском основании, полученного с помощью МКЭ и МИКФ при различных комбинациях граничных условий

a	5,8853	6,8234	7,8903	7,6125	8,4836	9,5524	8,3604	9,1148	10,04	
h	5	5	5	4,0825	4,0825	4,0825	3,5355	3,5355	3,5355	
α	80	70	60	70	60	50	70	60	50	
K_f	8,124	8,258	9,307	9,000	9,522	10,522	10,233	10,595	11,299	
Значения w_0 , мм										
«1»	МКЭ	0,315	0,301	0,275	0,267	0,251	0,227	0,205	0,199	0,187
	МИКФ	0,318	0,303	0,276	0,268	0,256	0,234	0,206	0,201	0,193
	Δ , %	0,51	0,69	0,33	0,76	1,92	3,17	0,34	1,38	3,20
«2»	МКЭ	0,233	0,220	0,198	0,227	0,210	0,182	0,187	0,178	0,163
	МИКФ	0,229	0,214	0,190	0,226	0,209	0,181	0,189	0,182	0,170
	Δ , %	1,83	2,82	4,00	0,41	0,16	0,26	1,19	2,25	3,97
«3»	МКЭ	0,241	0,238	0,233	0,167	0,166	0,165	0,109	0,109	0,110
	МИКФ	0,241	0,244	0,241	0,167	0,167	0,167	0,109	0,109	0,110
	Δ , %	0,37	2,55	3,60	0,25	0,74	0,97	0,20	0,02	0,62
«4»	МКЭ	0,234	0,213	0,182	0,158	0,147	0,129	0,106	0,102	0,096
	МИКФ	0,222	0,204	0,178	0,156	0,148	0,134	0,106	0,104	0,100
	Δ , %	5,41	4,57	2,49	1,88	0,41	3,52	0,12	1,29	3,92
«6»	МКЭ	0,183	0,179	0,172	0,147	0,144	0,138	0,103	0,103	0,101
	МИКФ	0,190	0,189	0,180	0,152	0,149	0,144	0,105	0,105	0,104
	Δ , %	3,46	4,95	4,57	2,90	3,66	4,15	1,58	1,97	2,56
«8»	МКЭ	0,138	0,134	0,127	0,130	0,124	0,114	0,098	0,096	0,092
	МИКФ	0,140	0,137	0,128	0,133	0,127	0,116	0,100	0,098	0,095
	Δ , %	1,23	2,25	0,61	2,01	2,41	2,04	1,34	2,09	2,98
«10»	МКЭ	0,163	0,158	0,149	0,095	0,095	0,093	0,057	0,057	0,057
	МИКФ	0,160	0,157	0,151	0,094	0,094	0,093	0,057	0,057	0,057
	Δ , %	1,85	0,62	1,09	1,34	1,08	0,50	0,29	0,10	0,87
«11»	МКЭ	0,131	0,126	0,116	0,088	0,086	0,081	0,055	0,055	0,054
	МИКФ	0,134	0,129	0,118	0,089	0,087	0,084	0,057	0,056	0,055
	Δ , %	2,46	2,28	1,87	0,92	1,69	2,99	2,52	1,49	2,24
«12»	МКЭ	0,106	0,100	0,090	0,081	0,077	0,069	0,054	0,053	0,051
	МИКФ	0,106	0,099	0,087	0,082	0,078	0,071	0,057	0,054	0,053
	Δ , %	0,37	1,22	3,04	1,16	1,95	2,58	4,82	2,20	3,77

4 ПРИМЕНЕНИЕ МИКФ К РАСЧЕТУ ПЛАСТИНОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ П.Л. ПАСТЕРНАКА

4.1 Вывод основных соотношений

Проанализируем уравнение полной потенциальной энергии пластинок:

$$\mathfrak{E} = U + T, \quad (4.1)$$

Потенциальная энергия внутренних сил определяется по формуле [35]:

$$U = \frac{D}{2} \iint \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA, \quad (4.2)$$

Ограничившись исследованием пластинок с полностью жестко защемленным или шарнирно опертым полигональным контуром, получим формулу потенциальной энергии внутренних сил в упрощенном виде:

$$U = \frac{D}{2} \iint_A (\nabla^2 w)^2 dA. \quad (4.3)$$

Потенциальная энергия внешних сил определяется из выражения

$$T = - \iint_A q w dA, \quad (4.4)$$

Так как в качестве модели упругого основания используется двухпараметрическая модель П.Л. Пастернака, то формула (4.4) примет следующий вид:

$$T = - \iint_A w (q - C_1 w + C_2 \nabla^2 w) dA \quad (4.5)$$

где C_1 – первый коэффициент постели (коэффициент сжатия, кН/м³), C_2 – второй коэффициент постели (коэффициент сдвига, кН/м). Учитывая (4.4) и (4.5), выражение (4.1) можно представить следующим образом:

$$\mathfrak{E} = \iint_A \left[\frac{D}{2} (\nabla^2 w)^2 - w (q - C_1 w + C_2 \nabla^2 w) \right] dA. \quad (4.6)$$

Представим поверхность прогибов пластинки в виде линий уровня,

подобных их контуру и подобно расположенных:

$$w(x,y) = w_0 g[t/r(\varphi)] = w_0 g(\rho), \quad (4.7)$$

Подставим (4.7) в (4.3) и (4.5). В результате преобразований получим:

$$U = \iint_A \left(\frac{D}{2} (\nabla^2 w)^2 \right) dA \approx \frac{D}{2} \frac{w_0^2}{2A} K_f^2 \int_0^1 (g''^2 \rho + 2g''g' + g'^2 \rho^{-1}) d\rho \approx \frac{Dw_0^2}{4A} K_f^2 \Phi_g;$$

$$U \approx \frac{Dw_0^2}{4A} K_f^2 \Phi_g; \quad (4.8)$$

где $\Phi_g = \int_0^1 (g''^2 \rho + 2g''g' + g'^2 \rho^{-1}) d\rho$.

$$T = -\iint_A wr(w) dA = -\iint_A w(q - C_1 w + C_2 \nabla^2 w) dA;$$

$$T = -qw_0 \int_0^{2\pi} \int_0^r g(\rho) t dt d\varphi + C_1 w_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r g^2(\rho) t dt d\varphi -$$

$$-C_2 w_0^2 K_f \int_0^1 g(\rho) (g''\rho + g') \rho d\rho;$$

$$T = -2Aqw_0 \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho + 2AC_1 w_0^2 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho -$$

$$-C_2 w_0^2 K_f \int_0^1 g(\rho) (g''\rho + g') d\rho; \quad (4.9)$$

Подставим (4.8) и (4.9) в (4.6):

$$\mathfrak{E} = U + T = \frac{Dw_0^2}{4A} K_f^2 \Phi_g - 2Aqw_0 \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho + 2AC_1 w_0^2 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho -$$

$$-C_2 w_0^2 K_f \int_0^1 g(\rho) (g''\rho + g') d\rho; \quad (4.10)$$

Продифференцируем полную энергию системы по параметру w_0 и найдем экстремум этого функционала:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial w_0} = \frac{Dw_0}{2A} K_f^2 \Phi_g - 2Aq \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho + 4AC_1 w_0 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho -$$

$$-2C_2 w_0 K_f \int_0^1 g(\rho) (g''\rho + g') d\rho = 0.$$

Из этого выражения получим:

$$w_0 \left[\frac{D}{2A} K_f^2 \Phi_g + 4AC_1 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho - 2C_2 K_f \int_0^1 g(\rho)(g''\rho + g') d\rho \right] =$$

$$= 2Aq \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho. \quad (4.11)$$

Найдем величину, обратную максимальному прогибу:

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{2Aq} \frac{1}{\int_0^1 g(\rho) \rho d\rho} \left[\frac{D}{2A} K_f^2 \Phi_g + 4AC_1 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho - \right.$$

$$\left. - 2C_2 K_f \int_0^1 g(\rho)(g''\rho + g') d\rho \right];$$

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{q} K_f^2 \Phi_g / 4 \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho \left[\frac{D}{A^2} + C_1 \frac{1}{K_f^2} 8 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho / \Phi_g - \right.$$

$$\left. - \frac{C_2}{A} \frac{1}{K_f} 4 \int_0^1 g(\rho)(g''\rho + g') d\rho / \Phi_g \right] \quad (4.12)$$

Поскольку определенные интегралы, входящие в (4.12), являются выражениями, зависящими от выбора функции $g(\rho)$, то их можно ввести в коэффициенты пропорциональности вместе с коэффициентом формы. В этом случае формула (4.12) примет следующий вид:

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{q} B_w^q \left[\frac{D}{A^2} + C_1 C_w^q - \frac{C_2}{A} E_w^q \right] \quad (4.13)$$

При этом:

$$B_w^q = K_f^2 \Phi_g / 4 \int_0^1 g(\rho) \rho d\rho; \quad C_w^q = \frac{1}{K_f^2} 8 \int_0^1 g^2(\rho) \rho d\rho / \Phi_g;$$

$$E_w^q = \frac{1}{K_f} 4 \int_0^1 g(\rho)(g''\rho + g') d\rho / \Phi_g.$$

Значения коэффициентов пропорциональности B_w^q и C_w^q можно найти, используя формулы (3.16) и (3.17), а коэффициента E_w^q – зная максимальный прогиб пластинки при $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ ($w_{0(C_1 \neq 0, C_2 = 0)}$) и при $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$

($w_{0(C_1 \neq 0, C_2 \neq 0)}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_{0(C_1 \neq 0, C_2 \neq 0)}} &= \frac{D}{qA^2} B_w^q + \frac{C_1}{q} C_w^q - \frac{C_2}{qA} E_w^q = \frac{1}{w_{0(C_1 \neq 0, C_2 = 0)}} - \frac{C_2}{qA} E_w^q, \\ \frac{1}{w_{0(C_1 \neq 0, C_2 = 0)}} - \frac{1}{w_{0(C_1 \neq 0, C_2 \neq 0)}} &= \frac{C_2}{qA} E_w^q \Rightarrow \\ \Rightarrow E_w^q &= \frac{qA}{C_2} \left(\frac{1}{w_{0(C_1 \neq 0, C_2 = 0)}} - \frac{1}{w_{0(C_1 \neq 0, C_2 \neq 0)}} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Значения параметров B_w^q , C_w^q и E_w^q не зависят от площади, коэффициента постели, цилиндрической жесткости и интенсивности равномерно распределенной нагрузки. Они зависят лишь от коэффициента формы искомой пластинки, а также от типа граничных условий.

Ввиду того, что выбранная поверхность прогибов представляет собой совокупность линий уровня, полученная формула будет справедлива только в случае, если в процессе изгиба прогибы пластинки будут монотонно возрастать, а кривизна в точке с максимальным прогибом будет неотрицательна, то есть:

$$\chi_x^{w_0} = \frac{1}{\rho_x^{w_0}} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \geq 0, \quad \chi_y^{w_0} = \frac{1}{\rho_y^{w_0}} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \geq 0, \quad \chi^{w_0} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \geq 0.$$

Для соблюдения этих неравенств моменты, возникающие в конструкции в точке с максимальным прогибом, также должны быть больше или равны нулю:

$$\begin{aligned} M_x^{w_0} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \geq 0, \quad M_y^{w_0} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \geq 0, \\ M_{xy}^{w_0} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \geq 0. \end{aligned}$$

Данное условие соблюдается, если эпюры изгибающих и крутящих моментов в точке с $w=w_0$ имеют кривизну, меньшую или равную нулю, то есть:

$$\frac{\partial^2 M_x^{w_0}}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 M_{xy}^{w_0}}{\partial y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 M_{xy}^{w_0}}{\partial x \partial y} \leq 0.$$

Учитывая дифференциальное уравнение изгиба пластинки на упругом основании для точки с $w = w_0$:

$$D \left(\frac{\partial^2 M_x^{w_0}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^{w_0}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{w_0}}{\partial y^2} \right) = r(w_0) \leq 0,$$

получим неравенство:

$$r(w_0) = q - C_1 w + C_2 \nabla^2 w \leq 0.$$

В точке $w = w_0$ функция прогибов будет иметь экстремум, следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{w=w_0} &= \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{w=w_0} = 0; \\ \nabla^2 w &= 0; \\ r(w_0) &= q - C_1 w \leq 0. \end{aligned}$$

Преобразуем его к следующему виду:

$$\frac{1}{w_0} \geq \frac{C_1}{q}.$$

Подставив вместо w_0 правую часть из (4.13), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} B_w^q \left[\frac{D}{A^2} + C_1 C_w^q - \frac{C_2}{A} E_w^q \right] &\geq \frac{C_1}{q}; \\ B_w^q \left[\frac{D}{A^2} + C_1 C_w^q - \frac{C_2}{A} E_w^q \right] &\geq C_1; \\ B_w^q \left[\frac{D}{C_1 A^2} + C_w^q - \frac{C_2}{C_1 A} E_w^q \right] &\geq 1. \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.2 Определение максимального прогиба пластинок на упругом двухпараметрическом основании П.Л. пастернака, являющихся «опорными» решениями МИКФ

4.2.1 Прямоугольные пластинки

Для определения максимального прогиба пластинок на упругом двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака необходимо дополнительно построить графики изменения параметра E_w^q относительно K_f при различных комбинациях граничных условий (рисунок 3.1).

Согласно формуле (4.14), для нахождения значений E_w^q необходимо знать максимальный прогиб пластинки при $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ ($w_{0(C_1 \neq 0, C_2 = 0)}$) и при $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$ ($w_{0(C_1 \neq 0, C_2 \neq 0)}$). Эти величины могут быть найдены с использованием МКЭ.

Используя МКЭ, вычислим в расчетном комплексе «SCAD» значения параметра E_w^q , результаты сведем в таблицу 4.1. Расчет производим при следующих параметрах: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, толщина $h = 0,03$ м, $A = 1$ м², интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 40$ кН/м², число конечных элементов 900, тип конечного элемента – четырехугольный конечный элемент плиты. Значение величины $w_{0(k \neq 0)}$ определялось при коэффициентах постели $C_1 = 5$ кН/м³, $C_2 = 30$ кН/м.

Таблица 4.1 – Сопоставление значений параметров E_w^q , полученных с помощью МКЭ и аппроксимирующих функций (4.16)...(4.24)

a/b	1	1,1	1,2	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	3,0	4,0	5,0	
K_f	8	8,04	8,13	8,67	9,42	10,00	10,62	11,60	13,33	17,00	20,80	
Значения параметра $E_w^q \cdot 10^2$												
«1»	МКЭ	-5,305	-5,282	-5,224	-4,920	-4,543	-4,292	-4,050	-3,714	-3,229	-2,511	-2,031
	(4.16)	-5,302	-5,280	-5,221	-4,921	-4,545	-4,292	-4,048	-3,710	-3,225	-2,510	-2,031
	$\Delta, \%$	0,05	0,05	0,04	0,01	0,04	0,01	0,04	0,12	0,15	0,02	0,02
«2»	МКЭ	-3,931	-4,132	-4,175	-4,261	-4,134	-3,992	-3,829	-3,578	-3,165	-2,496	-2,027
	(4.17)	-3,967	-4,034	-4,157	-4,248	-4,126	-3,995	-3,828	-3,566	-3,171	-2,493	-2,029
	$\Delta, \%$	0,91	2,42	0,43	0,31	0,20	0,07	0,02	0,33	0,19	0,10	0,08
«3»	МКЭ	-2,734	-2,954	-3,144	-3,520	-3,642	-3,626	-3,558	-3,401	-3,081	-2,476	-2,023
	(4.18)	-2,749	-2,868	-3,102	-3,502	-3,626	-3,626	-3,552	-3,385	-3,086	-2,473	-2,024
	$\Delta, \%$	0,56	3,01	1,34	0,52	0,45	0,00	0,15	0,47	0,16	0,12	0,07
«4»	МКЭ	-3,931	-3,756	-3,576	-3,055	-2,631	-2,397	-2,196	-1,942	-1,620	-1,227	-0,980
	(4.19)	-3,883	-3,783	-3,573	-3,046	-2,628	-2,388	-2,193	-1,948	-1,615	-1,227	-0,979
	$\Delta, \%$	1,24	0,70	0,10	0,28	0,12	0,40	0,14	0,28	0,30	0,04	0,13

Продолжение таблицы 4.1

a/b	1	1,1	1,2	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	3,0	4,0	5,0	a/b
K _f	8	8,04	8,13	8,67	9,42	10,00	10,62	11,60	13,33	17,00	20,80	K _f
«5»	МКЭ	-3,180	-3,159	-3,105	-2,830	-2,520	-2,327	-2,152	-1,922	-1,615	-1,227	-0,980
	(4.20)	-3,180	-3,158	-3,103	-2,831	-2,520	-2,326	-2,150	-1,921	-1,620	-1,223	-0,980
	Δ, %	0,01	0,02	0,05	0,05	0,02	0,03	0,09	0,05	0,31	0,37	0,07
«6»	МКЭ	-2,391	-2,487	-2,543	-2,524	-2,362	-2,227	-2,089	-1,888	-1,606	-1,227	-0,981
	(4.21)	-2,452	-2,496	-2,571	-2,549	-2,374	-2,242	-2,096	-1,886	-1,612	-1,225	-0,982
	Δ, %	2,47	0,36	1,08	0,97	0,50	0,68	0,34	0,11	0,38	0,18	0,18
«7»	МКЭ	-2,734	-2,509	-2,307	-1,826	-1,491	-1,322	-1,186	-1,027	-0,841	-0,629	-0,504
	(4.22)	-2,697	-2,575	-2,330	-1,829	-1,495	-1,313	-1,185	-1,038	-0,833	-0,631	-0,502
	Δ, %	1,34	2,56	0,95	0,18	0,32	0,68	0,09	1,00	0,91	0,27	0,50
«8»	МКЭ	-2,391	-2,267	-2,137	-1,770	-1,475	-1,318	-1,187	-1,031	-0,844	-0,629	-0,504
	(4.23)	-2,363	-2,290	-2,138	-1,765	-1,473	-1,310	-1,184	-1,035	-0,839	-0,630	-0,503
	Δ, %	1,19	0,98	0,05	0,33	0,16	0,62	0,24	0,34	0,52	0,09	0,25
«9»	МКЭ	-1,946	-1,929	-1,884	-1,669	-1,439	-1,302	-1,182	-1,032	-0,846	-0,626	-0,502
	(4.24)	-1,949	-1,931	-1,885	-1,669	-1,438	-1,302	-1,183	-1,035	-0,851	-0,627	-0,499
	Δ, %	0,13	0,12	0,08	0,00	0,07	0,04	0,06	0,26	0,65	0,07	0,57

Используя программный комплекс TableCurve 2D, построим по табличным данным следующие аппроксимирующие функции:

при 1-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4]^{-1}; \quad (4.16)$$

при 2-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \quad (4.17)$$

при 3-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \quad (4.18)$$

при 4-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \quad (4.19)$$

при 5-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3]^{-1}; \quad (4.20)$$

при 6-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \quad (4.21)$$

при 7-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \quad (4.22)$$

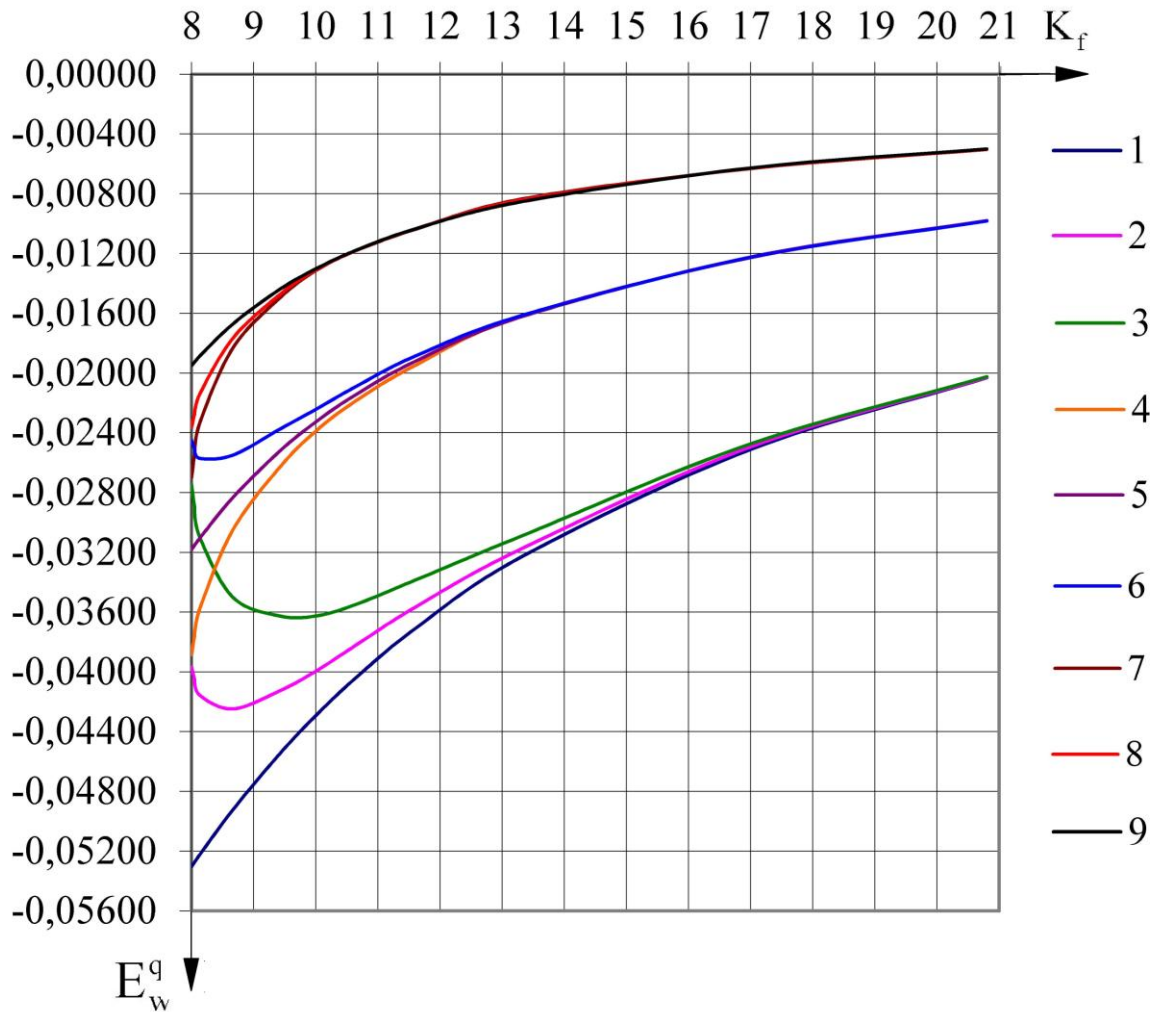


Рисунок 4.1 – Кривые $E_w^q - K_f$ для прямоугольных пластинок на упругом основании с комбинациями граничных условий по рисунку 4.1

Таблица 4.2 – Значения коэффициентов а...т аппроксимирующих функций (4.16)...(4.24)

Формула	Коэффициенты										
	a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m
(4.16)	-3,111	-1,719	$-0,365 \cdot 10^{-1}$	$-0,696 \cdot 10^{-3}$	$-4,484 \cdot 10^{-6}$	–	–	–	–	–	–
(4.17)	0,46555923	$-8,6912872 \cdot 10^1$	$6,9686597 \cdot 10^3$	$-3,2064035 \cdot 10^5$	$9,3398166 \cdot 10^6$	$-1,8021883 \cdot 10^8$	$2,3366694 \cdot 10^9$	$-2,0137552 \cdot 10^{10}$	$1,106062 \cdot 10^{11}$	$-3,5030279 \cdot 10^{11}$	$4,8672762 \cdot 10^{11}$
(4.18)	0,59190485	$-1,108554 \cdot 10^2$	$8,9380157 \cdot 10^3$	$-4,1325309 \cdot 10^5$	$1,2099246 \cdot 10^7$	$-2,3470625 \cdot 10^8$	$3,0597017 \cdot 10^9$	$-2,6513371 \cdot 10^{10}$	$1,4642114 \cdot 10^{11}$	$-4,6622779 \cdot 10^{11}$	$6,5120002 \cdot 10^{11}$
(4.19)	-0,4429816	$8,2583228 \cdot 10^1$	$-6,7066173 \cdot 10^3$	$3,1026775 \cdot 10^5$	$-9,0832964 \cdot 10^6$	$1,760342 \cdot 10^8$	$-2,2907773 \cdot 10^9$	$1,980213 \cdot 10^{10}$	$-1,093881 \cdot 10^{11}$	$3,4607141 \cdot 10^{11}$	$-4,8172164 \cdot 10^{11}$
(4.20)	$-1,733 \cdot 10^1$	-6,4	$-0,416 \cdot 10^{-1}$	$-0,475 \cdot 10^{-3}$	–	–	–	–	–	–	–
(4.21)	0,27296076	$-5,51247464 \cdot 10^1$	$4,1416902 \cdot 10^3$	$-1,9207618 \cdot 10^5$	$5,6451433 \cdot 10^6$	$-1,100174 \cdot 10^8$	$1,4419726 \cdot 10^9$	$-1,2570377 \cdot 10^{10}$	$6,9867268 \cdot 10^{11}$	$-2,2394817 \cdot 10^{11}$	$3,14889 \cdot 10^{11}$
(4.22)	-0,60045323	$1,1212935 \cdot 10^2$	$-9,0945161 \cdot 10^3$	$4,208997 \cdot 10^5$	$-1,233108 \cdot 10^7$	$2,3926021 \cdot 10^8$	$-3,1186768 \cdot 10^9$	$2,7013791 \cdot 10^{10}$	$-1,4909834 \cdot 10^{11}$	$4,744197 \cdot 10^{11}$	-6,6212855
(4.23)	-0,31371951	$5,8617276 \cdot 10^1$	$-4,7645878 \cdot 10^3$	$2,2078382 \cdot 10^5$	$-6,475636 \cdot 10^6$	$1,2576899 \cdot 10^8$	$-1,6406322 \cdot 10^9$	$1,4219105 \cdot 10^{10}$	$-7,8508371 \cdot 10^{10}$	$2,4985149 \cdot 10^{11}$	$-3,4871429 \cdot 10^{11}$
(4.24)	$-5,73 \cdot 10^1$	$-1,404 \cdot 10^1$	$0,323 \cdot 10^{-1}$	$0,377 \cdot 10^{-2}$	$-7,158 \cdot 10^{-5}$	–	–	–	–	–	–

при 8-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} + k[K_f]^{-8} + l[K_f]^{-9} + m[K_f]^{-10}; \quad (4.23)$$

при 9-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4]^{-1}. \quad (4.24)$$

Погрешность определения параметра E_w^q не превышает 5 %, что является удовлетворительным результатом для использования их в инженерных расчетах.

На основании табличных данных на рисунке 4.1 построены кривые $E_w^q - K_f$ для различных комбинаций граничных условий. Значения коэффициентов $a...m$ приведены в таблице 4.2. Как и при определении параметров B_w^q и C_w^q , смещение ненагруженных изгибаемым моментом сечений ведет к возникновению точек экстремума для некоторых комбинаций граничных условиях.

4.2.2 Ромбические пластинки

Используя МКЭ, вычислим в расчетном комплексе «SCAD» значения параметра E_w^q для ромбических пластинок и сведем результаты в таблицу 4.3. Расчет производим при следующих параметрах: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, толщина $h = 0,03$ м, $A = 1$ м², интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 40$ кН/м², число конечных элементов 924, тип конечного элемента – четырехугольный конечный элемент плиты. Значение величины $w_{0(k \neq 0)}$ определялось при коэффициентах постели $C_1 = 5$ кН/м³, $C_2 = 30$ кН/м.

На основании табличных данных на рисунке 4.2 построены кривые $E_w^q - K_f$ для различных комбинаций граничных условий.

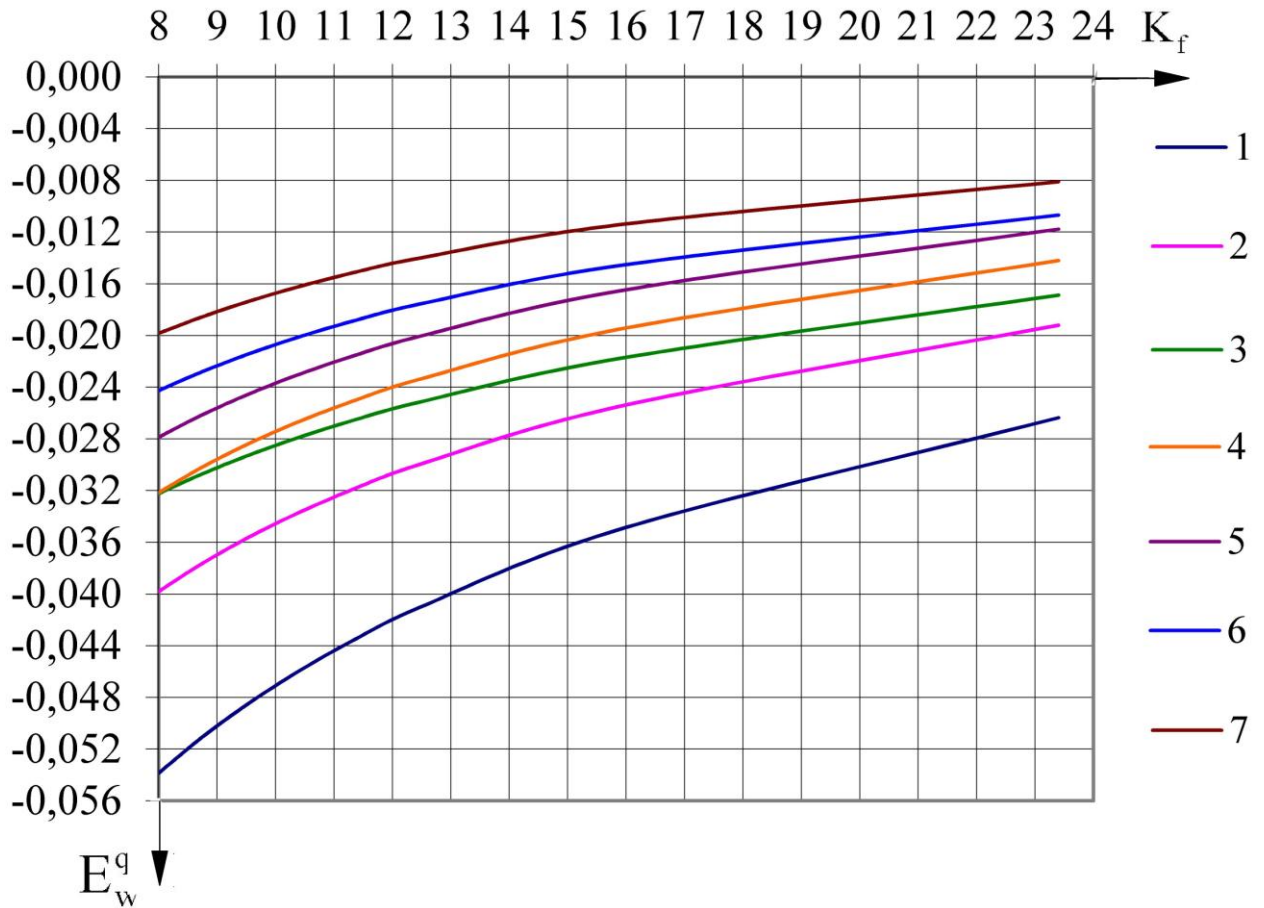


Рисунок 4.2 – Кривые $E_w^q - K_f$ для ромбических пластинок на упругом основании с комбинациями граничных условий по рисунку 4.3

Таблица 4.3 – Сопоставление значений параметров E_w^q , полученных с помощью МКЭ и аппроксимирующих функций (4.25)...(4.31)

α , град.	90	80	70	65	60	55	50	45	40	30	20	
K_f	8	8,12	8,52	8,83	9,24	9,77	10,44	11,32	12,45	16,01	23,40	
Значения параметра $E_w^q \cdot 10^2$												
«1»	МКЭ	-5,379	-5,336	-5,193	-5,074	-4,938	-4,773	-4,581	-4,359	-4,104	-3,477	-2,639
	(4.25)	-5,386	-5,337	-5,189	-5,077	-4,940	-4,775	-4,582	-4,360	-4,106	-3,483	-2,636
	Δ , %	0,13	0,02	0,07	0,06	0,04	0,03	0,04	0,03	0,05	0,19	0,14
α , град.	90	80	70	65	60	55	50	45	40	30	20	
K_f	8	8,12	8,52	8,83	9,24	9,77	10,44	11,32	12,45	16,01	23,40	
«2»	МКЭ	-3,979	-3,943	-3,829	-3,740	-3,634	-3,507	-3,359	-3,191	-2,999	-2,533	-1,922
	(4.26)	-3,981	-3,943	-3,827	-3,740	-3,634	-3,507	-3,360	-3,191	-2,999	-2,536	-1,920
	Δ , %	0,06	0,00	0,06	0,01	0,00	0,00	0,03	0,00	0,00	0,11	0,13
«3»	МКЭ	-3,220	-3,202	-3,122	-3,060	-2,984	-2,892	-2,784	-2,661	-2,520	-2,173	-1,698
	(4.27)	-3,224	-3,197	-3,116	-3,054	-2,978	-2,887	-2,781	-2,657	-2,516	-2,168	-1,687
	Δ , %	0,11	0,15	0,22	0,21	0,20	0,17	0,14	0,13	0,14	0,23	0,64

Продолжение таблицы 4.3

«4»	МКЭ	-3,220	-3,180	-3,075	-2,994	-2,900	-2,788	-2,658	-2,509	-2,341	-1,936	-1,424
	(4.28)	-3,217	-3,182	-3,076	-2,998	-2,902	-2,788	-2,657	-2,508	-2,340	-1,940	-1,420
	Δ, %	0,11	0,06	0,05	0,11	0,05	0,00	0,04	0,06	0,03	0,21	0,33
«5»	МКЭ	-2,786	-2,756	-2,665	-2,596	-2,512	-2,411	-2,294	-2,160	-2,007	-1,642	-1,184
	(4.29)	-2,787	-2,757	-2,665	-2,595	-2,511	-2,410	-2,293	-2,159	-2,008	-1,645	-1,177
	Δ, %	0,05	0,02	0,01	0,02	0,05	0,06	0,05	0,03	0,02	0,19	0,63
«6»	МКЭ	-2,428	-2,402	-2,324	-2,265	-2,193	-2,106	-2,006	-1,891	-1,761	-1,452	-1,072
	(4.30)	-2,427	-2,401	-2,323	-2,264	-2,192	-2,105	-2,004	-1,889	-1,758	-1,451	-1,068
	Δ, %	0,07	0,06	0,04	0,02	0,03	0,05	0,07	0,12	0,16	0,04	0,31
«7»	МКЭ	-1,982	-1,960	-1,891	-1,840	-1,777	-1,701	-1,613	-1,513	-1,400	-1,132	-0,806
	(4.31)	-1,983	-1,961	-1,893	-1,842	-1,779	-1,703	-1,615	-1,515	-1,401	-1,136	-0,810
	Δ, %	0,06	0,06	0,10	0,12	0,12	0,13	0,13	0,12	0,13	0,32	0,44

Используя программу TableCurve 2D, по табличным данным построены следующие аппроксимирующие функции:

при 1-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 \right]^{-1}; \quad (4.25)$$

при 2-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 \right]^{-1}; \quad (4.26)$$

при 3-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 \right]^{-1}; \quad (4.27)$$

при 4-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 \right]^{-1}; \quad (4.28)$$

при 5-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 \right]^{-1}; \quad (4.29)$$

при 6-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5 \right]^{-1}; \quad (4.30)$$

при 7-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = \left[a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5 \right]^{-1}. \quad (4.31)$$

Таблица 4.4 – Значения коэффициентов a...f аппроксимирующих функций (4.25)...(4.31)

Формула	Коэффициенты					
	a	b	c	d	e	f
(4.25)	-5,298	-2,037	$0,611 \cdot 10^{-1}$	$-0,187 \cdot 10^{-2}$	$1,844 \cdot 10^{-5}$	–
(4.26)	-5,857	-2,982	$-0,917 \cdot 10^{-1}$	$-0,27 \cdot 10^{-2}$	$2,646 \cdot 10^{-5}$	–
(4.27)	$1,008 \cdot 10^1$	-3,284	0,106	$-0,307 \cdot 10^{-2}$	$2,988 \cdot 10^{-5}$	–
(4.28)	-4,155	-4,177	0,132	$-0,417 \cdot 10^{-2}$	$4,209 \cdot 10^{-5}$	–
(4.29)	-6,546	-4,312	0,109	$-0,386 \cdot 10^{-2}$	$4,089 \cdot 10^{-5}$	–
(4.30)	$-1,572 \cdot 10^1$	-2,319	-0,19	$0,129 \cdot 10^{-1}$	$-0,366 \cdot 10^{-3}$	$3,544 \cdot 10^{-6}$
(4.31)	$-1,872 \cdot 10^1$	-2,634	-0,271	$0,165 \cdot 10^{-1}$	$-0,458 \cdot 10^{-3}$	$4,443 \cdot 10^{-6}$

Значения коэффициентов a...f приведены в таблице 4.4.

Погрешность результатов не превышает 1 %, что является достаточным для инженерных расчетов. Следовательно, зная коэффициент формы заданной ромбической пластинки, можно, используя аппроксимирующие функции $E_w^q - K_f$ соответствующие заданным граничным условиям, найти значения параметров.

4.2.3 Треугольные пластинки

Вычислим с помощью метода конечных элементов в расчетном комплексе «SCAD» значения параметра E_w^q для треугольных пластинок, и сведем результаты в таблицу 4.5. Расчет производим при следующих параметрах: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, толщина $h = 0,03$ м, $A = 1$ м², интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 40$ кН/м², число конечных элементов 930, тип конечного элемента – четырехугольный конечный элемент плиты. Значение величины $w_{0(k \neq 0)}$ определялось при коэффициентах постели $C_1 = 5$ кН/м³, $C_2 = 30$ кН/м.

Как видно из таблицы, погрешность результатов расчёта, полученных с помощью функций (4.32)...(4.43), не превышает 1 %.

Таблица 4.5 – Сопоставление значений параметров E_w^q , полученных с помощью МКЭ и аппроксимирующих функций (4.32)...(4.43)

α		85	80	70	60	55	50	45	30	20
K_f		27,03	16,07	11,20	10,39	10,54	10,96	11,66	16,09	23,42
Значения параметра $E_w^q \cdot 10^2$										
«1»	МКЭ	-2,095	-3,352	-4,392	-4,635	-4,595	-4,481	-4,302	-3,440	-2,604
	(4.32,4.38)	-2,096	-3,353	-4,394	-4,638	-4,595	-4,479	-4,300	-3,441	-2,604
	$\Delta, \%$	0,07	0,05	0,05	0,05	0,00	0,04	0,03	0,02	0,01
«2»	МКЭ	-1,182	-2,044	-2,898	-3,216	-3,227	-3,194	-3,089	-2,534	-1,952
	(4.33,4.39)	-1,182	-2,043	-2,893	-3,209	-3,204	-3,171	-3,088	-2,525	-1,955
	$\Delta, \%$	0,00	0,01	0,17	0,20	0,75	0,73	0,02	0,37	0,16
«3»	МКЭ	-1,779	-2,779	-3,307	-3,199	-3,047	-2,881	-2,687	-1,977	-1,423
	(4.34,4.40)	-1,779	-2,780	-3,308	-3,182	-3,074	-2,871	-2,680	-1,971	-1,419
	$\Delta, \%$	0,01	0,01	0,05	0,53	0,88	0,37	0,27	0,26	0,29
«4»	МКЭ	-0,683	-1,286	-1,985	-2,272	-2,322	-2,297	-2,253	-1,846	-1,384
	(4.35,4.41)	-0,683	-1,286	-1,976	-2,282	-2,304	-2,309	-2,249	-1,844	-1,385
	$\Delta, \%$	0,00	0,03	0,44	0,43	0,78	0,54	0,19	0,11	0,05
«5»	МКЭ	-1,017	-1,696	-2,218	-2,261	-2,198	-2,101	-1,987	-1,503	-1,107
	(4.36,4.42)	-1,017	-1,697	-2,222	-2,256	-2,205	-2,100	-1,982	-1,504	-1,106
	$\Delta, \%$	0,00	0,01	0,22	0,21	0,32	0,06	0,26	0,02	0,11
«6»	МКЭ	-0,580	-1,084	-1,526	-1,623	-1,601	-1,546	-1,467	-1,112	-0,797
	(4.37,4.43)	-0,580	-1,082	-1,525	-1,621	-1,601	-1,547	-1,466	-1,113	-0,799
	$\Delta, \%$	0,03	0,14	0,01	0,13	0,00	0,06	0,05	0,06	0,20

Используя программу TableCurve 2D, по табличным данным построены следующие аппроксимирующие функции:

Пластинки в виде равнобедренных треугольников с углом при основании $\alpha \leq 60^\circ$:

при 1-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3]^{-1}; \quad (4.32)$$

при 2-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5}; \quad (4.33)$$

при 3-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + \\ + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} \quad (4.34)$$

при 4-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} \quad (4.35)$$

при 5-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} + f[K_f]^{-5} + g[K_f]^{-6} + h[K_f]^{-7} \quad (4.36)$$

при 6-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3 + eK_f^4 + fK_f^5]^{-1}. \quad (4.37)$$

Пластинки в виде равнобедренных треугольников с углом при основании $\alpha \geq 60^\circ$:

при 1-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = [a + bK_f + cK_f^2 + dK_f^3]^{-1}; \quad (4.38)$$

при 2-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} \quad (4.39)$$

при 3-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = [a + bK_f + cK_f^2] / [1 + dK_f + eK_f^2]; \quad (4.40)$$

при 4-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} \quad (4.41)$$

при 5-й комбинации граничных условий:

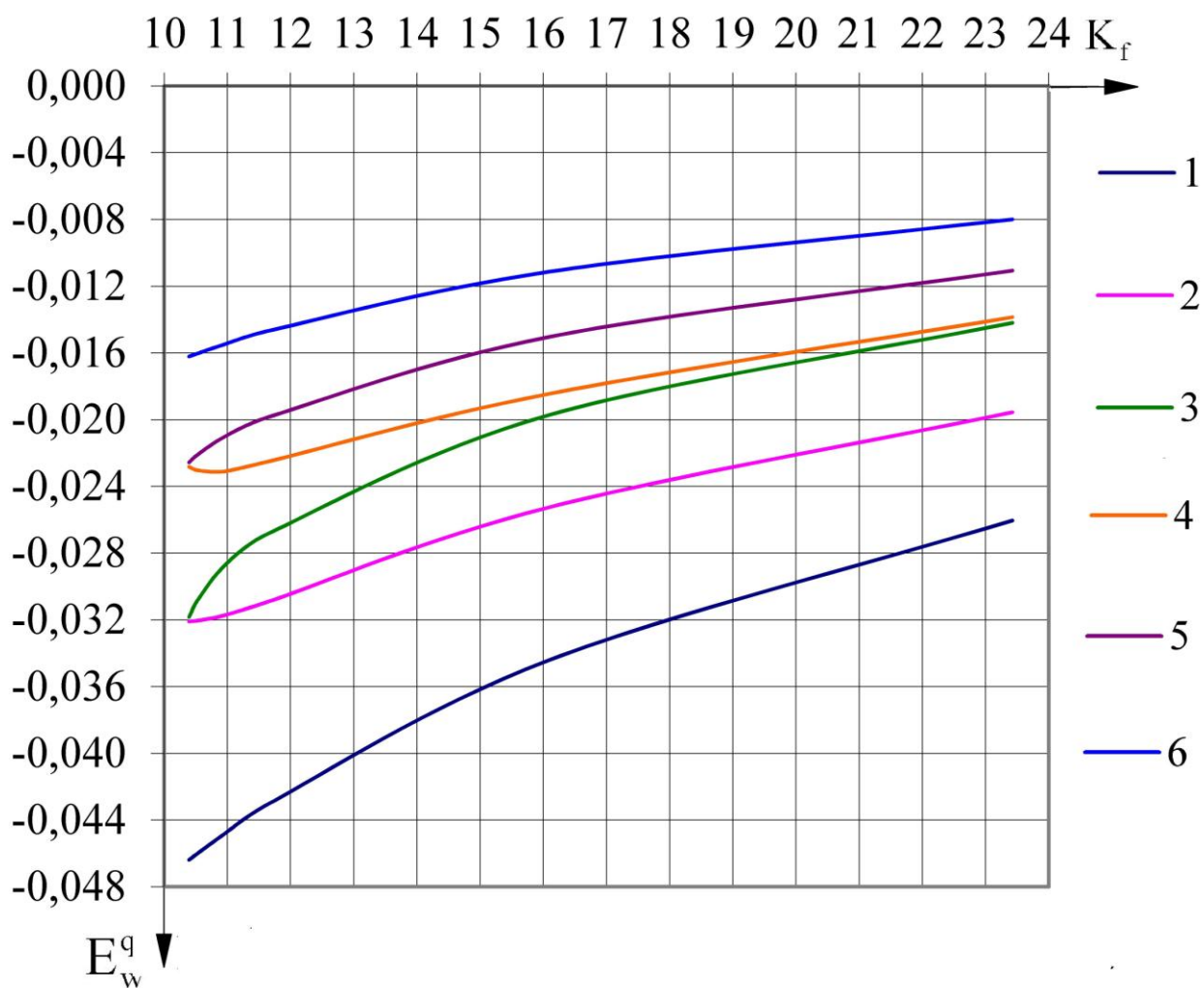
$$E_w^q = a + b[K_f]^{-1} + c[K_f]^{-2} + d[K_f]^{-3} + e[K_f]^{-4} \quad (4.42)$$

при 6-й комбинации граничных условий:

$$E_w^q = [a + bK_f + cK_f^2]^{-1}. \quad (4.43)$$

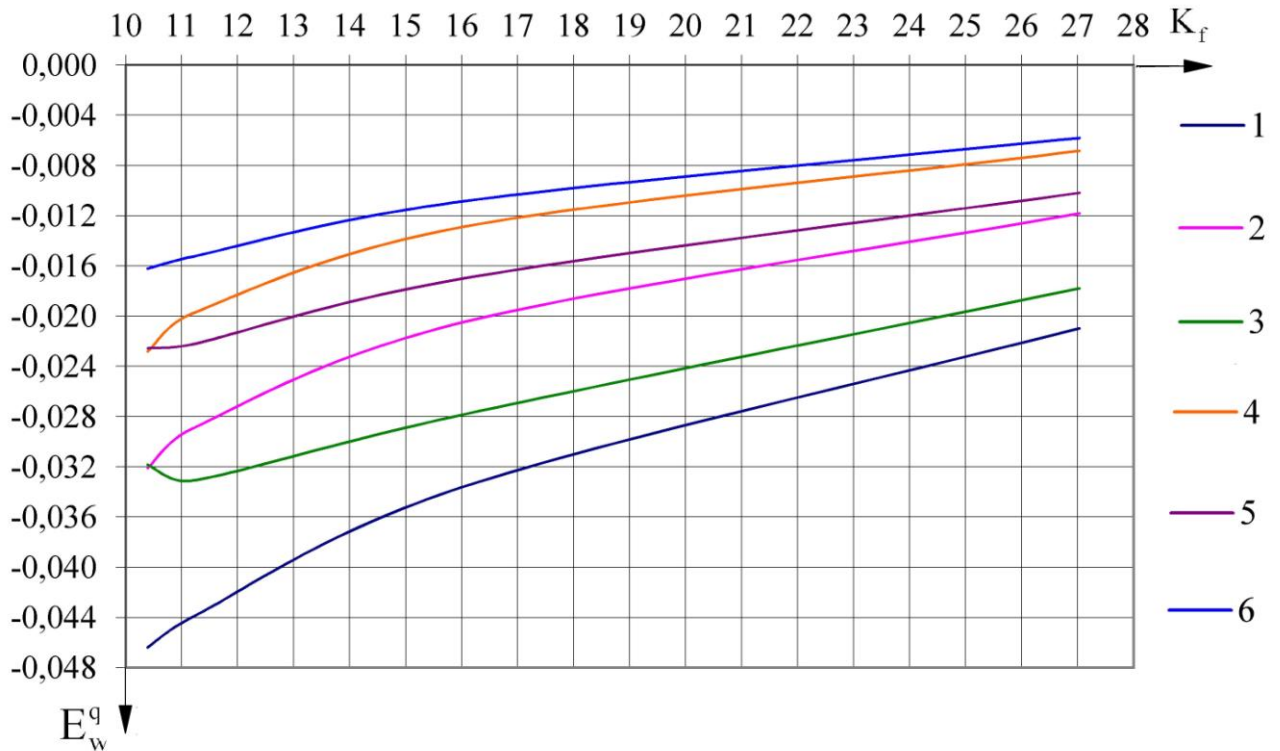
Таблица 4.6 – Значения коэффициентов а...т аппроксимирующих функций (4.32)...(4.43)

Формула	Коэффициенты							
	a	b	c	d	e	f	g	h
(4.32)	-7,116	-1,448	$0,62 \cdot 10^{-2}$	$-6,041 \cdot 10^{-5}$	–	–	–	–
(4.33)	$-0,41329753 \cdot 10^{-2}$	-0,19861671	$-1,2735743 \cdot 10^1$	$0,33580338 \cdot 10^3$	$-3,5622236 \cdot 10^3$	$1,395457 \cdot 10^4$	–	–
(4.34)	$0,81469062 \cdot 10^{-1}$	$-1,2981659 \cdot 10^1$	$7,9531997 \cdot 10^2$	$-2,6570816 \cdot 10^4$	$5,1203428 \cdot 10^5$	$-5,706641 \cdot 10^6$	$3,4166597 \cdot 10^7$	$-8,5057155 \cdot 10^7$
(4.35)	$-0,47578332 \cdot 10^{-1}$	7,0020271	$-4,6734688 \cdot 10^2$	$1,5781284 \cdot 10^4$	$-3,0537467 \cdot 10^5$	$3,4099047 \cdot 10^6$	$-2,0425934 \cdot 10^7$	$5,0826395 \cdot 10^7$
(4.36)	$0,32634654 \cdot 10^{-1}$	-5,411065	$3,2318126 \cdot 10^2$	$-1,0742805 \cdot 10^4$	$2,0610616 \cdot 10^5$	$-2,2859355 \cdot 10^6$	$1,3613396 \cdot 10^7$	$-3,3697462 \cdot 10^7$
(4.37)	$1,353 \cdot 10^1$	$-1,079 \cdot 10^1$	0,533	$-0,229 \cdot 10^{-1}$	$0,471 \cdot 10^{-3}$	$-3,669 \cdot 10^{-6}$	–	–
(4.38)	-4,558	-1,893	$0,331 \cdot 10^{-1}$	$-0,818 \cdot 10^{-3}$	–	–	–	–
(4.39)	-0,04599323	2,8751583	$-7,9443159 \cdot 10^1$	$8,4073958 \cdot 10^2$	$-3,2218991 \cdot 10^3$	–	–	–
(4.40)	$-0,57285651 \cdot 10^{-1}$	$0,65648317 \cdot 10^{-2}$	$-8,2908539 \cdot 10^{-5}$	$-0,65522517 \cdot 10^{-1}$	$-0,35290234 \cdot 10^{-2}$	–	–	–
(4.41)	$-0,63209298 \cdot 10^{-1}$	4,1125337	$-1,0389597 \cdot 10^2$	$1,0643303 \cdot 10^3$	$-3,9819985 \cdot 10^3$	–	–	–
(4.42)	0,23875998	-1,8434723	$3,6966285 \cdot 10^1$	$-3,7925102 \cdot 10^2$	$1,4750987 \cdot 10^3$	–	–	–
(4.43)	$-2,392 \cdot 10^1$	-2,463	-0,112	–	–	–	–	–



а) пластинки с углом при основании $\alpha \leq 60^\circ$

Рисунок 4.3, лист 1 – Кривые $E_w^q - K_f$ для пластинок в форме равнобедренных треугольников на упругом основании с различными комбинациями граничных условий по рисунку 3.7



б) то же, при $\alpha \geq 60^\circ$

Рисунок 4.3, лист 2 – Кривые $E_w^q - K_f$ для пластинок в форме равнобедренных треугольников на упругом основании с различными комбинациями граничных условий по рисунку 3.7

Используя программу TableCurve 2D, по данным численного расчёта, построены аппроксимирующие функции $E_w^q - K_f$ (рисунок 4.3). Значения коэффициентов $a \dots h$ приведены в таблице 4.6.

4.3 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму параллелограмма

Для расчета параллелограммных пластинок на упругом двухпараметрическом основании будем использовать методику, аналогичную расчету пластинок на упругом винклеровском основании. В качестве непрерывного геометрического преобразования используем операцию аффинного сдвига прямоугольника относительно основания

(рисунок 3.10), коэффициенты формы фигур, являющихся опорными решениями, определяем по формулам (3.76) и (3.77).

Значения B_w^q , C_w^q и E_w^q будем находить, используя:

1) линейную интерполяцию по двум решениям:

$$\begin{cases} B_w^q = A_1 + A_2 K_f; \\ C_w^q = A_3 + A_4 K_f; \\ E_w^q = A_5 + A_6 K_f; \end{cases} \quad (4.44)$$

где $A_1 \dots A_6$ – коэффициенты пропорциональности, определяющиеся по формулам:

$$\begin{cases} A_2 = (B_{w1}^q - B_{w2}^q) / (K_{f1} - K_{f2}); \\ A_1 = B_{w1}^q - (B_{w1}^q - B_{w2}^q) / (K_{f1} - K_{f2}) K_{f1}; \\ A_4 = (C_{w1}^q - C_{w2}^q) / (K_{f1} - K_{f2}); \\ A_3 = C_{w1}^q - (C_{w1}^q - C_{w2}^q) / (K_{f1} - K_{f2}) K_{f1}; \\ A_5 = (E_{w1}^q - E_{w2}^q) / (K_{f1} - K_{f2}); \\ A_6 = E_{w1}^q - (E_{w1}^q - E_{w2}^q) / (K_{f1} - K_{f2}) K_{f1}; \end{cases} \quad (4.45)$$

2) степенную интерполяцию по двум решениям:

$$\begin{cases} B_w^q = A_1 K_f^{A_2}; \\ C_w^q = A_3 K_f^{A_4}; \\ E_w^q = A_5 K_f^{A_6}; \end{cases} \quad (4.46)$$

где $A_1 \dots A_6$ – коэффициенты пропорциональности, определяющиеся по формулам:

$$\begin{cases} A_2 = \ln(B_{w1}^q / B_{w2}^q) / \ln(K_{f1} / K_{f2}); \\ A_1 = B_{w1}^q / K_{f1}^{\ln(B_{w1}^q / B_{w2}^q) / \ln(K_{f1} / K_{f2})}; \\ A_4 = \ln(C_{w1}^q / C_{w2}^q) / \ln(K_{f1} / K_{f2}); \\ A_3 = C_{w1}^q / K_{f1}^{\ln(C_{w1}^q / C_{w2}^q) / \ln(K_{f1} / K_{f2})}; \\ A_5 = \ln(E_{w1}^q / E_{w2}^q) / \ln(K_{f1} / K_{f2}); \\ A_6 = E_{w1}^q / K_{f1}^{\ln(E_{w1}^q / E_{w2}^q) / \ln(K_{f1} / K_{f2})}; \end{cases} \quad (4.47)$$

3) линейно-степенную интерполяцию по двум решениям:

$$\begin{cases} B_w^q = A_1 + A_2 K_f^2; \\ C_w^q = A_3 + A_4 K_f^2; \\ E_w^q = A_5 + A_6 K_f^2; \end{cases} \quad (4.48)$$

где $A_1 \dots A_6$ – коэффициенты пропорциональности, определяющиеся по формулам:

$$\begin{cases} A_2 = (B_{w1}^q - B_{w2}^q) / (K_{f1}^2 - K_{f2}^2); \\ A_1 = B_{w1}^q - (B_{w1}^q - B_{w2}^q) / (K_{f1}^2 - K_{f2}^2) K_{f1}^2; \\ A_4 = (C_{w1}^q - C_{w2}^q) / (K_{f1}^2 - K_{f2}^2); \\ A_3 = C_{w1}^q - (C_{w1}^q - C_{w2}^q) / (K_{f1}^2 - K_{f2}^2) K_{f1}^2; \\ A_5 = (E_{w1}^q - E_{w2}^q) / (K_{f1}^2 - K_{f2}^2); \\ A_6 = E_{w1}^q - (E_{w1}^q - E_{w2}^q) / (K_{f1}^2 - K_{f2}^2) K_{f1}^2; \end{cases} \quad (4.49)$$

Для доказательства возможности применения МИКФ к расчету параллелограммных пластинок, лежащих на упругом двухпараметрическом основании, рассмотрим ряд примеров.

Пример 4.3.1. Определить прогиб w_0 пластинки в виде параллелограмма, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

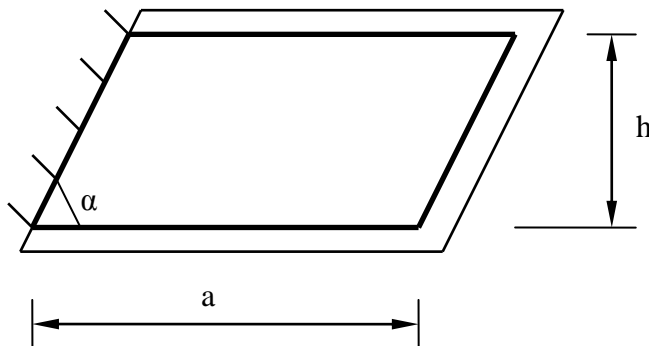


Рисунок 4.4

Характеристики материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu = 0,3$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 5$ кН/м², коэффициенты постели $C_1 =$ кН/м³,

$$C_2 = 20000 \text{ кН/м.}$$

Длина основания пластинки $a = 1,0954$ м, высота $h = 0,9123$ м, угол при основании 70° ($K_f = 8,577$), площадь $A = 1 \text{ м}^2$. Общий вид рассматриваемой пластинки и граничные условия опирания приведены на рисунке 4.4.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– прямоугольная пластинка размером $1,0954 \times 0,9123$ м:

$$K_{f1} = 8,133;$$

– ромбическая пластинка с длиной стороны $1,0954$ м и углом при основании $56,44^\circ$:

$$K_{f2} = 9,6.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$\begin{aligned} B_{w1}^q = & 9,3110771 \cdot 10^4 - 9,808331 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-1} + 4,9258838 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-2} - \\ & - 1,4729409 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-3} + 2,829422 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-4} - 3,58500411 \cdot 10^{12} \cdot [K_f]^{-5} + \\ & + 2,9816432 \cdot 10^{13} \cdot [K_f]^{-6} - 1,5660066 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-7} + 4,7083686 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-8} - \\ & - 6,1724184 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-9} = 334; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{w1}^q = & -0,18189564 \cdot 10^{-1} + 3,4709798 \cdot [K_f]^{-1} - 2,8615198 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-2} + \\ & + 1,3461738 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-3} - 4,001110 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-4} + 7,8688111 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-5} - \\ & - 1,0388047 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-6} + 9,1064291 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-7} - 5,0828628 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-8} + \\ & + 1,6343644 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-9} - 2,3033986 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-10} = 1,951 \cdot 10^{-3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{w1}^q = & 0,46555923 - 8,6912872 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-1} + 6,9686597 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-2} - \\ & - 3,2064035 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-3} + 9,3398166 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-4} - 1,8021883 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-5} + \\ & + 2,3366694 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-6} - 2,0137552 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-7} + 1,106062 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-8} - \\ & - 3,5030279 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-9} + 4,8672762 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-10} = -4,157 \cdot 10^{-2}; \end{aligned}$$

– для ромбической пластинки:

$$\begin{aligned} B_{w2}^q = & -1,227 \cdot 10^2 + 6,484 \cdot 10^1 \cdot K_f - 1,613 \cdot K_f^2 + \\ & + 0,107 \cdot K_f^3 - 0,108 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^4 = 437; \end{aligned}$$

$$C_{w_2}^q = \left[8,89 \cdot 10 + 2,196 \cdot 10^1 \cdot K_f + 5,742 \cdot K_f^2 - 0,245 \cdot K_f^3 + \right. \\ \left. + 0,722 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^4 - 7,026 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^5 \right]^{-1} = 1,498 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w_2}^q = \left[-5,857 - 2,982 \cdot K_f + 0,917 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^2 - \right. \\ \left. - 0,27 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^3 + 2,646 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^4 \right]^{-1} = -3,547 \cdot 10^{-2}.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q , а также w_0 :

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (334 - 437) / (8,133 - 9,6) = 70,21; \\ A_1 = 334 - (334 - 437) / (8,133 - 9,6) \cdot 8,133 = -237; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (1,951 \cdot 10^{-3} - 1,498 \cdot 10^{-3}) / (8,133 - 9,6) = -0,309 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 1,951 \cdot 10^{-3} - (1,951 \cdot 10^{-3} - 1,498 \cdot 10^{-3}) / (8,133 - 9,6) \cdot 8,133 = 4,462 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = (-4,157 \cdot 10^{-2} + 3,547 \cdot 10^{-2}) / (8,133 - 9,6) = 4,158 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = -4,157 \cdot 10^{-2} - \frac{-4,157 \cdot 10^{-2} + 3,547 \cdot 10^{-2}}{8,133 - 9,6} \cdot 8,133 = -75,39 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = -237 + 70,21 \cdot 8,577 = 365; \\ C_w^q = 4,462 \cdot 10^{-3} - 0,309 \cdot 10^{-3} \cdot 8,577 = 1,814 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -75,39 \cdot 10^{-3} + 4,158 \cdot 10^{-3} \cdot 8,577 = -3,972 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 365 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,814 \cdot 10^{-3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{20000000}{1} \cdot (-3,972 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0143 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0145$ мм), на 1,38%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(334/437) / \ln(8,133/9,6) = 1,621; \\ A_1 = 334 / 8,133^{\ln(334/437)/\ln(8,133/9,6)} = 11,18; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(1,951 \cdot 10^{-3} / 1,498 \cdot 10^{-3}) / \ln(8,133/9,6) = -1,593; \\ A_3 = 1,951 \cdot 10^{-3} / 8,133^{\ln(1,951 \cdot 10^{-3} / 1,498 \cdot 10^{-3}) / \ln(8,133/9,6)} = 0,055; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = \ln(-4,157 \cdot 10^{-2} / -3,547 \cdot 10^{-2}) / \ln(8,133/9,6) = -0,957; \\ A_5 = -4,157 \cdot 10^{-2} / 8,133^{\ln(-4,157 \cdot 10^{-2} / -3,547 \cdot 10^{-2}) / \ln(8,133/9,6)} = -0,309; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 11,18 \cdot 9,577^{1,621} = 364; \\ C_w^q = 0,055 \cdot 9,577^{-1,593} = 1,793 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -0,309 \cdot 9,577^{-0,957} = -3,951 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 364 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,793 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{1} \cdot (-3,951 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0144 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0145$ мм), на 0,67%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (334 - 437) / (8,133^2 - 9,6^2) = 3,959; \\ A_1 = 334 - (334 - 437) / (8,133^2 - 9,6^2) 8,133^2 = 72,11; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (1,951 \cdot 10^{-3} - 1,498 \cdot 10^{-3}) / (8,133^2 - 9,6^2) = -1,741 \cdot 10^{-5}; \\ A_3 = 1,951 \cdot 10^{-3} - \frac{1,951 \cdot 10^{-3} - 1,498 \cdot 10^{-3}}{8,133^2 - 9,6^2} 8,133^2 = 3,103 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = (-4,157 \cdot 10^{-2} + 3,547 \cdot 10^{-2}) / (8,133^2 - 9,6^2) = 0,234 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = -4,157 \cdot 10^{-2} - \frac{-4,157 \cdot 10^{-2} + 3,547 \cdot 10^{-2}}{8,133^2 - 9,6^2} 8,133^2 = -57,08 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 72,11 + 3,959 \cdot 8,577^2 = 363; \\ C_w^q = 3,103 \cdot 10^{-3} - 1,741 \cdot 10^{-5} \cdot 8,577^2 = 1,821 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -57,08 \cdot 10^{-3} + 0,234 \cdot 10^{-3} \cdot 8,577^2 = -3,983 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 363 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,821 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{1} \cdot (-3,983 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0144 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0145$ мм), на 0,67%.

Пример 4.3.2. Определить прогиб w_0 параллелограммной пластинки, лежащей на упругом основании, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности. Характеристики материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu = 0,3$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 5$ кН/м², коэффициенты постели $C_1 = 4000$ кН/м³, $C_2 = 20000$ кН/м.

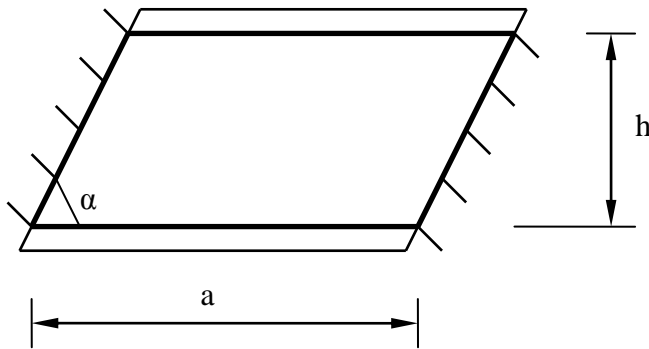


Рисунок 4.5

Длина основания пластинки $a = 1,2247$ м, высота $h = 0,8165$ м, угол при основании 60° ($K_f = 9,558$), площадь $A = 1$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и условия опирания приведены

на рисунке 4.5.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– прямоугольная пластинка размером $1,2247 \times 0,8165$ м:

$$K_{f1} = 8,667;$$

– ромбическая пластинка с длиной стороны 1,2247 м и углом при основании $41,81^\circ$:

$$K_{f2} = 12.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$\begin{aligned}
B_{w1}^q &= 1,2343233 \cdot 10^5 - 1,5325631 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-1} + 9,2705689 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-2} - \\
&- 3,4241348 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-3} + 8,3708968 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-4} - 1,4002332 \cdot 10^{13} \cdot [K_f]^{-5} + \\
&+ 1,6135721 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-6} - 1,2606 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-7} + 6,3774776 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-8} - \\
&- 1,8846625 \cdot 10^{16} \cdot [K_f]^{-9} + 2,469374 \cdot 10^{16} \cdot [K_f]^{-10} = 422;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{w1}^q &= -0,2422748 \cdot 10^{-1} + 4,6025892 \cdot [K_f]^{-1} - 3,7803408 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-2} + \\
&+ 1,7719178 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-3} - 5,2489555 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-4} + 1,0289718 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-5} - \\
&- 1,3542151 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-6} + 1,1836615 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-7} - 6,5885052 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-8} + \\
&+ 2,1130066 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-9} - 2,9707436 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-10} = 1,542 \cdot 10^{-3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{w1}^q &= 0,59190485 - 1,108554 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-1} + 8,9380157 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-2} - \\
&- 4,1325309 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-3} + 1,2099246 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-4} - 2,3470625 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-5} + \\
&+ 3,0597017 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-6} - 2,6513371 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-7} + 1,4642114 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-8} - \\
&- 4,6622779 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-9} + 6,5120002 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-10} = -3,502 \cdot 10^{-2};
\end{aligned}$$

– для ромбической пластинки:

$$\begin{aligned}
B_{w2}^q &= 4,028 \cdot 10^2 - 8,743 \cdot 10^1 \cdot K_f + 1,818 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 - \\
&- 0,864 \cdot K_f^3 + 0,023 \cdot K_f^4 - 0,214 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 = 902;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{w2}^q &= \left[0,382 \cdot 10^2 + 0,623 \cdot 10^2 \cdot K_f + 4,027 \cdot K_f^2 \right. \\
&\left. - 0,164 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^3 + 0,827 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^4 \right]^{-1} = 0,738 \cdot 10^{-3};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{w2}^q &= \left[-6,546 - 4,312 \cdot K_f + 0,109 \cdot K_f^2 - \right. \\
&\left. - 0,386 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^3 + 4,089 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^4 \right]^{-1} = -2,065 \cdot 10^{-2};
\end{aligned}$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (422 - 902) / (8,667 - 12) = 144; \\ A_1 = 422 - (422 - 902) / (8,667 - 12) \cdot 8,667 = -826; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (1,542 \cdot 10^{-3} - 0,738 \cdot 10^{-3}) / (8,667 - 12) = -0,241; \\ A_3 = 1,542 \cdot 10^{-3} - (1,542 \cdot 10^{-3} - 0,738 \cdot 10^{-3}) / (8,667 - 12) \cdot 8,667 = 3,633; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = (-3,502 \cdot 10^{-2} + 2,065 \cdot 10^{-2}) / (8,667 - 12) = 4,311 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = -3,502 \cdot 10^{-3} - \frac{-3,502 \cdot 10^{-2} + 2,065 \cdot 10^{-2}}{8,667 - 12} \cdot 8,667 = -72,39 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = -826 + 144 \cdot 9,558 = 550; \\ C_w^q = -0,241 + 3,633 \cdot 9,558 = 1,327 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -72,39 \cdot 10^{-2} + 4,311 \cdot 10^{-3} \cdot 9,558 = -3,118 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 550 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,327 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{1} \cdot (-3,118 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0116 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0125$ мм), на 7,20%

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(422 / 902) / \ln(8,667 / 12) = 2,335; \\ A_1 = 422 / 8,667^{\ln(422/902)/\ln(8,667/12)} = 2,728; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(1,542 \cdot 10^{-3} / 0,738 \cdot 10^{-3}) / \ln(8,667 / 12) = -2,265; \\ A_3 = 1,542 \cdot 10^{-3} / 8,667^{\ln(1,542 \cdot 10^{-3}/0,738 \cdot 10^{-3})/\ln(8,667/12)} = 0,205; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = \ln(-3,502 \cdot 10^{-2} / -2,065 \cdot 10^{-2}) / \ln(8,667 / 12) = -1,623; \\ A_5 = -3,502 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} / 8,667^{\ln(-3,502 \cdot 10^{-2}/-2,065 \cdot 10^{-2})/\ln(8,667/12)} = -1,166; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 2,728 \cdot 9,558^{2,335} = 530; \\ C_w^q = 0,205 \cdot 9,558^{-2,265} = 1,235 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -1,166 \cdot 9,558^{-1,623} = -2,988 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 530 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,235 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{1} \cdot (-2,988 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0125 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0125$ мм), на 0,01%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (422 - 902) / (8,667^2 - 12^2) = 6,968; \\ A_1 = 422 - (422 - 902) / (8,667^2 - 12^2) 8,667^2 = -101,4; \\ A_4 = (1,542 \cdot 10^{-3} - 0,738 \cdot 10^{-3}) / (8,667^2 - 12^2) = -1,167 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 1,542 \cdot 10^{-3} - \frac{1,542 \cdot 10^{-3} - 0,738 \cdot 10^{-3}}{8,667^2 - 12^2} 8,667^2 = 2,419 \cdot 10^{-3}; \\ A_6 = (-3,502 \cdot 10^{-2} + 2,065 \cdot 10^{-2}) / (8,667^2 - 12^2) = 0,209 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = -3,502 \cdot 10^{-2} - \frac{-3,502 \cdot 10^{-2} + 2,065 \cdot 10^{-2}}{8,667^2 - 12^2} 8,667^2 = -50,69 \cdot 10^{-3}; \\ B_w^q = -101,4 + 6,968 \cdot 9,558^2 = 535; \\ C_w^q = 2,419 \cdot 10^{-3} - 1,167 \cdot 10^{-3} \cdot 9,558^2 = 1,352 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -50,69 \cdot 10^{-3} + 0,209 \cdot 10^{-3} \cdot 9,558^2 = -3,163 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 535 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,352 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{1} \cdot (-3,163 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0118 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0125$ мм), на 5,6%.

Пример 4.3.3. Определить прогиб w_0 пластинки в виде параллелограмма, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

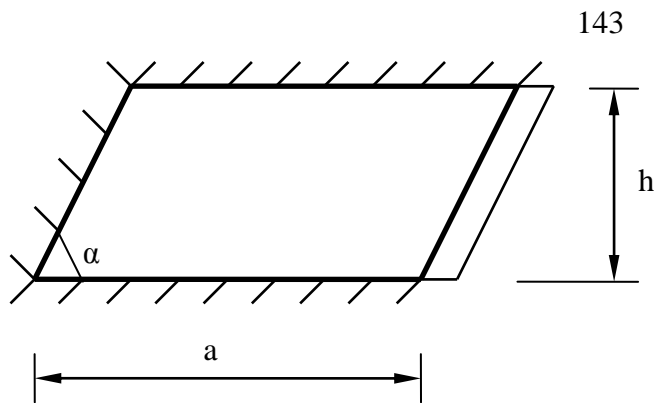


Рисунок 4.6

Характеристики
материала пластинки: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина
пластинки 250 мм,
интенсивность равномерно
распределенной нагрузки $q = 5$
кН/м², коэффициенты постели
 $C_1 = 4000$ кН/м³,

$C_2 = 20000$ кН/м. Длина основания пластинки $a = 7,0711$ м, высота $h = 3,5355$ м, угол при основании 60° ($K_f = 10,668$), площадь $A = 25$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и условия опирания приведены на рисунке 4.6.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– прямоугольная пластинка размером $7,0711 \times 3,5355$ м:

$$K_{f1} = 10;$$

– ромбическая пластинка с длиной стороны $7,0711$ м и углом при основании $29,99^\circ$:

$$K_{f2} = 16.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$B_{w1}^q = 4,829771 \cdot 10^5 - 5,1920254 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-1} + 2,6631576 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-2} - \\ - 8,1445271 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-3} + 1,6034019 \cdot 10^{12} \cdot [K_f]^{-4} - 2,0875997 \cdot 10^{13} \cdot [K_f]^{-5} + \\ + 1,7894559 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-6} - 9,7174338 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-7} + 3,0309553 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-8} - \\ - 4,1367159 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-9} = 1566;$$

$$C_{w1}^q = \left[-0,61964745 \cdot 10^{-1} + 0,77860261 \cdot 10^{-2} \cdot K_f + 1,6516908 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^2 \right]^2 / \\ / \left[1 - 0,52394868 \cdot K_f + 0,50537973 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^2 \right]^2 = 0,464 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w1}^q = -0,31371951 + 5,8617276 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-1} - 4,7645878 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-2} + \\ + 2,2078382 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-3} - 6,475636 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-4} + 1,2576899 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-5} - \\ - 1,6406322 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-6} + 1,4219105 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-7} - 7,8508371 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-8} + \\ + 2,4985149 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-9} - 3,4871429 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-10} = -1,310 \cdot 10^{-2};$$

– для ромбической пластинки:

$$B_{w2}^q = 5,095 \cdot 10^2 - 1,141 \cdot 10^2 \cdot K_f + 2,297 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 - 1,099 \cdot K_f^3 + \\ + 0,285 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^4 - 0,262 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 = 1656;$$

$$C_{w2}^q = \left[2,924 \cdot 10^2 - 1,357 \cdot 10^1 \cdot K_f + 1,681 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 - \right. \\ \left. - 0,756 \cdot K_f^3 + 0,021 \cdot K_f^4 - 0,199 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 \right]^{-1} = 0,408 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w2}^q = \left[-1,572 \cdot 10^1 - 2,319 \cdot K_f - 0,19 \cdot K_f^2 + 0,129 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^3 - \right. \\ \left. - 0,366 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^4 + 3,544 \cdot 10^{-6} \cdot K_f^5 \right]^{-1} = -1,452 \cdot 10^{-2};$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (1566 - 1656) / (10 - 16) = 15; \\ A_1 = 1566 - (1566 - 1656) / (10 - 16) \cdot 10 = 1416; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (0,464 \cdot 10^{-3} - 0,408 \cdot 10^{-3}) / (10 - 16) = 9,333 \cdot 10^{-6}; \\ A_3 = 0,464 \cdot 10^{-3} - (0,464 \cdot 10^{-3} - 0,408 \cdot 10^{-3}) / (10 - 16) \cdot 10 = 0,557 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = (-1,31 \cdot 10^{-2} - 1,452 \cdot 10^{-2}) / (10 - 16) = -0,237 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = -1,31 \cdot 10^{-2} - (-1,31 \cdot 10^{-2} - 1,452 \cdot 10^{-2}) / (10 - 16) \cdot 10 = -10,73 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 1416 + 15 \cdot 10,668 = 1576; \\ C_w^q = 0,557 \cdot 10^{-3} + 9,333 \cdot 10^{-6} \cdot 10,668 = 0,458 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -10,73 \cdot 10^{-3} - 0,237 \cdot 10^{-3} \cdot 10,668 = -1,325 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 1576 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 0,458 \cdot 10^{-3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{20000000}{25} \cdot (-1,325 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0409 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0412$ мм), на 0,73%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(1566/1656) / \ln(10/16) = 0,119; \\ A_1 = 1566 / 10^{\ln(1566/1656)/\ln(10/16)} = 1191; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(0,464 \cdot 10^{-3} / 0,408 \cdot 10^{-3}) / \ln(10/16) = -0,274; \\ A_3 = 0,464 \cdot 10^{-3} / 10^{\ln(0,464 \cdot 10^{-3} / 0,408 \cdot 10^{-3}) / \ln(10/16)} = 0,871 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = \ln(-1,31 \cdot 10^{-2} / -1,452 \cdot 10^{-2}) / \ln(10/16) = 0,219; \\ A_5 = -1,31 \cdot 10^{-2} / 10^{\ln(-1,31 \cdot 10^{-2} / -1,452 \cdot 10^{-2}) / \ln(10/16)} = -7,912 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 1191 \cdot 10,668^{0,119} = 1578; \\ C_w^q = 0,871 \cdot 10^{-3} \cdot 10,668^{-0,274} = 0,456 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -7,912 \cdot 10^{-3} \cdot 10,668^{0,219} = -1,329 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 1578 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 0,456 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{25} \cdot (-1,329 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0408 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0412$ мм), на 0,97 %.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (1566 - 1656) / (10^2 - 16^2) = 0,577; \\ A_1 = 1566 - (1566 - 1656) / (10^2 - 16^2) 10^2 = 1508; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (0,464 \cdot 10^{-3} - 0,408 \cdot 10^{-3}) / (10^2 - 16^2) = -3,59 \cdot 10^{-7}; \\ A_3 = 0,464 \cdot 10^{-3} - (0,464 \cdot 10^{-3} - 0,408 \cdot 10^{-3}) / (10^2 - 16^2) 10^2 = 0,5 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = (-1,31 \cdot 10^{-2} - 1,452 \cdot 10^{-2}) / (10^2 - 16^2) = -9,103 \cdot 10^{-6}; \\ A_5 = -1,31 \cdot 10^{-2} - (-1,31 \cdot 10^{-2} - 1,452 \cdot 10^{-2}) / (10^2 - 16^2) 10^2 = -12,19 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} B_w^q = 1508 + 0,577 \cdot 10,668^2 = 1574; \\ C_w^q = 0,5 \cdot 10^{-3} - 3,59 \cdot 10^{-7} \cdot 10,668^2 = 0,459 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -12,19 \cdot 10^{-3} - 9,103 \cdot 10^{-6} \cdot 10,668^2 = -1,323 \cdot 10^{-2}; \end{cases}$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{5000} 1574 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 0,459 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{25} \cdot (-1,323 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0410 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0412$ мм), на 0,49%.

В таблице 4.7 представлены результаты решения тестовых задач расчета параллелограммных пластинок на упругом основании при различных комбинациях граничных условий. Характеристики материала пластинок: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина пластинки 250 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 5$ кН/м², коэффициент постели $C_1 = 4000$ кН/м³, $C_2 = 20000$ кН/м³.

Таблица 4.7 – Сопоставление значений максимального прогиба w_0 пластинок в форме параллелограммов на упругом винклеровском основании, полученного с помощью МКЭ и МИКФ при различных комбинациях граничных условий

a	5,4772	5,4772	5,4772	6,1237	6,1237	6,1237	7,0711	7,0711	7,0711	
h	4,5644	4,5644	4,5644	4,0825	4,0825	4,0825	3,5355	3,5355	3,5355	
α	80	70	60	80	70	60	80	70	60	
K_f	8,237	8,577	9,247	8,750	9,021	9,558	10,063	10,266	10,668	
Значения w_0 , мм										
«1»	МКЭ	0,167	0,162	0,152	0,151	0,148	0,143	0,119	0,118	0,116
	МИКФ	0,165	0,160	0,151	0,150	0,146	0,140	0,119	0,117	0,114
	Δ , %	0,98	1,11	0,72	0,59	1,20	2,02	0,28	0,88	1,93
«2»	МКЭ	0,140	0,133	0,121	0,135	0,131	0,123	0,113	0,111	0,108
	МИКФ	0,139	0,132	0,121	0,135	0,130	0,121	0,112	0,109	0,105
	Δ , %	1,05	0,97	0,14	0,23	0,48	1,44	1,15	1,92	3,23
«3»	МКЭ	0,113	0,105	0,091	0,118	0,112	0,102	0,105	0,103	0,098
	МИКФ	0,113	0,105	0,092	0,117	0,111	0,099	0,105	0,101	0,094
	Δ , %	0,13	0,22	1,58	0,28	1,38	2,64	0,67	2,25	4,90
«4»	МКЭ	0,124	0,122	0,117	0,103	0,101	0,099	0,072	0,071	0,071
	МИКФ	0,128	0,125	0,118	0,104	0,103	0,101	0,072	0,072	0,071

	$\Delta, \%$	3,10	2,29	1,09	1,85	1,58	1,15	0,55	0,53	0,50
«5»	МКЭ	0,109	0,105	0,097	0,095	0,093	0,089	0,070	0,069	0,068
	МИКФ	0,109	0,106	0,099	0,095	0,093	0,089	0,069	0,069	0,068
	$\Delta, \%$	0,21	0,68	2,27	0,24	0,26	0,10	0,043	0,57	0,78
«6»	МКЭ	0,109	0,106	0,099	0,095	0,094	0,090	0,70	0,069	0,068
	МИКФ	0,109	0,105	0,098	0,095	0,092	0,088	0,069	0,068	0,067
	$\Delta, \%$	0,25	0,56	0,20	0,63	1,49	2,75	0,68	1,39	2,65
«7»	МКЭ	0,092	0,087	0,076	0,086	0,084	0,078	0,067	0,066	0,065
	МИКФ	0,093	0,087	0,079	0,086	0,083	0,076	0,067	0,065	0,062
	$\Delta, \%$	0,62	0,32	1,53	0,10	1,40	3,17	0,37	1,88	4,39
«8»	МКЭ	0,088	0,087	0,085	0,066	0,066	0,066	0,042	0,042	0,042
	МИКФ	0,090	0,089	0,087	0,067	0,067	0,067	0,042	0,042	0,042
	$\Delta, \%$	2,42	2,50	2,73	1,56	1,74	2,05	0,18	0,11	0,61
«9»	МКЭ	0,080	0,078	0,075	0,063	0,063	0,062	0,042	0,041	0,041
	МИКФ	0,079	0,079	0,076	0,063	0,063	0,062	0,041	0,041	0,041
	$\Delta, \%$	1,58	0,62	1,65	0,33	0,26	0,09	0,81	0,77	0,070
«10»	МКЭ	0,071	0,068	0,062	0,060	0,059	0,056	0,041	0,041	0,040
	МИКФ	0,071	0,068	0,064	0,059	0,058	0,055	0,041	0,040	0,039
	$\Delta, \%$	0,11	0,30	2,14	0,65	1,17	1,67	0,69	1,27	2,26

Полученные результаты имеют погрешность менее 5 %, что является достаточным для инженерных расчетов. Анализ результатов решения показал, что все 3 рассмотренные типа интерполяции дают удовлетворительную для инженерных расчетов точность. Следовательно, МИКФ может успешно применяться при расчете параллелограммных пластинок на упругом основании.

4.4 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму произвольного треугольника

Определение максимального прогиба пластинок в форме произвольных треугольников на упругом двухпараметрическом основании будем производить, используя методику, аналогичную расчету пластинок на упругом винклеровском основании. В качестве непрерывного геометрического преобразования используем процедуру сдвига вершины, противоположной наибольшей из сторон треугольника, параллельно этой

стороне (рисунок 3.15). Коэффициенты формы фигур, являющихся опорными решениями, определяем по формулам (3.84) и (3.85).

Величину параметров V_w^q , C_w^q и E_w^q будем находить, используя следующие типы интерполяции:

- 1) линейная интерполяция по двум решениям (формулы (4.44),(4.45));
- 2) степенная интерполяция по двум решениям (формулы (4.46),(4.47));
- 3) линейно-степенная интерполяция по двум решениям (формулы (4.48),(4.49)).

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 4.4.1. Определить прогиб w_0 пластинки в форме произвольного треугольника, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

Характеристики материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu = 0,3$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 8$ кН/м², коэффициенты постели $C_1 = 4000$ кН/м³, $C_2 = 20000$ кН/м.

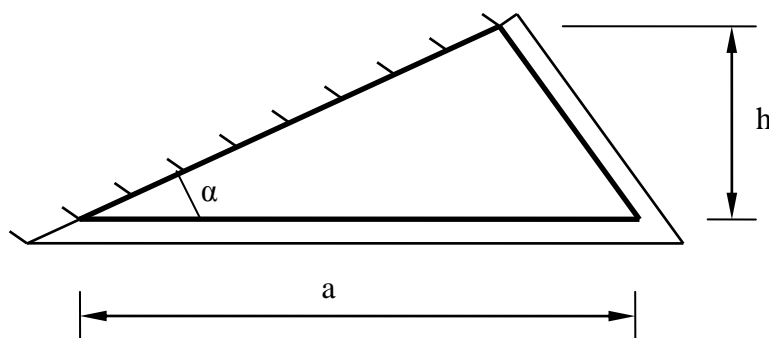


Рисунок 4.7

Длина основания пластинки $a = 1,7321$ м, высота $h = 1,1547$ м, угол при основании 63° ($K_f = 10,825$), площадь $A = 1$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и граничные условия опирания приведены на рисунке 4.7.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° :

$$K_{f1} = 11,065;$$

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° :

$$K_{f2} = 10,667.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q :

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° :

$$B_{w1}^q = 3,4702901 \cdot 10^4 - 2,121027 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-1} + 5,5303922 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-2} - 7,3417891 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-3} + 4,8859161 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-4} - 1,2962188 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-5} = 576;$$

$$C_{w1}^q = \left[-8,2107978 \cdot 10^3 + 2,2108853 \cdot 10^3 \cdot K_f - 2,0652851 \cdot 10^2 \cdot K_f^2 + 8,7649395 \cdot K_f^3 - 0,12990011 \cdot K_f^4 \right]^{-1} = 1,119 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w1}^q = -0,04599323 + 2,8751583 \cdot [K_f]^{-1} - 7,9443159 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-2} + 8,4073958 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-3} - 3,2218991 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-4} = -2,936 \cdot 10^{-2};$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° :

$$B_{w2}^q = 0,78699598 \cdot 10^3 - 1,5090581 \cdot 10^2 \cdot K_f + 1,7527055 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 - 0,68053186 \cdot K_f^3 + 0,13773982 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^4 - 0,10598466 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 = 509;$$

$$C_{w2}^q = 0,19144713 \cdot 10^{-3} - 0,21812676 \cdot 10^{-1} \cdot [K_f]^{-1} + 1,3806279 \cdot [K_f]^{-2} - 2,5763995 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-3} + 2,4012847 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-4} - 0,87522286 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-5} = 1,274 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w2}^q = -0,41329753 \cdot 10^{-2} - 0,19861671 \cdot [K_f]^{-1} - 1,2735743 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-2} + 0,33580338 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-3} - 3,5622236 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-4} + 1,395457 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-5} = -3,196 \cdot 10^{-2};$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (576 - 509) / (11,065 - 10,667) = 168; \\ A_1 = 576 - (576 - 509) / (11,065 - 10,667) 11,065 = -1287; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (1,119 \cdot 10^{-3} - 1,274 \cdot 10^{-3}) / (11,065 - 10,667) = -0,389 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 1,119 \cdot 10^{-3} - \frac{1,119 \cdot 10^{-3} - 1,274 \cdot 10^{-3}}{11,065 - 10,667} 11,065 = 5,428 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = (-2,936 \cdot 10^{-2} + 3,196 \cdot 10^{-2}) / (11,065 - 10,667) = 6,533 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = -2,936 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} - \frac{-2,936 \cdot 10^{-2} + 3,196 \cdot 10^{-2}}{11,065 - 10,667} 11,065 = -0,102 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = -1287 + 168 \cdot 10,825 = 536; \\ C_w^q = 5,428 \cdot 10^{-3} + -0,389 \cdot 10^{-3} \cdot 10,825 = 1,212 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -0,102 \cdot 10^{-3} + 6,533 \cdot 10^{-3} \cdot 10,825 = -3,093 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 536 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,212 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{1} \cdot (-3,093 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0192 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0189$ мм), на 1,59%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(576 / 509) / \ln(11,065 / 10,667) = 3,376; \\ A_1 = 576 / 11,065^{\ln(576/509)/\ln(11,065/10,667)} = 0,172; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(1,119 \cdot 10^{-3} / 1,274 \cdot 10^{-3}) / \ln(11,065 / 10,667) = -3,541; \\ A_3 = 1,119 \cdot 10^{-3} / 1,065^{\ln(1,119 \cdot 10^{-3}/1,274 \cdot 10^{-3})/\ln(11,065/10,667)} = 5,569; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = \ln(-2,936 \cdot 10^{-2} / -3,196 \cdot 10^{-2}) / \ln(11,065 / 10,667) = -2,316; \\ A_5 = -2,936 \cdot 10^{-2} / 1,065^{\ln(-2,936 \cdot 10^{-2}/-3,196 \cdot 10^{-2})/\ln(11,065/10,667)} = -7,689; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 0,172 \cdot 10,825^{3,376} = 535; \\ C_w^q = 5,569 \cdot 10,825^{-3,541} = 1,209 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -7,689 \cdot 10,825^{-2,316} = -3,089 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 535 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,209 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{1} \cdot (-3,089 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0193 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0189$ мм), на 2,12%.

3. С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (576 - 509) / (11,065^2 - 10,667^2) = 7,746; \\ A_1 = 576 - (576 - 509) / (11,065^2 - 10,667^2) 11,065^2 = -372; \\ A_4 = (1,119 \cdot 10^{-3} - 1,274 \cdot 10^{-3}) / (11,065^2 - 10,667^2) = 1,792 \cdot 10^{-5}; \\ A_3 = 1,119 \cdot 10^{-3} - \frac{1,119 \cdot 10^{-3} - 1,274 \cdot 10^{-3}}{11,065^2 - 10,667^2} 11,065^2 = 3,313 \cdot 10^{-3}; \\ A_6 = (-2,936 \cdot 10^{-2} + 3,196 \cdot 10^{-2}) / (11,065^2 - 10,667^2) = 0,301 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = -2,936 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} - \frac{-2,936 \cdot 10^{-2} + 3,196 \cdot 10^{-2}}{11,065^2 - 10,667^2} 11,065^2 = -66,16 \cdot 10^{-3}; \\ B_w^q = -372 + 7,746 \cdot 10,825^2 = 535; \\ C_w^q = 3,313 \cdot 10^{-3} + 1,792 \cdot 10^{-5} \cdot 10,825^2 = 1,213 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -66,16 \cdot 10^{-3} + 0,301 \cdot 10^{-3} \cdot 10,825^2 = -3,094 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 535 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 1,213 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{1} \cdot (-3,094 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0192 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0189$ мм), на 1,59%.

Пример 4.4.2. Определить прогиб w_0 пластинки в форме произвольного треугольника, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

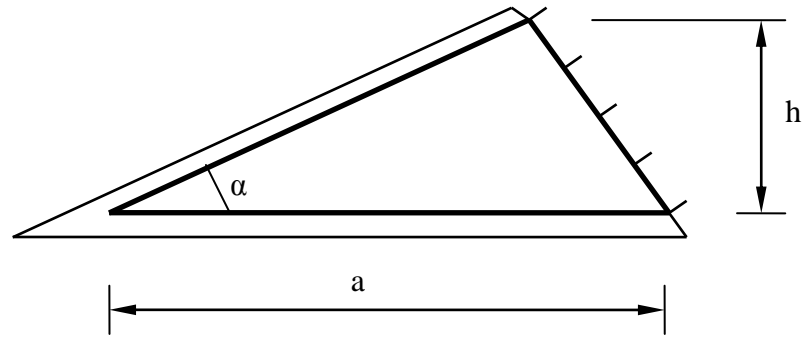


Рисунок 4.8

Характеристики материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu = 0,3$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 8$ кН/м², коэффициенты постели $C_1 = 4000$ кН/м³, $C_2 = 20000$ кН/м.

Длина основания пластинки $a = 2,4494$ м, высота $h = 0,8165$ м, угол при основании 45° ($K_f = 14,741$), площадь $A = 1$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и граничные условия опирания приведены на рисунке 4.8.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° (рисунок 3.15):

$$K_{f1} = 16,428;$$

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° (рисунок 3.15):

$$K_{f2} = 14,544.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q :

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° :

$$B_{w1}^q = 1,10657 \cdot 10^4 - 4,874864 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-1} + 8,9318747 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-2} - 7,5463381 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-3} + 2,4352311 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-4} = 810;$$

$$C_{w1}^q = 0,44038421 \cdot 10^{-3} - 0,24691115 \cdot 10^{-1} \cdot [K_f]^{-1} + \\ + 0,77434477 \cdot [K_f]^{-2} - 4,4276978 \cdot [K_f]^{-3} = 0,808 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w1}^q = \left[-0,57285651 \cdot 10^{-1} + 0,65648317 \cdot 10^{-2} \cdot K_f - 8,2908539 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^2 \right] \div \\ \div \left[1 - 0,65522517 \cdot 10^{-1} \cdot K_f - 0,35290234 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^2 \right] = -2,740 \cdot 10^{-2};$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° :

$$B_{w2}^q = 0,78699598 \cdot 10^3 - 1,5090581 \cdot 10^2 \cdot K_f + 1,7527055 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 - \\ - 0,68053186 \cdot K_f^3 + 0,13773982 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^4 - 0,10598466 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 = 754;$$

$$C_{w2}^q = 0,19144713 \cdot 10^{-3} - 0,21812676 \cdot 10^{-1} \cdot [K_f]^{-1} + 1,3806279 \cdot [K_f]^{-2} - \\ - 2,5763995 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-3} + 2,4012847 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-4} - \\ - 0,87522286 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-5} = 0,873 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w2}^q = -0,41329753 \cdot 10^{-2} - 0,19861671 \cdot [K_f]^{-1} - 1,2735743 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-2} + \\ + 0,33580338 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-3} - 3,5622236 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-4} + \\ + 1,395457 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-5} = -2,700 \cdot 10^{-2};$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (810 - 754) / (16,428 - 14,544) = 29,72; \\ A_1 = 810 - (810 - 754) / (16,428 - 14,544) \cdot 16,428 = 322; \\ A_4 = (0,808 \cdot 10^{-3} - 0,873 \cdot 10^{-3}) / (16,428 - 14,544) = -3,45 \cdot 10^{-5}; \\ A_3 = 0,808 \cdot 10^{-3} - \frac{0,808 \cdot 10^{-3} - 0,873 \cdot 10^{-3}}{16,428 - 14,544} \cdot 16,428 = 1,375 \cdot 10^{-3}; \\ A_6 = (-2,74 \cdot 10^{-2} + 2,7 \cdot 10^{-2}) / (16,428 - 14,544) = -0,212 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = -2,74 \cdot 10^{-2} - \frac{-2,74 \cdot 10^{-2} + 2,7 \cdot 10^{-2}}{16,428 - 14,544} \cdot 16,428 = -23,91 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 322 + 29,72 \cdot 14,741 = 760; \\ C_w^q = 1,375 \cdot 10^{-3} - 3,45 \cdot 10^{-5} \cdot 14,741 = 0,866 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -23,91 \cdot 10^{-3} - 0,212 \cdot 10^{-3} \cdot 14,741 = -2,704 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 760 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 0,866 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{1} \cdot (-2,704 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0151 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0152$ мм), на 0,66%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(810/754) / \ln(16,428/14,544) = 0,588; \\ A_1 = 810 / 16,428^{\ln(810/754)/\ln(16,428/14,544)} = 156; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(0,808 \cdot 10^{-3} / 0,873 \cdot 10^{-3}) / \ln(16,428/14,544) = -0,635; \\ A_3 = 0,808 \cdot 10^{-3} / 16,428^{\ln(0,808 \cdot 10^{-3}/0,873 \cdot 10^{-3})/\ln(16,428/14,544)} = 4,781 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = \ln(-2,74 \cdot 10^{-2} / -2,7 \cdot 10^{-2}) / \ln(16,428/14,544) = 0,121; \\ A_5 = -2,74 \cdot 10^{-2} / 16,428^{\ln(-2,74 \cdot 10^{-2}/-2,7 \cdot 10^{-2})/\ln(16,428/14,544)} = -19,54 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 156 \cdot 14,741^{0,588} = 760; \\ C_w^q = 4,781 \cdot 10^{-3} \cdot 14,741^{-0,635} = 0,866 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -19,54 \cdot 10^{-3} \cdot 14,741^{0,121} = -2,704 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 760 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 0,866 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{1} \cdot (-2,704 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0151 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0152$ мм), на 0,66%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (810 - 754) / (16,428^2 - 14,544^2) = 0,96; \\ A_1 = 810 - (810 - 754) / (16,428^2 - 14,544^2) 16,428^2 = 551; \\ A_4 = (0,808 \cdot 10^{-3} - 0,873 \cdot 10^{-3}) / (16,428^2 - 14,544^2) = -1,114 \cdot 10^{-6}; \\ A_3 = 0,808 \cdot 10^{-3} - \frac{0,808 \cdot 10^{-3} - 0,873 \cdot 10^{-3}}{16,428^2 - 14,544^2} 16,428^2 = 1,109 \cdot 10^{-3}; \\ A_6 = (-2,74 \cdot 10^{-2} + 2,7 \cdot 10^{-2}) / (16,428^2 - 14,544^2) = -6,855 \cdot 10^{-6}; \\ A_5 = -2,74 \cdot 10^{-2} - \frac{-2,74 \cdot 10^{-2} + 2,7 \cdot 10^{-2}}{16,428^2 - 14,544^2} 16,428^2 = -25,55 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 551 + 0,96 \cdot 14,741^2 = 760; \\ C_w^q = 1,109 \cdot 10^{-3} - 1,114 \cdot 10^{-6} \cdot 14,741^2 = 0,867 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -25,55 \cdot 10^{-3} - 6,855 \cdot 10^{-6} \cdot 14,741^2 = -2,704 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 760 \left(\frac{153846}{1^2} + 4000000 \cdot 0,867 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{1} \cdot (-2,704 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0151 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0152$ мм), на 0,66%.

Пример 4.4.3. Определить прогиб w_0 пластинки в форме произвольного треугольника, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности. Характеристики материала пластинки: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки

$q = 8 \text{ кН/м}^2$, коэффициенты постели $C_1 = 4000 \text{ кН/м}^3$, $C_2 = 20000 \text{ кН/м}$.

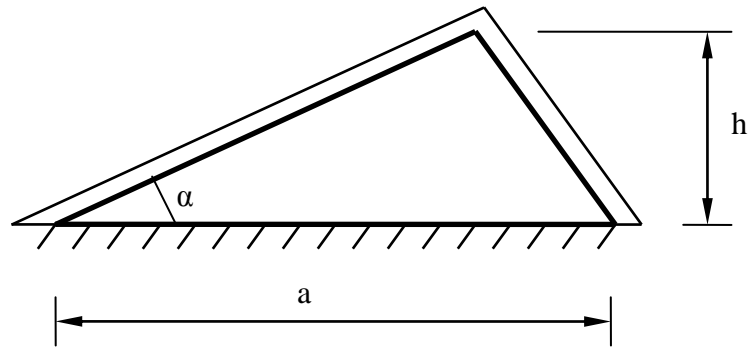


Рисунок 4.9

Длина основания пластинки $a = 15$ м, высота $h = 3,3333$ м, угол при основании 70° ($K_f = 21,425$), площадь $A = 25$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и граничные условия опирания приведены на рисунке 4.9.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° (рисунок 3.15):

$$K_{f1} = 22,286;$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° (рисунок 3.15):

$$K_{f2} = 19,738.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q :

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании более 60° :

$$\begin{aligned} B_{w1}^q = & 3,4702901 \cdot 10^4 - 2,121027 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-1} + 5,5303922 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-2} - \\ & - 7,3417891 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-3} + 4,8859161 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-4} - \\ & - 1,2962188 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-5} = 2000; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{w1}^q = & \left[-8,2107978 \cdot 10^3 + 2,2108853 \cdot 10^3 \cdot K_f - 2,0652851 \cdot 10^2 \cdot K_f^2 + \right. \\ & \left. + 8,7649395 \cdot K_f^3 - 0,12990011 \cdot K_f^4 \right]^{-1} = 0,289 \cdot 10^{-3}; \end{aligned}$$

$$E_{w_1}^q = -0,04599323 + 2,8751583 \cdot [K_f]^{-1} - 7,9443159 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-2} + \\ + 8,4073958 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-3} - 3,2218991 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-4} = -1,404 \cdot 10^{-2};$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника с углом при основании менее 60° :

$$B_{w_2}^q = 1,0106799 \cdot 10^4 + 4,0858594 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-1} - 6,1387407 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-2} + \\ + 3,8654382 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-3} - 1,4146836 \cdot 10^{12} \cdot [K_f]^{-4} + \\ + 3,3235119 \cdot 10^{13} \cdot [K_f]^{-5} - 5,1867845 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-6} + \\ + 5,3664058 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-7} - 3,5441839 \cdot 10^{16} \cdot [K_f]^{-8} + \\ + 1,3544665 \cdot 10^{17} \cdot [K_f]^{-9} - 2,2807257 \cdot 10^{17} \cdot [K_f]^{-10} = 1655;$$

$$C_{w_2}^q = 0,10635662 \cdot 10^{-2} - 0,14835812 \cdot [K_f]^{-1} + 8,3652797 \cdot [K_f]^{-2} - \\ - 2,2600487 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-3} + 3,302207 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-4} - \\ - 2,4653202 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-5} + 7,3884406 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-6} = 0,406 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w_2}^q = 0,81469062 \cdot 10^{-1} - 1,2981659 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-1} + 7,9531997 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-2} - \\ - 2,6570816 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-3} + 5,1203428 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-4} - 5,706641 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-5} + \\ + 3,4166597 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-6} - 8,5057155 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-7} = -1,656 \cdot 10^{-2}.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (2000 - 1655) / (22,286 - 19,738) = 135; \\ A_1 = 2000 - (2000 - 1655) / (22,286 - 19,738) 22,286 = -1018; \\ A_4 = (0,289 \cdot 10^{-3} - 0,406 \cdot 10^{-3}) / (22,286 - 19,738) = -4,592 \cdot 10^{-5}; \\ A_3 = 0,289 \cdot 10^{-3} - \frac{0,289 \cdot 10^{-3} - 0,406 \cdot 10^{-3}}{22,286 - 19,738} 22,286 = 1,312 \cdot 10^{-3}; \\ A_6 = (-1,404 \cdot 10^{-2} + 1,656 \cdot 10^{-2}) / (22,286 - 19,738) = 0,989 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = -1,404 \cdot 10^{-2} - \frac{-1,404 \cdot 10^{-2} + 1,656 \cdot 10^{-2}}{22,286 - 19,738} 22,286 = -36,08 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} B_w^q = -1018; +135 \cdot 21,425 = 1883; \\ C_w^q = 1,312 \cdot 10^{-3} - 4,592 \cdot 10^{-5} \cdot 21,425 = 0,329 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -36,08 \cdot 10^{-3} + 0,989 \cdot 10^{-3} \cdot 21,425 = -1,489 \cdot 10^{-2}; \end{cases}$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 1883 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 0,329 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{25} \cdot (-1,489) \right) \right]^{-1} = 0,0542 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0520$ мм), на 4,23%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(2000/1655) / \ln(22,286/19,738) = 1,56; \\ A_1 = 2000 / 22,286^{\ln(2000/1655)/\ln(22,286/19,738)} = 15,8; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(0,289 \cdot 10^{-3} / 0,406 \cdot 10^{-3}) / \ln(22,286/19,738) = -2,8; \\ A_3 = 0,289 \cdot 10^{-3} / 22,286^{\ln(0,289 \cdot 10^{-3}/0,406 \cdot 10^{-3})/\ln(22,286/19,738)} = 1,718; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = \ln(-1,404 \cdot 10^{-2} / -1,656 \cdot 10^{-2}) / \ln(22,286/19,738) = -1,36; \\ A_5 = -1,404 \cdot 10^{-2} / 22,286^{\ln(-1,404 \cdot 10^{-2}/-1,656 \cdot 10^{-2})/\ln(22,286/19,738)} = -0,955; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} B_w^q = 15,8 \cdot 21,425^{1,56} = 1881; \\ C_w^q = 1,718 \cdot 21,425^{-2,8} = 0,323 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -0,955 \cdot 21,425^{-1,36} = -1,481 \cdot 10^{-2}; \end{cases}$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 1881 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 0,323 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{25} \cdot (-1,481) \right) \right]^{-1} = 0,0543 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0520$ мм), на 4,42%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (2000 - 1655) / (22,286^2 - 19,738^2) = 3,222; \\ A_1 = 2000 - (2000 - 1655) / (22,286^2 - 19,738^2) 22,286^2 = 400; \\ A_4 = (0,289 \cdot 10^{-3} - 0,406 \cdot 10^{-3}) / (22,286^2 - 19,738^2) = -1,093 \cdot 10^{-6}; \\ A_3 = 0,289 \cdot 10^{-3} - \frac{0,289 \cdot 10^{-3} - 0,406 \cdot 10^{-3}}{22,286^2 - 19,738^2} 22,286^2 = 0,832 \cdot 10^{-3}; \\ A_6 = (-1,404 \cdot 10^{-2} + 1,656 \cdot 10^{-2}) / (22,286^2 - 19,738^2) = 2,353 \cdot 10^{-5}; \\ A_5 = -1,404 \cdot 10^{-2} - \frac{-1,404 \cdot 10^{-2} + 1,656 \cdot 10^{-2}}{22,286^2 - 19,738^2} 22,286^2 = -25,73 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 400 + 3,222 \cdot 21,425^2 = 1879; \\ C_w^q = 0,832 \cdot 10^{-3} - 1,093 \cdot 10^{-6} \cdot 21,425^2 = 0,330 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -25,73 \cdot 10^{-3} + 2,353 \cdot 10^{-5} \cdot 21,425^2 = -1,493 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{8000} 1879 \left(\frac{40715332}{25^2} + 4000000 \cdot 0,330 \cdot 10^{-3} - \frac{20000000}{25} \cdot (-1,493) \right) \right]^{-1} = 0,0543 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0520$ мм), на 4,42%.

В таблице 4.8 представлены результаты расчета пластинок в форме произвольных треугольников на упругом основании при различных комбинациях граничных условий. Характеристики материала пластинок: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина пластинки 250 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 8$ кН/м², коэффициенты постели $C_1 = 4000$ кН/м³, $C_2 = 20000$ кН/м.

Таблица 4.8 – Сопоставление значений максимального прогиба w_0 пластинок в форме произвольных треугольников на упругом винклеровском основании, полученного с помощью МКЭ и МИКФ при различных комбинациях граничных условий

a	7,746	8,66	10	11,18	12,247	13,229	14,142	15	15,811
h	6,455	7,7735	5,	4,4721	4,0825	3,7796	3,5355	3,3333	3,1623

α		60	63	60	40	45	50	60	70	80
K_f		10,4	10,825	11,973	13,007	14,741	16,711	19,01	21,425	23,941
Значения w_0 , мм										
«1»	МКЭ	0,225	0,215	0,192	0,176	0,151	0,128	0,107	0,091	0,077
	МИКФ	0,224	0,215	0,192	0,176	0,152	0,129	0,108	0,090	0,076
	Δ , %	0,28	0,04	0,08	0,25	0,53	0,68	0,46	1,29	2,31
«2»	МКЭ	0,165	0,154	0,135	0,131	0,105	0,085	0,067	0,054	0,044
	МИКФ	0,168	0,157	0,136	0,134	0,108	0,086	0,068	0,055	0,045
	Δ , %	1,95	1,72	0,49	1,96	2,51	1,74	1,34	1,79	0,80
«3»	МКЭ	0,165	0,165	0,153	0,133	0,121	0,106	0,092	0,079	0,067
	МИКФ	0,168	0,164	0,150	0,134	0,118	0,103	0,089	0,077	0,065
	Δ , %	1,44	0,81	1,92	0,060	2,62	3,42	2,52	1,89	3,07
«4»	МКЭ	0,164	0,151	0,128	0,112	0,092	0,076	0,063	0,052	0,044
	МИКФ	0,0165	0,152	0,129	0,112	0,094	0,078	0,065	0,054	0,045
	Δ , %	0,78	0,69	1,08	0,60	1,81	3,10	3,99	4,22	1,90
«5»	МКЭ	0,121	0,118	0,106	0,099	0,084	0,070	0,057	0,045	0,038
	МИКФ	0,124	0,120	0,109	0,101	0,086	0,071	0,067	0,045	0,037
	Δ , %	2,30	2,05	2,37	2,08	2,07	1,48	0,56	2,52	4,31
«6»	МКЭ	0,120	0,108	0,090	0,084	0,066	0,052	0,040	0,032	0,026
	МИКФ	0,121	0,111	0,093	0,086	0,068	0,052	0,039	0,031	0,025
	Δ , %	0,91	3,27	2,97	2,26	3,33	1,06	2,02	3,48	3,57
«7»	МКЭ	0,120	0,116	0,101	0,085	0,074	0,064	0,054	0,045	0,038
	МИКФ	0,121	0,117	0,101	0,086	0,073	0,062	0,052	0,044	0,037
	Δ , %	0,47	0,66	0,65	0,88	2,46	3,32	2,97	2,47	3,71
«8»	МКЭ	0,089	0,083	0,071	0,064	0,053	0,043	0,034	0,027	0,022
	МИКФ	0,090	0,086	0,074	0,065	0,054	0,044	0,035	0,028	0,022
	Δ , %	2,10	2,81	2,95	2,57	2,62	2,70	2,19	1,65	1,14

Из таблицы 4.8 видно, что погрешность решений, выполненных с помощью МИКФ, по отношению к МКЭ не превышает 5 %. Анализ результатов решения показал, что наибольшую точность при расчете пластинок данного класса дает степенная интерполяция по 2 решениям.

4.5 Использование МИКФ при определении максимального прогиба пластинок, имеющих форму равнобедренной трапеции

Максимальный прогиб пластинок в форме равнобедренных трапеций на упругом двухпараметрическом основании П.Л. Пастернака будем производить по методике, аналогичной расчету пластинок на упругом винклеровском основании. В качестве непрерывного геометрического преобразования используем операцию синхронного поворота боковых сторон

прямоугольника относительно точек пересечения его средней линии с боковыми сторонами (рисунок 3.20). Коэффициенты формы фигур, являющихся опорными решениями, определяем по формулам (3.87) и (3.88).

Величину параметров V_w^q , C_w^q и E_w^q будем находить, используя следующие типы интерполяции:

- 1) линейная интерполяция по двум решениям (формулы (4.44),(4.45));
- 2) степенная интерполяция по двум решениям (формулы (4.46),(4.47));
- 3) линейно-степенная интерполяция по двум решениям (формулы (4.48),(4.49)).

Рассмотрим ряд примеров расчета равнобедренных трапециидальных пластинок.

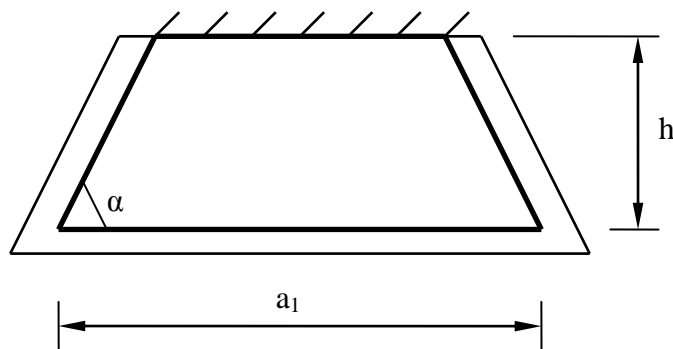


Рисунок 4.10

Пример 4.5.1.

Определить прогиб w_0 пластинки в форме равнобедренной трапеции, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

Характеристики материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu = 0,3$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 10$ кН/м², коэффициенты постели $C_1 = 5000$ кН/м³, $C_2 = 30000$ кН/м.

Длина основания пластинки $a_1 = 1,3647$ м, высота $h = 1$ м, угол при основании 70° ($K_f = 8,528$), площадь $A = 1$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и граничные условия опирания приведены на рисунке 4.10.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– прямоугольная пластинка размером 1×1 м:

$$K_{f1} = 8;$$

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с длиной основания 2 м и высотой, опущенной на основание 1 м:

$$K_{f2} = 11,657.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$\begin{aligned} B_{w1}^q = & 2,444801 \cdot 10^5 - 2,7157327 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-1} + 1,4550018 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-2} - \\ & -4,7136674 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-3} + 1,0011481 \cdot 10^{12} \cdot [K_f]^{-4} - 1,4416811 \cdot 10^{13} \cdot [K_f]^{-5} + \\ & +1,4174892 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-6} - 9,3639151 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-7} + 3,9675857 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-8} - \\ & -9,7147575 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-9} + 1,041129 \cdot 10^{16} \cdot [K_f]^{-10} = 341; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{w1}^q = & 0,14964785 \cdot 10^{-1} - 2,9935272 \cdot [K_f]^{-1} + 2,5770638 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-2} - \\ & -1,2557305 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-3} + 3,8431129 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-4} - 7,7339001 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-5} + \\ & +1,0392263 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-6} - 9,2331405 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-7} + 5,2054316 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-8} - \\ & -1,6860944 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-9} + 2,3887803 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-10} = 1,802 \cdot 10^{-3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{w1}^q = & -0,4429816 + 8,2583228 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-1} - 6,7066173 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-2} + \\ & +3,1026775 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-3} - 9,0832964 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-4} + 1,760342 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-5} - \\ & -2,2907773 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-6} + 1,980213 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-7} - 1,0903881 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-8} + \\ & +3,4607141 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-9} - 4,8172164 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-10} = -3,883 \cdot 10^{-2}; \end{aligned}$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника:

$$B_{w2}^q = 1,057 \cdot 10^1 + 1,808 \cdot 10^1 \cdot K_f + 1,154 \cdot K_f^2 = 378;$$

$$C_{w2}^q = [7,414 + 3,193 \cdot 10^1 \cdot K_f + 1,51 \cdot K_f^2]^{-1} = 1,710 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w2}^q = [-7,116 - 1,448 \cdot K_f + 0,62 \cdot 10^{-2} \cdot K_f^2 - 6,041 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^3]^{-1} = -4,301 \cdot 10^{-2}.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (341 - 378) / (8 - 11,657) = 10,12; \\ A_1 = 341 - (341 - 378) / (8 - 11,657)8 = 260; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (1,802 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}) / (8 - 11,657) = -2,516 \cdot 10^{-5}; \\ A_3 = 1,802 \cdot 10^{-3} - (1,802 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}) / (8 - 11,657)8 = 2,003 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = (-3,883 \cdot 10^{-2} + 4,301 \cdot 10^{-2}) / (8 - 11,657) = -1,143 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = 3,883 \cdot 10^{-2} - (-3,883 \cdot 10^{-2} + 4,301 \cdot 10^{-2}) / (8 - 11,657)8 = -29,69 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 260 + 10,12 \cdot 8,528 = 346; \\ C_w^q = 2,003 \cdot 10^{-3} - 2,516 \cdot 10^{-5} \cdot 8,528 = 1,789 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -29,69 \cdot 10^{-3} - 1,143 \cdot 10^{-3} \cdot 8,528 = -3,943 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 346 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 1,789 \cdot 10^{-3} - \frac{30000000}{1} \cdot (-3,943 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0215 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0209$ мм), на 2,87%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(341 / 378) / \ln(8 / 11,657) = 0,274; \\ A_1 = 341 / 8^{\ln(341/378)/\ln(8/11,657)} = 193; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(1,802 \cdot 10^{-3} / 1,71 \cdot 10^{-3}) / \ln(8 / 11,657) = -0,139; \\ A_3 = 1,802 \cdot 10^{-3} / 8^{\ln(1,802 \cdot 10^{-3}/1,71 \cdot 10^{-3})/\ln(8/11,657)} = 2,407 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = \ln(-3,883 \cdot 10^{-2} / -4,301 \cdot 10^{-2}) / \ln(8 / 11,657) = 0,272; \\ A_5 = -3,883 \cdot 10^{-2} / 8^{\ln(-3,883 \cdot 10^{-2}/-4,301 \cdot 10^{-2})/\ln(8/11,657)} = -22,08 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 193 \cdot 8,528^{0,274} = 347; \\ C_w^q = 2,407 \cdot 10^{-3} \cdot 8,528^{-0,139} = 1,786 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -22,08 \cdot 10^{-3} \cdot 8,528^{0,272} = -3,951 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 347 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 1,786 \cdot 10^{-3} - \frac{30000000}{1} \cdot (-3,951 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0214 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0209$ мм), на 2,39%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (341 - 378) / (8^2 - 11,657^2) = 0,515; \\ A_1 = 341 - (341 - 378) / (8^2 - 11,657^2) 8^2 = 308; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (1,802 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}) / (8^2 - 11,657^2) = -1,28 \cdot 10^{-6}; \\ A_3 = 1,802 \cdot 10^{-3} - (1,802 \cdot 10^{-3} - 1,71 \cdot 10^{-3}) / (8^2 - 11,657^2) 8^2 = 1,884 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = (-3,883 \cdot 10^{-2} + 4,301 \cdot 10^{-2}) / (8^2 - 11,657^2) = -5,815 \cdot 10^{-5}; \\ A_5 = 3,883 \cdot 10^{-2} - (-3,883 \cdot 10^{-2} + 4,301 \cdot 10^{-2}) / (8^2 - 11,657^2) 8^2 = -35,11 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 308 + 0,515 \cdot 8,528^2 = 345; \\ C_w^q = 1,884 \cdot 10^{-3} - 1,28 \cdot 10^{-6} \cdot 8,528^2 = 1,791 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -35,11 \cdot 10^{-3} - 5,815 \cdot 10^{-5} \cdot 8,528^2 = -3,934 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 345 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 1,791 \cdot 10^{-3} - \frac{30000000}{1} \cdot (-3,934 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0216 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0209$ мм), на 3,35%.

Пример 4.5.2. Определить прогиб w_0 пластинки в форме равнобедренной трапеции, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

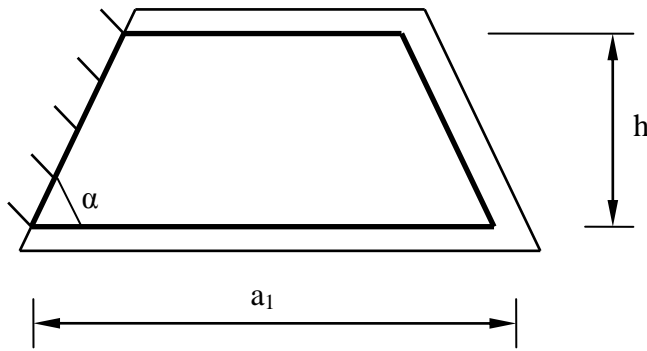


Рисунок 4.11

Характеристики

материала пластинки: $E = 2 \cdot 10^{11}$ МПа, $\nu = 0,3$, толщина пластинки 20 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 10$ кН/м², коэффициенты постели $C_1 = 5000$ кН/м³, $C_2 = 30000$ кН/м.

Длина основания пластинки $a_1 = 1,6967$ м, высота $h = 0,8165$ м, угол при основании 60° ($K_f = 9,522$), площадь $A = 1$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и условия опирания приведены на рисунке 4.11.

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– прямоугольная пластинка размером $1,2247 \times 0,8165$ м:

$$K_{f1} = 8,667.$$

– пластинка в форме равнобедренного треугольника с длиной основания 2,4495 м и высотой, опущенной на основание 0,8165 м:

$$K_{f2} = 14,544.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$\begin{aligned} B_{w1}^q = & 9,3110771 \cdot 10^4 - 9,808331 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-1} + 4,9258838 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-2} - \\ & - 1,4729409 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-3} + 2,829422 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-4} - 3,58500411 \cdot 10^{12} \cdot [K_f]^{-5} + \\ & + 2,9816432 \cdot 10^{13} \cdot [K_f]^{-6} - 1,5660066 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-7} + 4,7083686 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-8} - \\ & - 6,1724184 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-9} = 342; \end{aligned}$$

$$C_{w1}^q = -0,18189564 \cdot 10^{-1} + 3,4709798 \cdot [K_f]^{-1} - 2,8615198 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-2} + \\ + 1,3461738 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-3} - 4,001110 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-4} + 7,8688111 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-5} - \\ - 1,0388047 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-6} + 9,1064291 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-7} - 5,0828628 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-8} + \\ + 1,6343644 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-9} - 2,3033986 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-10} = 1,897 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w1}^q = 0,46555923 - 8,6912872 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-1} + 6,9686597 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-2} - \\ - 3,2064035 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-3} + 9,3398166 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-4} - 1,8021883 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-5} + \\ + 2,3366694 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-6} - 2,0137552 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-7} + 1,106062 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-8} - \\ - 3,5030279 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-9} + 4,8672762 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-10} = -4,248 \cdot 10^{-2};$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника:

$$B_{w2}^q = 0,78699598 \cdot 10^3 - 1,5090581 \cdot 10^2 \cdot K_f + 1,7527055 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 - \\ - 0,68053186 \cdot K_f^3 + 0,13773982 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^4 - 0,10598466 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 = 754;$$

$$C_{w2}^q = 0,19144713 \cdot 10^{-3} - 0,21812676 \cdot 10^{-1} \cdot [K_f]^{-1} + \\ + 1,3806279 \cdot [K_f]^{-2} - 2,5763995 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-3} + \\ + 2,4012847 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-4} - 0,87522286 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-5} = 0,873 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w2}^q = -0,41329753 \cdot 10^{-2} - 0,19861671 \cdot [K_f]^{-1} - \\ - 1,2735743 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-2} + 0,33580338 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-3} - \\ - 3,5622236 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-4} + 1,395457 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-5} = -2,698 \cdot 10^{-2}.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q , а также w_0 .

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (342 - 754) / (8,667 - 14,544) = 70,1; \\ A_1 = 342 - (342 - 754) / (8,667 - 14,544) 8,667 = -266; \\ A_4 = (1,897 \cdot 10^{-3} - 0,873 \cdot 10^{-3}) / (8,667 - 14,544) = -0,174 \cdot 10^{-3}; \\ A_3 = 1,897 \cdot 10^{-3} - \frac{1,897 \cdot 10^{-3} - 0,873 \cdot 10^{-3}}{8,667 - 14,544} 8,667 = 3,407 \cdot 10^{-3}; \\ A_6 = (-4,248 \cdot 10^{-2} + 2,698 \cdot 10^{-2}) / (8,667 - 14,544) = 2,637 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = -4,248 \cdot 10^{-2} - \frac{-4,248 \cdot 10^{-2} + 2,698 \cdot 10^{-2}}{8,667 - 14,544} 8,667 = -65,34 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} B_w^q = -266 + 70,1 \cdot 9,522 = 402; \\ C_w^q = 3,407 \cdot 10^{-3} - 0,174 \cdot 10^{-3} \cdot 9,522 = 1,748 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -65,34 \cdot 10^{-3} + 2,637 \cdot 10^{-3} \cdot 9,522 = -4,023 \cdot 10^{-2}; \end{cases}$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 402 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 1,748 \cdot 10^{-3} - \frac{30000000}{1} \cdot (-4,023 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0182 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0188$ мм), на 3,19%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} A_2 &= \ln(342 / 754) / \ln(8,667 / 14,544) = 1,527; \\ A_1 &= 342 / 8,667^{\ln(342/754)/\ln(8,667/14,544)} = 12,64; \end{aligned} \right. \\ \left[\begin{aligned} A_4 &= \ln(1,897 \cdot 10^{-3} / 0,873 \cdot 10^{-3}) / \ln(8,667 / 14,544) = -1,499; \\ A_3 &= 1,897 \cdot 10^{-3} / 8,667^{\ln(1,897 \cdot 10^{-3}/0,873 \cdot 10^{-3})/\ln(8,667/14,544)} = -0,0483; \end{aligned} \right. \\ \left[\begin{aligned} A_6 &= \ln(-4,248 \cdot 10^{-2} / -2,698 \cdot 10^{-2}) / \ln(8,667 / 14,544) = -0,877; \\ A_5 &= -4,248 \cdot 10^{-2} / 8,667^{\ln(-4,248 \cdot 10^{-2}/-2,698 \cdot 10^{-2})/\ln(8,667/14,544)} = -0,282; \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_w^q = 12,64 \cdot 9,522^{1,527} = 395; \\ C_w^q = -0,0483 \cdot 9,522^0 = 1,647 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -0,282 \cdot 9,522^{-0,877} = -3,912 \cdot 10^{-2}; \end{cases}$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 395 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 1,647 \cdot 10^{-3} - \frac{30000000}{1} \cdot (-3,912 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,019 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0188$ мм), на 1,06%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = (342 - 754) / (8,667^2 - 14,544^2) = 3,02; \\ A_1 = 342 - (342 - 754) / (8,667^2 - 14,544^2) 8,667^2 = 115; \\ A_4 = (1,897 \cdot 10^{-3} - 0,873 \cdot 10^{-3}) / (8,667^2 - 14,544^2) = -7,507 \cdot 10^{-6}; \\ A_3 = 1,897 \cdot 10^{-3} - \frac{1,897 \cdot 10^{-3} - 0,873 \cdot 10^{-3}}{8,667^2 - 14,544^2} 8,667^2 = 2,461 \cdot 10^{-3}; \\ A_6 = (-4,248 \cdot 10^{-2} + 2,698 \cdot 10^{-2}) / (8,667^2 - 14,544^2) = 0,114 \cdot 10^{-3}; \\ A_5 = -4,248 \cdot 10^{-2} - \frac{-4,248 \cdot 10^{-2} + 2,698 \cdot 10^{-2}}{8,667^2 - 14,544^2} 8,667^2 = -51,02 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 115 + 3,02 \cdot 9,522^2 = 389; \\ C_w^q = 2,461 \cdot 10^{-3} - 7,507 \cdot 10^{-6} \cdot 9,522^2 = 1,78 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -51,02 \cdot 10^{-3} + 0,114 \cdot 10^{-3} \cdot 9,522^2 = -4,071 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 389 \left(\frac{153846}{1^2} + 5000000 \cdot 1,78 \cdot 10^{-3} - \frac{30000000}{1} \cdot (-4,071 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0186 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0188$ мм), на 1,06%.

Пример 4.5.3. Определить прогиб w_0 пластинки в форме равнобедренной трапеции, лежащей на упругом основании, находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

Характеристики материала пластинки: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина пластинки 300 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 10$ кН/м², коэффициенты постели $C_1 = 5000$ кН/м³, $C_2 = 30000$ кН/м. Длина основания пластинки $a_1 = 9,1148$ м, высота $h = 3,5355$ м, угол при основании 60° ($K_f = 10,595$), площадь $A = 25$ м². Общий вид рассматриваемой пластинки и условия опирания приведены на рисунке 4.12.

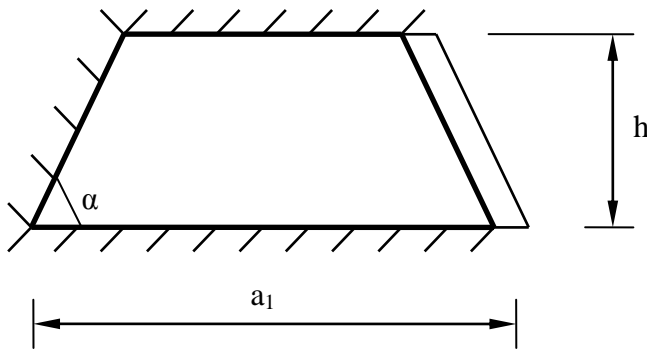


Рисунок 4.12

Решение:

Опорными фигурами для данной пластинки будут являться:

– прямоугольная пластинка размером $7,0711 \times 3,5355$ м:

$$K_{f1} = 10.$$

– пластинка в форме

равнобедренного треугольника с длиной основания $14,1422$ м и высотой, опущенной на основание $3,5355$ м:

$$K_{f2} = 17,944.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q :

– для прямоугольной пластинки:

$$\begin{aligned} B_{w1}^q = & 4,829771 \cdot 10^5 - 5,1920254 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-1} + 2,6631576 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-2} - \\ & - 8,1445271 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-3} + 1,6034019 \cdot 10^{12} \cdot [K_f]^{-4} - 2,0875997 \cdot 10^{13} \cdot [K_f]^{-5} + \\ & + 1,7894559 \cdot 10^{14} \cdot [K_f]^{-6} - 9,7174338 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-7} + 3,0309553 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-8} - \\ & - 4,1367159 \cdot 10^{15} \cdot [K_f]^{-9} = 1566; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{w1}^q = & \left[-0,61964745 \cdot 10^{-1} + 0,77860261 \cdot 10^{-2} \cdot K_f + 1,6516908 \cdot 10^{-5} \cdot K_f^2 \right]^2 \div \\ & \div \left[1 - 0,52394868 \cdot K_f + 0,50537973 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^2 \right]^2 = 0,464 \cdot 10^{-3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{w1}^q = & -0,31371951 + 5,8617276 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-1} - 4,7645878 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-2} + \\ & + 2,2078382 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-3} - 6,475636 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-4} + 1,2576899 \cdot 10^8 \cdot [K_f]^{-5} - \\ & - 1,6406322 \cdot 10^9 \cdot [K_f]^{-6} + 1,4219105 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-7} - 7,8508371 \cdot 10^{10} \cdot [K_f]^{-8} + \\ & + 2,4985149 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-9} - 3,4871429 \cdot 10^{11} \cdot [K_f]^{-10} = -1,310 \cdot 10^{-2}; \end{aligned}$$

– для пластинки в форме равнобедренного треугольника:

$$\begin{aligned} B_{w2}^q = & -1,1942064 \cdot 10^3 + 2,9485928 \cdot 10^2 \cdot K_f - 1,7633545 \cdot 10^1 \cdot K_f^2 + \\ & + 0,87895366 \cdot K_f^3 - 0,17518337 \cdot 10^{-1} \cdot K_f^4 + 0,13295157 \cdot 10^{-3} \cdot K_f^5 = 1928; \end{aligned}$$

$$C_{w_2}^q = -0,16800088 \cdot 10^{-2} + 0,2514752 \cdot [K_f]^{-1} - 1,5156186 \cdot 10^1 \cdot [K_f]^{-2} + \\ + 4,9734784 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-3} - 9,3879945 \cdot 10^3 \cdot [K_f]^{-4} + 1,0268466 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-5} - \\ - 6,0481221 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-6} + 1,4846565 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-7} = 0,349 \cdot 10^{-3};$$

$$E_{w_2}^q = 0,32634654 \cdot 10^{-1} - 5,411065 \cdot [K_f]^{-1} + 3,2318126 \cdot 10^2 \cdot [K_f]^{-2} - \\ - 1,0742805 \cdot 10^4 \cdot [K_f]^{-3} + 2,0610616 \cdot 10^5 \cdot [K_f]^{-4} - 2,2859355 \cdot 10^6 \cdot [K_f]^{-5} + \\ + 1,3613396 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-6} - 3,3697462 \cdot 10^7 \cdot [K_f]^{-7} = -1,378 \cdot 10^{-2}.$$

Определяем значения B_w^q , C_w^q и E_w^q , а также w_0 :

1 С использованием линейной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (1566 - 1928) / (10 - 17,944) = 45,57; \\ A_1 = 1566 - (1566 - 1928) / (10 - 17,944) \cdot 10 = 1110; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (0,464 \cdot 10^{-3} - 0,349 \cdot 10^{-3}) / (10 - 17,944) = -1,448 \cdot 10^{-5}; \\ A_3 = 0,464 \cdot 10 - (0,464 \cdot 10^{-3} - 0,349 \cdot 10^{-3}) / (10 - 17,944) \cdot 10 = 0,609 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = (-1,31 \cdot 10^{-2} + 1,378 \cdot 10^{-2}) / (10 - 17,944) = -8,56 \cdot 10^{-5}; \\ A_5 = -1,31 \cdot 10^{-2} - (-1,31 \cdot 10^{-2} + 1,378 \cdot 10^{-2}) / (10 - 17,944) \cdot 10 = -12,24 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 1110 + 45,57 \cdot 10,595 = 1593; \\ C_w^q = 0,609 \cdot 10^{-3} - 1,448 \cdot 10^{-5} \cdot 10,595 = 0,455 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -8,56 \cdot 10^{-5} - 12,24 \cdot 10^{-3} \cdot 10,595 = -1,315 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 1593 \left(\frac{70356094}{25^2} + 5000000 \cdot 0,455 \cdot 10^{-3} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{30000000}{25} \cdot (-1,315 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0481 \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0489$ мм), на 1,64%.

2 С использованием степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = \ln(1566/1928) / \ln(10/17,944) = 0,356; \\ A_1 = 1566 / 10^{\ln(1566/1928)/\ln(10/17,944)} = 690; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = \ln(0,464 \cdot 10^{-3} / 0,349 \cdot 10^{-3}) / \ln(10/17,944) = -0,487; \\ A_3 = 0,464 \cdot 10^{-3} / 10^{\ln(0,464 \cdot 10^{-3}/0,349 \cdot 10^{-3})/\ln(10/17,944)} = 0,00142; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = \ln(-1,31 \cdot 10^{-2} / -1,378 \cdot 10^{-2}) / \ln(10/17,944) = 0,0866; \\ A_5 = -1,31 \cdot 10^{-2} / 10^{\ln(-1,31 \cdot 10^{-2}/-1,378 \cdot 10^{-2})/\ln(10/17,944)} = -0,0107; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 690 \cdot 10,595^{0,356} = 1599; \\ C_w^q = 0,00142 \cdot 10,595^{-0,487} = 0,451 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -0,0107 \cdot 10,595^{0,0866} = -1,317 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 1599 \left(\frac{70356094}{25^2} + 5000000 \cdot 0,451 \cdot 10^{-3} - \frac{30000000}{25} \cdot (-1,317 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0479 \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0489$ мм), на 2,04%.

3 С использованием линейно-степенной интерполяции по двум решениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A_2 = (1566 - 1928) / (10^2 - 17,944^2) = 1,631; \\ A_1 = 1566 - (1566 - 1928) / (10^2 - 17,944^2) 10^2 = 1403; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_4 = (0,464 \cdot 10^{-3} - 0,349 \cdot 10^{-3}) / (10^2 - 17,944^2) = -5,18 \cdot 10^{-7}; \\ A_3 = 0,464 \cdot 10^{-3} - \frac{0,464 \cdot 10^{-3} - 0,349 \cdot 10^{-3}}{10^2 - 17,944^2} 10^2 = 0,516 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} A_6 = (-1,31 \cdot 10^{-2} + 1,378 \cdot 10^{-2}) / (10^2 - 17,944^2) = -3,063 \cdot 10^{-6}; \\ A_5 = -1,31 \cdot 10^{-2} - \frac{-1,31 \cdot 10^{-2} + 1,378 \cdot 10^{-2}}{10^2 - 17,944^2} 10^2 = -12,79 \cdot 10^{-3}; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_w^q = 1403 + 1,631 \cdot 10,595^2 = 1586; \\ C_w^q = 0,516 \cdot 10^{-3} - 5,18 \cdot 10^{-7} \cdot 10,595^2 = 0,458 \cdot 10^{-3}; \\ E_w^q = -12,79 \cdot 10^{-3} - 3,063 \cdot 10^{-6} \cdot 10,595^2 = -1,314 \cdot 10^{-2}; \end{array} \right.$$

$$w_0 = \left[\frac{1}{10000} 1586 \left(\frac{70356094}{25^2} + 5000000 \cdot 0,458 \cdot 10^{-3} - \frac{30000000}{25} \cdot (-1,314 \cdot 10^{-2}) \right) \right]^{-1} = 0,0483 \text{ м.}$$

Этот результат отличается от результата, полученного с использованием МКЭ ($w_0 = 0,0489$ мм), на 1,23%.

Таблица 4.9 – Сопоставление значений максимального прогиба пластинок w_0 в форме равнобедренных трапеций на упругом винклеровском основании, полученного с помощью МКЭ и МИКФ при различных комбинациях граничных условий

a	5,8853	6,8234	7,8903	7,6125	8,4836	9,5524	8,3604	9,1148	10,04	
h	5	5	5	4,0825	4,0825	4,0825	3,5355	3,5355	3,5355	
α	80	70	60	70	60	50	70	60	50	
K_f	8,124	8,258	9,307	9,000	9,522	10,522	10,233	10,595	11,299	
Значения w_0 , мм										
«1»	МКЭ	0,213	0,201	0,188	0,184	0,177	0,163	0,146	0,143	0,138
	МИКФ	0,210	0,201	0,187	0,182	0,173	0,158	0,144	0,140	0,133
	Δ , %	1,07	1,26	0,99	1,23	2,27	3,40	0,76	1,69	3,30
«2»	МКЭ	0,166	0,157	0,141	0,161	0,151	0,134	0,137	0,132	0,125
	МИКФ	0,168	0,160	0,146	0,162	0,151	0,134	0,134	0,129	0,120
	Δ , %	1,27	2,04	2,99	0,10	0,21	0,31	1,60	2,53	3,97
«3»	МКЭ	0,173	0,174	0,171	0,127	0,127	0,126	0,087	0,087	0,087
	МИКФ	0,174	0,171	0,166	0,127	0,126	0,126	0,087	0,087	0,088
	Δ , %	0,31	1,56	2,57	0,04	0,51	0,97	0,13	0,04	0,35
«4»	МКЭ	0,162	0,151	0,134	0,120	0,114	0,105	0,085	0,084	0,081
	МИКФ	0,170	0,156	0,136	0,122	0,114	0,101	0,085	0,083	0,078
	Δ , %	4,78	3,36	1,17	1,52	0,81	3,81	0,13	1,27	3,82
«6»	МКЭ	0,142	0,141	0,135	0,117	0,116	0,111	0,085	0,084	0,083
	МИКФ	0,139	0,136	0,130	0,114	0,112	0,107	0,083	0,083	0,081
	Δ , %	2,84	3,88	3,56	2,39	3,00	3,39	1,37	1,68	2,15
«8»	МКЭ	0,112	0,110	0,102	0,105	0,101	0,093	0,081	0,080	0,077
	МИКФ	0,111	0,108	0,102	0,104	0,099	0,092	0,080	0,078	0,075
	Δ , %	1,08	1,76	0,19	1,71	1,99	1,52	1,18	1,78	2,50
«10»	МКЭ	0,126	0,123	0,118	0,079	0,078	0,077	0,050	0,050	0,050
	МИКФ	0,128	0,124	0,117	0,080	0,079	0,078	0,050	0,050	0,050
	Δ , %	2,03	0,92	0,61	1,30	0,97	0,30	0,10	0,19	0,62
«11»	МКЭ	0,108	0,104	0,096	0,075	0,074	0,071	0,050	0,049	0,048
	МИКФ	0,106	0,101	0,095	0,075	0,073	0,069	0,049	0,048	0,048
	Δ , %	2,18	1,86	1,36	0,69	1,33	2,44	2,32	1,30	1,98
«12»	МКЭ	0,088	0,083	0,074	0,070	0,067	0,061	0,050	0,048	0,046
	МИКФ	0,088	0,084	0,076	0,069	0,066	0,060	0,048	0,047	0,045
	Δ , %	0,034	1,15	2,85	0,98	1,61	2,12	4,43	1,91	3,29

В таблице 4.9 представлены результаты расчета пластинок в форме равнобедренных трапеций на упругом основании при различных комбинациях граничных условий. Характеристики материала пластинок: $E = 3 \cdot 10^{10}$ МПа, $\nu = 0,2$, толщина пластинки 300 мм, интенсивность равномерно распределенной нагрузки $q = 10$ кН/м², коэффициент постели $C_1 = 5000$ кН/м³, $C_2 = 30000$ кН/м³.

Анализ результатов решения показал, что наибольшую точность при расчете пластинок данного класса дает линейно-степенная интерполяция по 2 решениям. Из таблицы 4.9 видно, что погрешность результатов не превышает 5%, т.е. МИКФ может успешно применяться при расчете пластинок в форме равнобедренных трапеций на упругом двухпараметрическом основании.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ПО ДИССЕРТАЦИИ

Обобщая результаты исследований, можно сформулировать следующие выводы:

1. Используя интегро-дифференциальные соотношения задачи расчета на поперечный изгиб упругих изотропных пластинок на упругом основании, были получены зависимости максимального прогиба пластинок от их коэффициента формы при двух типах упругого основания (модель Фаусса-Винклера и двухпараметрическая модель П.Л. Пастернака). Показано, что максимальный прогиб пластинок является величиной инвариантной по отношению к её площади, цилиндрической жесткости, действующей равномерно распределенной нагрузке и коэффициентам постели.

2. Разработан математический аппарат, позволяющий использовать метод интерполяции по коэффициенту формы к расчету пластинок на упругом основании.

3. С помощью МКЭ получены решения для определенных видов пластинок (равнобедренных треугольных, ромбических, прямоугольных) и построены в координатных осях $B_w^q - K_f$, $C_w^q - K_f$, и $E_w^q - K_f$ зависимости, ограничивающие все множество решений задачи о максимальном прогибе четырех- и треугольных пластинок произвольного вида с выпуклым контуром при различных комбинированных граничных условиях по их сторонам.

4. Разработана методика определения максимального прогиба пластинок в форме параллелограмма, произвольного треугольника и равнобедренной трапеции при двух типах упругого основания с различными комбинациями условий (шарнирного опирания и жесткого защемления) по их сторонам.

5. Решены тестовые примеры, которые показали, что отклонение результатов, полученных при решении рассматриваемых задач с помощью МИКФ и МКЭ, не превышают 5 %.

Полученные в данной работе зависимости $B_w^q - K_f$, $C_w^q - K_f$, и $E_w^q - K_f$ найдут практическое применение при создании программного комплекса по расчету пластинок на упругом основании с использованием МИКФ.

6. Анализ полученных решений позволил установить границы применимости МИКФ к расчёту пластинок на упругом основании. Поскольку принятая поверхность прогибов представляет собой совокупность линий уровня, подобных контуру и подобно расположенных, в ряде случаев из-за большого отпора грунта принятая гипотеза не соответствует реальной работе конструкции. В связи с этим в работе введены соответствующие ограничительные условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

- 1 Абовский, Н.П. Матричный метод расчета пластинчатых систем [Текст] / Н.П. Абовский, Л.В. Енджиевский // Пространственные конструкции в Красноярском крае: материалы конференции 18-22 октября 1965г. – Красноярск, 1965. – С. 78–93.
- 2 Абовский, Н.П. К расчету пластинчатых систем дискретными методами строительной механики [Текст] / Абовский Н.П., Енджиевский Л.В. // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. – 1966. – № 12. – С. 40–43.
- 3 Актуганов, А.А. Применение метода интерполяции по коэффициенту формы к расчету пластинок на упругом основании, нагруженных сосредоточенной силой [Текст] / А.А. Актуганов // Строительство и реконструкция. – 2013. №2 – С. 3-11.
- 4 Баженов, В.А. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов [Текст] / В.А. Баженов, В.Ф. Оробей, А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288 с.
- 5 Бате, К.-Ю. Методы конечных элементов [Текст] / К.-Ю. Бате. – М.: Физматлит, 2010. – 1024 с.
- 6 Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н.И. Безухов. – М., Высшая школа, 1968. – 512 с.
- 7 Белкин, А.Е. Расчет пластин методом конечных элементов [Текст] / А.Е. Белкин, С.С. Гаврюшин. – М.: МГТУ, 2008. – 230 с.
- 8 Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках [Текст] / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
- 9 Бреббия, К. Методы граничных элементов [Текст] / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел; пер. с англ. Л.Г. Корнейчука – М.: «Мир», 1987. – 524 с.
- 10 Бубнов, И.Г. Труды по теории пластин [Текст] / И.Г. Бубнов. – М.: ОНТИ, 1953. – 420 с.

- 11 Букша, В.В. Расчет балок, пластин и пологих оболочек коллокационными методами [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / В.В. Букша. – Екатеринбург, 2002. – 125 с.
- 12 Букша, В.В. Расчет пластин и пологих оболочек коллокационными методами [Текст] / В.В. Букша, О.В. Машкин, В.В. Рогалевич. – Екатеринбург: АМБ, 2007. – 357 с.
- 13 Вайнберг, Д.В. Вывод сеточных уравнений изгиба пластин вариационным методом [Текст] / Д.В. Вайнберг, В.М. Гаращенко, И.З. Ройтфарб, А.Л. Синявский // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1965. – Киев: «Будівельник». – Вып. I. – С. 23–33.
- 14 Вайнберг, Д.В. Дискретный анализ в теории пластин и оболочек [Текст] / Д.В. Вайнберг, А.Л. Синявский // Материалы VI Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. – М.: «Наука». – 1966. – С. 209–214.
- 15 Варвак, П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Части первая и вторая [Текст] / П.М. Варвак. // Киев: Изд-во АН УССР, 1949, 1952. – 136с., 116 с.
- 16 Варвак, П.М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций [Текст] / П.М. Варвак, Л.П. Варвак. // М. : Стройиздат, 1977. – 154 с.
- 17 Вронский, А.В. Оценка напряженного состояния зданий, возводимых на основаниях с неравномерной сжимаемостью в плане. Труды V конференции молодых научных работников НИИ оснований [Текст] / А.В. Вронский // Стройиздат. – 1970. – С. 24-26.
- 18 Габбасов, Р.Ф. Численное построение разрывных решений задач строительной механики [Текст] / Р.Ф. Габбасов, А.Р. Габбасов, В.В. Филатов. – М.: АСВ, 2008. – 277 с.
- 19 Галёркин, Б.Г. Упругие тонкие плиты [Текст] / Б.Г. Галёркин. – М.: Гостехиздат, 1933. – 371 с.
- 20 Гладкий, С.Л. Развитие и применение метода фиктивных канонических областей [Текст]: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / С.Л. Гладкий. – Пермь, 2007. – 143 с.

- 21 Голованов, А.И. Метод конечных элементов в механике деформируемого твердого тела [Текст] / А.И. Голованов, Д.В. Бережной. – Казань: ДАС, 2001. – 300 с.
- 22 Горбунов-Посадов, М.Н. Расчет конструкций на упругом основании [Текст] / М.Н. Горбунов-Посадов, Т.А. Маликова. – М.: Стройиздат, 1973. – 627 с.
- 23 Григоренко, Я.М. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор) [Текст] / Я.М. Григоренко, Н.Н. Крюков // Прикладная механика. – 1995. – Т.31. – №6. – С. 3-27.
- 24 Дашенко, А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов. В 2 т. [Текст] / А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. – Одесса: ВМВ, 2010. – Т.1. – 415 с. – Т.2. – 510 с.
- 25 Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О. Зенкевич. – М.: «Мир», 1975. – 543 с.
- 26 Зиновьев, Б.М. Развитие и численная реализация непрямого метода интегральных уравнений (метода компенсирующих нагрузок) в задачах теории упругости [Текст]: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.23.17 / Б.М. Зиновьев. – Новосибирск, 1989. – 40 с.
- 27 Игнатъев, А.В. Развитие и применение смешанной формы МКЭ в расчетах стержневых систем и пластинок [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / А.В. Игнатъев. – Волгоград, 2002. – 120 с.
- 28 Капустин, С.А. Метод конечных элементов в задачах механики деформируемых тел [Текст] / С.А. Капустин. – Н. Новгород: ННГУ, 2002. – 180 с.
- 29 Капустин, С.А. Метод взвешенных невязок решения задач механики деформируемых тел и теплопроводности [Текст] / С.А. Капустин. – Н. Новгород: ННГУ, 2010. – 60 с.
- 30 Карпиловская, Э.Б. О сходимости метода коллокации [Текст] / Э.Б. Карпиловская // ДАН СССР. – 1963. – Т.151. – № 4. – С. 766–769.

- 31 Киржаев, Ю.В. Развитие и применение метода интерполяции по коэффициенту формы к решению задач предельного равновесия пластинок [Текст]: дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 / Киржаев Юрий Викторович. – Орел, 2005. – 161 с.
- 32 Клепиков, С.Н. Расчет конструкций на упругом основании [Текст] / С.Н. Клепиков. – Киев: Будивельник, 1967. – 185 с.
- 33 Клепиков, С.Н. К проблеме учета совместной работы оснований и сооружений [Текст] / С.Н. Клепиков // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1967, № 1.
- 34 Корнишин, М.С. Применение метода коллокации к решению некоторых линейных и нелинейных задач теории пластин [Текст] / М.С. Корнишин // Изв. Казанского фил. АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. – 1960. – № 14. – С. 43–54.
- 35 Коробко, А.В. Метод интерполяции по коэффициенту формы в механике деформируемого твердого тела [Текст] / А.В. Коробко. – Ставрополь: Изд-во Ставропольского университета, 1995. – 166 с.
- 36 Коробко, А.В. Решение задач строительной механики методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / А.В. Коробко // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1995. № 3. – С. 81-84.
- 37 Коробко, А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости [Текст] / А.В. Коробко. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 320 с.
- 38 Коробко, А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости и строительной механики [Текст]: дис. ... докт. техн. наук: 05.23.17 / А.В. Коробко. – Воронеж, 2000. – 320 с.
- 39 Коробко, А.В. Интегральная характеристика формы геометрических фигур в задачах строительной механики [Текст] / А.В. Коробко, С.В. Бояркина, И.Б. Дробин // Известия вузов. Строительство. – 1994. – №4. – С. 100-104.

- 40 Коробко, А.В. Оценка основных физико-механических и геометрических параметров в задачах строительной механики и теории упругости, связанных с треугольной областью [Текст] / А.В. Коробко, И.А. Колесник // Алгоритмизация решения задач прочности и оптимального проектирования конструкций. – Киев: Институт кибернетики АН Украины, 1991. – С. 39-46.
- 41 Коробко, А.В. Оценка погрешности решений задач строительной механики, полученных методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / А.В. Коробко, В.В. Бояркина // Сборник научных трудов ученых Орловской области. – Орел, 1996. – Вып. 2. – С. 65-69.
- 42 Коробко, В.И. Геометрические методы расчета пластинок, находящихся в предельном состоянии [Текст] / В.И. Коробко. – Хабаровск: ХабКНИИ, 1979. – 104 с.
- 43 Коробко, В.И. Графическое представление границ изменения максимального прогиба пластинок [Текст] / В.И. Коробко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1983. – №2. – С. 62-64.
- 44 Коробко, В.И. Геометрические преобразования при решении задач строительной механики пластинок [Текст] / В.И. Коробко // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1983. № 1. – С. 36-39.
- 45 Коробко, В.И. Графическое представление границ изменения максимального прогиба пластинок [Текст] / В.И. Коробко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1983. № 2. – С. 62-64.
- 46 Коробко, В.И. Графическое представление границ изменения геометрической жесткости сечений в виде выпуклых фигур [Текст] / В.И. Коробко // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. - № 3. – С. 2–7.
- 47 Коробко В.И. Графоаналитический способ определения основной частоты колебаний и критической нагрузки мембран произвольного вида [Текст] / В.И. Коробко // Тонкостенные пространственные конструкции покрытий зданий. – Таллин. – 1986. – С 71-72.

- 48 Коробко, В.И. Изопериметрическая проблема в задачах расчета пластинок на упругом основании [Текст] / В.И. Коробко, В.В. Ковалев // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1991. – № 5. – С. 31–34.
- 49 Коробко, В.И. Изопериметрические неравенства в строительной механике пластинок [Текст] / В.И. Коробко. – М.: Стройиздат, 1992. – 208 с.
- 50 Коробко, В.И. Изопериметрические неравенства в теории упругих пластинок [Текст] / В.И. Коробко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. № 5. – С. 35-41.
- 51 Коробко, В.И. Изопериметрический метод в строительной механике. Том 1: Теоретические основы изопериметрического метода [Текст] / В.И. Коробко. – М.: Изд-во АСВ стран СНГ, 1997. – 390 с.
- 52 Коробко, В.И. Изопериметрический метод оптимального проектирования пластинок, работающих за пределом упругости [Текст] / В.И. Коробко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1977. № 1. – С. 18-21.
- 53 Коробко, В.И. Изопериметрический метод оценки несущей способности пластинок [Текст] / В.И. Коробко // Пространственные конструкции. – Красноярск. – 1975. – С. 18-21.
- 54 Коробко, В.И. Использование изопериметрической формы записи решения задач изгиба пластинок для оценки прогибов и изгибающего момента пластинок произвольной формы [Текст] / В.И. Коробко // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1978. № 10. – С. 98-103.
- 55 Коробко, В.И. Исследование графоаналитическим способом некоторых задач изгиба жестко защемленных пластинок [Текст] / В.И. Коробко, С.Г. Малых // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1986. № 1. – С. 126-132.
- 56 Коробко, В.И. Качественная оценка предельных нагрузок и прогибов пластинок, лежащих на упругом основании, с помощью изопериметрического метода [Текст] / В.И. Коробко, В.В. Ковалев // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1992. – № 2. – С. 38–40.
- 57 Коробко, В.И. Количественная оценка симметрии [Текст] / В.И. Коробко, А.В. Коробко. – М.: Изд-во АСВ, 2008. – 128 с.

- 58 Коробко, В.И. Некоторые геометрические методы решения задач технической теории пластинок [Текст] / В.И. Коробко. – Хабаровск: ХабКНИИ ДВНЦ АН СССР, 1978. – 66 с.
- 59 Коробко, В.И. Об одном способе решения плоской задачи теории упругости [Текст] / В.И. Коробко // Исследования облегченных строительных конструкций. – Хабаровск: ХБИ. – 1977. – С. 15–20.
- 60 Коробко, В.И. Об одном способе симметризации пластинок [Текст] / В.И. Коробко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1980. – № 2. – С. 36–39.
- 61 Коробко, В.И. Определение критической силы при равномерном сжатии по контуру пластинок на упругом основании методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения: материалы Международных академических чтений. – Курск: Курск. гос. ун-т, 2014. – С.74–81.
- 62 Коробко, В.И. Определение максимального прогиба прямоугольных пластинок на упругом основании с комбинированными граничными условиями [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Строительство и реконструкция. – 2011. №4. – С. 15-20.
- 63 Коробко, В.И. Определение максимального прогиба прямоугольных пластинок с комбинированными граничными условиями с использованием отношения конформных радиусов [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Черняев // Строительство и реконструкция. – 2011. – №6. – С. 24-29.
- 64 Коробко, В.И. Определение максимального прогиба ромбических пластинок на упругом основании с комбинированными граничными условиями [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. №5. – С. 25-30.
- 65 Коробко, В.И. Определение максимального прогиба треугольных пластинок на упругом основании с комбинированными граничными условиями [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Строительная механика

инженерных конструкций и сооружений. – 2012. №3. – С. 21-30.

66 Коробко, В.И. Определение основной частоты колебаний пластинок на упругом основании методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения: материалы Международных академических чтений. – Курск: Курск. гос. ун-т, 2011. – С.89–96.

67 Коробко, В.И. Определение основной частоты колебаний пластинок на упругом основании с двумя коэффициентами постели методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Проблемы оптимального проектирования сооружений: Доклады 3-й Всероссийской конференции, Новосибирск, 15 – 17 апреля, 2014 г. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2014. – С.207–214.

68 Коробко, В.И. Основные изопериметрические неравенства в технической теории упругих пластинок [Текст] / В.И. Коробко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1986. № 6. – С. 47-51.

69 Коробко В.И. Оценка частот свободных колебаний пластинок [Текст] / В. И. Коробко // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1979. № 10. – С. 21-23.

70 Коробко, В.И. Применение изопериметрического метода к расчету устойчивости упругих пластинок [Текст] / В.И. Коробко // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1979. № 2. – С. 58-62.

71 Коробко, В.И. Применение изопериметрического метода к решению задач технической теории пластинок [Текст] / В.И. Коробко. – Хабаровск: ХабКНИИ ДВНЦ АН СССР, 1978. – 66 с.

72 Коробко, В.И. Применение изопериметрического метода к решению некоторых задач строительной механики пластинок [Текст] / В. И. Коробко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1979. № 4. – С. 21-23.

73 Коробко, В.И. Применение метода интерполяции по коэффициенту формы к расчету пластинок на упругом основании [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. №1. – С.

18-25.

74 Коробко, В.И. Развитие и применение изопериметрического метода к решению задач строительной механики пластинок. Дис. ... доктора техн. наук [Текст] / В.И. Коробко. – Хабаровск, 1982. – 242 с.

75 Коробко, В.И. Расчет пластинок на упругом основании методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / В.И. Коробко, А.А. Актуганов // Фундаментальные исследования РААСН по научному обеспечению развития архитектуры, градостроительства и строительной отрасли Российской Федерации в 2010 году. – Москва-Орел, 2011. – С. 261-267.

76 Коробко, В.И. Строительная механика пластинок: Техническая теория [Текст] / В.И. Коробко, А.В. Коробко. – М.: Издательский дом «Спектр», 2010. – 410 с.

77 Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела [Текст] / С. Крауч, А. Старфилд. // М.: Мир, 1987. – 328 с.

78 Лукашевич, А.А. Современные численные методы строительной механики [Текст] / А.А. Лукашевич. – Хабаровск: ХГТУ, 2003. – 135 с.

79 Мануйлов, Г.А. Геометрические оценки критической силы равномерного сжатия трехслойных шарнирно опертых пластин полигонального очертания [Текст] / Г.А. Мануйлов // Расчеты на прочность. – 1987. № 28. – С. 30-36.

80 Мануйлов Г.А. Геометрические оценки основной частоты шарнирно опертых полигональных пластин и пологих сферических оболочек [Текст] / Г.А. Мануйлов // Инженерные проблемы прикладной механики. – М., 1987. – С. 87-94.

81 Мануйлов, Г.А. Геометрические оценки прогиба шарнирно опертых пластин от действия контурных моментов [Текст] / Г.А. Мануйлов // Прочность и жесткость машиностроительных конструкций. – М. – 1984. – С. 87–94.

82 Мануйлов, Г. А. Оценки прогибов некоторых пластин, имеющих форму описанных многоугольников [Текст] / Г.А. Мануйлов // Прочность,

устойчивость и колебания строительных конструкций. – Л. : ЛИСИ, 1988. – С. 138–145.

83 Мануйлов, Г.А. Оценки решений для четырехугольных пластин на основе некоторых геометрических преобразований [Текст] / Г.А. Мануйлов // Численные методы решения задач строительной механики транспортных сооружений. – М., 1986. – С. 63-70.

84 Мануйлов, Г.А. О построении геометрических оценок решений для защемленных изотропных пластин [Текст] / Г.А. Мануйлов // Научно-технические проблемы судостроения и судоремонта. – М., 1988. – С. 45-50.

85 Маркус, Г. Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит безбалочных перекрытий [Текст] / Г. Маркус. // Киев: ОНТИ, 1936. – 285 с.

86 Машкин, О.В. Расчет пластин методами граничной коллокации [Текст] / О.В. Машкин, В.В. Рогалевич. – Екатеринбург: АМБ, 2011. – 75 с.

87 Машкин, О.В. Эффективный приближенный метод расчета пластин [Текст] / О.В. Машкин, В.В. Рогалевич. // Екатеринбург: АМБ, 2009. – 86 с.

88 Морозов, С.А., Прокуров, М.Ю. Расчет шарнирно опертых параллелограммных пластинок, нагруженных в центре сосредоточенной силой, методом предельного равновесия [Текст] / С.А. Морозов, М.Ю. Прокуров // Строительство и реконструкция. – 2010. №3 – С. 22-26.

89 Морозов, С.А. Расчёт прямоугольных шарнирно опертых пластинок методом предельного равновесия [Текст] / С.А. Морозов, М.Ю. Прокуров // Материалы Международных академических чтений «Безопасность строительного фонда России. Проблемы, решения». – Курск: КГУ, 2010. – С. 48-58.

90 Морозов, С.А. Расчет полигональных пластинок постоянной толщины, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой, методом предельного равновесия [Текст] / С.А. Морозов // Строительство и реконструкция. – 2011. №1. – С. 26-34.

91 Морозов, С.А. Предельное равновесие пластинок линейно-переменной жесткости [Текст] / С.А. Морозов // Известия ОрелГТУ. Серия

«Строительство и транспорт». – 2009. №2/22(554). – С. 18-27.

92 Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н.И. Мухелишвили. // М.: Физматгиз, 1966. – 708 с.

93 Недорезов, П.Ф. Модифицированный метод сплайн-коллокации в задачах изгиба прямоугольных пластинок [Текст] / П.Ф. Недорезов, Ю.В. Шевцова, О.М. Ромакина // Математическое моделирование и краевые задачи: труды 2-ой Всероссийской научной конференции. – Самара: СамГТУ, 2005. – Ч.1. – С. 203-209.

94 Норри, Д. Введение в метод конечных элементов [Текст] / Д. Норри, Ж. де Фриз; под ред. Г.И. Марчука; пер. с англ. Г.В. Демидова, А.Л. Урванцева. – М.: Мир, 1981. – 304 с.

95 Папкович, П.Ф. Теория упругости [Текст] / П.Ф. Папкович. // М.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.

96 Пастернак, П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели [Текст] / П.Л. Пастернак. // М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 56 с.

97 Петров, В.В. Применение вариационных методов к расчету пластин [Текст] / В.В. Петров. – Саратов: СГТУ, 1999. – 80 с.

98 Погорелов, В.И. Строительная механика тонкостенных конструкций [Текст] / В.И. Погорелов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 528 с.

99 Полия, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике [Текст] / Г. Полия, Г. Сеге. – М.: Госматиздат, 1962. – 336 с.

100 Прагер, В. Вариационные принципы линейной статической теории упругости при разрывных смещениях, деформациях, и напряжениях [Текст] / В. Прагер // Сб. переводов «Механика». – 1969. №5. – С. 139-144.

101 Пратусевич, Я.А. Вариационные методы в строительной механике [Текст] / Я.А. Пратусевич. – М.: Гостехиздат, 1948. – 400 с.

- 102 Рвачев, В.Л. Метод R-функций в задачах об изгибе пластин под действием сосредоточенных нагрузок [Текст] / В.Л. Рвачев, Л.В. Курпа, М. М. Безкорвайная // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1990. – №20. – С. 96-102.
- 103 Рвачев, В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения [Текст] / В.Л. Рвачев. // Киев: Наукова думка, 1982. – 552 с.
- 104 Рвачёв, В.Л. R-функции в задачах теории пластин [Текст] / В.Л. Рвачев, Л.В. Курпа. // Киев: Наук. думка, 1987. – 176 с.
- 105 Рекунов, С.С. Применение смешанной формы МКЭ к расчетам пластинчатых систем [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / С.С. Рекунов. – Волгоград, 2008. – 174 с.
- 106 Ржаницын, А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов [Текст] / А.Р. Ржаницын // М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1954. – 288 с.
- 107 Рогалевич, В.В. Коллокационные методы. Сущность. Примеры [Текст] / В.В. Рогалевич. // Екатеринбург: Изд. АМБ, 2001. – 298 с
- 108 Розин, Л.А. Дифференциальная форма метода конечных элементов применительно к задачам теории упругости [Текст] / Л.А. Розин, В.Г. Корнеев // В кн.: Успехи механики деформируемых сред. – М., Наука, 1975. – С. 34–46.
- 109 Розин, Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам [Текст] / Л.А. Розин. // М. : Стройиздат, 1977. – 129 с.
- 110 Розин, Л.А. Современное состояние метода конечных элементов в строительной механике [Текст] / Л.А. Розин // Изв. ВУЗов. Строительство и архитектура. – 1981. – № II. – С. 41–54.
- 111 Савин, С.Ю. Расчет треугольных ортотропных пластинок с однородными граничными условиями методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / С.Ю. Савин, В.И. Коробко // Строительство и реконструкция. – 2010. № 4 (30). – С. 8-12.
- 112 Савин, С.Ю. Изгиб прямоугольных ортотропных пластинок с

однородными и комбинированными граничными условиями [Текст] / С.Ю. Савин, В.И. Коробко // Строительство и реконструкция. – 2011. №5 (37). – С. 33-39.

113 Савин, С.Ю. Расчет прямоугольных ортотропных пластинок с однородными граничными условиями методом интерполяции по коэффициенту формы [Текст] / С.Ю. Савин, В.И. Коробко // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. №1. – С. 11-15.

114 Савин, С.Ю. Изгиб ортотропных пластин в виде правильных многоугольников, шарнирно опертых по контуру [Текст] / С.Ю. Савин, В.И. Коробко // Проблемы оптимального проектирования сооружений. Доклады 2-й Всероссийской конференции, Новосибирск, 5-6 апреля, 2011 г. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2011. – С. 184-190.

115 Сен-Венан, Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм [Текст] / Б. Сен-Венан. – М.: Госматиздат, 1961. – 589 с.

116 Соболев, Д.Н. К расчету плит на статистически неоднородном основании [Текст] / Д.Н. Соболев, В.Н. Шейнин, Б.Л. Фаянс // Строительная механика и расчет сооружений. – 1968. № 2. – С. 1-4.

117 Соболев, Д.Н. Применение вариационного метода В.З. Власова к расчету косых и трапециевидных пластинок [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.17 / Д.Н. Соболев. – М., 1959. – 133 с.

118 Стренг, Г. Теория метода конечных элементов [Текст] / Г. Стренг, Жд. Фикс. – М. : Мир, 1977. – 351 с.

119 Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Изд-во «Наука», 1966. – 636 с.

120 Трещев А.А. Поперечный изгиб прямоугольных пластин, выполненных из материалов, механические характеристики которых зависят от вида напряженного состояния [Текст] / А.А. Трещев // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1988. – №1. – С. 25–29.

121 Трушин, С.И. Метод конечных элементов. Теория и задачи [Текст] / С.И. Трушин. – М.: АСВ, 2008. – 256 с.

- 122 Филоненко-Бородич, М.М. Простейшая модель упругого основания, способная распределять нагрузку [Текст] / М.М. Филоненко-Бородич // Сб. трудов МЭМИИТ. – 1945, вып. 53. – С. 29-41.
- 123 Хусточкин, А.Н. Развитие и применение изопериметрического метода к решению задач устойчивости пластинок [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / А.Н. Хусточкин. – Ставрополь, 1991. – 175 с.
- 124 Чан, Д.Т. Развитие теории и применение метода компенсирующих нагрузок к решению задач строительной механики [Текст]: автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.23.17 / Д.Т. Чан. – Киев, 2003. – 40 с.
- 125 Черняев, А.А. К вопросу о расчете пластинок средней толщины из условия жесткости [Текст] / А.А. Черняев // Региональная архитектура и строительство. – 2012. – №1. – С. 83-89.
- 126 Черняев, А.А. Определение максимального прогиба треугольных пластинок с комбинированными граничными условиями с использованием отношения конформных радиусов / А.А. Черняев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – №6. – С. 23-29.
- 127 Черняев, А.А. Решение задач поперечного изгиба пластинок с использованием конформных радиусов [Текст] / А.А. Черняев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. №6. – С. 16-22.
- 128 Черняев, А.А. Определение максимального прогиба пластинок с использованием отношения конформных радиусов в качестве геометрического аргумента [Текст] / А.А. Черняев // Материалы Международных академических чтений «Безопасность строительного фонда России. Проблемы, решения». – Курск: КГУ, 2010. – С. 96-103.
- 129 Черняев, А.А. Определение основной частоты свободных колебаний равнобедренных треугольных пластинок с комбинированными граничными условиями с использованием отношения конформных радиусов [Текст] / А.А. Черняев // Строительство и реконструкция. – 2010. №2. – С. 36-42.
- 130 Черняев, А.А. Определение максимального прогиба ромбических пластинок с комбинированными граничными условиями с использованием

отношения конформных радиусов [Текст] / А.А. Черняев // Строительная механика инженерных конструкций. – 2011. №4. – С. 21-25.

131 Ярцев, Ю.П. О сходимости метода коллокации по линиям [Текст] / Ю.П. Ярцев // Дифференциальные уравнения. – Минск: Наука и техника, 1967. – Т. III. – № 91. – С. 1606–1613.

132 Ясницкий, Л.Н. Метод фиктивных канонических областей в механике сплошных сред [Текст] / Л.Н. Ясницкий. – М.: Наука, 1992. – 128 с.

133 Ясницкий, Л.Н. Об одном способе решения задач теории гармонических функций и линейной теории упругости [Текст] / Л.Н. Ясницкий // Прочностные и гидравлические характеристики машин и конструкций. – Пермь: ППИ, 1973. – С. 78-83.

134 Brebbia, C.A. Boundary element method [Text] / C.A. Brebbia. – Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1994. – 602 p.

135 Brebbia, C.A. Boundary element techniques: theory and applications in engineering [Text] / C.A. Brebbia. – Boston: Springer-Verlag, 1984. – 510 p.

136 Conway H.D. The Bending, Buckling and Flexural Vibration of simply Supported polygonal Plates by Point-Matching [Text] / H.D. Conway // Trans ASME. S.E. – 1961. – Vol. 28. – №2. – P. 288–291.

137 Conway, H.D. Triangular plates analyzed by point matching [Text] / H.D. Conway // J. Appl. Mech. – 1962. – V. 29. – Ser. E. – № 4. – P. 168–169.

138 Grashoff, H. Ein einfaches Naherungsverfahren fur Berechnung elastisch gehelttetes Balken [Text] / H. Grashoff // Die Bautechnik. – 1951. June u August.

139 L. Rayleigh. The theory of sound, 2nd edition [Text] / L. Rayleigh. – London, 1894.

140 Moaveni, S. Finite element analysis: theory and application with ANSYS [Text] / S. Moaveni. – USA: Pearson, 2008. – 868 p.

141 Robinson, N.J. Collocation solution for a corner supported plate [Text] / N.J. Robinson // Trans. ASME. – 1969. – Ser. E. – No. 4. – P. 484–485.

142 Weighardt, K. Uber den Balken auf nachgiebiger Unterfage [Text] / K. Weighardt // Zeitchrift für Angew, Mathematik und Mechanik. – 1922. Bd. 2. – H.

143 Zienkiewicz, O.C. The finite element method: Solid mechanics [Text] / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 459 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ:**УТВЕРЖДАЮ:**

Первый проректор

ФГБОУ ВПО «Госуниверситет – УНПК»

 В.В. Светкин

04 марта 2015 г.

**СПРАВКА**

о внедрении в учебный процесс результатов диссертационной работы
Актуганова Александра Анваровича

Результаты диссертационной работы А.А. Актуганова «Развитие и применение МИКФ к решению задач поперечного изгиба пластинок на упругом основании» используются в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс» при чтении курсов лекций по дисциплинам «Строительная механика», «Основы теории упругости и пластичности» для студентов по специальностям «Промышленное и гражданское строительство» и «Городское строительство и хозяйство». Некоторые результаты были включены в научные отчеты по государственному заданию Министерства образования и науки РФ по теме «Разработка и развитие инженерных методов решения задач технической теории пластинок на основе принципов симметрии и геометрического моделирования их формы» (2012 – 2014 гг.), регистрационный номер 7.587.2011.

Директор Архитектурно-строительного института,

к.т.н., доцент



Е.А. Скобелева