

М.Н. КИРСАНОВ<sup>1</sup>, Д.В. ТИНЬКОВ<sup>1</sup><sup>1</sup>Национальный исследовательский университет "МЭИ", г. Москва, Россия**АНАЛИЗ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ГРУЗА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЕГО ПОЛОЖЕНИЯ В УЗЛАХ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ**

*Аннотация.* Рассмотрена балочная статически определимая ферма с произвольным числом панелей, в одном из узлов которой расположен массивный груз. Массой стержневой фермы пренебрегается. Выводится формула зависимости частоты колебаний груза от номера шарнира, в котором он расположен. Жесткость фермы в уравнении частот определяется по формуле Максвелла - Мора. Усилия в стержнях определяются в символической форме методом вырезания узлов в программе, написанной в системе компьютерной математики Maple. Методом двойной индукции (по номеру узла, где расположен груз, и числу панелей) ряд частных решений обобщается на произвольный случай. Рекуррентное уравнение, которому удовлетворяет последовательность коэффициентов частных решений, дает специальный оператор системы Maple.

**Ключевые слова:** ферма, частота колебаний, индукция, Maple, аналитическое решение.

M.N. KIRSANOV<sup>1</sup>, D.V. TINKOV<sup>1</sup><sup>1</sup>National Research University "MPEI", Moscow, Russia**ANALYSIS OF THE FREQUENCIES OF LOAD OSCILLATIONS, DEPENDING ON ITS POSITION IN THE NODES OF PLANAR TRUSS**

*Abstract.* A beam statically determinate truss with an arbitrary number of panels, in one of the nodes of which there is a massive load, is considered. The mass of the rods of the truss is neglected. A formula is derived for the dependence of the vibration frequency of the load on the hinge number in which it is located. The rigidity of the truss in the frequency equation is determined by the Maxwell-Mohr's formula. Forces in rods are determined in symbolic form by cutting out nodes in a program written in the computer mathematics system Maple. By a method of double induction (by the number of the node where the load is located and the number of panels), a series of particular solutions is generalized to an arbitrary case. A recurrence equation that is satisfied by a sequence of coefficients of particular solutions is given by a special operator of the Maple system.

**Keywords:** truss, oscillation frequency, induction, Maple, analytical solution.

**Введение**

Постановка задачи о зависимости частоты колебаний груза от его расположения на ферме происходит от более общей задачи о движении транспорта по мосту или о перемещении подвесного крана в промышленном цехе. В такой задаче непременно учитывается масса фермы, условие соединения стержней, возможное наличие других стационарных масс и др. Для расчета и учета всех вариантов прибегают к численным методам [1,2], основанным, как правило, на методе конечных элементов. Точная же простая формула для одного из параметров общей проблемы, полученная в упрощенной постановке, но справедливая для широкого класса ферм, необходима для оценки численных решений и для дополнительного анализа в целях оптимизации конструкции. При этом, если простой учет размеров системы с заданным числом панелей и положением груза в аналитической форме не представляет труда, то параметрический учет двух важных чисел — места груза и числа панелей возможен только методом индукции, развитым в работах [3-9] в задачах статики плоских и пространственных ферм [10-14]. Задачи собственных колебаний точечных масс в составе плоских ферм без учета их массы с применением метода индукции ранее решались в [15-17].

**Решение**

Рассмотрим распространенную схему балочной фермы с  $2n$  панелями длиной  $a$  (рисунок 1), в  $k$ -м узле которой в нижнем поясе (не считая подвижную опору), расположен колеблющийся груз. Пренебрегая горизонтальной степенью свободы груза, выведем формулу для частоты его собственных колебаний.

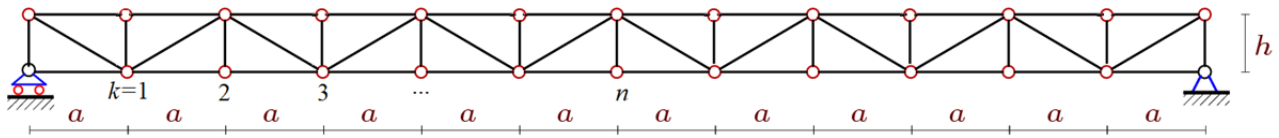


Рисунок 1 – Ферма,  $n=6$

Ферма состоит из  $4n$  стержней длиной  $a$ ,  $2n+1$  стоек высотой  $h$  и  $2n$  раскосов длиной  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ .

Формула для искомой частоты следует из уравнения колебания груза  $m\ddot{y} + Cy = 0$ , где  $y$  – вертикальное смещение груза массой  $m$ ,  $C = 1/\delta_{n,k}$ . Податливость  $\delta_{n,k}$  вычисляется по формуле Максвелла – Мора  $\delta_{n,k} = \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i l_i / (EF_i)$ . Здесь  $S_i$  — усилие в  $i$ -м стержне фермы от единичной вертикальной силы в узле, где расположен груз,  $l_i$  – длина стержня,  $EF_i$  – жесткость стержня. Площади сечений стержней решетки  $F_i^{(1)}$  выражаются через площади сечений поясов  $F_i^{(1)} = \gamma F_i^{(0)}$ . Предполагается  $0 < \gamma \leq 1$ . Суммирование ведется по всем стержням фермы  $n_s = 8n + 4$ , кроме трех опорных. Отсюда частота колебаний  $\omega = \sqrt{1/(\delta_{n,k}m)}$ .

За основу для расчета усилий  $S_i, i = 1, \dots, n_s$  в стержнях, включая реакции опор, взята программа [18], составленная на языке Maple. В программу вводятся координаты узлов и порядок соединения стержней [3]. Составляется матрица направляющих косинусов усилий, приложенных к узлам. Решение системы задачи в символьной форме заполняется в цикле по числу стержней. Учтено, что направляющие косинусы противоположных концов одного стержня имеют разные знаки [18]. В процессе расчетов усилий и коэффициентов жесткости для ферм с разным числом панелей и при разных положениях груза было замечено, что форма решения не меняется:

$$\delta_{n,k} = (A_{n,k}a^3 + D_{n,k}c^3 + H_{n,k}h^3) / (n^2 h^2 EF). \quad (1)$$

Меняются только коэффициенты. Чтобы выявить закономерность, задачу решим в два приема. Сначала при фиксированном положении груза  $k=1$  получим последовательности коэффициентов  $A_{n,1}$ : 1, 14, 55, 140, 285, 506, 819, 1240. С помощью оператора **rgf\_findrecur** системы Maple выводим рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены этой последовательности:  $A_{n,1} = 4A_{n-1,1} - 6A_{n-2,1} + 4A_{n-3,1} - A_{n-4,1}$ . Решение этого уравнения можно найти с помощью оператора **rsolve**:

$$A_{n,1} = n(8n^2 - 6n + 1) / 3.$$

Так же из уравнения  $D_{n,1} = 3D_{n-1,1} - 3D_{n-2,1} + D_{n-3,1}$ , полученного из анализа последовательности коэффициентов 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120 при  $c^3$ , получается коэффициент

$D_{n,1} = n(2n-1)$ . Аналогично, коэффициент  $H_{n,1}$  следует из решения уравнения  $H_{n,1} = 3H_{n-1,1} - 3H_{n-2,1} + H_{n-3,1}$  и имеет вид  $H_{n,1} = 2n^2 - 2n + 1$ . Теперь надо все повторить при  $k = 2, 3, \dots, n$ . Результатом является уже не последовательность чисел, а три последовательности формул:

$$\begin{aligned} A_{n,2} &= n(32n^2 - 60n + 28) / 3, D_{n,2} = n(4n - 4), H_{n,2} = 4n^2 - 4n + 4, \\ A_{n,3} &= n(72n^2 - 210n + 153) / 3, D_{n,3} = n(6n - 9), H_{n,3} = 2n^2 - 6n + 9, \\ A_{n,4} &= n(128n^2 - 504n + 496) / 3, D_{n,4} = n(8n - 16), H_{n,4} = 4n^2 - 8n + 16, \end{aligned}$$

Для обобщения некоторых коэффициентов на произвольный номер узла  $k$  расположения нагрузки не требуются какие-либо средства компьютерной математики. Очевидно,

$$D_{n,k} = n(2kn - k^2). \quad (2)$$

Наиболее сложным для анализа оказался коэффициент при  $n$  в выражении  $A_{n,k}$ . Потребовалось десять раз решить задачу и для последовательности чисел 1, 28, 153, 496, 1225, 2556, 4753, 8128, 13041, 19900 найти общий член  $t_k = k^2(2k^2 - 1)$ , решив рекуррентное уравнение  $t_k = 5t_{k-1} - 10t_{k-2} + 10t_{k-3} - 5t_{k-4} + t_{k-5}$ . В итоге, имеем общие выражения для остальных коэффициентов искомой формулы

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= nk(8n^2k - 2(4k^2 - 1)n + k(2k^2 - 1)) / 3, \\ H_{n,k} &= (3 + (-1)^k)n^2 - 2nk + k^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Проконтролировать найденное решение можно, решив задачу о прогибе фермы под действием единичной силы в середине пролета. Решение получается значительно проще, индукцией только по переменной  $n$ , и имеет вид

$$\Delta = ((2n^3 + n)a^3 / 3 + nc^3 + ((-1)^n + 2)h^3) / (h^2EF),$$

что совпадает с решением (1) - (3) при  $k = n$ .

С учетом значений коэффициентов (2), (3) получаем искомую зависимость для частоты колебаний груза

$$\omega_{n,k} = hn\sqrt{EF / ((A_{n,k}a^3 + D_{n,k}c^3 + H_{n,k}h^3)m)}. \quad (4)$$

### Анализ

Частота колебаний груза меняется в зависимости от положения груза. По аналитическому решению, это легко проиллюстрировать на графике. Вводится безразмерная частота

$$\omega' = \omega_{n,k}\sqrt{ma / (EF)}.$$

Кривые на рисунке 2 построены при  $a = 3$  м и  $n = 10$ . В начале графика частота резко уменьшается, а затем, по мере приближения груза к середине пролета, происходит некоторая ее стабилизация. От высоты  $h$  фермы зависимость частоты почти линейная. Интереснее получается зависимость частоты колебаний груза в середине пролета от числа панелей. На рисунке 3 построены зависимости (3) при  $n=k$  для трех значений высоты фермы. Так же, как и на рисунке 2, кривые получаются ломаными. Это происходит из-за наличия члена с «мигающим» коэффициентом  $(-1)^n$  в решении. Но здесь наблюдается особенность решения: кривые имеют максимум. Предсказать эту особенность было сразу трудно, а в численных решениях эта особенность ускользает. Скачки кривых с увеличением числа панелей затухают, уменьшается и частота колебаний.

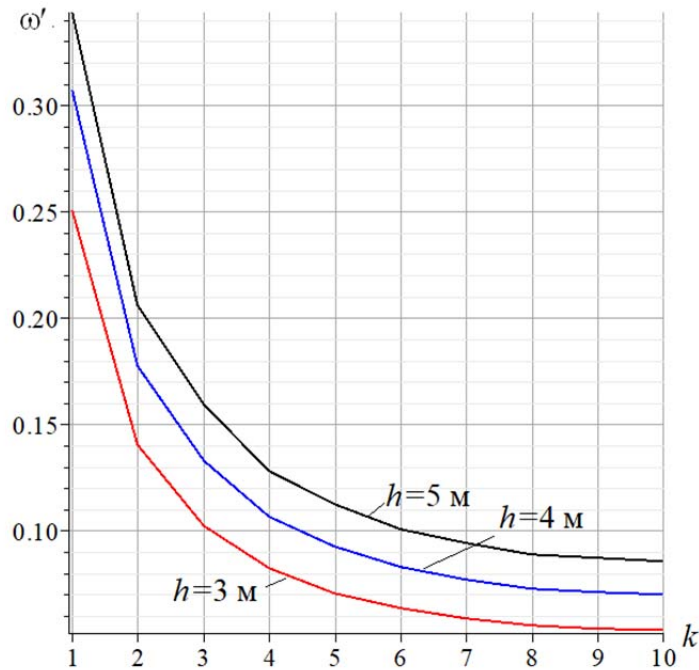


Рисунок 2 – Относительная частота колебания груза в зависимости от его положения,  $n=10$ ,  $a=3$  м

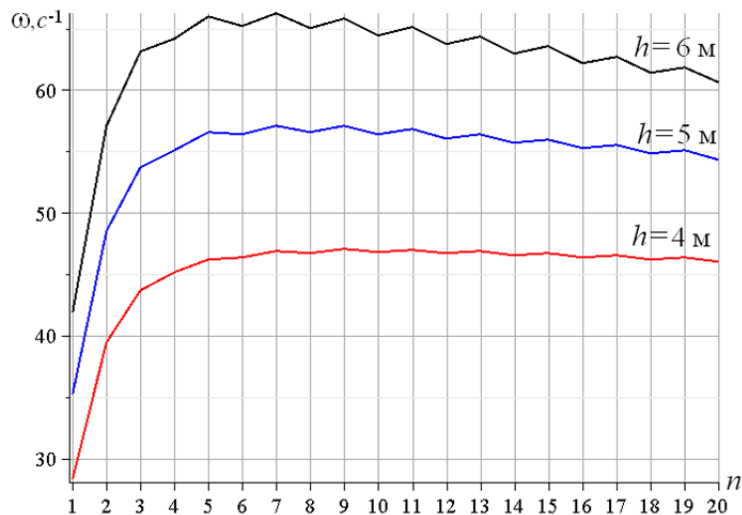


Рисунок 3 – Частота колебания груза в середине пролета в зависимости от числа панелей,  $L=50$  м,  $a=L/(2n)$ ,  $EF = 8 \cdot 10^4$  кН,  $m = 100$  кг

### Выводы

Из общей достаточно сложной проблемы динамики и колебаний ферм вычленена и отдельно решена в аналитической форме задача о зависимости частоты колебания груза от его места расположения при произвольном числе панелей фермы. Принята распространенная в практике модель фермы со стойками и параллельными поясами. Для вывода потребовался трудоемкий процесс двухпараметрической индукции. Решающим фактором в достижении успеха здесь явилось применение системы компьютерной математики Maple и опыт в получении аналитических решений задач о прогибе ферм [3,12,13]. Построенные графики решения обнаруживают некоторые особенности, которые следует учитывать при проектировании конструкций ферм.

Обзоры применения аналитических методов исследования плоских ферм даны в работах [19,20].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ufimtsev E., Voronina M. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations // *Procedia Engineering*. 2016. Т. 150. С. 1891-1897.
2. Branco J. M., Sousa H.S., Tsakanika E. Non-destructive assessment, full-scale load-carrying tests and local interventions on two historic timber collar roof trusses // *Engineering Structures*. 2017. Т. 140. С. 209-224. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.02.053>
3. Кирсанов М. Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях симметричной балочной фермы // *Строительство и реконструкция*. 2017. 1(69). С. 19–23.
4. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss // *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016. № 2-1(6). Pp. 10–12.
5. Voropai R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice // *Science Almanac*. 2016. N4-3(18). С.238–240.
6. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple // *Science Almanac*. 2016. N 5-3(19). Pp. 236–239.
7. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016. № 4-3(8). Pp. 7–8.
8. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // *Научный альманах*. 2016. № 4–3(18). С. 257—259.
9. Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Расчет величины прогиба плоской фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // *Молодежь и наука*. 2018. № 2. С. 111.
10. Ершов Л.А. Формулы для расчета деформаций пирамидального купола // *Научный альманах*. 2016. N11-2(25). С. 315-318
11. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменчивость // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2012. № 3(242). С. 48–51.
12. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // *Инженерно-строительный журнал*. 2011. № 6. С. 28-34.
13. Доманов Е. В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // *Научный альманах*. 2016. №6-2 (19). С. 214–217.
14. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. М: Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 4-8.
15. Ахмедова Е.Р., Канатова М. И. Частотное уравнение для плоской балочной фермы регулярной структуры с треугольной решеткой / *Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики"* // *Материалы конференции и труды семинара*. Казань: Изд-во ООО "Фолиант", 2014. С. 198-199.
16. Ахмедова Е.Р., Канатова М. И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // *Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 11*. С. 17-18.
17. Кирсанов М.Н., Кленова И.Г. Анализ колебаний стержневых систем периодической структуры // *Всероссийская конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии*. М.: РУДН, 2010.
18. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решение задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
19. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // *Научный вестник*. 2016. № 1 (7). С. 247–254.
20. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // *Строительная механика и конструкции*. 2018. Т.1. №16. С.12–33.

## REFERENCES

1. Ufimtsev E., Voronina M. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations. *Procedia Engineering*. 2016. Т. 150. Pp. 1891-1897.
2. Branco J. M., Sousa H. S., Tsakanika E. Non-destructive assessment, full-scale load-carrying tests and local interventions on two historic timber collar roof trusses. *Engineering Structures*. 2017. Т. 140. Pp. 209-224. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.02.053>
3. Kirsanov, M. N. Formuly dlya rascheta progiba i usilii v stержnyakh simmetrichnoy balochnoy fermy [Formulas for calculating the deflection and effort in the rods of a symmetrical beam truss]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 2017. 1 (69). Pp. 19–23.
4. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016. No 2-1(6). Pp. 10–12..
5. Voropai R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice. *Science Almanac*. 2016. N 4-3(18). Pp. 238–240.
6. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple. *Science Almanac*. 2016. N 5-3(19). Pp. 236–239.

7. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016. No 4-3(8). Pp.7–8.
8. Ponamareva, M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load. *Nauchnyy al'manakh*. 2016. No 4–3(18). Pp.257—259.
9. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Raschet velichiny progiba ploskoy fermy s proizvol'nym chis-lom paneley v sisteme Maple [Calculation of the deflection of a flat truss with an arbitrary number of panels in the Maple system]. *Molodezh' i nauka*. 2018. No 2. Pp. 111.
10. Yershov L.A. Formuly dlya rascheta deformatsiy piramidalnogo kupola [Formulas for calculating deformations of a pyramidal dome]. *Nauchnyy al'manakh*. 2016. N 11-2(25). Pp.315-318
11. Kirsanov, M.N. Raschet prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy, dopuskayushchey mgnovennuyu izmenyayemost' [Calculation of spatial core system allowing instant changeability]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2012. No 3(242). Pp. 48–51.
12. Kirsanov M.N. Statcheskiy raschet i analiz prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy [Static calculation and analysis of the spatial core system]. *Mag. Civ. Eng.* 2011. No 6. Pp. 28-34.
13. Domanov, Ye. V. Analiticheskaya zavisimost' progiba prostranstvennoy konsoli treugol'nogo profilya ot chisla paneley [The analytical dependence of the deflection of the spatial console of a triangular profile on the number of panels]. *Nauchnyy al'manakh*. 2016. No 6-2 (19). Pp. 214–217.
14. Larichev, S.A. Induktivnyy analiz vliyaniya stroitel'nogo pod'yema na zhestkost' prostranstvennoy balochnoy fermy [Inductive analysis of the influence of a building lift on the stiffness of a spatial beam farm]. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. Moscow: Infra-M. 2015. T. 1. Pp. 4-8.
15. Akhmedova Ye. R., Kanatova M.I. Chastotnoye uravneniye dlya ploskoy balochnoy fermy regul'yarnoy struktury s treugol'noy reshetkoy [The frequency equation for a flat beam truss of a regular structure with a triangular lattice]. Proc. Int. Sc. Tech. Conf. ITON-2014. Kazan: Izd-vo OOO "Foliant", 2014. Pp. 198-199.
16. Akhmedova Ye. R., Kanatova M.I. Sobstvennyye chastoty kolebaniy ploskoy balochnoy fermy regul'yarnoy struktury [Natural frequencies of oscillations of a flat beam truss of a regular structure]. *Nauka i obrazovaniye v XXI veke: sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarod-noy nauchno-prakticheskoy konferentsii 31 oktyabrya 2014 g. v 17 chastyakh. Chast' 11* [Science and Education in the XXI Century: Collection of Scientific Works on the Materials of the International Scientific and Practical Conference on October 31, 2014 in 17 parts. Part 11]. Pp. 17-18.
17. Kirsanov M.N., Klenova I.G. Analiz kolebaniy sterzhnevyykh sistem periodicheskoy struktury [Oscillation analysis of core systems of a periodic structure]. *Vserossiyskaya konferentsiya po problemam matematiki, informatiki, fiziki i khimii* [All-Russian Conference on Mathematics, Computer Science, Physics and Chemistry]. Moscow: RUDN, 2010.
18. Kirsanov M. N. Maple i Maple. Resheniye zadach mekhaniki [Solving mechanics problems]. Saint Petersburg.: Publ. Lan', 2012. 512 p.
19. Kiyko L.K. Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermy pod deystviyem vetrovoy nagruzki [An analytical assessment of the deflection of an arch truss under the influence of wind load]. *Nauchnyy vestnik*. 2016. No 1 (7). Pp. 247–254.
20. Osadchenko N.V. Analiticheskiye resheniya zadach o progibe ploskikh ferm arochnogo tipa [Analytical solutions to the problems of deflection of flat trusses of arched type]. *Stroi-tel'naya mekhanika i konstruksii*. 2018. T.1. No 16. Pp. 12–33.

#### Информация об авторах

##### **Кирсанов Михаил Николаевич**

Национальный исследовательский университет "МЭИ", г. Москва, Россия,  
доктор физико-математических наук, профессор.  
E-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

##### **Тиньков Дмитрий Владимирович**

Национальный исследовательский университет "МЭИ", г. Москва, Россия,  
аспирант.  
E-mail: [dvinkov@yandex.ru](mailto:dvinkov@yandex.ru)

#### Information about authors

##### **Kirsanov Mikhail N.**

National Research University "MPEI", Moscow, Russia  
doctor of physical and mathematical sciences, professor.  
E-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

##### **Tinkov Dmitriy V.**

National Research University "MPEI", Moscow, Russia  
graduate student  
E-mail: [dvinkov@yandex.ru](mailto:dvinkov@yandex.ru)