

Задача №1

Тело движется со скоростью \vec{V} и сталкивается с покоящимся телом такой же массы. Чему равен угол между направлениями векторов скоростей тел после абсолютно упругого удара?

Возможное решение:

Удар не является центральным, так как в противном случае тела обмениваются скоростями, а угол между нулевым вектором и любым другим вектором не определен.

Для любого удара – центрального или нецентрального – выполняется закон сохранения импульса, а если удар еще и абсолютно упругий, то и закон сохранения механической энергии.

$$\begin{cases} m_1 \vec{V}_1 + m_2 \cdot 0 = m_1 \vec{U}_1 + m_2 \vec{U}_2 \\ \frac{m_1 V_1^2}{2} + 0 = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2} \end{cases} .$$

Так как $m_1 = m_2$ по условию задачи, то

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 \\ V_1^2 = U_1^2 + U_2^2 \end{cases}$$

Но первое уравнение – это правило треугольника, а второе – теорема Пифагора для этого треугольника. Поэтому треугольник прямоугольный и

$$\vec{U}_1 \perp \vec{U}_2 .$$

Аналитическое решение задачи:

Возведем скалярно в квадрат обе части первого уравнения системы:

$$\begin{aligned} (\vec{V}_1)^2 &= (\vec{U}_1 + \vec{U}_2)^2 \\ V_1^2 &= U_1^2 + 2U_1U_2 \cos \alpha + U_2^2, \end{aligned}$$

где α – угол между векторами \vec{U}_1 и \vec{U}_2 .

Вычтем, почленно, из полученного уравнения второе уравнение системы:

$$2U_1U_2 \cos \alpha = 0$$

Поскольку ни U_1 , ни U_2 не равны нулю, то $\cos\alpha=0$, а это значит, что векторы \vec{U}_1 и \vec{U}_2 перпендикулярны.

Ответ: 90°

Задача №2

Тело брошено в воздухе вертикально вверх. Что больше время подъема или падения?

Возможное решение:

Пусть t_1 - время подъема, а t_2 - время падения. Очевидно, что высота подъема и опускания одинаковы.

$$H_1 = H_2$$

$$H_1 = V_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} \quad V = V_0 - a_1 t_1 = 0$$

$$V_0 = a_1 t_1 \quad H_1 = a_1 t_1^2 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{a_1 t_1^2}{2}$$

$$H_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2H_2}{a_2}}$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$$

При движении вверх

$$mg + F_c = ma_1 \quad a_1 = g + F_c / m$$

При движении вниз

$$mg - F_c = ma_2 \quad a_2 = g - F_c / m$$

Ответ:
$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \sqrt{\frac{g + F_c / m}{g - F_c / m}} > 1$$
$$t_2 > t_1$$

Задача №3

К нерастянутой пружине жесткостью k подвесили груз массой m и отпустили. Определить амплитуду колебаний маятника и максимальную скорость груза.

Решение:

Максимальное растяжение пружины равно сумме растяжения до положения равновесия и амплитуды. А найти его можно из закона сохранения энергии: работа силы тяжести равна потенциальной энергии максимально растянутой пружины.

$$mgx_m = \frac{kx_m^2}{2}, \quad x_m = \frac{2mg}{k}, \quad x_m = x_0 + a$$

$$x_0 = \frac{mg}{k}, \Rightarrow a = x_m - x_0 = \frac{2mg}{k} - \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k}$$

Максимальную скорость маятника найдем из закона сохранения энергии: кинетическая энергия груза при прохождении положения равновесия, равна потенциальной энергии пружины при амплитудном отклонении маятника от положения равновесия.

$$\frac{mV_m^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \Rightarrow V_m = \sqrt{\frac{ka^2}{m}} = a\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{k}{m}} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ответ: $x_0 = \frac{mg}{k}$, $V_m = g\sqrt{\frac{m}{k}}$

Задача №4

Длину спирали бытового электрического нагревателя уменьшили на 10%. Увеличится или уменьшится количество выделяемого нагревателем тепла в единицу времени и на сколько процентов?

Возможное решение:

$$l_2 = 0,9l_1 \quad R = \frac{\rho l}{S} \Rightarrow R_2 = 0,9R_1$$

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1} t \quad Q_2 = \frac{U^2}{R_2} t = \frac{U^2}{0,9R_1} t = \frac{10}{9} \frac{U^2}{R_1} t = \frac{10}{9} Q_1$$

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \frac{1}{9} Q_1$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta Q}{Q_1} 100\% = \frac{\frac{1}{9} Q_1}{Q_1} 100\% = \frac{100\%}{9} = 11,1\%$$

Ответ: 11,1 %

Задача №5

За последнюю секунду свободного падения тело прошло путь в семь раз больший, чем за первую. Сколько времени падало тело?

Возможное решение:

При равноускоренном движении пути пройденные телом за равные промежутки времени относятся как нечетные числа 1:3:5:7:9: и т.д. (Это конкретно приведено в учебнике) Отсюда время всего падения – 4 секунды

$$h_1 = \frac{gt^2}{2}$$

$$V_1 = gt$$

$$h_2 = V_1 t + \frac{gt^2}{2} = gt^2 + \frac{gt^2}{2} = 3 \frac{gt^2}{2}$$

$$V_2 = V_1 + gt = 2gt$$

$$h_3 = V_2 t + \frac{gt^2}{2} = 2gt^2 + \frac{gt^2}{2} = 5 \frac{gt^2}{2}$$

и т.д.

Ответ: 4 с.