11 класс

11.1. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} x+y+z+v=7, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{v}=1 \end{cases}$ не имеет решений в положительных числах x, y, z, v.

11.2. Последовательность чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ образована по закону: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ для $n = 1,2,3, \ldots$ Другая последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots$ построена по закону: $y_1 = 3, y_{n+1} = y_n^2 + y_n$ для $n = 1,2,3, \ldots$ Найдется ли число, принадлежащее одновременно обеим последовательностям?

11.3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH. Оказалось, что AH=BC. Докажите, что биссектриса угла B, высота, опущенная из вершины A, и прямая, проходящая через точку H и параллельная стороне BC, пересекаются в одной точке.

11.4. p, q – целые числа, $|p| \le 100$, $|q| \le 100$. Докажите, что если $\left|f(\sqrt{2}+1)\right| < \frac{1}{500}$, где $f(x) = x^2 + px + q$, то $p = -2$, $q = -1$ (и, следовательно, $f\left(\sqrt{2}+1\right) = 0$).

11.5. Функции $s(x) = \sin x, c(x) = \cos x$ удовлетворяют соотношениям $s^2(x) + c^2(x) = 1, s(2x) = 2s(x)c(x)$. Докажите, что не существует функций $s(x)$ и $c(x)$, удовлетворяющих соотношениям $s^2(x) + c^2(x) = 1, s(2x) = s(x)c(x)$ при всех x ($s(x)$ не равна тождественно нулю). Всё рассматривается в области действительных чисел.