9-й класс

9.1. По окружности длиной 60 м в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 5 с быстрее другой, а совпадения точек происходят через каждую минуту. Найдите скорости точек.

Решение. Пусть v_1 и v_2 — скорости точек, $\ell = 60$ м — длина окружности, t_1 и t_2 — время оборота каждой точки (в сек.).

1) По условию, $t_1 = t_2 - 5$, откуда имеем

$$\ell/v_1 = \ell/v_2 - 5. \qquad (1)$$

2) Через $\Delta t = 60$ сек. произойдёт первое совпадение точек; при этом 2-я точка (более медленная) точка пройдет путь $s_2 = v_2\Delta t$, а 1-я (более быстрая) точка —. $s_1 = v_1\Delta t = \ell + v_2\Delta t$. Отсюда: $v_1 = \ell/\Delta t + v_2$, так что

$$v_1 - v_2 = \ell/\Delta t. \qquad (2)$$

3) Подставляя в (1) и (2) $\ell = 60$ и $\Delta t = 60$, получаем систему:

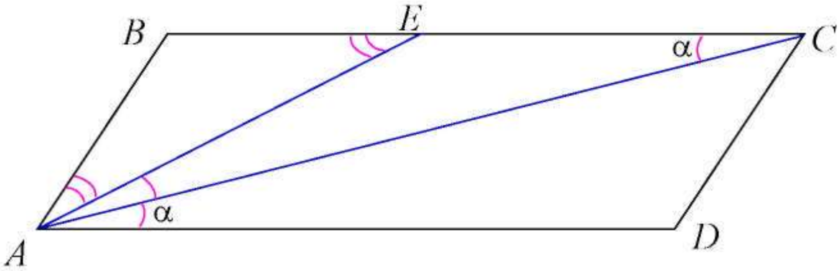
$$\begin{cases} \dfrac{60}{v_1} = \dfrac{60}{v_2} - 5, \\ v_1 - v_2 = 1. \end{cases}$$

Решая её, получаем единственное (с учётом положительности v_1 и v_2) решение: $v_1 = 4$ м/с, $v_2 = 3$ м/с.

Ответ: $v_1 = 4$ м/с, $v_2 = 3$ м/с.

9.2. Найти углы параллелограмма, если длинная диагональ делит его угол в отношении $1 : 3$, а длины его сторон относятся как $1 : (1 + \sqrt{3})$.

Решение. Пусть $AB = x$, а $\angle DAC = \alpha$, тогда $BC = (1 + \sqrt{3})x$, а $\angle BAC = 3\alpha$. Проведём для $\angle BAD = 4\alpha$ биссектрису AE. Тогда



1) $\angle AEB = \angle EAD = 2\alpha$ (как накрест лежащие), $\angle EAB = 2\alpha$, так что $\triangle ABE$ — равнобедренный и $BE = AB = x$; при этом (по теореме косинусов)

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE\cos(\angle ABE) = x^2 + x^2 - 2x^2\cos(180° - 4\alpha) =$$
$$= 2x^2(1 + \cos4\alpha) = 4x^2\cos^2 2\alpha,$$

так что
$$AE = 2x\cos2\alpha,$$

2) $\angle ECA = \angle CAD = \alpha$ (как накрест лежащие), но $\angle EAC = \angle EAD - \angle CAD =$

$= 2\alpha - \alpha = \alpha$, так что $\triangle AEC$ — тоже равнобедренный и $EC = AE = 2x\cos 2\alpha$. При этом $BC = BE + EC$, значит,

$$(1 + \sqrt{3})x = x + 2x\cos 2\alpha;$$

отсюда $\cos 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \Rightarrow 2\alpha = 30°, \Rightarrow \angle BAD = 4\alpha = 60°, \angle ABC = 120°.$

Ответ: 60° и 120°.

9.3. Решить уравнение: $\dfrac{x-1}{x^2} + \dfrac{x-2}{x^2} + \dfrac{x-3}{x^2} + \ldots + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{7}{15}.$

Решение: 1) Так как числители в левой части уравнения убывают на постоянную величину — 1 — и доходят до целого числа (также равного 1), то x — натуральное число.

2) Записав уравнение в виде

$$\frac{(x-1)+(x-2)+(x-3)+\ldots+1}{x^2} = \frac{7}{15},$$

видим, что числитель дроби в левой части уравнения представляет собой сумму $n = x - 1$ членов арифметической прогрессии с $a_1 = x - 1$, $a_n = 1$ (и $d = -1$), т. е. равен $\dfrac{a_1 + a_n}{2} n = \dfrac{x-1+1}{2}(x-1) = \dfrac{x(x-1)}{2}$. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{x(x-1)}{2x^2} = \frac{7}{15},$$

$$15x(x - 1) = 7 \cdot 2x^2,$$

$$x^2 - 15x = 0,$$

откуда $x = 0$ или $x = 15$. Так как значение $x = 0$ не подходит (знаменатель дроби), то $x = 15$.

Ответ: $x = 15$.

9.4. При каких значениях параметра p функция $y = \sqrt{(3p+1)x - p(4+x^2)}$ определена при всех действительных значениях x?

Решение. Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы подкоренное выражение было неотрицательным, т. е. неравенство $-px^2 + (3p + 1)x - 4p \geqslant 0$ выполнялось для всех действительных значений x. В свою очередь это будет выполнено, если $-p > 0$ и $D \leqslant 0$ (случай $p = 0$ необходимо рассмотреть особо и убедиться, что требуемые условия не выполнены). Решив систему

$$\begin{cases} p < 0, \\ D \le 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < 0, \\ 7p^2 - 6p - 1 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < 0, \\ (7p+1)(p-1) \ge 0, \end{cases}$$

получим $\quad p \le -\frac{1}{7}$.

Ответ: $p \leqslant -1/7$.

9.5. Два натуральных двузначных числа, записанных одно за другим, образуют четырёхзначное число, которое делится на их произведение. Найдите эти числа (укажите все варианты ответа).

Решение: Пусть a и b — данные числа.

1) По условию $100a + b = kab$ (где k — натуральное число), $\Rightarrow$ $b = a(kb - 100)$. Обозначим $m = kb - 100$. Числа a и b двузначные, $\Rightarrow$ m однозначно.

2) $100a + b = 100a + ma = a(100 + m)$ и $100a + b = kab, \Rightarrow$
$100 + m = kb = kma, \quad \Rightarrow \quad 100 = m(ka - 1), \quad \Rightarrow \quad 100$ делится на m.

Из 1) и 2) получаем: $m = 1, 2, 4, 5$.

Если $m = 1$, то $ka = 101$, но 101 не делится ни на какое двузначное число (a — двузначное), поэтому $m \ne 1$.

Если $m = 2$, то $ka = 51$, $\Rightarrow$ $a = 17$, $b = ma = 2\cdot 17 = 34$ (двузначные делители числа 51 — это 17 и 51, но если $a = 51$, то $b = ma = 2\cdot 51 = 102$ — трёхзначное).

Если $m = 4$, то $ka = 26$, $\Rightarrow$ $a = 13$, $b = ma = 4\cdot 13 = 52$ (двузначные делители числа 26 — это 13 и 26, но если $a = 26$, то $b = ma = 4\cdot 26 = 104$ — трёхзначное).

Если $m = 5$, то $ka = 21$, $\Rightarrow$ $a = 21$, $b = ma = 5\cdot 21 = 105$ — трёхзначное, поэтому $m \ne 5$.

Ответ: 17 и 34; 13 и 52.