# Решения задач

## 8-й класс

**8.1.** Найдите все целые значения $a$, при которых число

$$N = k^3 - ak^2 + 7k - 11$$

нечётно для всех целых значений $k$.

*Решение.* Заданное число $N = k^3 - ak^2 + 7k - 11$ представим в виде $N = k(k^2 + 7) - 11 - ak^2$. Здесь первое слагаемое состоит из множителей противоположной чётности при любом целом значении $k$, поэтому оно всегда чётно; следовательно, $k(k^2 + 7) - 11$ всегда нечётно. Но тогда для нечётности числа $N = k(k^2 + 7) - 11 - ak^2$ необходимо (и достаточно), чтобы число $ak^2$ было чётным для всех целых значений $k$. Значит, число $a$ — чётно.

Ответ: Все чётные $a$.

**8.2.** Найдите все натуральные значения $n$, при которых число $M = n^2 + 2n + 12$ является произведением двух последовательных натуральных чисел.

*Решение.* 1) Заданное число $M = n^2 + 2n + 12 = (n + 3)(n + 4) - 5n$, поэтому при любом натуральном $n$ число

$$M < (n + 3)(n + 4);$$

с другой стороны, число $M = n(n + 1) + n + 12$, поэтому при любом натуральном $n$ число

$$M > n(n + 1).$$

Поэтому либо меньший из двух множителей числа $M$ равен $n + 1$, либо больший его множитель равен $n + 3$.

2) Число $M = n^2 + 2n + 12 = (n + 1)(n + 2) - (n - 10)$ будет произведением последовательных натуральных чисел $n + 1$ и $n + 2$ при $n = 10$ ($M = 11\cdot 12$)

3) Число $M = n^2 + 2n + 12 = (n + 2)(n + 3) - (3n - 6)$ будет произведением последовательных натуральных чисел $n + 2$ и $n + 3$ при $n = 2$ ($M = 4\cdot 5$).

Ответ: $n = 2$ или 10.

**8.3.** Решите уравнение: $x^3 - x^2 - x = \dfrac{1}{3}$.

*Решение.* $3x^3 - 3x^2 - 3x = 1, \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1, \quad \Leftrightarrow$

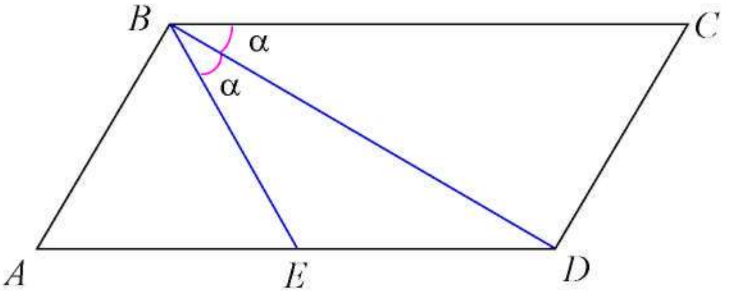
$4x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 = (x + 1)^3, \quad \Leftrightarrow$

$\sqrt[3]{4}x = x + 1, \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}.$

Ответ: $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$.

**8.4**. Найти углы параллелограмма, если длины его сторон относятся как 1 : 2, а диагональ делит его тупой угол в отношении 1 : 3.

*Решение.* Пусть $AB = x$, а $\angle DBC = \alpha$, тогда $AD = 2x$, а $\angle ABD = 3\alpha$. Проведём луч $BE$ так, чтобы $\angle EBD = \alpha$. Тогда




1) (т.к. $\angle EDB = \angle DBC = \alpha$) $\triangle EBD$ — равнобедренный и $BE = ED$;
2) $\angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = 2\alpha$, но $\angle AEB$ тоже равен $2\alpha$ (как внешний угол в $\triangle EBD$); поэтому в $\triangle ABE$ сторона $AE = AB = x$. Тогда $ED = AD - AE = x$ и, следовательно, $BE = x$. Значит, $\triangle ABE$ — равносторонний и $\angle A = 60°$, $\angle ABC = 120°$.

Ответ: 60° и 120°.

**8.5**. Моторная лодка отправилась вниз по течению реки из пункта $A$ в пункт $B$. Когда она прошла 3/4 пути, кончилось горючее, и оставшийся путь пришлось идти на вёслах. Весь путь из $A$ в $B$ занял 1 час 50 минут. Если бы горючего хватило только на 1/4 пути, а оставшуюся часть пути надо было идти на вёслах, то весь путь занял бы 3 часа 30 минут. Путь из $A$ в $B$ и обратно с включенным мотором занимает 2 часа 5 минут. За какое время лодка проходит путь из $B$ в $A$ на вёслах?

*Решение.* Пусть путь из $A$ в $B$ по реке имеет длину $S$; обозначим $x$ собственную скорость лодки с мотором, через $y$ — скорость реки, и через $z$ — собственную скорость лодки на вёслах. Тогда искомое время $t = S/(z - y)$. Далее,

1) $\dfrac{3S}{4(x+y)}$ и $\dfrac{S}{4(y+z)}$ — время, затраченное на пути из $A$ в $B$ лодкой с мотором и на вёслах соответственно, когда весь путь занял 110 минут; по условию,

$$\frac{3S}{4(x+y)} + \frac{S}{4(y+z)} = \frac{11}{6} \text{(часа)}.$$

2) $\dfrac{S}{4(x+y)}$ и $\dfrac{3S}{4(y+z)}$ — время, затраченное на пути из $A$ в $B$ лодкой с мотором и на вёслах соответственно, когда весь путь занял 210 минут; по условию,

$$\frac{S}{4(x+y)}+\frac{3S}{4(y+z)}=\frac{21}{6}\text{ (часа)}.$$

3) $\frac{S}{x+y}$ и $\frac{S}{x-y}$ — время, затраченное лодкой с мотором на пути из $A$ в $B$ и обратно соответственно; при этом путь занял 125 минут, значит,

$$\frac{S}{x+y}+\frac{S}{x-y}=\frac{25}{12}\text{ (часа)}.$$

Для упрощения получающейся системы положим $S/(x+y)=t_1$, $S/(y+z)=t_2$ и $S/(x-y)=t_3$. В результате получим систему

$$\begin{cases}\frac{3}{4}t_1+\frac{1}{4}t_2=\frac{11}{6},\\ \frac{1}{4}t_1+\frac{3}{4}t_2=\frac{21}{6},\\ t_1+t_3=\frac{25}{12}.\end{cases}$$

Складывая и вычитая первые два уравнения этой системы, получим

$$t_1+t_2=16/3 \quad \text{и} \quad t_1-t_2=-10/3,$$

откуда

$$t_1=1, \quad t_2=13/3;$$

из третьего уравнения системы найдём

$$t_3=25/12-t_1=25/12-1=13/12.$$

Из введённых обозначений и найденных значений имеем систему

$$x+y=S/t_1=S, \quad x-y=S/t_3=12S/13, \quad y+z=S/t_2=3S/13,$$

из которой получим:

$$y=S/26, \qquad z=3S/13-y=(3/13-1/26)S=5S/26.$$

Тогда искомое время $t=S/(z-y)=1/(5/26-1/26)=13/2$ (часа).

Ответ: за 6,5 часов.