11 класс

11.1 Даны арифметическая и геометрическая прогрессии. В арифметической прогрессии первый член равен 6, разность равна 2. В геометрической прогрессии первый член равен 3, знаменатель равен $\sqrt{3}$. Выяснить, что больше: сумма первых восьми членов арифметической прогрессии или сумма первых шести членов геометрической прогрессии.

Решение:

Общий член a_n данной арифметической прогрессии по известной формуле может быть записан так: $a_n = 6 + 2(n-1)$. Поэтому $a_8 = 6 + 2 \cdot 7 = 20$.

Сумма первых восьми членов арифметической прогрессии равна

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 6 = \frac{6+20}{2} \cdot 8 = 104.$$

По известной формуле сумма первых шести членов данной геометрической прогрессии равна

$$S_6 = \frac{b_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{3(1-\sqrt{3}^6)}{1-\sqrt{3}} = \frac{3(-26)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = 39(\sqrt{3}+1).$$

Сравним числа 104 и $39(\sqrt{3}+1)$. Так как $3 > \frac{25}{9}$, $\sqrt{3} > \frac{5}{3}$, то

$39(\sqrt{3}+1) > 39\left(\frac{5}{3}+1\right) = 104.$

Ответ: сумма первых восьми членов арифметической прогрессии меньше суммы первых шести членов геометрической прогрессии.

11. 2 Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2.$$

Решение:

Приведем данное неравенство равносильным преобразованием к виду:

$$\left(x+\frac{3}{x}+4\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq 0.$$

Найдем область допустимых значений.

$$ОДЗ:\begin{cases}x\neq 0,\\ x^2-6x+9\geq 0,\\ 5-x\geq 0,\\ \sqrt{5-x}-1\neq 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0,\\ (x-3)^2\geq 0,\\ x\leq 5,\\ \sqrt{5-x}\neq 1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0,\\ x\in R,\\ x\leq 5,\\ x\neq 4,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(0;4)\cup(4;5].$$

Для любого $x\in R$ выражение $\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\geq 0$, а $\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2=0$, если

$$\sqrt{x^2-6x+9}-1=0 \Leftrightarrow |x-3|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=1,\\ x-3=-1,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4,\\ x=2.\end{array}\right.$$

$x=4$ не принадлежит области допустимых решений, значит это посторонний корень, а $x=2$ является решением.

Считая далее $x\neq 2$, разделим обе части неравенства на $\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2>0$, тогда

$$x+\frac{3}{x}+4\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3+4x}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{x}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(0;1]\cup[3;+\infty).$$

Пересечем получившееся решение с ОДЗ:

$$\begin{cases}x\in(-\infty;0)\cup(0;4)\cup(4;5],\\ x\in(0;1]\cup[3;+\infty),\end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;1]\cup[3;4)\cup(4;5].$$

Объединяя, $x=2$ и последнее решение получим $x\in(0;1]\cup\{2\}\cup[3;4)\cup(4;5]$.

Ответ: $x\in(0;1]\cup\{2\}\cup[3;4)\cup(4;5]$.

11.3 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\sin^2 x + 2\cos x + a\right| = \sin^2 x + 2\cos x + a$$

имеет на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ единственный корень.

<u>Решение:</u>

Обозначим правую часть исходного равенства через $f(x,a)$:

$$f(x,a) = \sin^2 x + 2\cos x + a.$$

Тогда исходное уравнение примет вид

$$|f(x,a)| = f(x,a). \tag{1}$$

1) Очевидно, что если $f(x,a) < 0$, то в уравнении (1) левая часть больше 0, а правая меньше 0, то есть в этом случае уравнение (1) (а с ним и исходное) решений не имеет.

2) Если же $f(x,a) \ge 0$, то уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x,a) \ge 0, \\ f(x,a) = f(x,a), \end{cases}$$

что равносильно единственному неравенству $f(x,a) \ge 0$, то есть

$$\sin^2 x + 2\cos x + a \ge 0. \tag{2}$$

Преобразуем неравенство (2):

$$1 - \cos^2 x + 2\cos x + a \ge 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 2\cos x - 1 - a \le 0 \Leftrightarrow$$

$$(\cos^2 x - 2\cos x + 1) - 1 - 1 - a \le 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)^2 - (2 + a) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$(\cos x - 1)^2 \le a + 2. \tag{3}$$

Так как для любого $x \in R.$ $(\cos x - 1)^2 \ge 0$, то неравенство (3) имеет решение только при $a + 2 \ge 0$, то есть $a \ge -2$. Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства (3), при $a \ge -2$ получим:

$$|\cos x - 1| \le \sqrt{a+2},$$

$$-\sqrt{a+2} \le \cos x - 1 \le \sqrt{a+2},$$

$$1 - \sqrt{a+2} \le \cos x \le 1 + \sqrt{a+2}. \tag{4}$$

Так как $a+2\geq 0, \sqrt{a+2}\geq 0, 1+\sqrt{a+2}\geq 1$, то правое неравенство в (4) выполнено при любом x.

Для решения левого неравенства

$$1-\sqrt{a+2}\leq \cos x \tag{5}$$

положим $1-\sqrt{a+2}=b$, причем $b\leq 1$, т.к. $a+2\geq 0$. Тогда (5) равносильно неравенству

$$\cos x\geq b, \tag{6}$$

которое заведомо выполняется при $b<-1$, то есть при $b<-1$ неравенство (6) имеет бесконечное множество решений на любом отрезке с длиной, равной периоду $T=2\pi$.

При $b\in(-1;0)$ решением будут

$$x\in(-(\pi-\arccos b)+2\pi n;(\pi-\arccos b)+2\pi n);$$

а при $b\in(0;1)$ получаем

$$x\in(-\arccos b+2\pi n;\arccos b+2\pi n);\quad n\in Z.$$

То есть в обоих случаях на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ бесконечное множество решений.

При $b=0$, получаем промежутки $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, не пересекающиеся с промежутком $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ при любом $n\in Z$;

При $b=1$ отрезки $[-\arccos b+2\pi n;\arccos b+2\pi n]$ вырождаются в точки $x_n=\arccos 1+2\pi n=2\pi n\notin\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$, то есть и в этих двух случаях на промежутке $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$ неравенство (6) (а с ним и неравенство (5), равносильное неравенству (2)) решений не имеет.

Таким образом, не существует искомых значений a.

Ответ: не существует искомых значений a.

11.4 На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на три. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

Решение:

Пусть на заводе первоначально было n прессов. Тогда после реконструкции их стало n + 3. Так как каждый пресс штампует в день целое число деталей, то число 6480 должно делиться на n, а число 11200 должно делиться на n + 3. Легко проверить, что $6480 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5$, $11200 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Если n делится на 3, то n + 3 также делится на 3, и значит, число 11200 делится на 3. Но это неверно. Отсюда получаем, что n не делится на 3 и поэтому содержится среди следующих делителей числа 6480: 1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 20, 40, 80. Учитывая, что n + 3 делит 11200, заключаем, что n находится среди чисел 1, 2, 4, 5. До реконструкции каждый пресс штамповал в день $\frac{6480}{n}$ деталей. Новые прессы штампуют в день $\frac{11200}{n+3}$ деталей. По условию должно выполняться неравенство $\frac{6480}{n} < \frac{11200}{n+3}$.

Все целые решения этого неравенства, удовлетворяют неравенству $n \geq 5$. Итак, для n остается единственная возможность n = 5.

Ответ: 5.

11.5 В окружности проведены хорды *PQ* и *CD*, причем *PQ* = *PD* = *CD* = 12, *CQ* = 4. Найдите *CP*.

Решение:

При построении хорд возможно два случая:

1) точки D и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CP (рис. 1);
2) точки D и Q лежат в одной полуплоскости относительно прямой CP (рис. 2).

рис. 1

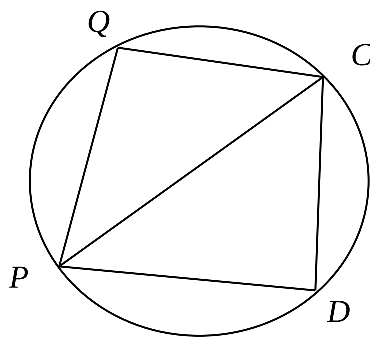
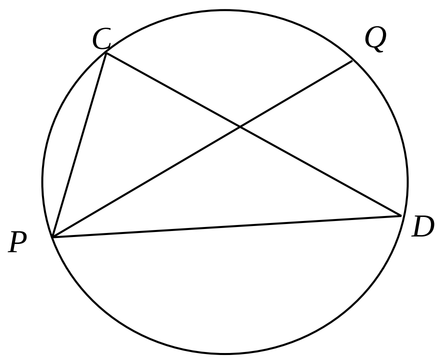


рис. 2



Рассмотрим первый случай на рис. 1.

$\angle PQC = 180^\circ - \angle PDC$ (так как сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°).

В ΔPQC применим теорему косинусов:

$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2PQ \cdot QC \cdot \cos\angle PQC = 160 - 96 \cdot \cos(180^\circ - \angle PDC) =$$
$$= 160 + 96 \cdot \cos\angle PDC;$$

В ΔPDC, опять по теореме косинусов

$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2PD \cdot DC \cdot \cos\angle PDC = 288 - 288 \cdot \cos\angle PDC.$$

Приравнивая получившиеся равенства, получим

$$160 + 96 \cdot \cos\angle PDC = 288 - 288 \cdot \cos\angle PDC,$$

$$\cos\angle PDC = \frac{1}{3}.$$

Тогда $PC = \sqrt{160 + 96 \cdot \frac{1}{3}} = 8\sqrt{3}.$

Рассмотрим второй случай на рис. 2.

$\angle PQC = \angle PDC$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $\cup PC$).

В ΔPQC применим теорему косинусов:

$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2PQ \cdot QC \cdot \cos\angle PQC = 160 - 96 \cdot \cos\angle PDC;$$

В ΔPDC применим теорему косинусов:

$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2PD \cdot DC \cdot \cos\angle PDC = 288 - 288 \cdot \cos\angle PDC.$$

Приравнивая получившиеся равенства, получим

$$160 - 96 \cdot \cos\angle PDC = 288 - 288 \cdot \cos\angle PDC,$$

$$\cos\angle PDC = \frac{2}{3}.$$

Тогда $PC = \sqrt{160 - 96 \cdot \frac{2}{3}} = 4\sqrt{6}.$

Ответ: $PC = 8\sqrt{3}$ или $PC = 4\sqrt{6}.$