10-й класс

10.1. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

$$x^3 + 2ax^2 + (a^2 + 2a)x + 2a^2 = 0;$$

Решение 1. Перегруппируем слагаемые в левой части уравнения:

$$(x^3 + 2ax^2 + a^2x) + 2ax + 2a^2 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 + 2ax + a^2) + 2a(x + a) = 0, \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x(x + a)^2 + 2a(x + a) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad (x + a)[x(x + a) + 2a)] = 0,$$

т.е.

$$(x + a)(x^2 + ax + 2a) = 0;$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} x + a = 0, \\ x^2 + ax + 2a = 0. \end{array}\right.$$

1) Первое уравнение совокупности имеет корень $x_1 = -a$ при любом значении a.

2) Второе уравнение имеет действительные корни $x_{2,3} = \left(-a \pm \sqrt{a^2 - 8a}\right)/2$ при условии, что $a(a - 8) \geqslant 0$, т. е. при $a \in (-\infty; 0]\bigcup[8; \infty)$.

Объединяя результаты, получаем

<u>Ответ</u>: если $a \in (0; 8)$, то $x = -a$;

если $a \in (-\infty; 0]\bigcup[8; \infty)$, то $x_1 = -a$, $x_{2,3} = (-a \pm \sqrt{a^2 - 8a})/2$.

Решение 2. Запишем уравнение как квадратное относительно a:

$$(x + 2)a^2 + 2(x^2 + x)a + x^3 = 0.$$

Его дискриминант

$$D = 4(x^2 + x)^2 - 4x^3(x + 2) = 4x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 4x^4 - 8x^3 = 4x^2;$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{-2(x^2 + x) \pm \sqrt{D}}{2(x+2)} = \frac{-2x^2 - x \pm 2x}{2(x+2)} = \left[\begin{array}{l} -x, \\ \dfrac{-x^2}{x+2}, \end{array}\right.$$

т. е. имеем два уравнения относительно x.

1) Уравнение $a = -x$ имеет корень $x_1 = -a$ при любом значении a.

2) Уравнение $a = \dfrac{-x^2}{x+2} \Leftrightarrow x^2 + ax + 2a = 0$ и имеет действительные корни $x_{2,3} = \left(-a \pm \sqrt{a^2 - 8a}\right)/2$ при условии, что $a(a - 8) \geqslant 0$, т. е. при $a \in (-\infty; 0]\bigcup[8; \infty)$.

Объединяя результаты, получаем

<u>Ответ</u>: если $a \in (0; 8)$, то $x = -a$;

если $a \in (-\infty; 0]\bigcup[8; \infty)$, то $x_1 = -a$, $x_{2,3} = (-a \pm \sqrt{a^2 - 8a})/2$.

10.2. α, β, γ — углы треугольника и $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 2 : 3 : 4$. Докажите, что треугольник — тупоугольный.

Доказательство. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, лежащих против углов α, β, γ. Тогда, по теореме синусов, $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$, $\Rightarrow$ $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 2 : 3 : 4$, откуда получаем, что

$$a = 2d,\quad b = 3d,\quad c = 4d$$

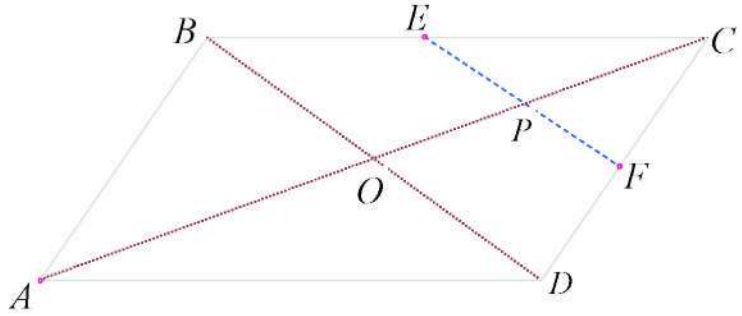
(здесь $d = 2R$ — диаметр описанной окружности). Заметим, что c — самая длинная сторона и (по теореме косинусов) имеем: $c^2 = a^2 + b^2 - 2a{\cdot}b{\cdot}\cos\gamma$, откуда

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a{\cdot}b}=\frac{(2d)^2+(3d)^2-(4d)^2}{2{\cdot}2d{\cdot}3d}=\frac{4+9-16}{12}=-\frac{1}{4}.$$

Так как $\cos\gamma < 0$, то угол γ — тупой.

10.3. На доске был начерчен параллелограмм $ABCD$ и в нём отмечены точка E — середина BC и точка F — середина CD. Дежурный стёр чертёж, оставив лишь точки A, E и F. Как по этим данным восстановить чертёж?

Решение. Заметим, что P — середина отрезков EF и OC, а $PA = 3PC$ (рис).



Для восстановления параллелограмма:

1) Находим точку P — середину отрезка EF;
2) На прямой AP определяем точку C так, что $PC = \dfrac{1}{3}AP$;
3) На прямой CE отмечаем точку B так, что отрезки BE и EC равны.
4) На прямой CF отмечаем точку D так, что отрезки DF и FC равны.

10.4. Знаменатель дроби меньше квадрата числителя на единицу. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше, чем 1/3; если же от числителя и знаменателя отнять по 3, то дробь останется положительной. Найти все такие дроби.

Решение. Если числитель дроби — n, то $n \in \mathbb{N}$, а дробь имеет вид $\dfrac{n}{n^2-1}$, так что $n > 1$. По условию, выполняются неравенства

$$\frac{n+2}{n^2+1}>\frac{1}{3}\quad\text{и}\quad\frac{n-3}{n^2-4}>0.$$

Первое из них равносильно неравенству $n^2 - 3n - 5 < 0$, откуда $n \in (n_1; n_2)$, где $n_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$. Так как $29 < 36$, то $n_2 = (3 + \sqrt{29})/2 < (3 + 6)/2 = 4{,}5$, а так как нас устраивают только натуральные $n \geqslant 2$, то $n \in \{2, 3, 4\}$. При $n = 2$ теряет смысл второе неравенство; при $n = 3$ оно не выполняется. $\Rightarrow$ $n = 4$, а искомая дробь — $4/15$.

Ответ: 4/15.

10.5. Уравнение $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня. Оказалось, что первый корень является синусом, второй — косинусом, а третий — тангенсом одного угла. Найдите все такие уравнения.

Решение. Пусть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ — корни уравнения. Тогда

$$\begin{aligned}2x^3 + ax^2 + bx + c &= 2(x - \sin\alpha)(x - \cos\alpha)(x - \mathrm{tg}\,\alpha) = \\ &= 2x^3 - 2(\sin\alpha + \cos\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha)x^2 + \\ &\quad + 2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha + \cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha)x - \\ &\quad - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha.\end{aligned}$$

Отсюда $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{c}{2}$, то есть $\sin^2\alpha = -\dfrac{c}{2}$, откуда, учитывая, что c — целое число, $\sin^2\alpha = 0$, $\sin^2\alpha = 1/2$ или $\sin^2\alpha = 1$. Но если $\sin\alpha = 0$, то и $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$, а если $\sin^2\alpha = 1$, то $\mathrm{tg}\,\alpha$ не существует. Значит, $\sin\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $\cos\alpha = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (так как корни уравнения различны), и $\mathrm{tg}\,\alpha = -1$. Также

$$-\frac{a}{2} = \sin\alpha + \cos\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha = -1, \quad \frac{b}{2} = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Получаем, что $a = 2$, $b = -1$

Ответ: $2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$.