Кафедра «Автопласт» при ФГБОУ ВПО «Госуниверситет-УНПК»
Научно-образовательная лаборатория «Управление в технических системах»
МБОУ СОШ № 29 им. Д.Н.Мельникова

Численное решение задачи Кеплера в пакете MathCAD

Подготовила ученица 10 класса МБОУ СОШ № 29 О.Ю. Новикова
Научный руководитель: к.т.н., доцент Т. В. Фёдоров
Учитель физики МБОУ СОШ № 29 Т.А. Игнатова

Орел, 2015

Задача Кеплера

В начале XVII века на основе многолетних наблюдений немецким астрономом Иоганном Кеплером были получены три закона о движения планет относительно Солнца полностью и с превосходной точностью объяснившие видимую неравномерность их движений.

Уравнение Ке́плера описывает движение тела по эллиптической орбите в задаче двух тел. В классической механике, **задача двух тел** состоит в том, чтобы определить движение двух точечных частиц, которые взаимодействуют только друг с другом. Распространённые примеры включают спутник, обращающийся вокруг планеты, планета, обращающаяся вокруг звезды, две звезды, обращающиеся вокруг друг друга (двойная звезда), и классический электрон, движущийся вокруг атомного ядра.

Движение космического аппарата

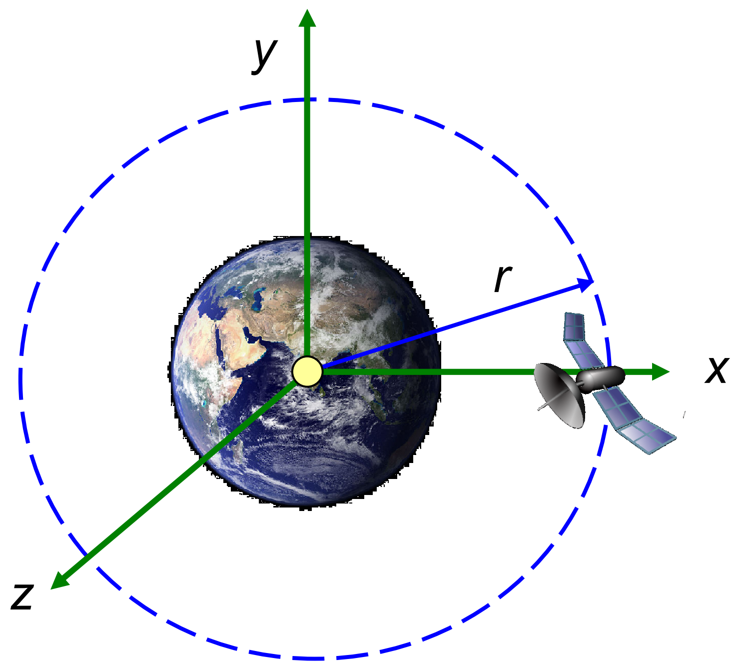
Это система из дифференциальных уравнений второго порядка, где *r* – радиус-вектор расстояния от притягивающего центра до КА; *m*1 – масса КА, *m*2 – масса притягивающего тела; *a* – вектор реактивного ускорения; *k* – гравитационная постоянная; *x*, *y*, *z* – проекции вектора *r* на декартовы координаты.

$$\boxed{m_1 \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{m_1 m_2 r}{|r|^3} + m_1 a}$$

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = a_x - \dfrac{x}{|r|^3} \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} = a_y - \dfrac{y}{|r|^3} \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} = a_z - \dfrac{z}{|r|^3} \end{cases}$$

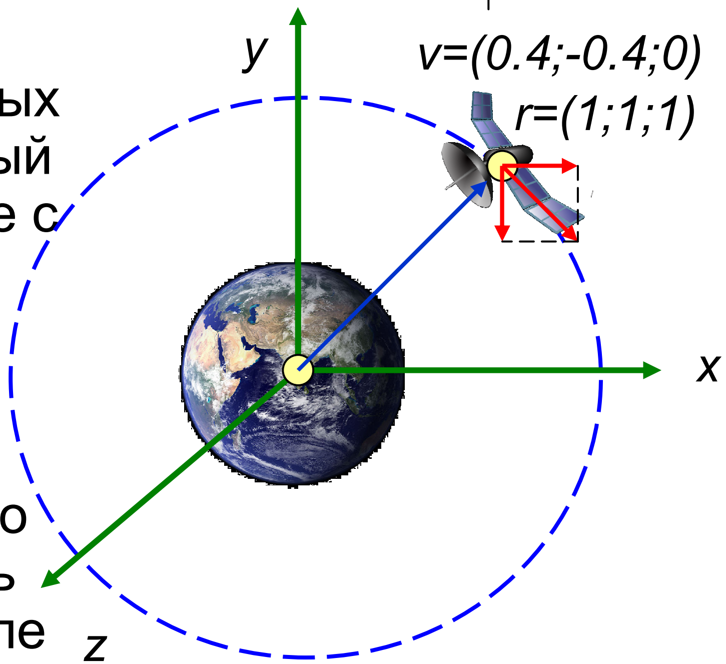
После записи в декартовой системе координат и перехода к безразмерному виду



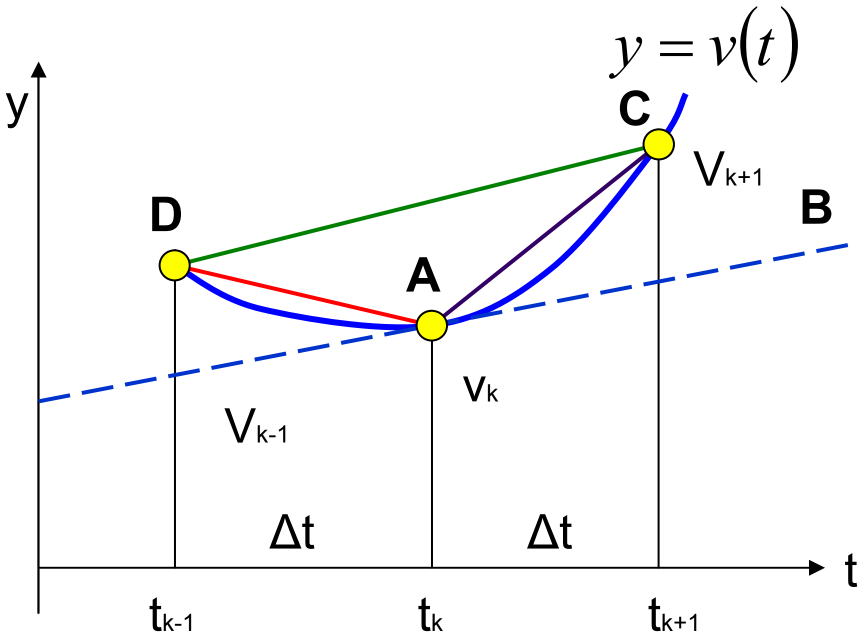
Начальные условия и уравнения

$$dv/dt = F(v,t)$$

- При решении системы дифференциальных уравнений будем считать, что в начальный момент времени тело находилось в точке с радиус-вектором *r*=(1,1,1), скорость тела была направлена вниз *v*=(0.4;-0.4;0).
- Но использовать конкретные числовые значения R, T, M для проверки законов Кеплера не требуется. Для того чтобы это показать, найдем безразмерную скорость тела, движущегося в гравитационном поле по окружности. Получаем: *v*=(0,2π)
- Следовательно, для получения орбит, отличных от круговых, достаточно задавать значения начальной скорости, отличные от 2π.



Конечные разности



$$dv/dt = F(v,t)$$

разность назад - участок DA (метод Эйлера)

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t \cdot F(v_{k+1}, t_{k+1})$$

разность вперед - участок AC (метод Гира)

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t \cdot F(v_k, t_k)$$

центральная разность - участок DC $\quad v_{k+1} = v_{k-1} + 2\Delta t \cdot F(v_k, t_k)$

центральная разность для $\boxed{d^2v/dt^2 = F(v,t)}$ $\quad v_{k+1} = 2v_k + \Delta t^2 \cdot F(v_k, t_k) - v_{k-1}$

Рунге-Кутта четвертого порядка

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)/6$$

$$K_1 = F(v_k, t_k)$$

$$K_2 = F(v_k + 0.5K_1, t_k + 0.5\Delta t)$$

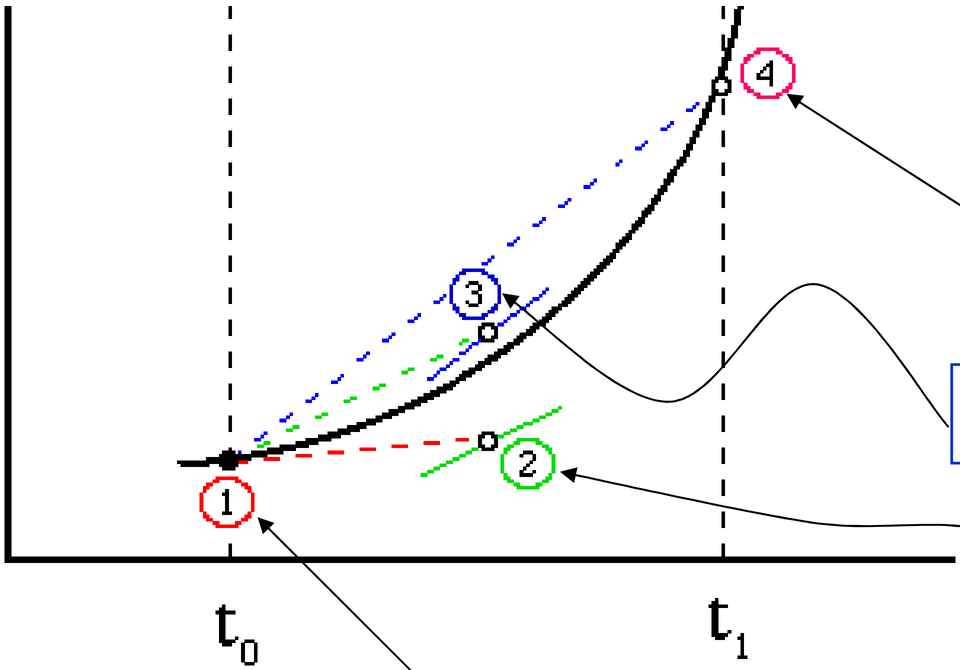
$$K_3 = F(v_k + 0.5K_2, t_k + 0.5\Delta t)$$

$$K_4 = F(v_k + K_3, t_k + \Delta t)$$

Геометрическая интерпретация метода Рунге-Кутта

Рунге-Кутта четвертого порядка

$$v_{k+1} = v_k + \Delta t \left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)/6$$



$$K_4 = F(v_k + K_3, t_k + \Delta t)$$

$$K_3 = F(v_k + 0.5K_2, t_k + 0.5\Delta t)$$

$$K_1 = F(v_k, t_k)$$

$$K_2 = F(v_k + 0.5K_1, t_k + 0.5\Delta t)$$

Реализация решения по методу Рунге-Кутта

$T1 := 10 \qquad n := 1000 \qquad k := 1$

Начальные данные

Given

$$\frac{d}{du}X(u) = Vx(u)$$

$$\frac{d}{du}Vx(u) = -k\cdot\frac{X(u)}{r(X(u),Y(u),Z(u))^3}$$

$$\frac{d}{du}Y(u) = Vy(u)$$

$$\frac{d}{du}Vy(u) = -k\cdot\frac{Y(u)}{r(X(u),Y(u),Z(u))^3}$$

$$\frac{d}{du}Z(u) = Vz(u)$$

$$\frac{d}{du}Vz(u) = -k\cdot\frac{Z(u)}{r(X(u),Y(u),Z(u))^3}$$

$X(0) = 1$

$Vx(0) = 0.4$

$Y(0) = 1$

$Vy(0) = -0.4$

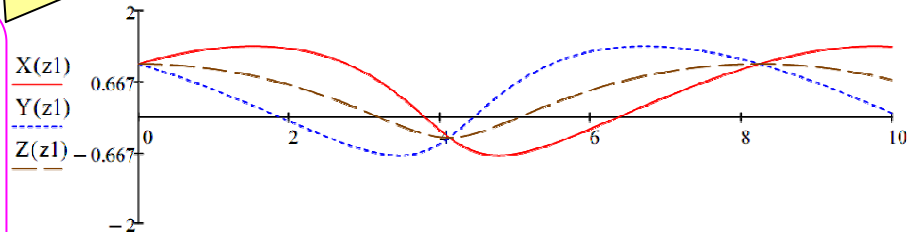
$Z(0) = 1$

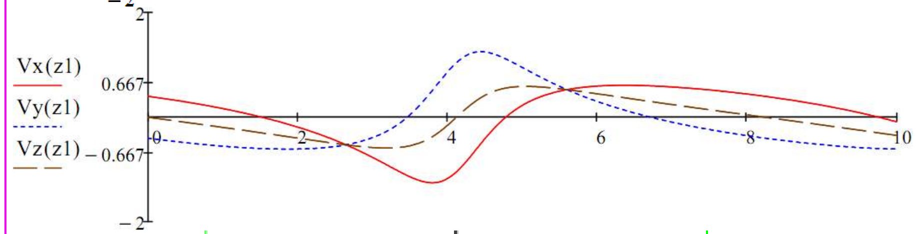
$Vz(0) = 0$

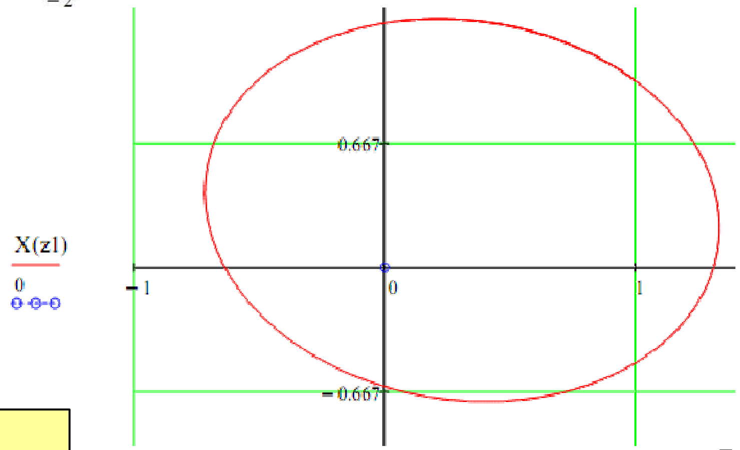
Система уравнений

$$\begin{pmatrix} X \\ Vx \\ Y \\ Vy \\ Z \\ Vz \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} X \\ Vx \\ Y \\ Vy \\ Z \\ Vz \end{pmatrix}, u, T1, n\right]$$

Вызов функции численного решения





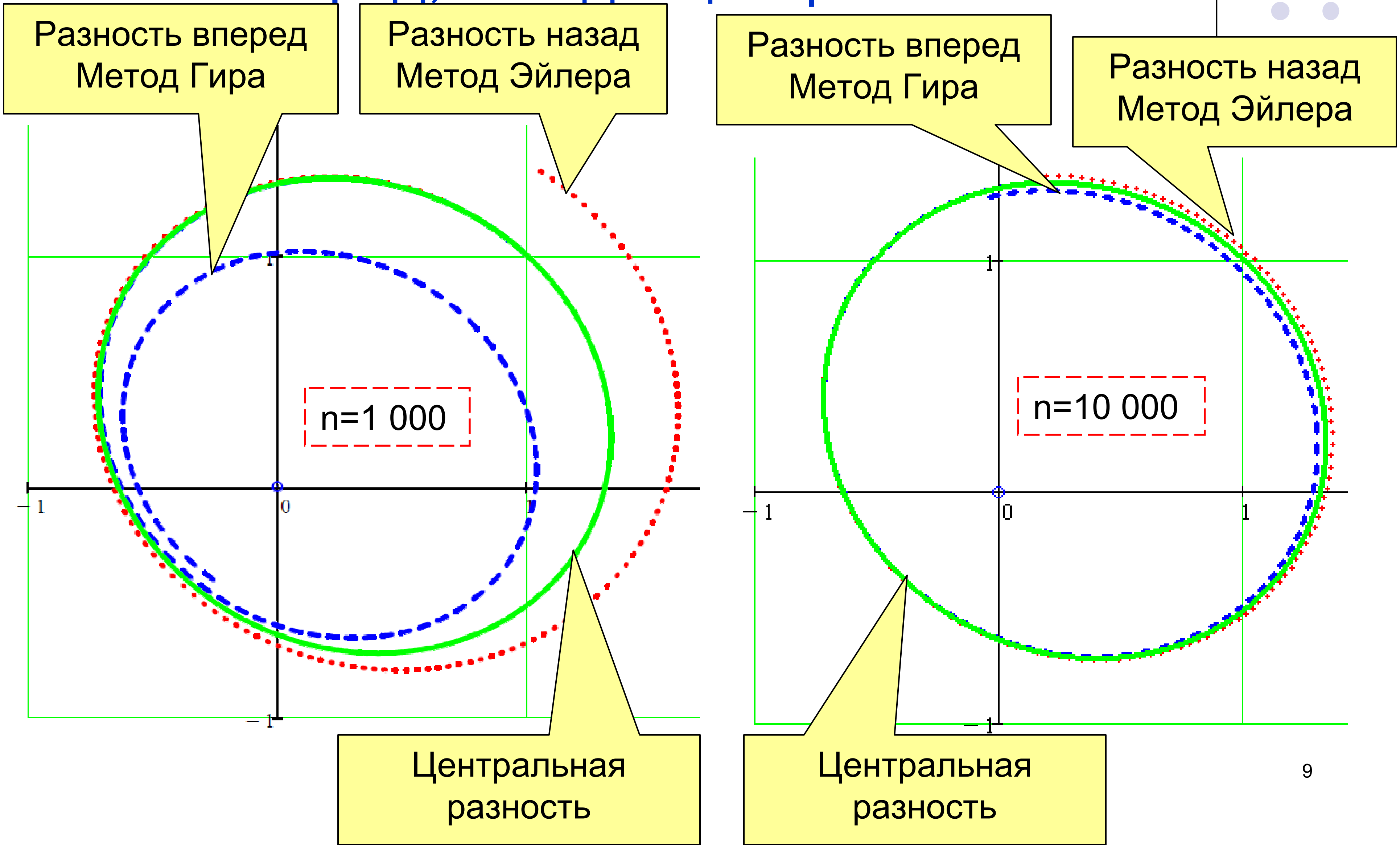


Реализация в MathCAD
Разность назад и центральная разность

$$
\mathrm{Eler} := \left|
\begin{array}{l}
X_0 \leftarrow x0_0 \\
Vx_0 \leftarrow x0_1 \\
Y_0 \leftarrow x0_2 \\
Vy_0 \leftarrow x0_3 \\
Z_0 \leftarrow x0_4 \\
Vz_0 \leftarrow x0_5 \\
\text{for } i \in 1..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
t_i \leftarrow \Delta t \cdot i \\
X_i \leftarrow \Delta t \cdot Vx_{i-1} + X_{i-1} \\
Vx_i \leftarrow \Delta t \cdot \left(-k \cdot \dfrac{X_{i-1}}{r(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})^3} \right) + Vx_{i-1} \\
Y_i \leftarrow \Delta t \cdot Vy_{i-1} + Y_{i-1} \\
Vy_i \leftarrow \Delta t \cdot \left(-k \cdot \dfrac{Y_{i-1}}{r(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})^3} \right) + Vy_{i-1} \\
Z_i \leftarrow \Delta t \cdot Vz_{i-1} + Z_{i-1} \\
Vz_i \leftarrow \Delta t \cdot \left(-k \cdot \dfrac{Z_{i-1}}{r(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})^3} \right) + Vz_{i-1}
\end{array}
\right. \\
\begin{pmatrix} t \\ X \\ Vx \\ Y \\ Vy \\ Z \\ Vz \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

$$
\mathrm{Center} := \left|
\begin{array}{l}
X_0 \leftarrow x0_0 \\
Y_0 \leftarrow x0_2 \\
Z_0 \leftarrow x0_4 \\
X_1 \leftarrow \left(\dfrac{-k \cdot \Delta t^2}{r(X_0, Y_0, Z_0)^3} + 1 \right) \cdot X_0 + x0_1 \cdot \Delta t \\
Y_1 \leftarrow \left(\dfrac{-k \cdot \Delta t^2}{r(X_0, Y_0, Z_0)^3} + 1 \right) \cdot Y_0 + x0_3 \cdot \Delta t \\
Z_1 \leftarrow \left(\dfrac{-k \cdot \Delta t^2}{r(X_0, Y_0, Z_0)^3} + 1 \right) \cdot Z_0 + x0_5 \cdot \Delta t \\
\text{for } i \in 2..n \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
t_i \leftarrow \Delta t \cdot i \\
X_i \leftarrow \left(\dfrac{-k \cdot \Delta t^2}{r(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})^3} + 2 \right) \cdot X_{i-1} - X_{i-2} \\
Y_i \leftarrow \left(\dfrac{-k \cdot \Delta t^2}{r(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})^3} + 2 \right) \cdot Y_{i-1} - Y_{i-2} \\
Z_i \leftarrow \left(\dfrac{-k \cdot \Delta t^2}{r(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})^3} + 2 \right) \cdot Z_{i-1} - Z_{i-2}
\end{array}
\right. \\
\begin{pmatrix} t \\ X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

Сравнение результатов для разностей вперед, назад и центральной



Выводы

В ходе решения нами было обнаружено :

- разность вперед и разность назад дают существенную ошибку (при разбиении на 1000 точек),
- центральная и Рунге-Кутта дают практически точный результат.
- Полученная в программе MathCAD модель позволяет улучшить восприятие материала по физике, астрономии и математике.
- Созданная модель позволяет наглядно увидеть влияние параметров: *m*1 – массы КА, *m*2 – массы притягивающего тела; *a* – вектора реактивного ускорения; *k* – гравитационной постоянной, и начальных координат тела и его скорости на описываемую им траекторию

Спасибо за внимание!

Литература

- Поршнев, С.В. Решение задачи Кеплера в пакете Mathcad : [Электронный ресурс] // URL: http://www.exponenta.ru/educat/systemat/porshnev/kepler/kepler1.asp (Дата обращения: 30.01.2015)
- Охорзин, В.А. Прикладная математика в системе MathCAD [Текст]: Учебное пособие. 2-е изд. испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2008. - 352с.: ил.
- Тарасик, В.П. Математическое моделирование технических систем [Текст]: Учебник для вузов. – Мн.: ДизайнПРО, 1997. – 640 с.: ил.