Кафедра «Автопласт» при ФГБОУ ВПО «Госуниверситет-УНПК»
Научно-образовательная лаборатория «Управление в технических системах»
МБОУ СОШ № 29 им. Д.Н.Мельникова

Численное решение задачи Кеплера в пакете MathCAD

Подготовила ученица 10 класса МБОУ СОШ № 29 О.Ю. Новикова
Научный руководитель: к.т.н., доцент Т. В. Фёдоров
Учитель физики МБОУ СОШ № 29 Т.А. Игнатова

Орел, 2015

1

Добрый день!

Вашему вниманию представляется работа по теме «Численное решение задачи Кеплера в пакете MathCAD».

Цель работы заключалась в освоении численных методов решения дифференциальных уравнений на примере задачи Кеплера.

Задача Кеплера

В начале XVII века на основе многолетних наблюдений немецким астрономом Иоганном Кеплером были получены три закона о движения планет относительно Солнца полностью и с превосходной точностью объяснившие видимую неравномерность их движений.

Уравне́ние Ке́плера описывает движение тела по эллиптической орбите в задаче двух тел. В классической механике, **задача двух тел** состоит в том, чтобы определить движение двух точечных частиц, которые взаимодействуют только друг с другом. Распространённые примеры включают спутник, обращающийся вокруг планеты, планета, обращающаяся вокруг звезды, две звезды, обращающиеся вокруг друг друга (двойная звезда), и классический электрон, движущийся вокруг атомного ядра.

В начале XVII века на основе многолетних наблюдений немецким астрономом Иоганном Кеплером были получены три закона о движения планет относительно Солнца.

Уравнение полученные Ке́плером описывает движение тела по эллиптической орбите. Результаты его решения применимы:

- к спутнику обращающемуся вокруг планеты,
- планете обращающейся вокруг звезды,
- двум звездам обращающиеся вокруг друг друга (двойная звезда),
- классическому электрону движущемуся вокруг атомного ядра и многим другим случаям.

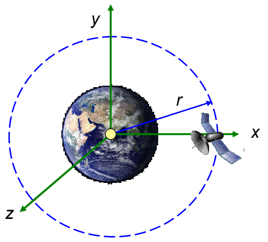
Движение космического аппарата

Это система из дифференциальных уравнений второго порядка, где *r* – радиус-вектор расстояния от притягивающего центра до КА; *m1* – масса КА, *m2* – масса притягивающего тела; *a* – вектор реактивного ускорения; *k* – гравитационная постоянная; *x*, *y*, *z* – проекции вектора *r* на декартовы координаты.

$$\boxed{m_1\frac{d^2r}{dt^2}=-k\frac{m_1m_2r}{|r|^3}+m_1a} \qquad |r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=a_x-\dfrac{x}{|r|^3}\\[2mm]\dfrac{d^2y}{dt^2}=a_y-\dfrac{y}{|r|^3}\\[2mm]\dfrac{d^2z}{dt^2}=a_z-\dfrac{z}{|r|^3}\end{cases}$$

После записи в декартовой системе координат и перехода к безразмерном у виду



Рассмотрим пример с космическим аппаратом.

Его поведение на орбите хорошо описывается дифференциальным уравнением в полярных координатах представленным на слайде 3.

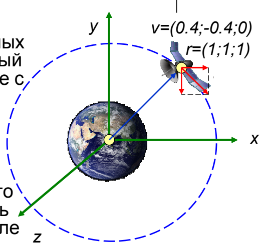
Перейдем в более привычную прямоугольную декартову систему координат, а также, безразмерный вид.

В итоге получаем следующую систему дифференциальных уравнений второго порядка по трем координатам *x*, *y* и *z*.

Начальные условия и уравнения

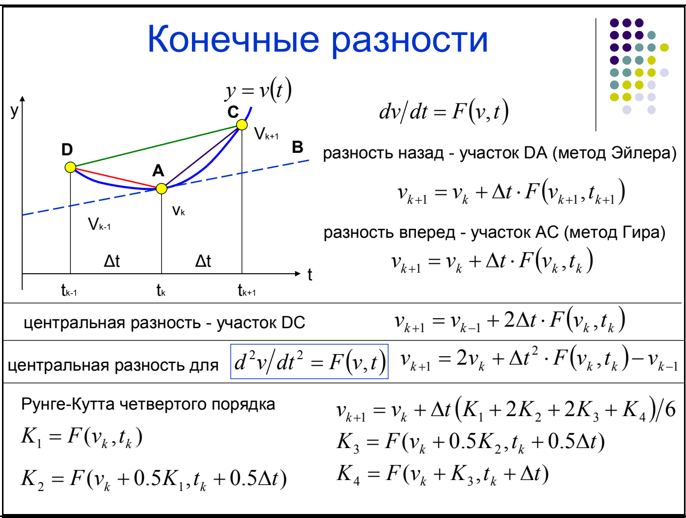
$$dv/dt=F(v,t)$$

- При решении системы дифференциальных уравнений будем считать, что в начальный момент времени тело находилось в точке с радиус-вектором *r*=(1,1,1), скорость тела была направлена вертикально вверх *v*=(0.4;-0.4;0).
- Но использовать конкретные числовые значения R, T, M для проверки законов Кеплера не требуется. Для того чтобы это показать, найдем безразмерную скорость тела, движущегося в гравитационном поле по окружности. Получаем: *v*=(0,2π)
- Следовательно, для получения орбит, отличных от круговых, достаточно задавать значения начальной скорости, отличные от 2π.



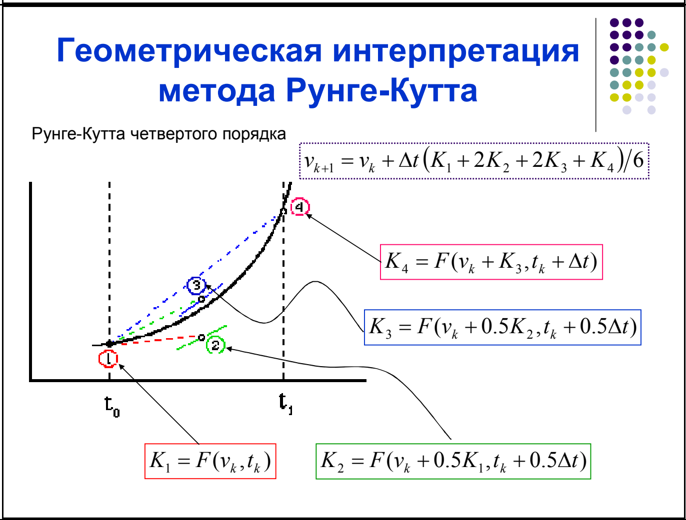
Для получения однозначного решения необходимо задаться начальным значением координат и скорости тела.

Будем считать, что в начальный момент времени тело находилось в точке с радиус-вектором r = (1;1;1), скорость тела была направлена вниз v = (0.4;-0.4;0).

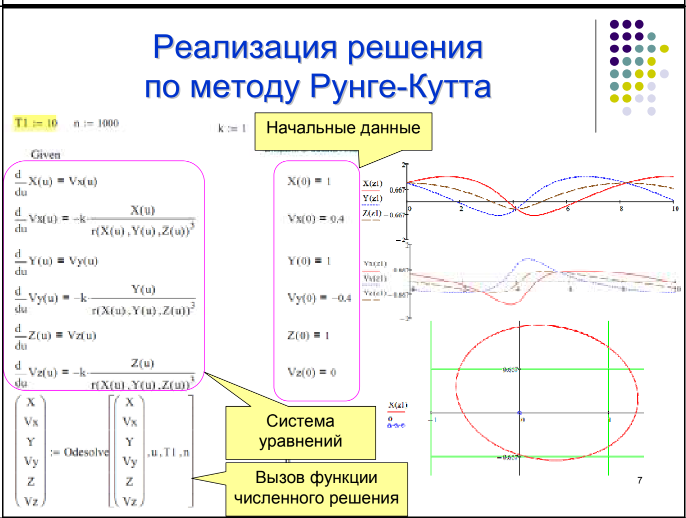


Нами были рассмотрены несколько конечноразностных замен производной dv/dt:

- разность назад – явный метод Эйлера- участок DA;
- разность вперед - неявный метод Эйлера или, как его часто называют, метод Гира - участок AC;
- центральная разность - участок DC
- центральная разность для дифференциального уравнения второго порядка $\boxed{d^2v/dt^2 = F(v,t)}$
- Рунге-Кутта четвертого порядка для дифференциального уравнения первого порядка

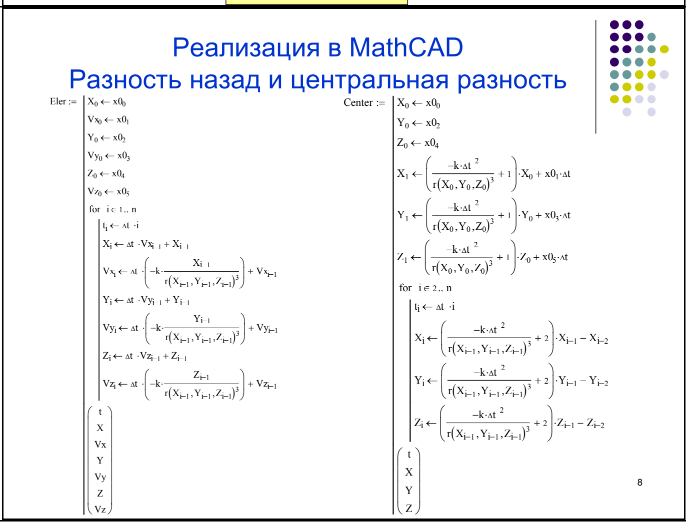


Метод Рунге-Кутта четвертого порядка для дифференциального уравнения первого порядка использует 1/6 от суммы четырех вычисленных промежуточных значений между точками разбиения.



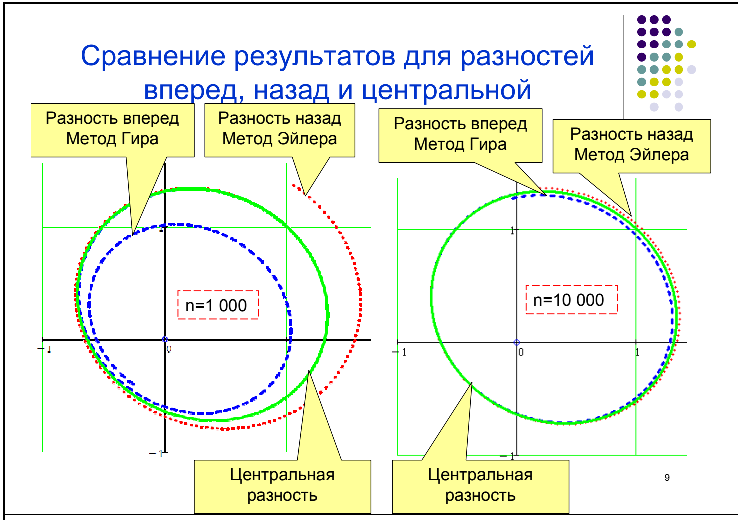
Для использования метода Рунге-Кутта мы преобразовали систему дифференциальных уравнений второго порядка в нормальную форму Коши, т.е. систему уравнений первого порядка путем добавления переменных $\boxed{dx/dt = v_x}$, $\boxed{dy/dt = v_y}$ и $\boxed{dz/dt = v_z}$.

На плакате представлены результаты решения функцией *Odesolve* с выбранной опцией *rkfixed* при начальных значениях координат r = (1;1;1), скорости тела v = (0.4;-0.4;0), k=1 и a=0.



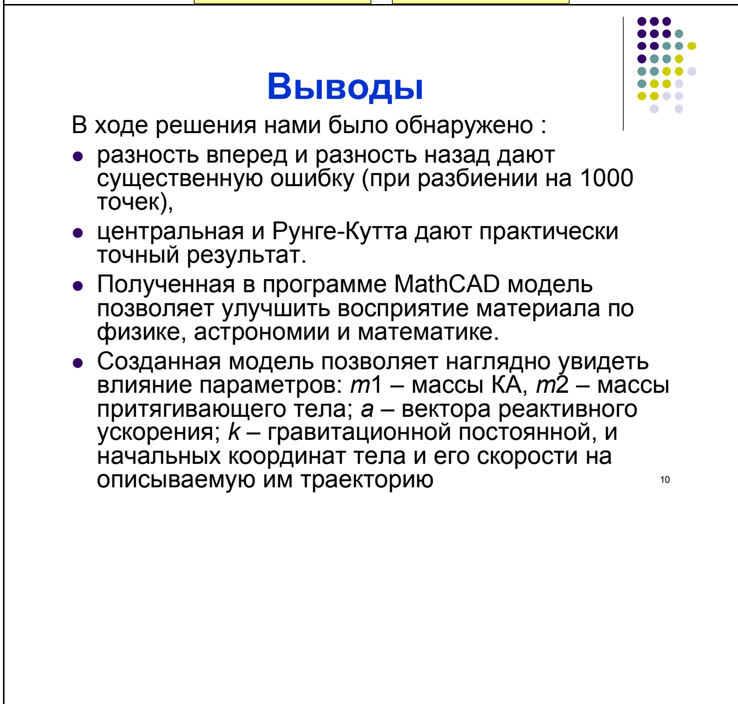
Для реализации разностей вперед, назад и центральной в MathCAD были сконструированы специальные функции. Две из них показаны на слайде 8:

- функция Euler использует явный метод Эйлера (разность назад) и работает с системой в нормальной форме Коши;
- функция Center использует замену для дифференциального уравнения второго порядка, но для ее работы необходимо дополнительно вычислить значения в точке с индексом 1.



Результаты работы этих функций показаны в виде траекторий на слайде 9 для случая 1 000 точек разбиения на оборот и для случая 10 000 точек.

Как видно по мере увеличения количества точек разбиения погрешность для разностей вперед и назад уменьшается.

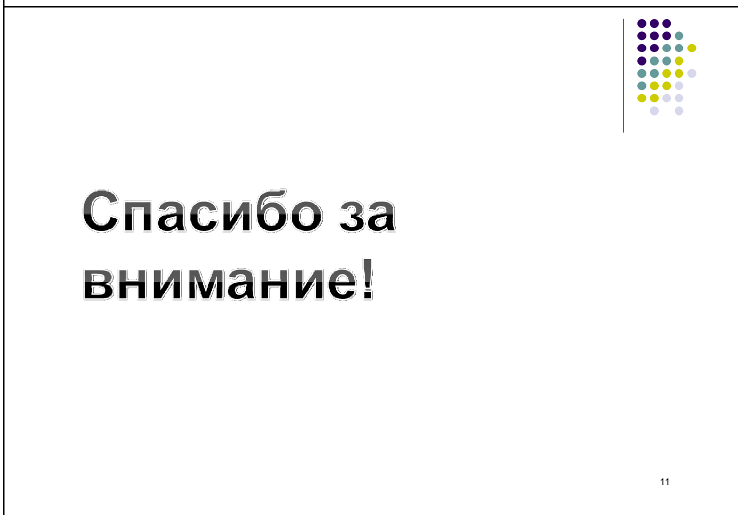


В ходе работы была достигнута поставленная цель - освоены приемы использования численных методов решения дифференциальных уравнений в программе MathCAD на примере задачи Кеплера

Кроме того, нами было обнаружено, что разность вперед и разность назад дают существенную ошибку (при разбиении на 1000 точек), центральная и Рунге-Кутта дают практически точный результат.

Полученная в программе MathCAD модель позволяет улучшить восприятие материала по физике, астрономии и математике.

Созданная модель позволяет наглядно увидеть влияние параметров: m_1 – массы КА, m_2 – массы притягивающего тела; а – вектора реактивного ускорения; k – гравитационной постоянной, и начальных координат тела и его скорости на описываемую им траекторию



Благодарю за внимание!